ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ
Кафедра «Прикладная математика»

Конспект лекций

по курсу вариационного исчисления

Автор

Братищев А.В.

Ростов-на-Дону, 2016

Аннотация

Конспект лекций спецкурса для студентов направления 27.04.04 – управление в технических системах. Лекции читаются в мультимедийном режиме, поэтому конспект не содержит доказательств, рисунков и примеров. Предполагается, что студент имеет распечатку этого курса, а во время лекции вносит в соответствующие места распечатки (на обратной стороне листа) доказательства, рисунки, примеры, а также выделяет ключевые слова определений.

Спецкурс существенно опирается на курс математики автора для первого и второго семестров, конспект которого также выложен на сайте кафедры.

В связи с объемом курса 6 зачетных единиц я счел целесообразным половину этого объема использовать для введения в теорию цифровых автоматов и ее реализацию в MATLAB+ SIMULINK, что представляет безусловный интерес для данной специальности.

Представлен список вопросов к рубежным контролям, список теорем и список типов практических заданий к экзамену.

Автор:

доктор физ.-мат. наук,

профессор кафедры "Прикладная математика"

Братищев А.В.

СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА 1
ЭЛЕМЕНТЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1 Вариация функционала.

Напомним определение нормы и нормированного пространства.

Опр. Пусть E - векторное пространство над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$. Отобра жение $\|\cdot\|: E \to \mathbb{R}$, называется нормой, если оно обладает свойствами:

1) $\forall x \neq 0 \ \|x\| > 0$;
2) $\forall x \in E \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
3) $\forall x, y \in E \quad \|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Понятие нормы, как нетрудно заметить по её свойствам, обобщает понятие длины (модуля) вектора.
ЗАМЕЧАНИЕ 2 Элементы пространства E будем называть точками (хотя это и неграмотно, так как точки складывать нельзя).

Опр. Пара $(E, \|\cdot\|)$ называется нормированным пространством. Множество точек из E $D(e_0, R) := \{e \in E : \|e - e_0\| < R\}$ называется шаром с центром в e_0 и радиуса R или R-окрестностью точки e_0.

Опр. Отображение $\Phi : E \to \mathbb{R}$ называется функционалом. Функционал с дополнитель ным свойством $\forall e, f \in E \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \Phi(\alpha e + \beta f) = \alpha \Phi(e) + \beta \Phi(f)$ называется линейным функционалом.

Пр. $\Phi h := \int_a^b h(x) f(x) dx$

ЗАМЕЧАНИЕ Понятие функционала ввел Вольтера (1887), термин - Адамар (1910).
Ви́то Вольте́рра (1860-1940) - итальянский физик и математик. Член-корреспондент физико-математического отделения Петербургской академии наук (1908 год), почётный

член АН СССР (1926 год).

Наиболее известны его работы в области дифференциальных уравнений с частными производными, теории упругости, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, функционального анализа. После Первой мировой войны интересы сместились к приложению математических идей в биологии, в этой области он существенно переработал и развил результаты, полученные Пьером Феррхюльстом. Наиболее известный результат этой его работы - создание модели Лотки - Вольтерры $\begin{cases} x_t' = a_1 x - a_2 xy \\ y_t' = -b_1 y + b_2 xy \end{cases}$.

Опр. Функционал $\Phi : E \to \mathbb{R}$ называется непрерывным в точке e_0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall e \in D(e_0, \delta) \ \Rightarrow \ \Phi(e) \in D(\Phi(e_0), \varepsilon),$$

или иначе, из $\|e - e_0\| < \delta$ всегда следует $|\Phi(e) - \Phi(e_0)| < \varepsilon$. Функционал $\Phi : E \to \mathbb{R}$ называется непрерывным в нормированном пространстве (или просто непрерывным), если он непрерывен в каждой его точке (Фреше,1914).

Мори́с Рене́ Фреше́ (1878 -1973) - французский математик.
Основные труды по топологии и функциональному анализу.
В 1906 году ввёл современные понятия метрического пространства, компактности, полноты и др.
Работал также в области теории вероятностей.

ЗАМЕЧАНИЕ (*свойства непрерывного функционала*)

1) Линейный функционал Φ непрерывен тогда и только тогда, когда он непрерывен в начале координат.
2) Линейный функционал Φ непрерывен тогда и только тогда, когда

$$\exists R > 0 \ \forall f \in E \quad |\Phi(f)| \le \frac{1}{R} \|f\|,$$

то есть тогда и только тогда, когда он ограничен на E.
3) Величина $\|\Phi\| := \sup\limits_{f \in E} \dfrac{|\Phi(f)|}{\|f\|}$ называется нормой функционала. Векторное пространство $\mathrm{L}(E, \mathrm{R})$ всех непрерывных на E функционалов с так определённой нормой является нормированным пространством.

Обозначение. $C^n_{[a,b]}$ - бесконечномерное пространство непрерывно дифференцируемых до n - го порядка включительно на отрезке $[a,b]$ функций.

$C_{[a,b]} := C^0_{[a,b]}$ - пространство непрерывных на $[a,b]$ функций.

ЗАМЕЧАНИЕ Непосредственно по определению проверяется, что отображения

$$\|f\|_n := \sum_{k=0}^{n} \max_{x \in [a,b]} \left| f^{(k)}(x) \right|, \quad \|f\| := \|f\|_0 := \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

являются нормами соответственно в пространствах $C^n_{[a,b]}$ и $C_{[a,b]}$.

Пр. $\sin 2x \in C^1_{[0,\pi]} \quad \Rightarrow \quad \|\sin 2x\|_0 =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\|\sin 2x\|_1 =$

ЗАМЕЧАНИЕ Для семейства пространств $C^n_{[a,b]}$, $n = 1, 2, \dots$, имеют место такие связи норм, пространств и шаров: $\quad \|f\| \le \|f\|_1 \le \dots \le \|f\|_n$, $\qquad C_{[a,b]} \supset C^1_{[a,b]} \supset \dots \supset C^n_{[a,b]}$,

$$D(f_0, \varepsilon) := \{ f \in C_{[a,b]} : \|f - f_0\| < \varepsilon \} \quad \supset \quad D_1(f_0, \varepsilon) \quad \supset \dots \supset \quad D_n(f_0, \varepsilon).$$

Пр. Линейный по «переменной» $h(x)$ функционал $\Phi h := \int_a^b h(x) f(x) dx$, $\quad f \in C_{[a,b]}$, непрерывен на $C_{[a,b]}$.

