ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Прикладная математика»

Конспект лекций по курсу

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ,
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА,
СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Автор

Братищев А.В.

Ростов-на-Дону, 2017

Аннотация

Конспект лекции спецкурса для студентов инженерных специальностей автоматизации, управления и близких к ним. Лекции читаются в мультимедийном режиме, поэтому конспект не содержит доказательств, рисунков и примеров. Предполагается, что студент имеет распечатку этого курса, а во время лекции вносит в соответствующие места распечатки (на обратной стороне листа) доказательства, рисунки, примеры, а также выделяет ключевые слова определений.

Спецкурс является прямым продолжением читаемых автором курса математики для первого и второго семестров и спецкурса по теории функций комплексного переменно го и операционному исчислению, конспекты которых также выложены на сайте кафедры. Поэтому сохранена нумерация глав. Представлен список вопросов к рубежным контролям, список теорем к экзамену и список типов задач к зачету (экзамену).

Автор:

доктор физ.-мат. наук,

профессор кафедры "Прикладная математика"

Братищев А.В.

СОДЕРЖАНИЕ

Опорные конспекты лекций выложены на сайте skif@donstu.ru $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ *библиотека электронных ресурсов ДГТУ* $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ *факультет ИВТ* $\Rightarrow$ *кафедра прикладной математики*

Литературу можно взять на абонементе или скачать на сайте *www. techlibrary*

ГЛАВА 10 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 10.1 Элементы комбинаторики.

Произвольное подмножество $x_{n_1},...,x_{n_m}$ из множества $X=\{x_1,...,x_n\}$ называется ***выборкой объема*** m. Выборка ***упорядоченная*** (***неупорядоченная***), если порядок следования элементов в ней существенен (несущественен).

(m,n)- ***размещение*** - упорядоченная выборки объема m из множества с n элементами.

Определение - Я.Бернулли, 1717. Обозначение A_n^m - Нетто, 1904.

ЗАМЕЧАНИЕ Количество всевозможных (m,n)-размещений вычисляется по формуле

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

Пр.

Перестановка - упорядоченная выборка объема n из множества с n элементами.
Определение - Таке, 1656. Обозначение P - Поттс, 1880.

ЗАМЕЧАНИЕ Число всевозможных перестановок в группе из n элементов вычисляется по формуле $P_n=A_n^n=\dfrac{n!}{0!}=n!$.

Пр.

(m,n)- ***сочетание*** - неупорядоченная выборка объема m из множества с n элементами.

Определение - Паскаль, 1665. Обозначение C_n^m - Эйлер - 1778, $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ - Поттс, 1880.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Число (m,n)- сочетаний вычисляется по формуле

$$C_n^m:=\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}=\frac{n!}{(n-m)!m!}.$$

Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 Число всевозможных разбиений множества из n элементов на s подмножеств объемов $n_1,...,n_s$ соответственно вычисляется по формуле $C_n^{n_1,...,n_s}$.

СЛЕДСТВИЕ 1 (*обобщенная формула бинома Ньютона для s слагаемых*)

$$(a_1+...+a_s)^n=\sum_{\substack{n_1,...,n_s\ge 0\\ n_1+...+n_s=n}} C_n^{n_1,...,n_s}a_1^{n_1}\cdot...\cdot a_s^{n_s}.$$

Треугольник Паскаля был известен в Индии за два века до нашей эры.

Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 (*правило суммы*) Пусть $X_1,...,X_n$ есть подмножества множества X. Обозначим число элементов (длину, площадь) множества $|X_i|$. Тогда

$$|X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n| =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}|X_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|X_i \cap X_j| + \sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n}|X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap X_{i_3}| - ... + (-1)^{n-1}|X_1 \cap ... \cap X_n|.$$

Пр. Найти общее число школьников, изучающих иностранные языки, если

$A = 60 \quad AH = 9 \quad AH\Phi = 1$

$H = 10 \quad A\Phi = 5 \qquad\qquad \Rightarrow$

$\Phi = 5 \quad H\Phi = 1$

ЗАМЕЧАНИЕ 2 (*правило произведения*) Если множества $E_1, E_2,..., E_s$ конечны, то число элементов декартова произведения $E_1 \times E_2 \times ... \times E_s$ конечно и вычисляется по формуле $card\left(E_1 \times ... \times E_s\right) = card\, E_1 \cdot ... \cdot card\, E_s$.

Пр. Найти число номерных знаков для машин из региона 61.

§ 10.2 Вводные определения и основные теоремы.

Характерные задачи для классического определения вероятности.

ЗАДАЧА 1 Подбрасывается монета. Каковы шансы, что она упадет гербом вверх?

ЗАДАЧА 2 Бросается пара кубиков. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 9.

ЗАДАЧА 3 В урну с двумя шарами неизвестного цвета опущен белый шар. Найти вероятность того, что извлеченный наудачу шар окажется белым.

ЗАДАЧА 4 3 стрелка произвели залп, причем 2 пули поразили мишень. Найти вероятность того, что третий стрелок попал, если вероятность попадания стрелков в мишень равна соответственно 0.2, 0.5, 0.4?

ЗАДАЧА 5 В семье 5 детей. Найти вероятность того, что мальчиков не менее 2.

ЗАДАЧА 6 Товаровед осматривает 24 образца товаров. Вероятность того что каждый из образцов будет признан годным к продаже, равна 0,6. Найти наивероятнейшее число образцов, которые товаровед признает годным к продаже.

Джероло́мо Карда́но (1501-1576) - итальянский математик, инженер, философ, медик, астролог. Автор >130 монографий

В его честь названы карданный подвес (для уменьшения воздействия на компас морской качки) и карданный вал.

В трактате «Великое искусство» («*Ars magna*», 1545) впер вые опубликовал формулу решения уравнения третьей степе ни, рассказанную ему Тартальей. Там же приведена формула решения уравнения четвёртой степени, найденная его учени ком Лодовико Феррари. Обнаружил, что кубическое уравнение может иметь три вещественных корня (этот факт остался незамеченным даже в трудах Омара Хайяма), причём сумма этих корней всегда равна коэффициенту при x^2 с противоположным знаком (одна из формул Виета).

Первым в Европе стал использовать *отрицательные* корни уравнений.

«Книга об игре в кости» (1663) - исследование по математической теории азартных игр, один из первых серьёзных трудов по комбинаторике и теории вероятностей. Хотя К. допустил там ряд ошибок, он первым близко подошёл к общему ***понятию вероятно сти***: «Итак, имеется одно общее правило для расчёта: необходимо учесть общее число возможных выпадений и число способов, которыми могут появиться данные выпадения а затем найти отношение последнего числа к числу оставшихся возможных выпадений»

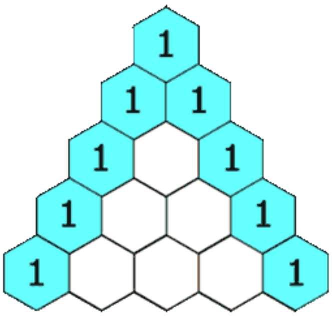
К. сделал проницательное замечание, предвосхитившее «закон больших чисел»: «реальное количество исследуемых событий может при небольшом числе игр сильно отличаться от теоретического, но чем больше игр в серии, тем доля этого различия меньше».

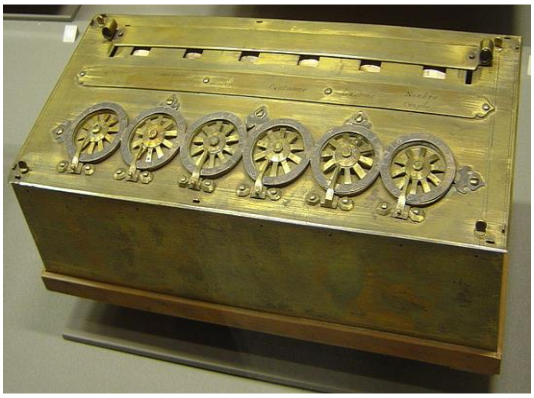
Пьер де Ферма́ (1601-1665) - французский математик, один из создателей аналитической геометрии, математического анализа, теории вероятностей и теории чисел. По профессии юрист, с 1631 года - советник парламента в Тулузе. Блестящий полиглот. Наиболее известен формулировкой великой теоремы Ферма. В отличие от Галилея, Декарта и Ньютона, Ферма был *чистым математиком* - *первым великим математиком новой Европы*. Независимо от Декарта он создал аналитическую гео метрию. Раньше Ньютона умел использовать дифференциаль ные методы для проведения касательных, нахождения максиму мов и вычисления площадей, но не свёл эти методы в систему. Ньютон позже признавался, что именно работы Ферма подтол кнули его к созданию анализа.

Независимо от Паскаля Ферма разработал основы теории вероятностей. Заложены в переписке Ферма и Паскаля (1654), в которой они, в частности, пришли к понятию мате матического ожидания и теоремам сложения и умножения вероятностей. Результаты Ферма и Паскаля были приведены в книге Гюйгенса «О расчётах в азартной игре» (1657) - первом руководстве по теории вероятностей.

Блез Паска́ль (1623-1662) - французский математик, механик, физик, литератор и философ.
Классик французской литературы, один из основате лей математического анализа, теории вероятностей и проективной геометрии, создатель первых образцов счётной техники, автор основного закона гидростатики. Осенью 1661 года Паскаль поделился с герцогом де Роанне идеей создания дешёвого и доступного всем способа передвижения в многоместных каретах. Герцог создал акционерное общество для реализации этого проекта и ***18 марта 1662*** года в Париже открылся первый маршрут общественного транспорта, названного

впоследствии ***омнибусом***.
http://upload.wikimedia.org/wikipedia
/commons/0/0d/PascalTriangle
Animated2.gif





Христиа́н Гю́йгенс (1629-1695) - нидерландский механик,
физик математик, астроном и изобретатель. Один из осново
положников теоретической механики, теории вероятностей.
Внёс значительный вклад в оптику, молекулярную физику,
астрономию, геометрию, часовое дело.
В приложении «*О расчётах в азартной игре*» к книге его учи
теля ван Схоотена «Математические этюды»(1657), заложил
основы теории вероятностей, используя переписку Ферма и
Паскаля. Ввёл фундаментальное понятие математического
ожидания. По этой книге знакомился с теорией вероятностей
Я. Бернулли, который и завершил создание основ теории.

В 1657 г. получил голландский патент на конструкцию маятниковых часов (в последние годы жизни этот механизм пытался создать Галилей, но ему помешала прогрессирующая слепота). Часы Гюйгенса реально работали и обеспечивали превосходную для того времени точность хода. Центральным элементом конструкции был придуманный им якорь, который периодически подталкивал маятник и поддерживал незатухающие колебания. Точные и недорогие часы Г.с маятником быстро получили широчайшее распространение по всему миру. В 1673 г. выпустил чрезвычайно содержательный трактат «Маятниковые часы» по кинематике ускоренного движения. Эта книга была настольной у Ньютона, который завершил начатое Галилеем и продолженное Гюйгенсом построение фундамента механики.

Я́коб Берну́лли (1654-1705) - швейцарский математик,
профессор математики Базельского университета (с 1687).
Один из основателей теории вероятностей и математическо
го анализа.

Б. решил (1690) задачу Лейбница о фор
ме кривой, по которой тяжелая точка
опускается за равные промежутки вре
мени на равные вертикальные отрезки
(полукубическая парабола). Доказатель
ство проведено интегрированием диффе
ренциального уравнения. При этом впер
вые появился в печати термин «интеграл».
Монография «Искусство предположений» (1713). В ней присутству
ют закон больших чисел, распределение Б., числа Б., лемниската Б.

Опр. (***классическое***) Пусть проводится эксперимент. Всевозможные его исходы предполагаются равновозможными и называются ***элементарными событиями***. Их множество обозначается Ω. Подмножество элементарных событий $A \subseteq \Omega$ называется ***событием***. Элементарное событие (исход) ω называется ***благоприятным*** (***неблаго приятным***) для события A, если $\omega \in A$ ($\omega \notin A$). ***Вероятностью события*** A в классическом эксперименте называется число $P(A) := \dfrac{card\ A}{card\ \Omega}$.

Опр. (***статистическое***) Рассмотрим эксперимент, который можно проводить многократно. ***Относительной частотой события*** A называется отношение числа m появления события A в серии экспериментов к общему числу n этих экспериментов. ***Вероятностью*** (***статистической***) ***события*** A называется число, к которому приближается относительная частота $\dfrac{m}{n}$, когда число экспериментов $n \to \infty$.

Следующие эксперименты с бросанием монеты подтверждают сходимость относительных частот с числа бросаний.

Экспериментатор	n	m	m/n
Бюффон Ж., XVIII в.	4000	2048	0,512
Пирсон К., конец XIX в.	12000	6019	0,5016
Пирсон К.	24000	12012	0,5005

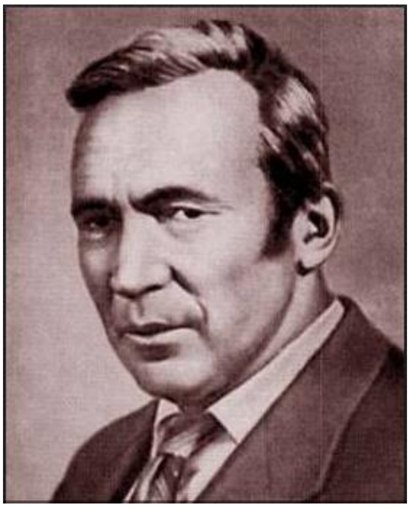
Опр. (***аксиоматическое***) Пусть Ω есть множество элементов, В – какая-либо совокупность его подмножеств, которая содержит $\varnothing, \Omega$. В называется ***алгеброй подмножеств*** (***событий***), если $\forall A, B \in$ В $A \bigcap B, A \setminus B \in$ В.

Вероятностным пространством называется тройка объектов $(\Omega, \text{В}, P)$, где В – алге бра событий множества Ω (***элементарных событий***), а отображение $P : \text{В} \to [0,1]$ назы вается ***вероятностной мерой*** и обладает свойствами: а) $P(\Omega) = 1$, б) $\forall A, B \in \text{В}, A \bigcap B = \varnothing$, $\Rightarrow$ $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B)$. ***Вероятностью события*** $A \in$ В называется число $P(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ В случае необходимости у меры P предполагаются свойства:

1) $\forall \{A_n\} \subset \text{В}$ с $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \text{В}$ и $\forall i \neq j$ $A_i \bigcap A_j = \varnothing \Rightarrow P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$;

3) $\forall \{A_n\} \subset \text{В}$ с $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots, \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.



Колмогóров Андрéй Николáевич (1903 - 1987) русский математик, один из крупнейших математиков XX века. Один из создателей 1) современной теории вероятностей. Им получены фундаментальные результаты, в 2) топологии, 3) геометрии, 4) математической логике, 5) классической механике, 6) теории турбулентности, 7) теории сложности алгоритмов, 8) теории информации, 9) теории функций, 10) теории тригонометрических рядов, 11) теории меры, 12) теории приближения функций, 13) теории множеств,

14) теории дифференциальных уравнений, 15) теории динамических систем, 16) функ циональном анализе и других областях математики.
К. - автор новаторских работ по 17) философии, 18) истории, 19) методологии, 20) пре подаванию математики, 21) статистической физике (в частности, уравнение Джонсона-Меля- Аврами- Колмогорова).
Профессор Московского госуниверситета (1931), академик Академии наук СССР (1939)
Иностранный член Национальной академии наук США 1967, Лондонского королевско го общества,1964, Французской академии наук,1968, и других.
Основатель большой научной школы: В.И.Арнольд, И.М.Гельфанд, В.М.Алексеев, Г.И.Баренблатт, А.А.Боровков, А.Г.Витушкин, Б.В.Гнеденко, Р. Л. Добрушин, Е. Б. Дынкин, А.И.Мальцев, М.Д.Миллионщиков, В.С.Михале вич, А.С.Монин, С.М.Никольский, А.М.Обухов, Ю.В.Прохоров, Я.Г.Синай, В.М.Тихомиров, Ю.Н.Тюрин, А.Н.Ширяев, В.А.Успенский, С.В.Фомин, А.М.Яглом.

« Каждый человек существует как бы в нескольких сферах: 1) он сам, 2) ближай шее окружение: семья, друзья, ученики, 3) работа, 4) Родина, 5) все человечество. Долг каждого - наполнение своей жизни глубоким содержанием плодотворного труда, посвященного служению всем остальным сферам».

Опр. ***Произведением двух событий*** $A,B \in \mathrm{B}$ называется событие $AB := A \cap B \in \mathrm{B}$.

Опр. При условии, что произошло событие B ***условной вероятностью события*** A называется число $P(A/B) := \dfrac{P(AB)}{P(B)}$.

Пр.

Опр. Два события A,B называются ***независимыми***, если их условная и безусловная вероятности совпадают: $P(A/B) = P(A), \quad P(B/A) = P(B)$.

Опр. События $A_1,\dots,A_n$ называются ***взаимно независимыми***, если каждое из них не зависит от произведения любого числа остальных событий. События $A_1,\dots,A_n$ называются ***попарно независимыми***, если любые пары этих событий независимы.

ТЕОРЕМА 10.1 (*свойства независимых событий*)

1) События $A,B \in \mathrm{B}$ независимы тогда и только тогда, когда $P(AB) = P(A)\cdot P(B)$.
2) Взаимно независимые события всегда попарно независимы. Обратное, вообще говоря, неверно.
3) (*теорема умножения*) $P(A_1 \dots A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\cdot \ldots \cdot P(A_n/A_1\dots A_{n-1})$.
4) События $A_1,\dots,A_n$ взаимно независимы тогда и только тогда, когда

$$P(A_1 \dots A_n) = P(A_1)\cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

$$◄\ 1)\ P(A) = P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad \Leftrightarrow \quad P(A)\cdot P(B) = P(AB).\ ►$$

Пр.

Опр. События $A_1,\dots,A_n$ называются ***несовместными***, если $A_1 \dots A_n = \varnothing$.

Пр. События $A \setminus B$ и AB несовместны, так как $(A\setminus B) \cap AB = \varnothing$.

Опр. События $A_1,\dots,A_n$ образуют ***полную группу***, если $A_1 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

Пр. События $A, \bar{A} := \Omega / A$ несовместны и образуют полную группу.

ТЕОРЕМА 10.2 1) (*теорема сложения вероятностей*)

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = (P(A_1) + ... + P(A_n)) - \sum_{i \neq j} P(A_i A_j) + ... + (-1)^{n-1} P(A_1 ... A_n).$$

2) Если события $A_1,...,A_n$ попарно несовместны, то $P(A_1 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + ... + P(A_n)$. Обратное, вообще говоря, неверно.

3) Если $A_1,...,A_n$ - взаимно независимы, то $P(A_1 \cup ... \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1})...P(\overline{A_n})$.

4) (*формула полной вероятности*) Если события $H_1,...,H_n$ попарно несовместны и образуют полную группу событий $(H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_n = \Omega)$, то вероятность события A равна $P(A) = P(H_1) \cdot P(A / H_1) + ... + P(H_n) \cdot P(A / H_n)$.

5) (*формула Байеса*) В условиях предыдущего пункта $P(H_i / A) = \dfrac{P(A / H_i) \cdot P(H_i)}{P(A)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ Формула Байеса является основой «байесовского подхода» в ***теории*** (оптимального) ***оценивания*** (неизвестных параметров).

Пр.

Байе́с То́мас (1702 - 1761) - английский математик и пресвитерианский священник, член Лондонского королевского общества (1742).

§ 10.3 Случайные величины

Опр. Пусть задано вероятностное пространство (Ω, B, P). Отображение $\xi : \Omega \to \mathrm{R}$ называется ***случайной величиной*** (СВ), если оно измеримо в следующем смысле:

$$\forall x' \leq x'' \ \{\omega \in \Omega : x' \leq \xi(\omega) \leq x''\} \in \mathrm{B}.$$

Обозначение $P(x' \leq \xi \leq x'') := P(\{\omega \in \Omega : x' \leq \xi(\omega) \leq x''\})$.

Опр. Случайная величина ξ называется ***дискретной*** (***ДСВ***), если она принимает конечное или счетное множество (различных) значений $x_1, x_2, ...$. ДСВ задается таблицей (***законом распределения ДСВ***) вида:

ξ	x_1	x_2	x_3	$\dots$
$P(\xi = x_k)$	p_1	p_2	p_3	$\dots$

Так как события несовместны, то $\sum_k p_k = 1$.

Опр. СВ ξ называется ***непрерывной***, если существует неотрицательная, интегрируемая по Лебегу на каждом отрезке $[x', x'']$ функция $p_\xi(x) = p(x)$ со свойством: $P(x' \leq \xi \leq x'') = \int_{x'}^{x''} p(x)dx$. $p(x)$ называется ***плотностью распределения*** (***вероятностей***) ***СВ*** ξ.

Опр. ***Функцией распределения СВ*** ξ называется функция $F(x) := P(\xi \leq x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

ЗАМЕЧАНИЕ (*свойства функции распределении я СВ*)

1) Функция распределения полностью определяет случайную величину и поэтому, как и плотность, ее иногда называют ***законом распределения СВ***.

2) Для ДСВ ξ функция $F(x):=\sum\limits_{x_k\le x}P(\xi=x_k)$, а для непрерывной СВ $F(x):=\int\limits_{-\infty}^{x}p(t)\,dt$.

3) $F(x)$ не убывает на $(-\infty;+\infty)$, $\forall x\in\mathrm{R}$ $F(x)\in[0,1]$ и $F(-\infty)=0,\ F(+\infty)=1.$

4) $F(x)$ абсолютно непрерывна на $(-\infty;+\infty)$ и почти всюду $F'_x(x)=p(x)$.

5) $\forall x'<x''$ $\quad P(x'<\xi\le x'')=F(x'')-F(x')$.

Приведем определения шести наиболее часто встречающихся СВ.

1. Опр. ДСВ, принимающая значение $0,1,...,n$ с законом распределения

k	0	1	$\dots$	k	$\dots$	n
$P(\xi=k)$	q^n	npq^{n-1}	$\dots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\dots$	p^n

где $p\in(0,1),\ q:=1-p$, называется распределенной по ***биномиальному закону***.

Пр.

2. Опр. ДСВ, принимающая целые неотрицательные значения, называется ***распределенной по закону Пуассона***, если ее закон распределения задается формулой:

$P(\xi=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, где $\lambda\in(0;\infty)$ - параметр распределения.

Пр.

3. Опр. ДСВ, принимающая целые положительные значения, называется ***распреде ленной по геометрическому закону***, если ее закон распределения задается формулой $P(\xi=k)=p(1-p)^{k-1},\ k=1,2,...,$ где фиксированное число (параметр распределения) $p\in(0,1)$.

Пр.

4. Опр. Непрерывная СВ имеет ***показательное распределение***, если ее плотность задается формулой $\quad p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x>0\end{cases}$, где параметр распределения $\lambda\in(0;+\infty)$.

Пр.1 Длительность времени безотказной работы элемента подчинена показательному распределению.

$F(t)=P(\tau<t)=1-e^{-\lambda t}$ - ***вероятность отказа элемента за время длительностью*** t.

$R(t):=e^{-\lambda t}$ - ***функция надежности*** (- вероятность безотказной работы элемента за время длительностью t).

Пр.2 Функция надежности $R(t):=e^{-0.01t},\ t=50$.

5. Опр. Непрерывная СВ называется ***равномерно распределенной на*** $[a,b]$, если её плотность распределения задается формулой $\quad p(x)=\begin{cases}0, & x\notin[a;b]\\ \dfrac{1}{b-a}, & x\in[a;b]\end{cases}$.

6. Опр. Пусть $a\in\mathrm{R},\ \sigma>0$. Непрерывная СВ с плотностью распределения

$p(x):=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\dfrac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\},\ x\in\mathrm{R}$, называется ***нормально распределенной*** (***гауссовской СВ***) . В случае $a=0,\ \sigma=1$ нормальная СВ называется ***стандартной***.

ЗАМЕЧАНИЕ 1) Функция распределения нормальной стандартной СВ обозначается

$$\Phi(x):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}dt.\quad \Phi(0)=\frac{1}{2}.$$

2) Функция $\Phi_0(x):=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^x\exp\left\{-\dfrac{t^2}{2}\right\}dt$ называется ***функцией Лапласа***. $\Phi_0(+\infty)=\dfrac{1}{2}$.

Она нечетная.

3) Для нормального стандартного распределения

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}dt=\frac{1}{2}+\Phi_0(x).$$

4) Нормально распределенная СВ имеет два параметра a,σ, а график ее плотности симметричен относительно прямой $x=a$.

§10.4 Многомерные СВ. Зависимые СВ. Функции случайных величин.

Опр. Пусть дано вероятностное пространство (Ω,B,P) и две СВ $\xi_1,\xi_2:\Omega\to\mathrm{R}$. Обра зованное по ним отображение $\xi:=(\xi_1,\xi_2):\Omega\to\tilde{\mathrm{R}}^2$ называется ***двумерной СВ*** (***случай ным вектором***) ***с вероятностной мерой совместного распределения***

$$\forall a'\le b',a''\le b''\quad P\left(a'\le\xi_1\le b',a''\le\xi_2\le b''\right):=P\left(\left\{\omega\in\Omega:a'\le\xi_1(\omega)\le b',a''\le\xi_2(\omega)\le b''\right\}\right)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Аналогично определяется n-мерная случайная величина.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 Для двумерной дискретной случайной величины $\xi:=(\xi_1,\xi_2)$ обозна чим $P(x_i,y_j)=P_{\xi_1,\xi_2}(x_i,y_j):=P(\xi_1=x_i,\xi_2=y_j)$. Тогда в силу несовместности событий

$$\forall a'\le b',a''\le b''\ \ P(a'\le\xi_1\le b',a'\le\xi_2\le b'')=\sum_{a'\le x_i\le b'}\ \sum_{a''\le y_j\le b''}P_{\xi_1,\xi_2}(x_i,y_j).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3 Для двумерной ДСВ $\xi:=(\xi_1,\xi_2)$ имеем

$$\forall i\ \ P_{\xi_1}(x_i)=P\left((\xi_1=x_i)\cdot\bigcup_{j=1}^{\infty}(\xi_2=y_i)\right)=\sum_{j=1}^{\infty}P(\xi_1=x_i,\xi_2=y_j)=\sum_{j=1}^{\infty}P_{\xi_1,\xi_2}(x_i,y_j),$$

$$\forall j\ \ P_{\xi_2}(y_j)=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(\xi_1=x_i)(\xi_2=y_j)\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(\xi_1=x_i,\xi_2=y_j)=:\sum_{i=1}^{\infty}P_{\xi_1,\xi_2}(x_i,y_j).$$

Пр.

Опр. Двумерная СВ $\xi:=(\xi_1,\xi_2)$ называется ***непрерывной двумерной СВ***, если в $\tilde{\mathrm{R}}_2$ существует неотрицательная и интегрируемая на каждом прямоугольнике со сторонами параллельными осям координат функция $p(x,y)=p_{\xi_1,\xi_2}(x,y)$ со свойством

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dxdy=1$ и такая, что $\forall a'\le b',a''\le b''\ \ P\left(a'\le\xi_1\le b',a''\le\xi_2\le b''\right)=\displaystyle\int_{a'}^{b'}\int_{a''}^{b''}p(x,y)dydx$.