Опр. Пусть функционал Φ определен в ε - окрестности точки f нормированного пространства E. Если его приращение $\Delta\Phi := \Phi(f+h) - \Phi(f)$ в этой точке представимо в виде $\Delta\Phi = \Phi'(f)h + \alpha_h \cdot \|h\|$, где $\Phi'(f)$ - линейный непрерывный функционал на E, а функционал $\alpha_h : D(f, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ обладает свойством $\lim\limits_{h \to 0} \alpha_h = 0$, то величина $\Phi'(f)h$ называется сильным дифференциалом функционала Φ в точке f, функционал $\Phi'(f)$ - сильной производной (производной Фреше) функционала Φ в точке f, а функционал Φ - дифференцируемым в точке f (Фреше,1914).

Пр.

Опр. Пусть функционал Φ определен в ε - окрестности точки f нормированного пространства E. Если существует предел по направлению $h \ne 0$

$$D\Phi(f, h) = \frac{d}{dt}\left[\Phi(f + ht)\right](0) := \lim_{t \to 0} \frac{\Phi(f + th) - \Phi(f)}{t},$$

то он называется слабым дифференциалом (дифференциалом Гато, первой вариацией) функционала Φ по направлению h. Если слабый дифференциал является линейным и непрерывным функционалом по h, то этот функционал обозначается $\Phi'_c(f)h := D\Phi(f, h)$, $\Phi'_c(f) \in L(E, \mathbb{R})$, и называется слабой производной (производной Гато) функционала Φ в точке f. (Гато,1913).

Пр.

Опр. Пусть функционал Φ определен в ε - окрестности точки f нормированного пространства E. Φ имеет локальный максимум (минимум) в точке f, если

$$\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall h \in D(f, \varepsilon) \quad \Phi(f+h) \le \Phi(f) \ \left(\Phi(f+h) \ge \Phi(f)\right) \qquad \text{(Фреше,1914)}$$

Опр. Пусть функционал Φ определен в окрестности точки $f \in C^1_{[a,b]}$. Φ имеет слабый локальный максимум в точке f (сильный локальный максимум в точке f), если

$$\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall h \in D_1(0, \varepsilon) \ \left(\forall h \in D(0, \varepsilon)\right) \quad \Phi(f+h) \le \Phi(f) \qquad .$$

Аналогично определяется слабый локальный минимум (сильный локальный минимум).

ЗАМЕЧАНИЕ Точка сильного экстремума необходимо является и точкой слабого экстремума, так как $D(0, \varepsilon) \supset D_1(0, \varepsilon)$.

ТЕОРЕМА 1.1 1) Пусть функционал Φ дифференцируем в точке f. Тогда имеет место равенство $\forall h \in E \;\; \Phi'_c(f)h = \Phi'(f)h$, то есть функционал Φ имеет слабую производную в этой точке, и обе производные совпадают.

2) Если слабая производная $\Phi'_c(e)$ функционала Φ существует в некоторой окрестности точки f, и непрерывна в этой точке по переменной e, то существует сильная производная L_f и $\forall h \;\; \Phi'(f)h = \Phi'_c(f)h$.

3) (*необходимое условие локального экстремума функционала*) Пусть функционал Φ имеет локальный экстремум в точке f и имеет первую вариацию по любому h в этой точке. Тогда $\forall h \neq 0 \;\; D\Phi(f,h) = 0$.

Опр. Под билинейной формой на нормированном пространстве E понимаем билинейую форму $B(h',h''): E^2 \to \mathrm{R}$ со свойством: $\exists C > 0 \;\; \forall h', h'' \in E \quad B(h',h'') < C\|h'\| \cdot \|h''\|$.

ЗАМЕЧАНИЕ Последнее условие равносильно непрерывности билинейной формы по совокупности переменных.

Обозначение. Множество непрерывных билинейных форм является векторным пространством и обозначается $B(E^2, \mathrm{R})$.

Опр. Пусть производная $\Phi'(e)$ функционала Φ существует в некоторой окрестности точки f. Пусть она, в свою очередь, имеет слабую производную в этой точке:

$$D\Phi'(f,h) = \frac{d}{dt}\left[\Phi'(f+ht)\right](0) := \lim_{t \to 0} \frac{\Phi'(f+th) - \Phi'(f)}{t}.$$

Предел понимается по норме пространства $\mathrm{L}(E,\mathrm{R})$. Эта производная обозначается $\Phi''_c(f)h := D\Phi'(f,h)$ и называется второй производной функционала Φ.

$\Phi''_c(f) \in \mathrm{L}(E, \mathrm{L}(E,\mathrm{R}))$ по определению.

ЗАМЕЧАНИЕ $\Phi''_c(f)h_1 \in \mathrm{L}(E,\mathrm{R})$, поэтому $\left[\Phi''_c(f)h_1\right]h_2$ есть билинейная форма из $B(E^2,\mathrm{R})$.

Напомним достаточные условия экстремума функции двух переменных.

ЗАМЕЧАНИЕ Пусть функция $f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно в окрестности точки $M_0 = (x_0, y_0)$. Запишем для нее формулу Тейлора в окрестности этой точки $f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0,y_0) =$

$$= \left(f'_x h_1 + f'_y h_2\right) + \frac{1}{2}\left(f''_{xx}(M_0)h_1^2 + 2f''_{xy}(M_0)h_1h_2 + f''_{xx}(M_0)h_2^2\right) + o(1)\|h\|^2 =$$

$$=: Lh + \frac{1}{2}B(h,h) + o(1)\|h\|^2,$$

где $h := \{h_1, h_2\} \in \mathrm{R}^2$, $L: \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ - линейный функционал на R^2,

$$B(h',h'') = h'^T H h'' := (h'_1 \; h'_2)\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h''_1 \\ h''_2 \end{pmatrix} \text{ -}$$

билинейная форма на R^2. Тогда, если точка $M_0=(x_0,y_0)$ подозрительная на экстремум: $f'_x(M_0)=f'_y(M_0)=0$ и квадратичная форма $B(h,h)$ положительно определена, то M_0 есть точка локального минимума.
Этот результат распространяется и на функционалы на бесконечномерном пространстве.

Опр. Пусть функционал Φ на нормированном пространстве E дважды дифференцируем в окрестности точки f: $\Phi(f+h)-\Phi(f)=Lh+B(h,h)+\alpha_h\|h\|^2$, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\alpha_h}{\|h\|}=0$, где L - непрерывный линейный функционал на E, $B(h,h)$- непрерывный квадратичный функционал, то есть функционал, определяемый непрерывной билинейной формой: $\exists C>0\ \forall h',h''\quad B(h',h'')<C\|h'\|\cdot\|h''\|$. Тогда $B(h,h)$ называется второй вариацией функционала Φ и обозначается $\delta^2\Phi(h):=B(h,h)$.