Эта функция называется ***плотностью совместного распределения случайных величин*** ξ_1,ξ_2 и связана с функцией распределения $F(x,y):=P\left(\xi_1\le x,\xi_2\le y\right)$

равенством $p(x,y)=\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Аналогично определяется n-мерная непрерывная случайная величин.
ЗАМЕЧАНИЕ 2 В силу свойства аддитивности интеграла и дополнительных свойств вероятностной меры введенную меру можно распространить с прямоугольников на области, например, с кусочно гладкой границей. При этом $P((\xi_1,\xi_2)\in D)=\iint\limits_D p(x,y)dydx$

ЗАМЕЧАНИЕ 3 Для непрерывной двумерной СВ плотность совместного распределения связана с плотностями распределения координатных СВ равенствами

$$p_{\xi_1}(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy, \quad p_{\xi_2}(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dx.$$

Пр.

Опр. Случайные величины ξ_1,ξ_2 называются ***независимыми***, если $\forall\ a'\le b',\ a''\le b''$ независимы события $a'\le\xi_1\le b', a''\le\xi_2\le b''$, то есть

$$P\left(a'\le\xi_1\le b', a'\le\xi_2\le b''\right)=P(a'\le\xi_1\le b')\cdot P(a'\le\xi_2\le b'').$$

СЛЕДСТВИЕ Дискретные СВ ξ_1,ξ_2 независимы тогда и только тогда, когда $\forall i,\ j\ \ P\left(\xi_1=x_i,\xi_2=y_j\right)=P(\xi_1=x_i)\cdot P(\xi_2=y_j)$. Непрерывные СВ ξ_1,ξ_2 независимы тогда и только тогда, когда $\forall x,\ y\in\mathrm{R}\ \ p(x,y)=p_{\xi_1}(x)\cdot p_{\xi_2}(y)$.

ЗАМЕЧАНИЕ Естественным образом определяется взаимная независимость СВ $\xi_1,...,\xi_n$. Непрерывные СВ $\xi_1,...,\xi_n$ взаимно независимы тогда и только тогда, когда

$$\forall x_1,..,x_n\in\mathrm{R}\ \ p(x_1,..,x_n)=p_{\xi_1}(x_1)\cdot...\cdot p_{\xi_n}(x_n).$$

Пр.

Опр. Пусть СВ ξ_1,ξ_2 зависимы. В случае дискретных СВ ***условной вероятностной мерой*** СВ ξ_1 ***при условии*** $\xi_2=y_j$ называется функция

$$P_{\xi_1}(x_i\,|\,y_j):=\frac{P(\xi_1=x_i,\xi_2=y_j)}{P_{\xi_2}(y_j)},\ i,j=1,2,...\ .$$

В случае непрерывных СВ ***условной функцией распределения*** СВ ξ_1 ***при условии*** $a\le\xi_2\le b$ называется функция

$$F_{\xi_1}(x\,|\,a\le\xi_2\le b):=P(\xi_1\le x\,|\,a\le\xi_2\le b)=\frac{\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{a}^{b}p(u,v)dvdu}{\int\limits_{a}^{b}p_{\xi_2}(v)dv}=\frac{\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{a}^{b}p(u,v)dvdu}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{a}^{b}p(u,v)dvdu}.$$

Опр. Пусть отображение $F(x_1,...,x_n):=\left(f_1(x_1,...,x_n),...,f_m(x_1,...,x_n)\right)$ определено на множестве значений n- мерной СВ $\xi:=(\xi_1,...,\xi_n)$. Отображение $\eta:=F(\xi_1,...,\xi_n):\Omega\to\tilde{\mathrm{R}}^m$

называется ***случайным***, если в Ω измерим прообраз каждого m - мерного параллелепипеда $\Pi := \left\{\omega \in \Omega : \forall i \le m \quad a_i' \le f_i\left(\xi_1(\omega),...,\xi_n(\omega)\right) \le b_i'\right\}$.

Опр. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве значений СВ ξ. Она определяет ***функцию случайной величины*** $\eta := f(\xi)$, если $\forall a \le b \quad \{\omega \in \Omega : a \le f(\xi(\omega)) \le b\} \in \mathrm{B}$.

ТЕОРЕМА 10.3 Пусть система уравнений $\begin{cases} y_1 = f_1(x_1,...,x_n) \\ \quad ... \\ y_m = f_m(x_1,...,x_n) \end{cases}$, $m \le n$, однозначно разрешима относительно переменных $x_1,...,x_m$: $\begin{cases} x_1 = g_1(y_1,...,y_m,x_{m+1},...,x_n) \\ \quad ... \\ x_m = g_m(y_1,...,y_m,x_{m+1},...,x_n) \end{cases}$, и известна плотность распределения $p_\xi(x_1,...,x_n)$ n-мерной СВ $\xi := (\xi_1,...,\xi_n)$. Тогда плотность $p_\eta(y_1,...,y_m)$ случайного отображения $\eta := (f_1(\xi_1,...,\xi_n),..., f_m(\xi_1,...,\xi_n))$ вычисляется по формуле $p_\eta(y_1,...,y_m) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} ... \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi(g_1,...,g_m,x_{m+1},...,x_n) \left|\frac{\partial(g_1,...,g_m)}{\partial(y_1,...,y_m)}\right| dx_{m+1}....dx_n$.

В частности, для $y = f(x_1,...,x_n)$ $P(a \le f(\xi_1,...,\xi_n) \le b) = \int\limits_{a \le f(x_1,...,x_n) \le b} ....\int p_\xi \ (x_1,...,x_n) dx_1...dx_n$,

а в случае $m = n$ плотность вероятности случайного отображения $\eta := F(\xi)$ имеет вид

$$p_\eta(y_1,...,y_m) = p_\xi(g_1,...,g_n)\left|\frac{\partial(g_1,...,g_n)}{\partial(y_1,...,y_n)}\right|.$$

Пр.

§ 10.5 Числовые характеристики СВ

Пр.

Опр. ***Средним значением (математическим ожиданием) ДСВ*** ξ называется число $M\xi := \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k p_k$, если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k$ абсолютно сходится.

Пр.

Опр. ***Математическим ожиданием непрерывной СВ*** ξ называется число $M\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t \cdot p(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t \cdot P(dt)$, если несобственный интеграл сходится.

Пр.

ТЕОРЕМА 10.4 (*свойства математического ожидания*) 1) Если $\xi \equiv C$, то $M\xi = C$.
2) Если функция $\varphi(x)$ определена на множестве значений ДСВ ξ, то для СВ $\eta := \varphi(\xi)$

$M_\eta = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi(x_k) p_k$ в случае ДСВ и математическое ожидание $M\varphi(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) p(x) dx$ в случае непрерывной СВ.

3) Если функция $\varphi(x,y)$ определена на множестве всевозможных пар значений двумер ной СВ, то функция СВ $\varphi(\xi_1,\xi_2)$ имеет математическое ожидание $M\varphi(\xi_1,\xi_2)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{l=1}^{\infty}\varphi(x_k,y_l)P_{\xi_1,\xi_2}(x_k,y_l)$ в случае дискретной и математическое ожидание $M\varphi(\xi_1,\xi_2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,y)\,p_{\xi_1,\xi_2}(x,y)dxdy$ в случае непрерывной СВ.

4) (*свойство линейности*) Для любых СВ $\xi,\ \eta$ $\forall\alpha\ \beta\in\mathrm{R}$ $M(\alpha\xi+\beta\eta)=\alpha M\xi+\beta M\eta$.

5) Если СВ ξ_1,ξ_2 независимы, то $M(\xi_1\cdot\xi_2)=M\xi_1\cdot M\xi_2$.

———

Опр. Случайная величина $\overset{\circ}{\xi}:=\xi-M\xi$ называется ***центрированной случайной величиной***.

ЗАМЕЧАНИЕ а) $M\overset{\circ}{\xi}:=M(\xi-M\xi)=M\xi-M(M\xi)=M\xi-M\xi=0$;

б) из определения независимых случайных величин следует, что ξ_1,ξ_2 независимы тогда и только тогда, когда независимы $\overset{\circ}{\xi}_1,\overset{\circ}{\xi}_2$.

Опр. ***Дисперсией*** **(*рассеянием*)** случайной величины ξ называется число

$$D\xi:=M\overset{\circ}{\xi}{}^2=M(\xi-M\xi)^2.$$

ТЕОРЕМА 10.5 (*свойства дисперсии*) 1) $DC=0$. 2) $D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2$.

3) Если случайные величины ξ_1,ξ_2 независимы, то $D(\xi_1+\xi_2)=D\xi_1+D\xi_2$.

4) (*неравенство Чебышёва*) $\forall\varepsilon>0$ $P(|\xi|\ge\varepsilon)\le\dfrac{M\xi^2}{\varepsilon^2}$ или $P\left(\left|\dfrac{\xi}{\varepsilon}\right|\ge 1\right)\le M\left(\dfrac{\xi}{\varepsilon}\right)^2$.

СЛЕДСТВИЕ (*вероятностный смысл дисперсии*) 1) $P(|\xi-M\xi|>1)\le D\xi$.

2) $D\xi=0$ тогда и только тогда, когда $\xi=M\xi$ с вероятностью $=1$, то есть почти всюду. Иначе, $P(\xi\ne M\xi)=0$.

Пр.

Опр. Величина $\sigma_\xi:=\sqrt{D\xi}$ называется ***стандартным отклонением СВ*** ξ ***от математического ожидания*** $M\xi$ (***квадратичным отклонением, квадратичной ошибкой***).

———

ЗАМЕЧАНИЕ 1) СВ $\xi\in(\Omega,\mathrm{B},P)$ считается равной нулю ($\xi:=0$), если она равна нулю почти всюду: $\forall\varepsilon>0$ $P(\xi\ne0)=0$. В силу следствия $\xi=0\Leftrightarrow M(\xi)=D(\xi)=0$.

2) СВ $\xi_1,\xi_2\in(\Omega,\mathrm{B},P)$ считаются равными ($\xi_1=\xi_2$), если $\xi_1-\xi_2=0$. Последнее равенство равносильно двум таким $M\xi_1=M\xi_2,\ D(\xi_1-\xi_2)=0$.

Замечание позволяет ввести на множестве СВ из (Ω,B,P) структуру евклидова пространства $H=H(\Omega,\mathrm{B},P)$ со скалярным произведением $(\xi_1,\xi_2):=M(\xi_1\xi_2)$ Можно показать, что оно является гильбертовым в норме $\|\xi\|:=\sqrt{M\xi^2}=\sqrt{(\xi,\xi)}$.

СЛЕДСТВИЕ 1) $\|\xi\|^2 := M\overset{\circ}{\xi}{}^2 = D\xi = \sigma^2$. Норма центрированной СВ совпадает со стандартным отклонением.
2) (*неравенство Коши-Буняковского*) $\forall \xi_1, \xi_2 \in H \;\; |(\xi_1, \xi_2)| < \|\xi_1\| \cdot \|\xi_2\|$.
3) $\|\xi\| = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; M\xi^2 = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; D\xi = -(M\xi)^2 \;\; \Leftrightarrow \;\; M\xi = D\xi = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; \xi = 0$
Опр. ***Коэффициентом корреляции* (*взаимосвязи*)** случайных величин ξ_1, ξ_2 с математическими ожиданиями $M\xi_i = a_i$ и $\sigma_i = \sqrt{D\xi_i}$, $i = 1, 2$, называется величина

$$r = r_{\xi_1,\xi_2} := \frac{1}{\sigma_1\sigma_2} M\overset{\circ}{\xi}_1 \overset{\circ}{\xi}_2 = M\left(\frac{\xi_1 - a_1}{\sigma_1} \cdot \frac{\xi_2 - a_2}{\sigma_2}\right).$$

Опр. СВ ξ_1, ξ_2 ***некоррелированные***, если $r_{\xi_1,\xi_2} = 0$.
ТЕОРЕМА 10.6 (*свойства коэффициента корреляции*)
1) $\forall \xi_1, \xi_2 \;\; r_{\xi_1,\xi_2} = r_{\xi_2,\xi_1}$. $\forall \xi \;\; r_{\xi,\xi} = 1$. 2) $|r_{\xi_1,\xi_2}| \le 1$, причем $|r_{\xi_1,\xi_2}| = 1$ тогда и только тогда, когда центрированные СВ $\overset{\circ}{\xi}_1, \overset{\circ}{\xi}_2$ пропорциональны: $\overset{\circ}{\xi}_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\overset{\circ}{\xi}_2$.
3) Если случайные величины ξ_1, ξ_2 независимы, то они некоррелированные. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.
4) $D(\xi_1 + \xi_2) = D\xi_1 + 2\sigma_1\sigma_2 r + D\xi_2$. 5) Наименьшее отклонение $\|\xi - \alpha\|$ в пространстве H случайной величины ξ от числа $\alpha \in \mathrm{R}$ совпадает со стандартным отклонением σ_ξ и достигается при $\alpha = M\xi$: $\min\limits_{\alpha\in\mathrm{R}} \|\xi - \alpha\| = \|\xi - M\xi\|$.
6) Для случайных величин $\xi_1, \xi_2 \in H$ с $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, наименьшее отклонение $\|\xi_1 - \alpha\xi_2 - \beta\|$ в H линейной комбинации $\alpha\xi_2 + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$, от случайной величины ξ_1 достигается и равно $\min\limits_{\alpha,\beta} \|\xi_1 - \alpha\xi_2 - \beta\| = \max\limits_{x,y} \left\|\overset{\circ}{\xi}_1 - x\overset{\circ}{\xi}_2 - y\right\| = \left\|\overset{\circ}{\xi}_1 - r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\overset{\circ}{\xi}_2\right\|$.

Опр. ***Начальным моментом*** k***-го порядка СВ*** называется число $\nu_k := M\xi^k$, $k = 0, 1, \ldots$.
Пр.

Опр. ***Центральным моментом*** k***-го порядка СВ*** называется число $\mu_k := M\overset{\circ}{\xi}{}^k$, $k = 0, 1, \ldots$
Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ Моментами описывается характер группировки значений случайной величины.
Опр. $\gamma_1 := \frac{\mu_3}{\sigma^3}$ - ***асимметрия*** (***скошенность***) ***СВ*** .

Опр. $\gamma_2 := \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ - ***эксцесс*** (***крутость***) ***СВ*** .
Опр. ***Квантилью порядка*** γ распределения $F(t)$ называется наибольшее число t_γ, для которого $F(t_\gamma) = \gamma$.

Пр.

Опр. ***Медианой*** (***срединным значением***) случайной величины ξ называется квантиль M_e порядка $\frac{1}{2}$ ее распределения.

Опр. ***Модой дискретной СВ*** называется ее значение M_a, имеющее наибольшую веро ятность. ***Модой непрерывной СВ*** называется точка M_a максимума плотности $p_\xi(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1) Асимметрия $\gamma_1 = 0$ для СВ с симметричным распределением. Асим метрия положительна, если $M_a < M_e$.

2) Эксцесс нормального распределения $\gamma_2 = 0$. Если кривая плотности СВ круче, чем кривая плотности нормальной СВ, то $\gamma_2 > 0$.

Пр.

Буняко́вский Виктор Яковлевич (1804-1889) - российский математик, вице-президент академии наук (1864-1889). Из семи лет пребывания за границей в течение двух лет в Париже слушал лекции в Сорбонне и общался с Лапласом, Пуассоном, Фурье, Ампером, Лежандром и другими знамени тыми учёными. Больше всего Б. работал у Коши.

С 1846 года Б. читал лекции по *аналитической механике* в санкт-петербургском университете, *дифференциальное* и *интегральное исчисление*, *теорию вероятностей*, а позднее, уже в пятидесятых годах *интегрирование дифференциальных уравнений*, *вариационное исчисление*, *исчисление конечных разностей*.

Изобрел планиметр и вариант арифмометра.

Б. больше всего работал в теории чисел и теории вероятностей. В 1846 году издана *всемирно известная монография* «*Основания математической теории вероятностей*»

Разрабатывал по преимуществу практические приложения математической теории вероятностей. Его труды (1958) по *проектированию эмеритальной кассы* послужили к учреждению целого ряда подобных касс на выработанных им началах. Сделав в 1869 году исследование *«выводы эмпирического закона о смертности»*, Б. упростил этим решение вопросов относительно страхования капиталов и пожизненных доходов.

В 1885 году вышла статья Б. «*О вероятной численности контингентов русской армии в 1883—1885 годах*», являвшаяся очень ценным руководством при решении вопросов, связанных с всеобщей воинской повинностью.

Лекции Б. отличались поразительной ясностью, увлекательностью и в то же время литературной красотой изложения, делали легко доступными самые сложные математические положения и увлекали даже безучастных слушателей.

§ 10.6 Предельные теоремы теории вероятностей

Опр. Последовательность СВ $\{\xi_n\}$ ***сходится по вероятности к СВ*** ξ_0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \lim_{n\to\infty} P(|\xi_n - \xi_0| \ge \varepsilon) = 0.$$

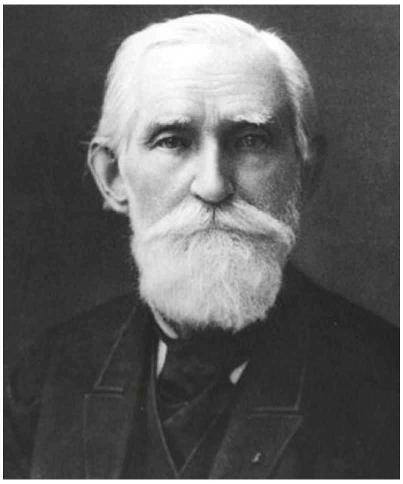
Опр. Последовательность СВ $\{\xi_n\}$ называется ***слабо сходящейся к распределению с***

плотностью $p(x)$, если $\forall x' < x'' \quad \lim_{n\to\infty} P(x' < \xi_n \le x'') = \int_{x'}^{x''} p(x)dx$.

ТЕОРЕМА 10.7 (*теоремы Чебышёва и Маркова*) 1) Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и $\exists D > 0 \ \forall n \in \mathrm{N} \ D\xi_n = \left\| \overset{\circ}{\xi}_n \right\|^2 \le D$, или пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ зависимы и $\lim_{n\to\infty} D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) = \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overset{\circ}{\xi}_k\right\|^2 = 0$. Тогда последовательность средних арифметических $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overset{\circ}{\xi}_k$ сходится по вероятности к нулю: $\forall \varepsilon > 0 \ \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k\right| \ge \varepsilon\right) = 0$.

2) (*центральная предельная теорема*) Пусть СВ $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и $\exists n \ge 1 \ M\xi_n = M, \ D\xi_n = \sigma^2$. Тогда последовательность СВ $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k - nM\right)\right\}$ слабо сходится к стандартному нормальному распределению:

$$\forall x' < x'' \ \lim_{n\to\infty} P\left(x' < \frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k - nM\right) \le x''\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x'}^{x''} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \Phi(x'') - \Phi(x').$$



Чебышёв Пафну́тий Льво́вич (1821-1894) –русский математик и механик, основоположник петербургской математической школы, академик Петербургской академии наук (с 1859 года) и ещё 24 академий мира. Величайший, наряду с Н. И. Лобачевским, русский математик XIX века. Получил фундаментальные результаты в теории чисел (распределение простых чисел) и теории вероятностей (центральная предельная теорема, закон больших чисел) Построил общую теорию ортогональных многочленов, теорию равномерных приближений и многие другие. Основал математическую теорию синтеза механизмов и разработал ряд практически важных концепций механизмов.

Известные ученики: Е. И. Золотарёв, А. Н. Коркин, А. М. Ляпунов, А. А. Марков, П. О. Сомов, Ю. В. Сохоцкий.

Профессора физико-математического факультета Санкт-Петербургского университета (1868).Сидят слева направо: А.В. Советов, П.Л. Чебышёв, К.Ф. Кесслер, А.Н. Савич, П.А. Пузыревский, Ф.В. Овсянников, А. Н. Бекетов. Стоят: Р. Э. Ленц, Н.А.Меншуткин, А.С.Фаминцын О.И. Сомов, Ф.Ф.Петрушевский, Д.И.Менделеев, А.Н. Коркин

Ма́рков Андре́й Андре́евич (1856-1922) –русский матема тик, академик. Сын чиновника, служившего в Лесном департаменте. Болел туберкулезом коленного сустава и до 10 лет ходил на костылях. После операции получил возможность ходить нормально.
Ученик П.Л.Чебышёва. В 1878 г. он окончил Петербур гский университет. В 1880 г. защитил диссертацию.
Первооткрыватель обширного класса стохастических процессов. Продвинул классические исследования предшественников, касающиеся закона больших чисел и центральной предельной теоремы теории вероятностей
В математическом анализе - теория непрерывных дробей, исчисление конечных разностей, теория интерполирования функций, экстремальные задачи в функциональных пространствах, проблема моментов и другие.

СЛЕДСТВИЕ 1 (*теорема Бернулли*) Пусть ξ_k есть случайная величина появления события A в k-ом испытании с законом распределения: Тогда относительная частота появления события A в n испытаниях $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ есть случайная величина, сходящаяся по вероятности к p: $\forall\varepsilon>0\ \lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-p\right|\geq\varepsilon\right)=0$.

ξ_k	1	0
P	p	q

Берну́лли Я́коб (1654-1705) - швейцарский математик, профессор математики Базель ского университета (с 1687 года). Один из основателей теории вероятностей и математического анализа. Б. решает (1690) задачу Лейбни ца о форме кривой, по ко торой тяжелая точка опускается за равные промежутки времени на равные вертикальные отрезки (полукубическая парабола). Дока зательство проведено интегриро ванием дифференциального урав нения. При этом *впервые* появил ся в печати термин «интеграл». Монография «Искусство предпо ложений»,1713. Закон больших чисел. Распределение Б., числа Б., лемниската Б.

СЛЕДСТВИЕ 2 (*теорема Муавра-Лапласа*) В условиях следствия 1 функция $\frac{1}{\sqrt{npq}}\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k-np\right)$ от частоты появления события A в n испытаниях $\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ слабо схо дится к стандартному распределению: $\forall x'<x''\ \lim_{n\to\infty}P\left(x'<\frac{1}{\sqrt{npq}}\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k-np\right)\leq x''\right)=\Phi(x'')-\Phi(x')$

Пьер-Симóн, маркиз де Лаплáс (1749-1827)- французский математик, механик, физик и астроном; известен работами в области *небесной механики*, *дифференциальных уравнений*, один из создателей *теории вероятностей*. Усовершенствовал почти все разделы чистой, прикладной математики и астрономии.

Монография «Небесной механики» т.т.1-5 (1802-1825 г.г.) - настольной книгой астрономов XIX века.

В монографии «Аналитическая теория вероятностей» (1812) Л. подытожил свои и чужие результаты (предельная теорема Муавра-Лапласа; метод наименьших квадратов).

Диалог с Наполеоном: - Вы написали такую огромную книгу о системе мира и ни разу не упомянули о его Творце!
- Сир, я не нуждался в этой гипотезе.

«Если бы какое-нибудь разумное существо смогло узнать положения и скорости всех частиц в мире в некий момент, оно могло бы совершенно точно предсказать все мировые события».

§ 10.7 Некоторые специальные распределения.

Опр. ***Ковариацией (соизменением) случайных величин*** ξ,η называется величина $\sigma_{\xi,\eta}=\operatorname{cov}(\xi,\eta):=M\overset{\circ}{\xi}\overset{\circ}{\eta}$. ***Ковариационной матрицей*** n***-мерной СВ*** $(\xi_1,...,\xi_n)$ называется матрица их ковариаций $\Sigma=(\sigma_{i,j}):=(\operatorname{cov}(\xi_i,\xi_j))$.

По симметричной матрице Σ образуем полуопределенную квадратичную форму

$$X^T\Sigma X=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{i,j}x_ix_j=M\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\overset{\circ}{\xi}_k\right)^2\geq 0.$$

ТЕОРЕМА 10.8 (*свойства* n*-мерной СВ*) 1) Равносильны утверждения: а) $\det\Sigma\neq 0$;

б) случайные величины $\overset{\circ}{\xi}_1,...,\overset{\circ}{\xi}_n\in H$ линейно независимы в H;

в) квадратичная форма $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{i,j}x_ix_j$ положительно определена;

2) Если случайные величины $\xi_1,...,\xi_n\in H$ линейно независимы, то наилучшее приближение СВ ξ_0 линейными комбинациями вида $\alpha_0+\alpha_1\xi_1+...+\alpha_n\xi_n$ равно

$$\left\|\overset{\circ}{\xi}_0-\sum_{k=1}^{n}x_k^0\overset{\circ}{\xi}_k\right\|=\min_{\alpha_0,...,\alpha_n}\left\|\xi_0-\alpha_0-\alpha_1\xi_1-...-\alpha_n\xi_n\right\|,$$

где $X^0=\begin{pmatrix}x_1^0\\ ...\\ x_n^0\end{pmatrix}$ есть решение СЛАУ $\begin{cases}\sigma_{11}x_1+...+\sigma_{1n}x_n=\operatorname{cov}(\xi_0,\xi_1)\\ \quad ...\\ \sigma_{n1}x_1+...+\sigma_{nn}x_n=\operatorname{cov}(\xi_0,\xi_n)\end{cases}$.

Опр. Пусть $\xi_{01},...,\xi_{0n}$ - взаимно независимые стандартные нормальные случайные величины. n-мерная СВ $\xi:=(\xi_1,...,\xi_n):=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{1k}\xi_{0k}+a_1,...,\sum_{k=1}^{n}a_{nk}\xi_{0k}+a_n\right)$, где матрица $A:=(a_{ij})$ не вырождена, $a_1,...,a_n\in\mathrm{R}$, называется n***-мерной нормальной (гауссовской)***

случайной величиной.

ТЕОРЕМА 10.9 (*Свойства* n*-мерной нормальной СВ*) 1) $M\xi_k = a_k,\ k = 1,...,n$.

2) $\mathrm{cov}(\xi_i, \xi_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk}$, то есть $\Sigma = A \cdot A^T$.

3) Если $C = (c_{ij}) := \Sigma^{-1}$, то плотность распределения СВ ξ равна

$$p(x_1,...,x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n |\det A|} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x_i - a_i)(x_j - a_j)\right\}.$$

4) Пусть $a_0 + x_1^0 \overset{\circ}{\xi}_1 + ... + x_n^0 \overset{\circ}{\xi}_n$ есть наилучшее приближение нормальной СВ ξ_0.
Тогда условная случайная величина $\xi_0 \,|\, (\xi_1 = x_1)...(\xi_n = x_n)$ имеет плотность

$$p_{\xi_0}(x \,|\, x_1,...,x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\left(x - a_0 - \sum_{k=1}^{n} x_k^0 (x_k - a_k)\right)^2\right\},$$

где $\sigma_0^2 := M(\overset{\circ}{\xi}_0 - \sum_{k=1}^{n} x_k^0 \overset{\circ}{\xi}_k)^2,\ M\xi_0 = a_0$.

Опр. Пусть $\xi_{01},...,\xi_{0n}$ - взаимно независимые стандартные нормальные случайные величины. Функция этих случайных величин вида $\chi^2 := \sum_{k=1}^{n} \xi_{0k}^2$ называется ***хи-квадрат распределением с*** n ***степенями свободы*** (по числу взаимно независимых СВ).

ЗАМЕЧАНИЕ χ^2-распределение имеет плотность $p(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$.

Опр. Пусть $\xi_{01},...,\xi_{0n}$ - взаимно независимые стандартные нормальные случайные величины. Функция случайных величин вида $t = \dfrac{\xi_{0n}}{\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} \xi_{0k}^2}}$ называется t ***-распределением с*** $n-1$ ***степенями свободы***.

ЗАМЕЧАНИЕ t - распределение имеет плотность $p(x) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \left(1 + \dfrac{x^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$.