ТЕОРЕМА 1.2 (*достаточное условие экстремума в* E)
Пусть функционал Φ дважды дифференцируем в стационарной точке $f\in E:\delta\Phi=L=0$.
Если $\exists C>0\ \forall h\quad \delta^2\Phi(h)\ge C\|h\|^2\ \ (\le -C\|h\|^2)$, то f есть точка локального минимума (максимума).

§ 1.2 Задачи на безусловный экстремум.

ЛЕММА (*основная*) Пусть $f\in C_{[a,b]}$ и $\forall h\in C^1_{[a,b]},\ h(a)=h(b)=0,\quad \int\limits_a^b h(x)f(x)dx=0$. Тогда $f(x)\equiv 0$.

ТЕОРЕМА 1.3 (*задача с закрепленными концами*) Пусть функция $F(x,y,z)$ имеет непре рывные частные производные по всем переменным (по $x\in[a,b]$) до второго порядка включительно.

1) Если функционал

$$\Phi(y)=\int\limits_a^b F\big(x,y(x),y'(x)\big)dx \qquad (1)$$

достигает слабый экстремум на функции $y(x)$ (во множестве функций из $C^1_{[a,b]}$) с граничными условиями

$$f(a)=A,\ \ f(b)=B, \qquad (2)$$

то эта функция необходимо удовлетворяет на $[a,b]$ дифференциальному уравнению Эйлера второго порядка

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=0. \text{ (Эйлер, 1744. Лагранж, 1759)} \qquad (3)$$

2) (*необходимое условие Якоби*, 1837) Вычислим функции $F_{xx},F_{xy'},F_{y'y'}$ на экстремали $y(x)$, и образуем по ним уравнение Якоби $\left(F_{xx}-\dfrac{d}{dx}F_{xy'}\right)u(x)-\dfrac{d}{dx}\big(F_{y'y'}u'(x)\big)=0$. Для

него должно существовать решение $u(x)$ со свойством $u(a)=0,\ \forall x\in(a,b]\ u(x)\neq 0$.

3) (*необходимое условие Вейерштрасса*, 1879) Если функционал (1) достигает сильный максимум (минимум) на функции $y(x)$ (во множестве функций из $C_{[a,b]}$) с граничными условиями (2), то функция Вейерштрасса

$$E(x,y,y',k):=F(x,y,k)-F(x,y,y')-(k-y')F_{y'}(x,y,y')$$

неположительна (неотрицательна) для любых значений k и точек экстремалей (x,y).

ЗАМЕЧАНИЕ 1) Если $F(x,y,y')=F(y,y')$, то из

$$\frac{1}{y'}\left(F-F'_{y'}\,y'\right)'_x=F'_y-F''_{y'y}\,y'_x-F''_{y'y'}\,y''_{x^2}=F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0 \quad\Rightarrow\quad F-F'_{y'}\,y'=C.$$

2) Если $F(x,y,y')=F(x,y')$, то из $0=F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=-\frac{d}{dx}F'_{y'} \quad\Rightarrow\quad F'_{y'}=C$.

Опр. (*Кнезер, 1900*) Решение уравнения Эйлера, удовлетворяющее граничным условиям, называется экстремалью.

Леона́рд Э́йлер (1707-1783) - выдающийся математик, механик, физик, астроном XVIII века. Автор более чем 800 работ по теории чисел, математическому анализу, дифференциальной геометрии, приближённым вычислениям, небесной механике,математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и др Вместе с Лагранжем создал вариационное исчисление.
Почти полжизни провёл в России (1726-1741, 1776-1783). Внёс существенный вклад в становление российской науки.
Первые русские академики С. К. Котельников, С. Я. Румовский - его ученики.

Карл Ве́йерштрасс (1815-1897) - немецкий математик. Сформулировал логическое обоснование анализа на основе построенной им теории действительных (вещественных) чисел и так называемого ε-δ-языка. Ввел определение непрерывности. Систематически использовал поня тия верхней и нижней грани и предельной точки числовых множеств. Заложил основы теории целых функций и функций нескольких компле ксных переменных. В геометрии создал теорию минимальных поверх ностей, внёс вклад в теорию геодезических линий. В линейной алгебре им разработана теория элементарных делителей. Придал современный вид основаниям вариационного исчисления. Открыл условия сильного экстремума и достаточные условия экстремума, исследовал разрывные решения классических уравнений.

Карл Яко́би (1804-1851) - немецкий математик. Иностранный член-корреспондент Петербургской Академии наук. Внёс огромный вклад в комплексный анализ, линейную алгебру, динамику, вариационное исчисление и другие разделы математики и механики.
Родной (младший) брат российского академика, физика Бориса Якоби.

Пр. Среди гладких кривых, соединяющих точки $(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ y_1, y_2 \ge 0$, найти ту, которая при вращении вокруг оси OX образует поверхность наименьшей площади. Кривая, задаваемая этой функцией, называется ***цепной линией*** (Гюйгенс, 1691).

____

ТЕОРЕМА 1.4 (*задача на экстремум для функции двух переменных*) Пусть функция $F(x, y, z, u, v)$ имеет непрерывные частные производные по всем переменным (по $(x, y) \in \bar{G}$) до второго порядка включительно на замкнутой области $\bar{G}$ с кусочно гладкой границей. Рассмотрим непрерывный функционал $\Phi(z) = \iint\limits_G F(x, y, z(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y})\, dx\, dy$ на множестве дважды непрерывно дифференцируемых на $\bar{G}$ функций, принимающих заданное значение $\varphi(x, y)$ на $\Gamma = \Gamma G$. Если его экстремум достигается на функции $z(x, y)$, то последняя необходимо удовлетворяет уравнению Эйлера-Остроградского

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z'_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z'_y} = 0.$$

В доказательстве используются теорема 2, формула Грина и обобщение леммы на случай области $\bar{G}$.

Пр. Найти поверхность $\boldsymbol{L}$ наименьшей площади, натянутую на гладкий пространствен ный контур. Площадь поверхности, задаваемой функцией $z = z(x, y)$, $(x, y) \subset \bar{G}$, вычисляется по формуле $S(\boldsymbol{L}) = \iint\limits_G \sqrt{1 + z_x'^2 + y_x'^2}\, dxdy$.