ТЕОРЕМА 10.10 Пусть $\xi_1,....,\xi_n$ - взаимно независимые нормальные СВ с параметрами $M\xi_k = a,\ D\xi_k = \sigma^2,\ k = 1,...,n.$ $\xi_0 := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k$. Справедливы утверждения:

1) $M\,\xi_0 = a,\ D\xi_0 = \dfrac{\sigma^2}{n}$.

2) СВ $\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \xi_0)^2$ обладает свойством: СВ $n\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\xi_k - \xi_0}{\sigma}\right)^2$ имеет χ^2-распределение с $n-1$ степенями свободы.

3) СВ $\frac{(\xi_0 - a)\sqrt{n-1}}{\hat{\sigma}}$ имеет t-распределение с $n-1$ степенями свободы.

ГЛАВА 11 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

§ 11.1 Основные понятия. Первичная обработка выборок.

Опр. ***Математическая статистика*** - это раздел математики, изучающий методы: а) систематизации, б) обработки, в) использования статистических данных для научных или практических выводов. Объектом ее изучения являются объективно существующие в природе, обществе, на производстве случайные величины.

Опр. Множество возможных значений изучаемой СВ ξ называется ***генеральной совокупностью*** с законом распределения $F(x)$. ***Выборкой*** называется конечное подмножество измеренных значений $x_1,...,x_n$ СВ ξ. x_k называются ***элементами***, а число n - ***объемом выборки***.

Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Выборка обязана быть ***репрезентативной*** (представительной): производиться над однородными предметами; производиться в одинаковых условиях; пропорционально содержать представителей всех классов генеральной совокупности. Эти требования формируются исходя из целей статистического исследования.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 Результаты наблюдений над объектами генеральной совокупности рассматриваются и как значения n-мерной СВ, компоненты которой являются взаимно независимыми СВ с тем же законом распределения, что и у генеральной совокупности.

Опр. Упорядоченная по возрастанию последовательность элементов выборки (наб людений) называется ***вариационным рядом с размахом*** $x_n - x_1$. ***Статистическим рядом*** называется подпоследовательность всех различных элементов $x'_1 < .. < x'_m$ выборки и соответствующих им кратностей $n_1,...,n_m$ (***частот***).

Опр. Элементы $x'_1,..,x'_m$ и соответствующие ***относительные частоты*** $n'_i = \frac{n_i}{n}$

порождают дискретное распределение $F_n^*(x) := \begin{cases} 0, & -\infty < x < x'_1 \\ \sum_{i=1}^{k} n'_i, & x'_k \le x < x'_{k+1}, k = 1,...,m-1, \\ 1, & x'_m \le x < \infty \end{cases}$

называемое ***эмпирической*** (***выборочной***) ***функцией распределения***.

ЗАМЕЧАНИЕ Из теоремы Бернулли следует, что $\forall x \in \mathrm{R}$ $F_n^*(x)$ при $n \to \infty$ сходится по вероятности к функции распределения изучаемой СВ ξ (***генеральной функции распределения***) $F(x)$.

Опр. При большом объеме выборки производят группировку статистического ряда.

Именно, разбивают $[x_1, x_n]$ точками $x_1 =: a_0 < a_1 < ... < a_k := x_n$ на k промежутков одинаковой длины $\Delta_1 := [a_0, a_1), ..., \Delta_k := [a_{k-1}, a_k]$ и обозначают n_i число (частоту) попаданий элементов выборки на соответствующий отрезок, а x_i^* - середину этого отрезка. ***Группированным статистическим рядом*** называется последовательность промежутков $\Delta_1, ..., \Delta_k$ и соответствующих частот $n_1, ..., n_k$.

Пр.

Опр. Ломаная, составленная из отрезков, соединяющих соседние точки (x_i^*, n_i), $i = 1, ..., k$ (или (x_i^*, n_i')), называются ***полигоном частот*** (***относительных частот***).

Опр. Многоугольник $\left\{(x, y) : a_{i-1} \le x \le a_i, 0 \le y \le \dfrac{n_i}{nh}, i = 1, ..., k\right\}$, где $h := \dfrac{x_n - x_1}{k}$, называется ***гистограммой выборки*** (histos – *греч.* столб, gramma - запись).

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Площадь гистограммы 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 Для определения числа отрезков разбиений в прикладной статистике предлагается несколько эмпирических формул. Например, $k := 1,72\sqrt[3]{n}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3 Целью обработки статистических данных является нахождение функции распределения генеральной совокупности. Построение полигона частот, гистограммы и эмпирической функции распределения выборки позволяют выдвинуть гипотезу об этом распределении.

Пр.

§ 11.2 Статистическое оценивание параметров генеральной функции распределения.

Опр. ***Статистикой*** называется функция элементов выборки. ***Точечной статистической оценкой*** характеристики (параметра) θ генеральной функции распределения называется статистика $\hat{\theta}_n(x_1, ..., x_n)$, приближающаяся к θ с ростом n.

ЗАМЕЧАНИЕ Для статистической оценки параметров распределения генеральной совокупности используют статистики, которые характеризуют аналогичные параметры выборки.

Опр. ***Выборочным средним*** параметра x называется статистика вида $\bar{x} := \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$, где $x_1, ..., x_n$ есть случайная выборка.

Опр. ***Выборочной дисперсией*** называется статистика вида $s^2 := \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2$.

Опр. ***Выборочным начальным моментом*** называется статистика $\alpha_k := \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k, k = 1, ...$,

а ***выборочным центральным моментом*** - статистика $\beta_k := \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^k, k = 1, ...$.

ЗАМЕЧАНИЕ Статистики можно рассматривать и как функции случайных величин, так как случайными являются элементы выборок, на которых эти статистики определены. Выбор статистик, оценивающих один и тот же параметр, неоднозначен, и к ним предъявляются следующие требования.

Опр. Статистическая оценка называется ***несмещенной***, если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру при любом объеме выборки.
Пр.

Опр. Статистическая оценка $s_1^2 := \dfrac{n}{n-1}s^2$ является несмещенной и называется ***несмещенной выборочной дисперсией***.

Опр. Статистическая оценка называется ***состоятельной***, если последовательность $\hat{\theta}_n(x_1,...,x_n)$ сходится по вероятности с ростом n к оцениваемому параметру.

ЗАМЕЧАНИЕ Начальные моменты являются состоятельными несмещенными оценками. Выборочная дисперсия состоятельна.

Опр. Статистическая оценка $\hat{\theta}_n^*(x_1,...,x_n)$ называется ***эффективной*** в классе состоятель ных несмещенных оценок, если она имеет наименьшую дисперсию в этом классе:

$$D(\hat{\theta}_n^*(\xi_1,...,\xi_n)) \le D(\hat{\theta}_n(\xi_1,...,\xi_n)).$$

Теория статистического оценивания включает ряд походов: байесовский подход, метод моментов, метод максимального правдоподобия, метод интервального оценивания и другие. Остановимся на последних трех.

Опр. Пусть функция распределения генеральной совокупности $F = F(x,\theta_1,....,\theta_s)$ изве стна, но неизвестны ее параметры. Ее центральные моменты определяются через функ цию распределения и потому зависят от этих параметров: $\mu_i = \mu_i(\theta_1,....,\theta_s)$. ***Метод моментов*** оценки параметров состоит в том, что по выборке вычисляют первые s выборочных центральных моментов $\beta_k := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^k$, и решают систему уравнений с неизвестными $\theta_1,....,\theta_s$:

$$\begin{cases} \mu_1(\theta_1,...,\theta_n) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) \\ \quad . \quad . \quad . \\ \mu_s(\theta_1,...,\theta_n) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^s \end{cases}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ Полученный статистики будут, вообще говоря, несмещенными и неэффективными. Они состоятельны при достаточно общих условиях.
Пр.

Опр. Пусть генеральная функция распределения $F = F(x,\theta)$ известна, но неизвестен ее параметр. Произведем выборку $x_1,...,x_n$. Она является значением n-мерной случайной величины $(\xi_1,...,\xi_n)$ с взаимно независимыми равно распределенными компонентами. ***Метод максимального*** (***наибольшего***) ***правдоподобия*** состоит в выборе такого значения параметра θ_0, при котором наблюденные значения будут наиболее правдоподобными. В случае ДСВ ξ это $\theta_0 := \arg\max\limits_{\theta}\left(P(\xi_1 = x_1,\theta)\cdot ...\cdot P(\xi_n = x_n,\theta)\right)$,
а в случае непрерывной СВ ξ $\theta_0 := \arg\max\limits_{\theta}\left(p(x_1,\theta)\cdot ...\cdot p(x_n,\theta)\right)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Оценки, получаемые методом максимального правдоподобия, являются, вообще, говоря, смещенными, но при достаточно общих предположениях они состоятельны и эффективны.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 В случае нескольких неизвестных параметров $\theta_1,...,\theta_k$ функции для нахождения максимума строятся аналогично.

Пр.

Опр. ***Интервальной статистической оценкой параметра*** θ с ***надежностью*** γ, называется ***доверительный интервал*** $(\theta'-\varepsilon,\theta'+\varepsilon)$, в котором с вероятностью γ находится неизвестный параметр $\gamma\in(0,1)$.

ТЕОРЕМА 11.1 (*об оценке матожидания и дисперсии*) Обозначим *неизвестные* параметры генеральной совокупности $a:=M\xi,\ \sigma^2:=D\xi$. Имеют место следующие утверждения.

1) Для параметра a $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(|\,\overline{x}-a\,|<\varepsilon\frac{s_1}{\sqrt{n}}\right)=2\Phi_0(\varepsilon)=\gamma$, где $\overline{x}:=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$,

$s_1^2:=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2$.

2) Для параметра σ^2 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(|\,\sigma^2-s_1^2\,|<\sqrt{\frac{\beta_4-\beta_2^2}{n}}\,\varepsilon\right)=2\Phi_0(\varepsilon)=\gamma$.

3) Если известно, что генеральная совокупность ξ распределена по нормальному закону с неизвестным стандартным отклонением σ, то для $0<\alpha<\beta$

$P\left(\frac{ns^2}{\beta}<\sigma^2<\frac{ns^2}{\alpha}\right)=\gamma$, где α,β - квантили порядков $\frac{1-\gamma}{2},\frac{1+\gamma}{2}$ соответственно χ^2-распределения $F_{\chi^2,n-1}(x)$ с $n-1$ степенями свободы: $F_{\chi^2,n-1}(\alpha)=\frac{1-\gamma}{2},\quad F_{\chi^2,n-1}(\beta)=\frac{1+\gamma}{2}$.

4а) Если известно, что генеральная совокупность ξ распределена по нормальному закону с известным стандартным отклонением σ, то $P\left(|\,\overline{x}-a\,|<\varepsilon\right)=\gamma=2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)$;

4б) Если известно, что генеральная совокупность ξ распределена по нормальному закону с неизвестным стандартным отклонением σ, то $P\left(|\,\overline{x}-a\,|<\varepsilon\right)=\gamma=2F_{t,n-1}\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{s_1}\right)-1$,

где $F_{t,n-1}(x)$ есть функция распределения СВ $t=\frac{\xi_{0n}}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\xi_{0k}^2}}$ с $n-1$ степенями свободы.

§ 11.3 Проверка статистических гипотез

Опр. Предположение о виде или свойствах исследуемого распределения, которое можно проверить статистическими методами по имеющейся выборке, называется ***статистической гипотезой***.

Опр. Правило проверки статистической гипотезы называется ***критерием значимо сти***. Статистика, по значениям которой судят о справедливости статистической гипотезы, называется ***статистикой критерия значимости***. Поверяемая гипотеза обозначается H_0, альтернативная H_1.

Опр. Пусть сформулированы гипотезы H_0, H_1 и выбрана статистика критерия Z. ***Критической областью*** критерия значимости называется подмножество V_k множе ства значений V статистики Z, вероятность попадания в которую при условии истин ности проверяемой гипотезы H_0 равна ***уровню значимости*** α: $P(Z \in V_k / H_0) = \alpha$. Множество $V \setminus V_k$ называется ***областью допустимых значений*** статистики критерия.

ЗАМЕЧАНИЕ Уровень значимости выбирается с учетом практической важности исследуемого распределения.

Опр. Критерий значимости для проверки гипотезы о генеральном законе распределения называют ***критерием согласия***.

АЛГОРИТМ (*проверки статистической гипотезы*)

1) Формулируются проверяемая и альтернативная гипотезы H_0, H_1.
2) Выбирается уровень значимости α.
3) Выбираются статистика критерия значимости Z, а по ней, H_0, H_1 и α - критическая область V_k.
4) Вычисляется выборочное значение $Z_в$ статистики Z.
5) Если $Z_в \in V_k$, то гипотеза H_0 отвергается, так как в результате лишь одного испытания (одной выборки) произошло «*практически невозможное событие*»: $P(Z \in V_k / H_0) = \alpha$. Если $Z_в \in V \setminus V_k$, то гипотеза H_0 принимается.

ЗАМЕЧАНИЕ Принимая или отвергая гипотезу, можно совершить две ошибки.

Ошибкой первого рода называется ошибка отвержения правильной гипотезы. Ее вероятность равна $\alpha = P(Z \in V_k / H_0)$. ***Ошибкой второго рода*** называется ошибка принятия неверной гипотезы. Ее вероятность равна $\beta := P(Z \in (V \setminus V_k) / H_1)$. Чем меньше уровень значимости α, тем меньше вероятность отвергнуть правильную гипотезу, но при этом увеличивается вероятность совершения ошибки второго рода.

Приведем наиболее часто используемый критерий согласия χ^2.

1) Сравнивая гистограмму, полигон частот или выборочную функцию распределения с атласом соответствующих стандартных распределений, выдвигаем гипотезу о конкретном законе распределения исследуемой генеральной совокупности.
2) Производим выборку объема ≥ 50. По количественному или качественному признаку разбиваем выборку на 8-12 *разрядов*, в каждом из которых будет ≥ 5 элементов. Это позволяет избежать ошибки отвергнуть правильную гипотезу. Исходными данными для дальнейшей работы являются: n - объем выборки; m - число разрядов статистического ряда ; n_i - частоты; x_i' - границы разрядов.
3) С помощью метода моментов или метода наибольшего правдоподобия находим оценки всех параметров гипотетического закона распределения и подставляем их в функцию распределения $F(x)$ этого закона.
4) Вводим ***теоретические частоты*** $n_i' := n \cdot p_i$, где $p_i := F(x_i') - F(x_{i-1}')$.

5) Вычисляем ***наблюдаемые значения*** $\chi^2_{набл} := \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i^2}{p_i} \right) - n$.

Чем ближе экспериментальные частоты к теоретическим, тем ближе $\chi^2_{набл}$ к нулю, тем с большей вероятностью гипотеза верна.

6) С помощью таблицы χ^2-распределения с $k := m - l - 1$ степенями свободы (l - число параметров гипотетического закона) определяем вероятность

$$P(\chi^2 \geq \chi^2_{набл}) = 1 - F_{\chi^2,k}(\chi^2_{набл})$$

7) Назначаем ***уровень значимости*** α (обычно $\alpha \in 0{,}01 - 0{,}1$). Если $P(\chi^2 \geq \chi^2_{набл}) < \alpha$, то есть $\chi^2_{набл}$ велико, то выдвинутую гипотезу отвергаем. Если $P(\chi^2 \geq \chi^2_{набл}) \geq \alpha$, то есть $\chi^2_{набл}$ близко к нулю, то гипотезу о законе распределения принимаем.

Пункты 6)-7) выполняют, если пользуются таблицей функции $F_{\chi^2,k}(x)$. Если используются таблицами "Критические точки распределения χ^2", или " Квантили распределения χ^2", то вместо этих пунктов выполняют следующие.

6`) По числу $k := m - l - 1$ и уровню значимости $\alpha$ находим в таблице критическое значение $\chi^2_{кр}$. 7`) Если $\chi^2_{кр} < \chi^2_{набл}$, то принятую гипотезу отвергаем. Если $\chi^2_{кр} \geq \chi^2_{набл}$, то гипотезу о законе распределения принимаем.

§ 11.4 Элементы корреляционного и регрессионного анализа

Опр. ***Корреляционным анализом*** называется раздел математической статистики, исследующий зависимость между случайными величинами с помощью выборочных оценок соответствующих генеральных коэффициентов корреляции.

Опр. Выборка $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ объема n генеральной совокупности двумерной СВ (ξ, η) порождает две выборки $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ с выборочными средними и выборочными стандартными отклонениями соответственно $\bar{x}$, $\bar{y}$, s_X, s_Y. ***Выборочным коэффициентом корреляции*** называется число

$$r_{XY} := \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{s_X \, s_Y} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k y_k - \bar{x}\,\bar{y}}{s_X \, s_Y}.$$

ЗАМЕЧАНИ 1 $r_{YX} = r_{XY}$; $|r_{XY}| \leq 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 Корреляционный анализ позволяет установить степень взаимосвязи СВ, но не дает возможность предсказать значения одной СВ по значениям другой СВ.

Опр. ***Регрессионный анализ*** – раздел математической статистики, изучающий зависимость между случайными величинами с помощью функции регрессии.

Опр. Пусть даны СВ η и $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Для каждой функции $g(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ вычислим матожидание $M\left(\eta - g(\xi_1, .., \xi_n)\right)^2$. Функция $m(x_1, \ldots, x_n) := \arg\min_g M\left(\eta - g(\xi_1, .., \xi_n)\right)^2$, на которой достигается минимум этого функционала, называется ***регрессией*** (***функцией регрессоров***)

СВ* η *на СВ* (*регрессоры*)** $\xi_1,...,\xi_n$. График функции регрессоров называется ***поверхностью регрессии. Линейная функция, на которой достигается $\min\limits_{\alpha_0,...,\alpha_n} M\left(\eta-\alpha_0-\alpha_1\xi_1-...-\alpha_n\xi_n\right)^2$, называется (теоретической) ***линейной регрессией СВ*** η ***на СВ*** $\xi_1,...,\xi_n$.

ЗАМЕЧАНИЕ Большое число практических задач, связанных с определением влияния нескольких известных факторов на исход эксперимента, в статистике рассматривают как задачи определения функции регрессоров. С этой целью m наборам значений факторов $\{x_{1,1},...,x_{1,n}\},...,\{x_{m,1},...,x_{m,n}\}$ сопоставляют соответствующие им наблюдённые значения $y_1,...,y_m$ СВ η. Предполагается, что искомая регрессия принадлежит классу функций известного вида, зависящих о конечного числа параметров (например, классу многочленов), а наблюденные значения ассоциируют с независимыми одинаково распределенными СВ. Это позволяет применить метод наибольшего правдоподобия или метод наименьших квадратов для нахождения параметров регрессии.

Отметим некоторые свойства функции регрессоров.

ТЕОРЕМА 11.2 **1)** Регрессия СВ η на СВ $\xi_1,...,\xi_n$ совпадает с условным математическим ожиданием $m(x_1,...,x_n)=M\left(\eta\,|\,\xi_1=x_1,...,\xi_n=x_n\right)=\dfrac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\cdot p(x,x_1,...,x_n)dx}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x,x_1,...,x_n)dx}$,

где $p(x,x_1,...,x_n)$ есть плотность совместного распределения величин $\eta,\xi_1,...,\xi_n$.

2) Регрессия СВ η на СВ $\xi_1,...,\xi_n$ совпадает с функцией $g(x_1,...,x_n)$, на которой достигается максимум коэффициента корреляции случайных величин $\eta,\, g(\xi_1,...,\xi_n)$:

$$m(x_1,...,x_n)=\arg\max_g r_{\eta,\,g(\xi_1,...,\xi_n)}.$$

3) Если η есть нормальная СВ, а $\xi_1,...,\xi_n$ есть n-мерная нормальная СВ, то регрессия η на СВ $\xi_1,...,\xi_n$ совпадает с линейной регрессией.

4) Линейная регрессия СВ η на линейно независимые СВ $\xi_1,...,\xi_n$ (то есть $\det\Sigma\neq 0$) согласно теореме 10.8.2 имеет вид $M\eta+\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^0(x_k-M\xi_k)$, где $X^0=\begin{pmatrix}x_1^0\\ ...\\ x_n^0\end{pmatrix}$ есть решение СЛАУ $\Sigma\cdot X=\begin{pmatrix}\operatorname{cov}(\eta,\xi_1)\\ ...\\ \operatorname{cov}(\eta,\xi_k)\end{pmatrix}$.

5) Пусть регрессор один: $\hat\eta(x):=M(\eta\,|\,\xi=x),\ x\in\mathrm{R}$. Запишем линейную регрессию в виде $\hat\eta(x)=\alpha+\beta x$. Тогда: **а)** Если СВ η,ξ независимы, то регрессия η на ξ и регрессия ξ на η постоянны. Например, для ДСВ $\hat y_j=\sum\limits_{i=1}^{\infty}y_i\dfrac{P(\xi=x_j)P(\eta=y_i)}{P(\xi=x_j)}=M\eta$.

б) Так как по теореме 10.6.6 $\min\limits_{\alpha,\beta}M(\eta-\alpha-\beta\xi)^2=M\left(\eta-M\eta-r_{\xi\eta}\dfrac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}(\xi-M\xi)\right)^2\geq\min\limits_{g}M(\eta-g(\xi))^2$, то функция $y = M\eta + r_{\xi\eta}\dfrac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}(x - M\xi)$ дает наилучшее линейное приближение регрессии СВ η на СВ ξ.

Опр. По двумерной выборке $(x_1, y_1), ..., \overline{(x_N, y_N)}$ с одним регрессором теоретическую регрессию можно построить лишь приближенно. Приближение вида $y = A + Bx$ называется ***эмпирической линейной регрессией***. Для нахождения A, B воспользуемся методом наименьших квадратов: найдем минимум функции $Q(A,B) := \sum_{k=1}^{N}(y_k - A - Bx_k)^2$, решая систему уравнений $\dfrac{\partial Q}{\partial A} = 0,\ \dfrac{\partial Q}{\partial B} = 0$ и обозначая решение (A_0, B_0).

ТЕОРЕМА 11.3 **1)** $s^2 := \dfrac{Q(A_0,B_0)}{N-2} = \dfrac{N}{N-2}s_Y^2(1 - r_{XY}^2)$. **2)** Эмпирическая линейная регрессия Y на X имеет вид $\dfrac{y - \bar{y}}{s_Y} = r_{XY}\dfrac{x - \bar{x}}{s_X}$, и задает ***прямую регрессии*** Y ***на*** X.

3) Эмпирическая линейная регрессия X на Y имеет вид $\dfrac{x - \bar{x}}{s_X} = r_{XY}\dfrac{y - \bar{y}}{s_Y}$ и задает ***прямую регрессии*** X ***на*** Y. **4)** Прямые регрессии пересекаются в точке $(\bar{x}, \bar{y})$.

5) Если $|r_{XY}| = 1$, то в силу 3), 4) прямые регрессии совпадают, а в силу 1) соответствующие выборки функционально зависимы: $y_k = A_0 + B_0 x_k,\ k = 1, ..., N$.

6) Если $r_{XY} = 0$, то прямые регрессии $x = \bar{x},\ y = \bar{y}$ параллельны осям, а точки выборки разбросаны хаотично.

7) Доверительные интервалы с надежностью γ для параметров α, β равны соответственно $\left(A_0 - \dfrac{s}{s_X\sqrt{N}}\sqrt{\alpha_{2,X}}\,t_{\frac{1+\gamma}{2}}(N-2),\ A_0 + \dfrac{s}{s_X\sqrt{N}}\sqrt{\alpha_{2,X}}\,t_{\frac{1+\gamma}{2}}(N-2)\right)$, $\left(B_0 - \dfrac{s}{s_X\sqrt{N}}t_{\frac{1+\gamma}{2}}(N-2),\ B_0 + \dfrac{s}{s_X\sqrt{N}}t_{\frac{1+\gamma}{2}}(N-2)\right)$

где $\alpha_{2,X} = \dfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k^2$, $t_{\frac{1+\gamma}{2}}(N-2)$ - квантиль порядка $\dfrac{1+\gamma}{2}$ распределения Стьюдента с $N-2$ степенями свободы.

8) Доверительный интервал (коридор) с надежностью γ для теоретической линейной регрессии $y = \alpha + \beta x$ равен

$$\left(A_0 + B_0 x - \frac{s}{\sqrt{N}}\sqrt{1 + \frac{(x - \bar{x})^2}{s_X^2}}\,t_{\frac{1+\gamma}{2}}(N-2),\ A_0 + B_0 x + \frac{s}{\sqrt{N}}\sqrt{1 + \frac{(x - \bar{x})^2}{s_X^2}}\,t_{\frac{1+\gamma}{2}}(N-2)\right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Пусть регрессоров $n > 1$, и имеется N выборок $(x_{11}, ..., x_{1n}, y_1), ...,$ $(x_{N1}, ..., x_{Nn}, y_N)$. Эмпирическая линейная регрессия ищется в виде $y = a_0 + \sum_{k=1}^{n}a_k x_k$, а коэффициенты находятся методом МНК. В частном случае, если для матрицы

$X := \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{N1} & \ldots & x_{Nn} \end{pmatrix}$ $rang(X^T X) = n+1$, то коэффициенты находятся в явном виде по формуле $\begin{pmatrix} a_0 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_N \end{pmatrix}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 В случае одного регрессора эмпирическую нелинейную регрессию можно искать в виде $y = \sum_{k=1}^{m} a_k x^k$. В этом случае она называется ***полиномиальной***.

ГЛАВА 12 СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

§ 12.1 Определение. Классы случайных процессов

Опр. Пусть дано вероятностное пространство (Ω, B, P). ***Случайной функцией*** (***СФ***) называется отображение $X(t) = X(t,\omega): T \to H(\Omega, \mathrm{B}, P)$.

Опр. ***Процесс*** – изменение во времени состояний некоторой системы. Если T имеет мощность континуум, то $X(t)$ называется ***случайным процессом*** (***СП***).

Пр. Броуновское движение. Процесс протекания тока в электрической цепи. Морское волнение. Производственный процесс.

Опр. Если T есть конечное или счетное множество: $T = \{t_n\}$, то случайная функция называется ***случайной последовательностью*** или ***временным рядом*** (когда $t_n = n \in \mathbb{N}$) и обозначается $\{X_n(t)\}$.

Опр. Для каждого фиксированного $t_0 \in T$ СВ $X(t_0)$ ***называется сечением случайного процесса***, а для каждого фиксированного значения $\omega_0 \in \Omega$ функция $X(t,\omega_0): T \to \mathrm{R}$ называется ***реализацией*** (***траекторией***) ***случайного процесса***.

Пр. Случайное колебание $X(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, где ω - фиксированная частота, A, φ - независимые случайные величины (амплитуда и сдвиг по фазе), используется в радиофизике при исследовании амплитудно-фазовой модуляции сигналов.

Опр. Случайная функция считается ***заданной***, если $\forall t_1 < \ldots < t_n \in T$ $\forall x_1,..,x_n \in \mathrm{R}$ известна функция распределения $F_n(x_1,..,x_n;t_1,...,t_n) := P(X(t_1) \le x_1,..., X(t_n) \le x_n)$ каждой n-мерной случайной величины $\left(X(t_1),..., X(t_n)\right)$, называемая ***распределением вероятностей*** n***-ого порядка СФ*** $X(t)$). Случайная функция может задаваться и плотностью вероятности $f_n(x_1,..,x_n;t_1,...,t_n) := \dfrac{\partial^n F_n(x_1,..,x_n;t_1,...,t_n)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}$.