Это нелинейное ДУЧП второго порядка называется уравнением минимальной поверхности. Для него нужно решить задачу Дирихле с граничным условием $z(x, y)\big|_{\Gamma G} = \varphi(x, y)$.

____

ТЕОРЕМА 1.5 (*задача с закрепленными концами в случае* n *функций*) Пусть функция $F(x, y_1, z_1, ..., y_n, z_n)$ имеет непрерывные частные производные по всем переменным (по $x \in [a, b]$) до второго порядка включительно. Если непрерывный функционал

$$\Phi\left(y_1, ..., y_n\right) := \int\limits_a^b F(x, y_1(x), y_1'(x), ..., y_n(x), y_n'(x))dx$$

на множестве непрерывно дифференцируемых кривых в $\tilde{\mathrm{R}}^{n+1}$ $l = \left\{(x, y_1(x), ..., y_n(x) \in \tilde{\mathrm{R}}^{n+1}) : x \in [a, b]\right\}$, соединяющих две точки $A = (a, a_1, ..., a_n),\ B = (b, b_1, ..., b_n)$, достигает экстремума на некоторой кривой, то соответствующие функции $y_1(x), ..., y_n(x)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений Эйлера $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y_1} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y_1'} = 0 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .. \\ \dfrac{\partial F}{\partial y_n} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y_n'} = 0 \end{cases}$

Опр. Пусть дана гладкая поверхность $\mathrm{L}: \begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v), \quad (u,v) \in D \subset \tilde{\mathrm{R}}^{22} \\ z = \chi(u,v) \end{cases}$. Фиксируем две точки $A, B \in \mathrm{L}$. Линия минимальной длины, соединяющая эти точки и лежащая на поверхности L, называется геодезической линией.

ЗАМЕЧАНИЕ Геодезия – от *греч.* $\gamma\varepsilon\omega\delta\alpha\iota\sigma\iota\alpha$ межевание земель. Лаплас ,1798.

Уравнение геодезической будем искать в параметрической форме

$$l: \begin{cases} x = \varphi(u(t), v(t)) \\ y = \psi(u(t), v(t)), \quad t \in [\alpha, \beta], \\ z = \chi(u(t), v(t)) \end{cases}$$

причем $A = (\varphi(u(\alpha), v(\alpha)),\ \psi(u(\alpha), v(\alpha)),\ \gamma(u(\alpha), v(\alpha)))$,

$B = (\varphi(u(\beta), v(\beta)),\ \psi(u(\beta), v(\beta)),\ \chi(u(\beta), v(\beta)))$.

Длина пространственной кривой вычисляется по формуле $\rho(l) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\, dt =$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi_u' u_t' + \varphi_v' v_t')^2 + (\psi_u' u_t' + \psi_v' v_t')^2 + (\chi_u' u_t' + \chi_v' v_t')^2}\, dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{E u_t'^2 + 2F u_t' v_t' + G v_t'^2}\, dt,$$

где $E = \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \chi}{\partial u}\right)^2$, $F = \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} + \dfrac{\partial \psi}{\partial u}\dfrac{\partial \psi}{\partial v} + \dfrac{\partial \chi}{\partial u}\dfrac{\partial \chi}{\partial v}$, $G = \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \chi}{\partial v}\right)^2$.

ПРИМЕР Найти уравнения геодезических линий на круговом цилиндре.
Его уравнение в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\mathrm{L}: \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta, \quad \theta, r \in \mathrm{R}, \\ z = r \end{cases} \Rightarrow \quad l: \begin{cases} x = a\cos\theta(t) \\ y = a\sin\theta(t), \quad t \in [\alpha, \beta]. \\ z = r(t) \end{cases}$$

Координаты конечных точек линии обозначим

$$\begin{cases} A = (a\cos\theta(\alpha), a\sin\theta(\alpha), r(\alpha)) =: (a\cos\theta_1, a\sin\theta_1, r_1) \\ B = (a\cos\theta(\beta), a\sin\theta(\beta), r(\beta)) =: (a\cos\theta_2, a\sin\theta_2, r_2) \end{cases}.$$

Имеем $E = a^2 sin^2\theta + a^2 cos^2\theta = a^2, \quad F = -a\, sin\theta \cdot 0 + a\, cos\theta \cdot 0 = 0, \quad G = 1 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \Phi(l) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{a^2\theta_t'^2 + r_t'^2}\, dt \quad \Rightarrow \quad F(t, u, u', v, v') = \sqrt{a^2\theta_t'^2 + r_t'^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \theta} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial F}{\partial} = -\dfrac{d}{dt}\dfrac{a^2\theta'_t}{\sqrt{a^2\theta_t'^2 + r_t'^2}} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial r} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial F}{\partial r'} = -\dfrac{d}{dt}\dfrac{r'_t}{\sqrt{a^2\theta_t'^2 + r_t'^2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a^2\theta'_t}{\sqrt{a^2\theta_t'^2 + r_t'^2}} = C_1 \\ \dfrac{r'_t}{\sqrt{a^2\theta_t'^2 + r_t'^2}} = C_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{d\theta} = C \quad \Rightarrow \quad r = C\theta + D.$$

Подставим в последнее уравнение граничные условия.

$$\begin{cases} r_1 = C\theta_1 + D \\ r_2 = C\theta_2 + D \end{cases} \Rightarrow \quad C = \frac{r_2 - r_1}{\theta_2 - \theta_1}, \ D = \frac{r_1\theta_2 - r_2\theta_1}{\theta_2 - \theta_1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{r_2 - r_1}{\theta_2 - \theta_1}\theta + \frac{r_1\theta_2 - r_2\theta_1}{\theta_2 - \theta_1}, \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2], \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad l: \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = \dfrac{r_2 - r_1}{\theta_2 - \theta_1}\theta + \dfrac{r_1\theta_2 - r_2\theta_1}{\theta_2 - \theta_1}, \end{cases}, \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2].$$

Это уравнение куска спирали с концами A, B на цилиндре.

§ 1.3 Достаточное условие экстремума. Прямые методы вариационного исчисления.

ТЕОРЕМА 1.6 (*достаточные условия слабого и сильного экстремума*) Пусть функция $F(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно (по $x \in [a,b]$). Пусть экстремаль $y_0(x)$ функционала (1) удовлетворяет условию Якоби и условию Вейерштрасса: функция Вейерштрасса $E(x, y, y', k) \ge 0$ для точек (x, y), близких к точкам экстремали, и для y', близких к k (для произвольных y').
Тогда экстремаль $y_0(x)$ доставляет слабый (сильный) экстремум функционалу (1).