Опр. ***Условной функцией распределения случайной функции*** $X(t)$ называется функция $F(x;t \mid x_1,...,x_{n-1},x_n;t_1,...,t_{n-1},t_n) := P(X(t) < x \mid X(t_1) = x_1,..., X(t_n) = x_n)$, которая описывает сечение СФ в момент t при известных значениях сечений в предшествую щие моменты $t_1 \le \ldots \le t_n$.

Рассмотрим важные классы случайных процессов и последовательностей.

Опр. ***Случайная функция*** $X(t)$ называется ***марковской***, если $F(x;t\,|\,x_1,...,x_{n-1},x_n;\ t_1,...,t_{n-1},t_n)=F(x;t\,|\,x_n;t_n)$. То есть поведение СФ в будущем (при $t>t_n$) зависит только от данного момента t_n, и не зависит от предыстории.

ЗАМЕЧАНИЕ Определение марковского процесса дано А.А.Марковым в 1906 г. Основы общей теории марковских процессов заложены А.Н. Колмогоровым в 1931 г.

Опр. Марковская СФ называется ***цепью Маркова***, если множество ее значений конечное или счетное. Обычно это множество обозначают $\{1,2,...\}$.

Ма́рков Андре́й Андре́евич (1856-1922) - русский математик, академик. Ученик П.Л.Чебышёва. В работах 1907 г. положил начало изучению последовательностей зависимых испытаний и связанных с ними сумм случайных величин. Это направление исследований известно под названием ***теории цепей Маркова***. Продвинул классические исследования предшественников, касающиеся ***закона больших чисел*** и центральной предельной теоремы теории вероятностей.

ЗАМЕЧАНИЕ При рассмотрении цепи Маркова $X(t)$ в качестве числовых характеристик состояния некоторой физической системы берут числа из $\{1,2,...\}$ - ***множество состояний системы***. Событие $\{X(t)=i\}$ определяют как «***нахождение системы в состоянии*** i ***в момент*** t».

Марковская цепь задается функциями:

$p_i(t):=P(X(t)=i),\ t\geq 0$ - вероятность того, что система находится в состоянии i в момент t;

$p_{i,j}(s,t):=P(X(t)=j\,|\,X(s)=i),\ s,t\geq 0,\ i\neq j$ - ***вероятность перехода системы***.

ЗАМЕЧАНИЕ 1) Так как состояния системы образуют полную группу событий, то вероятности удовлетворяют равенствам $\forall t\ \forall i\geq 1\ \sum_i p_i(t)=1,\ \forall s,t\ \forall i\geq 1\ \sum_j p_{i,j}(s,t)=1.$

2) Вероятности перехода марковских цепей удовлетворяют уравнению Колмогорова-Чепмена $\forall s\leq u\leq t\ \ \forall i,j\geq 1\ \ p_{i,j}(s,t)=\sum_k p_{i,k}(s,t)p_{k,j}(s,t)$.

Для нахождения переходных вероятностей на цепь накладываются требования:

1) Существует ***плотность*** (***интенсивность***) ***перехода системы из состояния*** i ***в какое-либо другое в момент*** t $\lambda_i(t):=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{1-p_{i,i}(t,t+\Delta t)}{\Delta t}$;

2) Существует ***плотность перехода системы*** $u_{ij}(t)$ ***из состояния*** i ***в любое другое состояние*** $j\neq i$ ***в момент*** t, вычисляемая по формуле

$$\lambda_{ij}(t):=\lambda_i(t)u_{ij}(t):=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_{i,j}(t,t+\Delta t)}{\Delta t}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ ***Система дифференциальных уравнений Колмогорова*** для нахождения абсолютных и переходных вероятностей состояний системы имеет вид

$$\begin{cases}\dfrac{dp_i(t)}{dt}=\sum\limits_k p_k(t)\lambda_{k,i}(t)\\[2ex] \dfrac{\partial p_{i,j}(s,t)}{\partial t}=\sum\limits_k p_{i,k}(s,t)\lambda_{k,j}(t)\end{cases},\ \text{где } \lambda_{i,i}(t):=-\lambda_i(t).$$

Опр. Марковская цепь называется ***однородной*** (по времени), если ее ***переходные вероятности*** $p_{i,j}(s,t) = p_{i,j}(t-s)$ зависят от $t-s$. В этом случае $p_{i,j}(t)$ означает вероятность перехода из состояния i в состояние j за время t.

ЗАМЕЧАНИЕ 1) (*предельная теорема*) Если $\exists x_0 > 0 \ \forall x > x_0 \ \ \forall i, j \geq 1 \ \ p_{i\,j}(x) > 0$, то существуют независимые от индекса i конечные пределы $\lim\limits_{x\to\infty} p_{i\,j}(x) = p_j, \ \ j = 1, 2, \ldots$.

2) Переходные вероятности $p_{i\,j}(x)$ удовлетворяют уравнению Колмогорова-Чепмена $p_{i\,j}(x_1 + x_2) = \sum_k p_{i\,k}(x_1) p_{k\,j}(x_2)$ и системе уравнений $\begin{cases} \dfrac{dp_i(t)}{dt} = \sum\limits_k p_k(t)\lambda_{k,i} \\ \dfrac{dp_{i,j}(t)}{dt} = \sum\limits_k p_{i,k}(t)\lambda_{k,j} \end{cases}$.

Опр. Цепь Маркова называется ***стационарной***, если $\forall t \ \ P(X(t) = i) \equiv p_i, \ \ i = 1, 2, \ldots$.

ЗАМЕЧАНИЕ Если цепь Маркова имеет стационарное распределение $\{p_i\}$, то оно удовлетворяет системе линейных уравнений $\begin{cases} \sum_i p_i = 1 \\ \sum_i p_i q_{i\,j} = 0, \ \ j = 1, 2, \ldots \end{cases}$, где $q_{i,j} := \dfrac{dp_{i,j}}{dt}(0)$.

Опр. ***Цепь Маркова*** называется ***дискретной*** (цепью с дискретным параметром), если множество T конечное или счетное (обычно полагают $T := \{0, t_1, t_2, \ldots\}$).

Дискретная марковская цепь задается вероятностями $p_i(n) := P(X(t_n) = i)$,

$$p_{i,j}(n,m) := P(X(t_m) = j \mid X(t_n) = i), \ \ i \neq j.$$

Случайные функции являются объектом изучения ***теории массового обслуживания*** (Theory of Queues). Первые задачи теории были рассмотрены сотрудником Копенгаген ской телефонной компании, ученым Агнером Эрлангом, в период между 1908 и 1922 годами. Стояла задача упорядочить работу телефонной станции и заранее рассчитать качество обслуживания потребителей в зависимости от числа используемых устройств. В основу теории массового обслуживания легла ***теория потока однородных событий***, разработанная советским математиком А. Я. Хинчиным. Формально эта теория есть раз дел теории случайных процессов, исследующий потоки требований на обслуживание, поступающие (как правило, в случайные моменты времени) в систему массового обслуживания и покидающие ее после обслуживания.

Эрланг Агнер Краруп (1878 -1929) -датский математик, статистик и инженер. Э. была получена формула для расчета доли вызовов, получающих обслуживание на сельской телефонной станции и скольким придётся ожидать пока делаются внешние вызовы (1909). Формула была принята для использования в крупнейшей почтовой службе мира - Главном почтамте Великобритании. 20 лет прорабо тал в Копенгагенской телефонной компании. В его честь названа единица измерения трафика в телекоммуникационных системах - эрланг, а его формулы до сих пор используются при расчётах про пускной способности современных телекоммуникационных сетей.

Опр. ***Потоком однородных случайных событий*** называется случайный процесс с целочисленными неотрицательными значениями и непрерывным временем.

ЗАМЕЧАНИЕ Поток может задаваться двумя способами: 1) двухпараметрической ДСВ $X(t,\tau)$ - числом событий, наступивших в промежуток времени $\left[t, t+\tau\right]$.

2) распределением длительностей интервалов между осуществлениями событий $P(\xi_1 < x_1,...,\xi_n < x_n)$, где СВ $\xi_i := t_i - t_{i-1}$, $n \in \mathrm{N}$, а $t_0 \le t_1 \le t_2 \le ...$- моменты наступления событий.

Пр.

Опр. Поток событий называется ***стационарным***, если вероятность событий $X(t,\tau) = k$ зависит только от τ и k; если эта вероятность зависит и от t, то поток называется ***нестационарным***,

Опр. Поток событий называется ***потоком без последействия***, если для любых непере секающихся промежутков времени $\left[t_1, t_1+\tau_1\right]$, $\left[t_2, t_2+\tau_2\right]$ случайные величины $X(t_1,\tau_1)$ и $X(t_2,\tau_2)$- независимы: $\forall k_1, k_2$ $P\left((X(t_1,\tau_1)=k_1)\cdot(X(t_2,\tau_2)=k_2)\right) = P\left(X(t_1,\tau_1)=k_1\right)\cdot P\left(X(t_2,\tau_2)=k_2\right)$.

Опр. Поток событий называется ***ординарным***, если $P\left(X(t,\Delta t)=1\right) = \lambda(t)\Delta t + o(1)\Delta t$, $P\left(X(t,\Delta t)\ge 2\right) = o(1)\Delta t$. При этом $\lambda(t)$ называется ***интенсивностью*** (***плотностью***) ***ординарного потока в момент времени*** t.

Пр.

Опр. Ординарный поток без последействия называется ***пуассоновским потоком***.

ЗАМЕЧАНИЕ Для пуассоновского потока закон распределения СВ $X(t,\tau)$ имеет вид

$P(X(t,\tau)=k) = \dfrac{a(t,\tau)^k}{k!}e^{-a(t,\tau)}$, где $a(t,\tau) = \displaystyle\int_t^{t+\tau}\lambda(x)\,dx$, а функция $\lambda(x)$ называется ***интенсивностью пуассоновского потока***.

СЛЕДСТВИЕ Для стационарного пуассоновского потока $a(t,\tau)$ по определению не зависит от t. $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial a}{\partial t} = \lambda(t+\tau) - \lambda(t) \equiv 0$ $\Rightarrow$ $\lambda(\tau) \equiv \lambda$ $\Rightarrow$ $a(t,\tau) = \lambda\tau$ $\Rightarrow$ $P(X(t,\tau)=k) = \dfrac{(\lambda\tau)^k}{k!}e^{-\lambda\tau}$

Пр.

Опр. СП $X(t)$ называется ***гауссовским***, если каждая n- мерная случайная величина $\left(X(t_1),...,X(t_n)\right)$ является n- мерной нормальной случайной величиной.

ЗАМЕЧАНИЕ Каждый гауссовский процесс однозначно определяется своей корреляционной функцией $K_X(t_1,t_2)$.

§ 12.2 Характеристики случайных процессов и операции над ними.

Опр. ***Математическим ожиданием СП*** $X(t)$ называется неслучайная функция

$m_X(t) = M(X(t)) := \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\, p_{X(t)}(x)dx$. СП $\overset{\circ}{X}(t) := X(t) - m_X(t)$ называется ***центрированным***.

Дисперсией СП $X(t)$ называется неслучайная функция $D_X(t) := M(X(t) - m_X(t))^2$.

Пр.

Опр. ***Корреляционной*** (***нормированной корреляционной***) ***функцией СП*** $X(t)$ называются соответственно неслучайные функции двух переменных

$$K_X(t_1,t_2) := M(\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)) := \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1 - m_X(t_1))(x_2 - m_X(t_2))\, p_{X(t_1),X(t_2)}(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2 \,\mathbf{,}$$

$$\rho_X(t_1,t_2) := \frac{K_X(t_1,t_2)}{\sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2)}, \quad \text{где } \sigma_X(t) := \sqrt{D_X(t)}\,.$$

Опр. ***Взаимной корреляционной функцией СП*** $X(t),Y(t)$ называется неслучайная функция двух переменных

$$R_{X,Y}(t_1,t_2) := M(\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)) := \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1 - m_X(t_1))(x_2 - m_Y(t_2))\, p_{X(t_1),Y(t_2)}(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2\,.$$

ТЕОРЕМА 12.1 (*свойства характеристик СП*) 1) $R_{X,Y}(t_1,t_2) = R_{Y,X}(t_2,t_1)$.

2) Для детерминированных функций $\varphi(t), \psi(t)$ и $X_1(t) := X(t) + \varphi(t)$,

$$Y_1(t) := Y(t) + \psi(t) \qquad R_{X_1,Y_1}(t_1,t_2) = R_{X,Y}(t_1,t_2)\,.$$

3) Для детерминированных функций $\varphi(t),\ \psi(t)$ и $X_1(t) = \varphi(t)X(t),\ Y_1(t) = \psi(t)\,Y(t)$,

$$R_{X_1,Y_1}(t_1,t_2) = \varphi(t_1)\psi(t_2)\,R_{X,Y}(t_1,t_2)\,.$$

4) Для нормированной взаимной корреляционной функции $\rho_{X,Y}(t_1,t_2) := \dfrac{R_{X,Y}(t_1,t_2)}{\sigma_X(t_1)\sigma_Y(t_2)}$

имеет место оценка $\left|\rho_{X,Y}(t_1,t_2)\right| \le 1$.

5) $m_{X+Y}(t) = m_X(t) + m_Y(t)$. 6) $K_{X+Y}(t_1,t_2) = K_X(t_1,t_2) + K_Y(t_1,t_2) + R_{X,Y}(t_1,t_2) + R_{Y,X}(t_1,t_2)$.