Пр. Экстремалью для функционала $\Phi(y) := \int_a^b \sqrt{1 + y_x'^2}\,dx$ с граничными условиями $y(a) = A,\ y(b) = B$ будет прямая $y = \dfrac{B - A}{b - a}(x - a) + A$. Проверим для неё условия Якоби и Вейерштрасса.

Опр. Прямыми методами вариационного исчисления называются приближенные численные методы, дающие непосредственное решение вариационной задачи, то есть не сводящие ее решение к решению дифференциальных уравнений Эйлера. Это методы Ритца, Канторовича, Галёркина.

ТЕОРЕМА 1.7 (*алгоритм метода Ритца*, 1908) Требуется найти минимум функционала

$$\Phi(y) := \int_a^b F(x, y, y'_x)\,dx \to \min, \quad y(a) = A, \ y(b) = B.$$

1) Выбирается подходящая линейно независимая система функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x),...$ со Свойством: $\varphi_0(a) = A,\ \varphi_0(b) = B, \quad \forall k \in \mathrm{N}\ \varphi_k(a) = 0,\ \varphi_k(b) = 0$.

2) Линейная комбинация $y_n(x) := \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k(x)$ подставляется в функционал Φ, и

получается функция от n переменных $G(\lambda_1,...,\lambda_n) := \Phi(y_n)$.

3) Для этой функции решается задача на минимум и по решению $\lambda_{n,1},...,\lambda_{n,n}$ этой

задачи выписывается n-ое приближение $y_n(x) := \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} \varphi_k(x)$.

4) Процесс нахождения $y_n(x)$ оканчивается, когда разность $y_n(x) - y_{n-1}(x)$ удовлетворяет требуемой точности.

Пр. $\Phi(y) := \int_0^1 (y_x'^2 + 4xy)dx,\ \ y(0) = 0,\ \ y(1) = 1$. Сначала найдем точное решение.

Теперь найдем приближенное решение методом Ритца при $n = 2$. Положим $\varphi_0(x) := x,\ \varphi_1(x) := x^2 - x,\ \varphi_2(x) := x^3 - x^2$. $\varphi_0(0) = 0,\ \varphi_0(1) = 1,\ \varphi_k(0) = \varphi_k(1) = 0,\ k = 1,2$, то есть выполнены условия пункта 1).

§ 1.4 Условный экстремум и задача Лагранжа.

При формулировке задачи Лагранжа на условный экстремум для функции n переменных $M = (x_1,...,x_n) \in X \subseteq \tilde{\mathrm{R}}^n$ нам понадобятся понятия неявного отображения и n-мерного непрерывно дифференцируемого многообразия.

Опр. Пусть для каждой точки $M = (x_1,...,x_n) \in X$ система уравнений

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m) = 0 \\ \quad . \quad . \quad . \\ \Phi_m(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m) = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

с m неизвестными $(y_1,...,y_m)$ имеет одно (выделенное) решение, то есть задано правило, сопоставляющее каждой точке M точку $(y_1,...,y_m) \in \tilde{\mathrm{R}}^m$. Это правило называется неявным отображением от n переменных из X в $\tilde{\mathrm{R}}^m$.

ПРИМЕР СЛАУ $\begin{cases} a_{11}y_1 + ... + a_{1n}y_n = x_1 \\ . \quad . \quad . \\ a_{n1}y_1 + ... + a_{nn}y_n = x_n \end{cases}$ с определителем матрицы коэффициентов

$\Delta := \det A \neq 0$ имеет единственное решение для каждой точки $M = (x_1,...,x_n) \in \tilde{\mathrm{R}}^m$. В данном случае соответствующее отображение выписывается в явном виде по формулам Крамера $(y_1,...,y_n)=\left(\frac{\Delta_1}{\Delta},...,\frac{\Delta_n}{\Delta}\right)$.

Опр. В случае, когда $m=1$, система (4) вырождается в одно уравнение $\Phi(x_1,...,x_1,y)=0$, и соответствующее неявное отображение из X в R называется неявной функцией от n переменных.

ПРИМЕР Пусть $x^2+y^2=1 \quad \Rightarrow \quad y=\pm\sqrt{1-x^2}$. Таким образом, имеем бесконечное число определенных на множестве $X=[-1,1]$ решений уравнения, из которых только два $y_1=\sqrt{1-x^2}, \quad y_2=\sqrt{1-x^2}$ непрерывны на $X=[-1,1]$ и дифференцируемы на $(-1,1)$.

Опр. Образуем по отображению $F(M)=(f_1(M),...,f_m(M)):X\to\tilde{\mathrm{R}}^m$ систему уравнений $\begin{cases} f_1(x_1,...,x_n)-y_1=0 \\ \quad . \quad . \\ f_m(x_1,...,x_n)-y_m=0 \end{cases}$. Если эта система на некотором множестве $Y\subseteq\tilde{\mathrm{R}}^m$ определяет неявное отображение в множество X, то такое отображение называется правым обратным к $F(M)$ на множестве Y. При дополнительном условии биективности $F(M)$ из X на Y это неявное отображение обозначается F^{-1} и называется обратным к отображению F на множестве Y.

ПРИМЕР Отображение $F(x):=(x,-x):\mathrm{R}\to\tilde{\mathrm{R}}^2$ порождает систему $\begin{cases} y_1=x \\ y_2=-x \end{cases}$, и биективно отображает множество $X=\mathrm{R}$ на множество $Y:=\left\{(y_1,y_2)\in\tilde{\mathrm{R}}^2 : y_1+y_2=0\right\}$, являющееся прямой в $\tilde{\mathrm{R}}^2$. Поэтому существует обратное отображение $F^{-1}:Y\to\mathrm{R}$, $F^{-1}(y_1,y_2):=y_1$, к F. Действительно,

$$F^{-1}\circ F:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\quad [F^{-1}\circ F](x)=x. \qquad F\circ F^{-1}:Y\to Y,\quad [F\circ F^{-1}](y_1,y_2)=(y_1,y_2).$$

Опр. Определитель матрицы Якоби отображения $F(M)=(f_1(M),...,f_n(M)):X\to\tilde{\mathrm{R}}^n$ называется якобианом.

Обозначение. $\frac{\partial(f_1,...,f_n)}{\partial(x_1,...,x_n)}:=\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$. Понятие - Эйлер, 1759. Обозначение - Донскин, 1854. Термин - Кэли, Сильвестр, 1856.

ТЕОРЕМА 1.8 (*дифференцируемость неявных отображений*)

1) Пусть функции $\Phi_1,...,\Phi_m$:

а) имеют непрерывные частные производные в окрестности точки $N_0=(x_1^0...x_n^0,y_1^0...y_m^0)$,

б) $\Phi_1(N_0)=...=\Phi_m(N_0)=0$,

в) якобиан $\det\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial y_j}(N_0)\right)=\frac{\partial(\Phi_1,...\Phi_m)}{\partial(y_1,...,y_m)}(N_0)\neq 0$.

Тогда:

а) на некотором шаре $D(M_0,\varepsilon)$ с центром в точке $M_0 := (x_1^0,...,x_n^0)$ существует непрерывно дифференцируемое неявное отображение

$$F(M) = (f_1(M),..., f_m(M)) : D(M_0,\varepsilon) \to \tilde{\mathrm{R}}^m;$$

б) частные производные его координатных функций $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ в точках $M(x_1,...,x_n) \in D(M_0,\varepsilon)$ находятся из решения следующих СЛАУ, в которых $N = (x_1,...,x_n, f_1(M),..., f_m(M))$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_j}(N) + \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y_1}(N)\dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(M) + ... + \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y_m}(N)\dfrac{\partial f_m}{\partial x_j}(M) = 0 \\ . \quad . \quad . \\ \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial x_j}(N) + \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial y_1}(N)\dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(M) + ... + \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial y_m}(N)\dfrac{\partial f_m}{\partial x_j}(M) = 0 \end{cases}, \quad j = 1,...,n. \qquad (5)$$

2) Пусть отображение $F(M) = (f_1(M),..., f_n(M)) : X \to \tilde{\mathrm{R}}^n$, $X \subseteq \tilde{\mathrm{R}}^n$, непрерывно дифференцируемо в окрестности точки M_0 и его якобиан в этой точке $\dfrac{\partial(f_1,..., f_n)}{\partial(x_1,...,x_n)}(M_0) \neq 0$. Обозначим $K_0 := F(M_0)$. Тогда в некоторой окрестности $D(K_0,\varepsilon)$ точки K_0 существует обратное непрерывно дифференцируемое отображение $F(K) = \left(g_1(K),...,g_n(K)\right) : D(K_0,\varepsilon) \to \tilde{\mathrm{R}}^n$, и его матрица Якоби является обратной к матрице Якоби исходного отображения: $\left(\dfrac{\partial g_i}{\partial y_j}(K)\right) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(M)\right)^{-1}$, где $K := F(M)$.

ПРИМЕР Найдем матрицу Якоби в точке $t_0 = 2$ неявного отображения

$F(t) = (f_1(t), f_2(t) : \mathrm{R} \to \tilde{\mathrm{R}}^2$, определяемого системой уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2}t^2 \\ x + y = 2 - t. \end{cases}$.

Сначала найдем соответствующую $M_0 = t_0 = 2$ точку N_0.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ x + y = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2, \\ x = -y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = 1 \end{cases}.$$

То есть одна точка $M_0 = 2$ порождает две точки $N_1(2,1,-1)$, $N_2(2,-1,1)$. Проверим выполнимость условий существования неявных отображений $F(t) = (f_1(t), f_2(t))$,

порождаемых этими точками. Для функций $\begin{cases} \Phi_1(t,x,y) = x^2 + y^2 - \dfrac{1}{2}t^2 \\ \Phi_2(t,x,y) = x + y - 2 + t. \end{cases}$ имеем

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x}(N) & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y}(N) \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x}(N) & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y}(N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x}(N_1) & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y}(N_1) \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x}(N_1) & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y}(N_1) \end{vmatrix} = 4, \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x}(N_2) & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y}(N_2) \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x}(N_2) & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y}(N_2) \end{vmatrix} = -4 .$$

Составим СЛАУ (5) $\begin{cases} -t + 2xf_1' + 2yf_2' = 0 \\ 1 + \quad f_1' + \quad f_2' = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad f_1' = \dfrac{t+2y}{2x-2y}, \quad f_2' = \dfrac{-2x-t}{2x-2y}$.

Поэтому для точки $N_1(2,1,-1)$ матрица Якоби неявного отображения равна $\begin{pmatrix} f_1'(2) \\ f_2'(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

А для точки $N_2(2,-1,1)$ она равна $\begin{pmatrix} f_1'(2) \\ f_2'(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Опр. Пусть в системе уравнений

$$\begin{cases} \Psi_1(x_1,\dots,x_n) = 0 \\ \quad . \quad . \\ \Psi_m(x_1,\dots,x_n) = 0 \end{cases}, \quad m < n, \qquad (6)$$

а) функции $\Psi_1,\dots,\Psi_m$ непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $N_0 = (x_1^0,\dots,x_n^0)$,
б) $\Psi_1(N_0) = \dots = \Psi_m(N_0) = 0$, и, например,
в) $\dfrac{\partial(\Psi_1,\dots,\Psi_m)}{\partial(x_1,\dots x_m)}(N_0) \neq 0$.

Тогда по предыдущей теореме в некоторой окрестности точки $M_0 := (x_{m+1}^0,\dots,x_n^0)$ существует непрерывно дифференцируемое неявное отображение

$$F(x_{m+1},\dots,x_n) = F(M) = (f_1(M),\dots,f_m(M)) :\ D_{n-m}(M_0,\varepsilon) \to \tilde{\mathrm{R}}^m .$$

Опр. График этого отображения

$$\Gamma_F = \left\{ \left(x_{m+1},\dots,x_n,\ f_1(x_{m+1},\dots,x_n),\dots,\ f_m(x_{m+1},\dots,x_n) \right) \in \tilde{\mathrm{R}}^n : (x_{m+1},\dots,x_n) \in D_{n-m}(M_0,\varepsilon) \right\}$$

называется $(n-m)$- мерным непрерывно дифференцируемым многообразием в окрестности точки $N_0 = (x_1^0,\dots,x_n^0)$, определяемым системой уравнений (6).

ПРИМЕР Для СЛАУ $\begin{cases} \Psi_1 = \quad x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 - 1 = 0 \\ \Psi_2 = -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 - 2 = 0 \end{cases}$ якобиан

$$\frac{\partial(\Psi_1,\Psi_2)}{\partial(x_1,x_4)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 .$$

Поэтому существует неявное отображение $F(x_2, x_3, x_5): \tilde{\mathrm{R}}^3 \to \tilde{\mathrm{R}}^2$ график которого является трехмерным многообразием, а точнее 3- плоскостью в евклидовом пространстве $\tilde{\mathrm{R}}^5$. Решая СЛАУ относительно неизвестных x_1, x_4, несложно получить явный вид этого отображения.