7) Если СП $X(t),\ Y(t)$ не коррелированы, то есть $\forall t_1,t_2\ \ R_{X,Y}(t_1,t_2) = 0$, то

$$K_{X+Y}(t_1,t_2) = K_X(t_1,t_2) + K_Y(t_1,t_2)\,.$$

Опр. Обозначим как и ранее H гильбертово пространство случайных величин на вероятностном пространстве (Ω,B,P) с нормой $\|\xi\| := \sqrt{(\xi,\xi)}$. Говорят, что ***последовательность СВ*** $\{\xi_n\}$ ***сходится к СВ*** ξ ***по норме***: $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\,\xi_n := \xi$, если

$$\forall\varepsilon < 0\ \ \forall n > n(\varepsilon)\ \ \|\xi_n - \xi\| < \varepsilon\,.$$

Случайный процесс $X'(t): T \to H$ называется ***производной СП*** $X(t)$, если

$$\forall t_0 \in T\ \ \forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta > 0\ \ \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)\ \ \left\|\frac{X(t_0 + \Delta t) - X(t_0)}{\Delta t} - X'(t_0)\right\| < \varepsilon\,.$$

Обозначение $X'(t_0) := \underset{\Delta t\to 0}{l.i.m}\dfrac{X(t_0 + \Delta t) - X(t_0)}{\Delta t}$.

Опр. Для фиксированного $t > 0$ разобьем отрезок $[0,t]$ точками $0 := t_0 < t_1 < \ldots < t_n := t$ и образуем интегральную сумму $S(T,E) := \sum_{k=1}^{n} X(\tau_k)\Delta t_k,\ \ \tau_k \in [t_{k-1},t_k]$. Если $\forall t$ существует $\underset{d(T)\to 0}{l.i.m}\,S(T,E) =: \int_0^t X(\tau)d\tau$, то он называется ***интегралом СП*** $X(t)$.

ТЕОРЕМА 12.2 (*свойства производных и интегралов СП*)

1) $m_{X'}(t) = m'_X(t)$. **2)** $K_{X'}(t_1,t_2) = \dfrac{\partial^2 K}{\partial t_1 \partial t_2}(t_1,t_2)$. **3)** $R_{X,X'}(t_1,t_2) = \dfrac{\partial K_X}{\partial t_2}(t_1,t_2)$.

4) Для $Y(t) := \int_0^t X(\tau)d\tau$ $m_Y(t) = \int_0^t m_X(\tau)d\tau$. **5)** $K_Y(t_1,t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_X(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$.

6) $R_{X,Y}(t_1,t_2) = \int_0^{t_2} K_X(t_1,\tau_2)d\tau_2$.

Пр.

§ 12.3 Стационарные случайные процессы.

Опр. СП называется ***стационарным в узком смысле слова***, если $\forall h > 0$ $\forall t_1 < \ldots < t_n$ совместное распределение соответствующих сечений не зависит от h:

$$F_n(x_1,\ldots,x_n;t_1+h,\ldots,t_n+h) = F_n(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n).$$

ЗАМЕЧАНИЕ Для СП в узком смысле слова $m_X(t)$ не зависит от t, а $K_X(t_1,t_2)$ зависит от разности аргументов $t_2 - t_1$.

Опр. Случайный процесс называется ***стационарным в широком смысле слова*** (***ССП***), если $m_X(t)$ не зависит от $t: m_X(t) \equiv m_X$ а $K_X(t_1,t_2)$ зависит от разности аргументов $t_2 - t_1$: $K_X(t_1,t_2) \equiv k_X(t_2 - t_1)$.

Хи́нчин Алекса́ндр Я́ковлевич (1894-1959) — советский математик, член-корреспондент АН СССР (1939).

А. Я. Хинчин совместно с А.Н. Колмогоровым положил начало общей теории случайных процессов, в которой, в частности, дал определение стационарного случайного процесса.

Начиная с 1930 года занимался созданием теории массового обслуживания. Последний термин введен им в 50-ые годы.

В теории чисел - работы по метрической теории чисел и теории диофантовых приближений, по проблеме приближения действительных чисел рациональными.

ЗАМЕЧАНИЕ Всюду ниже мы рассматриваем ССП, и для него корреляционной функцией будем называть $k_X(t)$.

Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ Рассмотрим $\xi_k e^{\lambda_k t i}$ как случайное гармоническое колебание с амплитудой $\left|\xi_k e^{\lambda_k t i}\right| = \left|\xi_k\right|$ и фазой $\arg \xi_k$, причем $\xi_1,\ldots,\xi_n$ - некоррелированные СВ с нулевыми средними значениями. Тогда дисперсия составного случайного колебания $X(t) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^{\lambda_k t i}$ равна $D_X(t) = K_X(t,t) = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k$. Так как $D\xi_k = M\xi_k^2$ имеет смысл *средней энергии* случайного гармонического колебания $\xi_k e^{\lambda_k t i}$, то средняя энергия составного колебания равна сумме средних энергий составляющих колебаний.

ТЕОРЕМА 12.3 (*свойства ССП*) 1) $\forall t$ $\left|k_X(t)\right| \le k_X(0)$, $D_X(t) \equiv k_X(0)$;

2) Корреляционная функция ССП четная: $k_X(-t)=k_X(t)$;
3) Если $X(t)$ есть ССП, то $X'(t)$ тоже является ССП и $k_{X'}(t)=-k''_X(t)$.
4) $R_{X,X'}(t_1,t_2)=k'_t(t_2-t_1)=-R_{X',X}(t_1,t_2)$.
5) Если $X(t)$ есть ССП, то $Y(t)=\int_0^t X(\tau)d\tau$ не является ССП, и

$$K_Y(t_1,t_2)=\int_0^{t_2}(t_2-\tau)k_X(\tau)d\tau-\int_0^{t_1}(t_1-\tau)k_X(\tau)d\tau+\int_0^{t_2-t_1}(t_2-t_1-\tau)k_X(\tau)d\tau$$

Пр.

——

Опр. Преобразование Фурье корреляционной функции ССП $X(t)$ $s_X(\omega):=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}k_X(t)e^{-i\omega t}dt$ называется ***спектральной плотностью стационарного случайного процесса***.

ТЕОРЕМА 12.4 (*свойства спектральной плотности ССП***) 1)** $s_X(\omega)$ - четная функция.

2) Если $k_X(t)$ непрерывна, а $s_X(\omega)$ суммируема, то существует обратное преобразование Фурье $k_X(t):=\int_{-\infty}^{\infty}s_X(\omega)e^{i\omega t}d\omega$. В частности, $D_X=\int_{-\infty}^{\infty}s_X(\omega)d\omega$.

3) Пусть стационарная линейная система управления описывается дифференциальным уравнением $a_0y^{(n)}+...+a_ny=b_0x^{(m)}+...+b_mx$ с передаточной функцией $\Phi(p)=\frac{b_0p^m+...+b_m}{a_0p^n+...+a_n}$. Если эта система устойчива, и входной сигнал $X(t)$ является ССП, то выходной сигнал $Y(t)$ также является ССП и обладает свойствами:

а) $m_Y=\frac{a_0}{b_0}$, **б)** $k_Y(t):=\int_{-\infty}^{\infty}s_Y(\omega)e^{i\omega t}d\omega$, где $s_Y(\omega)=|\Phi(\omega i)|^2 s_X(\omega)$.

Пр. Спроектированы два стационарные линейные системы управления с передаточными функциями соответственно $\Phi_1(p)=\frac{4p+1}{3p+1}$, $\Phi_2(p)=\frac{p+1}{3p+1}$ спектральная плотность входного процесса равна $s_X(\omega)=\frac{12}{\pi(\omega^2+4)}$. Найти, какая из систем обеспечивает меньшую дисперсию выходного сигнала?

Опр. Стационарный случайный процесс $X(t)$ называется ***белым шумом***, если его спектральная плотность (в смысле обобщенного преобразования Фурье) постоянна: $s_X(\omega)\equiv s$. Величина $2\pi s$ называется ***интенсивностью белого шума***.

Пр. На вход стационарной линейной системы управления с передаточной функцией $\Phi(p)=\frac{p}{p^2+2hp+k^2}$, $k\ge h>0$ подается белый шум с интенсивностью $2\pi s$. Найти корреляционную функцию выходного ССП $Y(t)$.

ВОПРОСЫ К ПЕРВОМУ БЛОКУ

1) Опр. выборки объема m, размещения и перестановки. Пр. 2) Опр. сочетания и вероятности в классическом эксперименте. Пр. 3) Аксиоматическое опр. вероятности. 4) Опр. произведения событий и условной вероятности. Пр. 5) Опр. независимых, взаимно и попарно независимых событий. 6) Опр. несовместных событий и полной группы событий. Пр. 7) Теоремы о сумме и произведении случайных событий. 8) Опр. СВ, дискретной и непрерывной СВ. Пр. 9) Опр. функции распределения СВ и биномиального распределения. Пр. 10) Опр. 2-мерных дискрет ной и непрерывной СВ. 11) Опр. случайных отображения и функции СВ. Формула вычисления 12) Опр. матожидания и его свойства. 13) Опр. дисперсии и ее свойства. 14) Опр. коэффициен та корреляции и его свойства 15) Опр. начального, центрального моментов. Пр. 16) Опр. пока зательного распределения и функции надежности работы элемента.

ВОПРОСЫ КО ВТОРОМУ БЛОКУ

1) Опр. сходимости по вероятности, слабой сходимости. Т. Бернулли. 2) Опр. ковариационной матрицы и свойства n-мерной СВ. 3) Опр. репрезентативной, генеральной выборок и вариаци онного ряда. 4) Опр. статистического ряда, полигона частот и гисто граммы. 5) Опр. несмещен ной, состоятельной и эффективной статистических оценок. 6) Опр. метода моментов и метода максимального правдоподобия. 7) Опр. регрессионного анализа, регрессии и эмпирической ли нейной регрессии. 8) Опр. случайной функции и способ задания. Сечение и реализация СП. 9) Опр. марковского процесса, цепи Маркова и способ задания. 10) Опр.потока однородных собы тий, стационарного потока и способ задания. Пр. 11) Опр. потоков безпоследействия, ординар ного и пуассоновско го. Пр. 12) Опр. матожидания и корреляционной функции СП. Св.13) Опр стационарного СП и его свойства. Пр.14) Опр. спектральной плотности ССП и белого шума.Св

ТЕОРЕМЫ К ЭКЗАМЕНУ

1) Т.10.1 о свойствах независимых событий. 2) Т.10.2 о свойствах несовместных событий.
3) Т.10.4 о свойствах матожидания. 4) Т.10.5 о свойствах дисперсии.
5) Т.10.6 о свойствах коэффициента корреляции
6) Постановка задач метода моментов и метода максимального правдоподобия.
7) Т.11.2 о свойствах регрессии. 8) Вывести уравнение эмпирической линейной регрессии.
9) Т.12.1 о свойствах характеристик СП. 10) Т.12.2 о свойствах производной и интеграла от СП
11) Т.12.3 о свойствах стационарного СП.
12) Т. 10.4 о свойствах спектральной плотности стационарного СП.

ТИПЫ ЗАДАЧ НА ЭКЗАМЕН (ЗАЧЕТ)

1. Задачи на классическую вероятность. 2. Задачи на формулы полной вероятности и Байеса. 3. Задачи на формулу Бернулли и теоремы Лапласа. 4. Вычисление коэффициента корреляции двух ДСВ. 5. Вычисление вероятности по заданной плотности. 6. Задачи на функцию надежности. 7. Задачи на функцию от СВ. 8. Задача на полигон, гистограмму и выборочную функцию распределения. 9. Задача на метод максимального правдоподобия и выборочный метод. 10. Задача на проверку гипотезы с заданным уровнем значимости. 11. Нахождение выборочного уравнения прямой линии регрессии. 12. Задачи на вычисление характеристик ССП. 13. Нахождение спектральной плотности по корреляционной функции ССП.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М: Едиториал УРСС, 2005. 400 с.
2. Максимов Ю.Д. Математика. Выпуск 8. Математическая статистика. Опорный конспект. СПб.: СПбГПУ, 2002. 96 с.
3. Розанов Ю.А. Случайные процессы. М.: Наука, 1979. 184 с.
4. Математическая энциклопедия. Т.1-5. М: Советская Энциклопедия, 1977-1985.
5. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. М.: Наука, 1991. 432 с.
6. Абенгауз Г.Г., Тронь А.П., Копенкин Ю.Н., Коровина И.А. Справочник по вероятностным расчетам. М.: Воениздат, 1970. 536 с.
7. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 1999. 400 с.

8 . Wikipedia.

Шаталов Виктор Фёдорович (1.05.1927) педагог- новатор Народный учитель СССР (1990). Создатель нового направления в педагогике « ***педагогика сотрудничества*** ».

Разработал систему обучения с использованием ***опорных сигналов*** – взаимосвязанных 1) ***ключевых слов***, 2) ***услов ных знаков***, 3) ***рисунков***, 4) ***формул с кратким выводом***.

Оригинальная ***система интенсивного обучения*** Шатало ва, разработанная для средних и старших классов общеобра зовательной школы включает около ***200 педагогических открытий, самые важные из которых***:

1) ***Авторские учебные пособия***, представляющие программный материал главным образом ***в вербально-графических формах***, упрощающих процесс изложения, восприятия и запоминания.

2) ***Принцип открытых перспектив***, ориентированный на развитие творческого мышления

3) ***Принцип систематической обратной связи***, на базе разнообразных нестандарт-ных форм объективного учёта и контроля знаний каждого учащегося на каждом уроке, позволяющий отказаться от ученических дневников и классных журналов.

4) Вместо домашних заданий учащиеся получают ***обширные*** «***предложения***», объём и сложность которых варьируются на этапах обучения с учётом индивидуальных особенностей, а к окончанию курса приближаются к конкурсным и олимпиадным.

5) Практикуются оригинальные ***формы взаимопроверки учащихся***, в том числе в интересах увеличения времени для решения задач высокой сложности и развития продуктивного мышления.

6) Традиционные экзамены заменены работами по «***листам группового контроля***» и так называемыми релейными, выявляющими результат самостоятельной деятельно сти над всеми видами заданий.

7) Устранению дидактических противоречий способствует принцип бесконфликтнос ти учебной ситуации, то есть создание ***при участии родителей школьников*** соответ ствующих условий для занятий.

8) Широко используются ***игровые формы учебных занятий***.

Многие находки Шаталова используются не только школьными учителями, но и педагогами вузов и при обучении некоторым ***сложным*** профессиям.