Опр. Пусть функция $f(M)$ определена в окрестности точки $M_0(x_1^0,...x_n^0)$, M_0 и переменная точка $M(x_1,...,x_n)$ удовлетворяют системе уравнений связи (6), то есть M_0, M находятся на $(n-m)$-мерным многообразии Γ_F, определяемом системой (6) в $\tilde{\mathrm{R}}^n$. Говорят, что $f(M)$ имеет в точке M_0 условный локальный максимум (минимум), если

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall M \in D(M_0, \varepsilon) \bigcap \Gamma_F \quad f(M) \le f(M_0) \ \left(f(M) \ge f(M_0) \right).$$

ТЕОРЕМА 1.9 (*алгоритм нахождения условного экстремума методом Лагранжа*)

1) (*необходимое условие*) Образуем функцию Лагранжа

$$\Phi(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m) := f(x_1,...,x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \Psi_k(x_1,...,x_n),$$

где переменные $\lambda_1,...,\lambda_m$ называются множителями Лагранжа. Если условный экстремум достигается в точке $M_0(x_1^0,...,x_n^0)$, то $\exists\, \lambda_1^0,...,\lambda_m^0$ имеют место равенства

$$\begin{cases} \Phi'_{x_1}(N_0) = 0 \\ . \quad . \quad . \\ \Phi'_{x_n}(N_0) = 0 \\ \Phi'_{\lambda_1}(N_0) = 0 \\ . \quad . \quad . \\ \Phi'_{\lambda_m}(N_0) = 0 \end{cases}, \qquad (7)$$

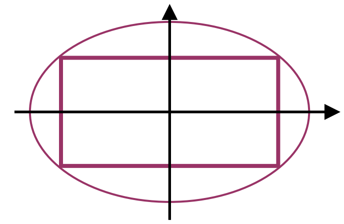
где $N_0 := (x_1^0,...,x_n^0,\lambda_1^0,...,\lambda_m^0)$.

2) (*достаточное условие*) Пусть $N_0 := (x_1^0,...,x_n^0,\lambda_1^0,...,\lambda_m^0)$ удовлетворяет системе уравнений (7) и, например, $\dfrac{\partial(\Psi_1,...,\Psi_m)}{\partial(x_1,...x_m)}(M_0) \ne 0$. Тогда СЛАУ

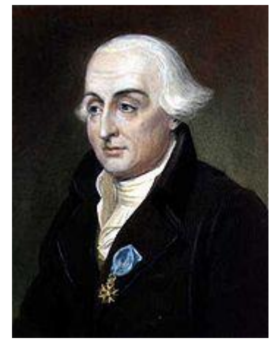
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}(M_0)dx_1 + ... + \dfrac{\partial \Psi_1}{\partial x_n}(M_0)dx_n = 0 \\ \qquad\qquad . \quad . \quad . \\ \dfrac{\partial \Psi_m}{\partial x_1}(M_0)dx_1 + ... + \dfrac{\partial \Psi_m}{\partial x_n}(M_0)dx_n = 0 \end{cases}$$

разрешима относительно дифференциалов $dx_1,...,dx_m$. Образуем квадратичную форму $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}(N_0)dx_i dx_j$ и подставим в нее эти решения $dx_1,...,dx_m$. К полученной квадратичной форме $\sum_{i=m+1}^{n}\sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}dx_i dx_j$ следует применить теорему о достаточных условиях экстремума функции нескольких переменных.

Пр. Найти прямоугольник наибольшей площади, вписанный в эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.



Жозеф Луи Лагранж (1736-1813) - французский математик и механик. Вместе с Эйлером разработал основные понятия вариационного исчисления и предложил метод вариаций для решения вариационных задач. Наиболее важные труды относятся к аналитической и теоретической механике, различным вопросам математического анализа (формула остаточного члена ряда Тейлора, формула конечных приращений, теория условных экстремумов), теории чисел, алгебре (симметрической функции корней уравнения, теория и приложения непрерывных дробей), дифференциальным уравнениям (теория особых решений), по интерполированию, математической картографии, астрономии и пр.



Опр. Задачей Лагранжа (- на условный экстремум) называется задача нахождения непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций $y_1(x),...,y_n(x)$, удовлетворяющих граничным условиям $y_i(a)=A_i\ \ y_i(b)=B_i$, $i=1,...,n$, *геометрическим* связям

$$\begin{cases} g_1(x,y_1(x),...,y_n(x))=0 \\ \qquad . \quad . \quad . \\ g_m(x,y_1(x),...,y_n(x))=0 \end{cases}, \quad x\in[a,b], \quad m<n,$$

и на которых достигается экстремум функционала $\Phi(x,y_1,...,y_n)=\int_a^b F(x,y_1,y_1',...,y_n,y_n')dx$.

ТЕОРЕМА 1.10 Пусть функция $F(x,y_1,z_1,...,y_n,z_n)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно (по $x\in[a,b]$), функции $g_1,...,g_m$ имеют непрерывно дифференцируемые частные производные и $rang\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j}\right)=m$. Если экстремум функционала Φ достигается на непрерывно дифференцируемых функциях $y_1(x),...,y_n(x)$, удовлетворяющих граничным условиям $y_i(a)=A_i\ \ y_i(b)=B_i$, $i=1,...,n$, и m геометрическим связям, то существуют такие функции ($\lambda_1(x),..,\lambda_m(x)$ - множители Лагранжа), что функция Лагранжа $F^*:=F+\lambda_1 g_1+...+\lambda_m g_m$ удовлетворяет системе уравнений Эйлера

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F^*}{\partial y_1} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F^*}{\partial y_1'} = 0 \\ \quad . \quad . \quad . \qquad . \\ \dfrac{\partial F^*}{\partial y_n} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F^*}{\partial y_n'} = 0 \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ Аналогичная теорема имеет место, если связи кинематические:

$$\begin{cases} g_1(x, y_1, y_1', ..., y_n, y_n') = 0 \\ \quad . \quad . \quad . \\ g_m(x, y_1, y_1', ..., y_n, y_n') = 0 \end{cases}, \quad x \in [a,b], \quad m < n.$$

ПРИМЕР Объект управления описывается дифференциальным уравнением $x' + x = u$ с краевыми условиями $x(0) = x_0,\ x(\infty) = 0$. Требуется синтезировать автоматический регулятор, оптимальный по минимуму *квадратичного критерия качества*:

$$\Phi(x,u) = \int_0^\infty (x^2(t) + u^2(t))dt \to \min.$$

Имеем задачу Лагранжа с одной кинематической связью $g(t,x,u) = x' + x - u = 0$ и функцией Лагранжа $F = x^2 + u^2 + \lambda(x' + x - u)$.

Система уравнений Эйлера для искомых экстремалей $x_0(t),\ u_0(t)$ имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} - \dfrac{d}{dxt}\dfrac{\partial F}{\partial x'} = \lambda + 2x - \lambda' = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial u} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial u'} = 2u - \lambda = 0 \end{cases}.$$

Исключаем из нее множитель Лагранжа и объединяем полученное уравнение с уравнением связи $\begin{cases} x' = -x + u \\ u' = x + u \end{cases}$. Корни характеристического уравнения этой СЛАУ равны $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. Подставляя в общее решение $x(t) = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t}$ граничные условия, получаем экстремаль $x_0(t) = x_0 e^{-\sqrt{2}t}$. Вторую экстремаль получаем, подставляя первую в уравнение объекта управления $u_0(t) = x_0(1 - \sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t} = (1 - \sqrt{2})x_0(t)$.

§ 1.5 Вариационный принцип Гамильтона-Остроградского в механике.

В качестве одной из реализаций вариационной задачи на условный экстремум приведем пример принципа Гамильтона-Остроградского из аналитической механики и вытекающих из него законов сохранения. Для этого найдем сначала НСОДУ, эквивалентную системе уравнений Эйлера из § 1.4.

Опр. Введем новые переменные $p_i := F'_{y'_i},\ i = 1,...,n$, называемые каноническими и функцию

$$H\left(x, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n\right) := -F + \sum_{i=1}^{n} y_i' \, p_i \,, \tag{8}$$

называемую функцией Гамильтона (гамильтонианом). НСОДУ порядка $2n$ с неизвестными функциями $y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n$

$$\begin{cases} \dfrac{dp_i}{dx} = -\dfrac{\partial H}{\partial y_i} \\ \dfrac{dy_i}{dx} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases}, \quad i = 1, \ldots, n \,, \tag{9}$$

называется каноническими уравнениями (уравнениями Гамильтона, канонической системой уравнений Эйлера).

ЗАМЕЧАНИЕ Пусть по функции $F(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')$ образована система уравнений Эйлера

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y_1} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y_1'} = 0 \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \\ \dfrac{\partial F}{\partial y_n} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y_n'} = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Эта система эквивалентна каноническим уравнениям (9), где канонические переменные p_i и функция Гамильтона H определены по функции F , как выше.

& Сначала найдем полный дифференциал равенства (8).

$$\frac{\partial H}{\partial x}dx + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial y_i}dy_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i = dH = d\left(-F + \sum_{i=1}^{n} y_i' \, p_i\right) =$$

$$= \left(-\frac{\partial F}{\partial x}dx - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial y_i}dy_i - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial y_n'}dy_i'\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} p_i dy_i' + \sum_{i=1}^{n} y_i' \, dp_i\right) = -\frac{\partial F}{\partial x}dx - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial y_i}dy_i + \sum_{i=1}^{n} y_i' \, dp_i \,.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых независимых дифференциалах, получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x} = -\dfrac{\partial F}{\partial x} \\ \dfrac{\partial H}{\partial y_i} = -\dfrac{\partial F}{\partial y_i}. \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_i} = y_i' \end{cases} \tag{11}$$

Докажем (9) $\Rightarrow$ (10). Используя определение канонической переменной, первое из уравнений (9) и второе из уравнений (11), получаем

$$\frac{d}{dx}F'_{y_i'} = \frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad i = 1, \ldots, n \,.$$

Докажем (10) $\Rightarrow$ (9). Используя последовательно определение канонической переменной, i-ое из уравнений (10) и второе из уравнений (11), получаем

$$\frac{dp_i}{dx}=\frac{d}{dx}F'_{y'_i}=\frac{\partial F}{\partial y_i}=-\frac{\partial H}{\partial y_i},\quad i=1,...,n.$$

Это первое из канонических уравнений. Второе каноническое уравнение совпадает с третьим уравнением системы (11). %

Опр. Функция $G(x,y_1,...,y_n,p_1,...,p_n)$ называется первым интегралом канонической системы (9), если при подстановке вместо переменных $y_i,\ p_i,\ i=1,...,n$ решений этой системы имеем тождество $\frac{dG}{dx}=\frac{\partial G}{\partial x}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial G}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dx}-\frac{\partial G}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dx}\right)=\frac{\partial G}{\partial x}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial G}{\partial y_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial G}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial y_i}\right)\equiv 0$.

ПРИМЕР Если функция F явно не зависит от x, то функция Гамильтона H является первым интегралом канонических уравнений (2). Действительно,

$$\frac{dH}{dx}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dx}+\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dx}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial y_i}\right)\equiv 0.$$

Рассмотрим свободное (без связей) движение системы n материальных точек $M_1,...,M_n$ *в* потенциальном поле с потенциалом $U=U(t,x,y,z)$. Оно описывается кривой

$$\begin{cases} x_i=x_i(t) \\ y_i=y_i(t), \quad i=1,...,n, \\ z_i=z_i(t) \end{cases}$$

в $3n$-мерном пространстве. Кинетическая энергия этой системы равна

$$T:=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2),$$

и на эти точки действуют по определению силы

$$\bar{F}_i:=\{-U'_x(M_i),-U'_y(M_i),-U'_z(M_i)\}=-grad\,U(M_i).$$

Опр. $L:=T-U$ - *функция Лагранжа системы* материальных точек. Функционал $\int_{t_0}^{t_1}L(t,x_i,y_i,z_i)dt$ называется *действием* (*по Гамильтону*) на промежутке времени $[t_0,t_1]$.

Имеет место следующий

ПРИНЦИП (*Гамильтона-Остроградского*) Истинное движение системы материальных точек в потенциальном поле, начинающееся в точке $A=(y_i(t_0))$ и оканчивающееся в точке $B=(y_i(t_1))$, описывается $3n$ функциями $x_i(t),y_i(t),z_i(t)$, $i=1,...,n$, которые доставляют минимум функционалу $\int_{t_0}^{t_1}L(t,x_i,y_i,z_i)dt$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Принцип Гамильтона-Остроградского эквивалентен уравнению движения этой системы точек.

Уи́льям Ро́уэн Га́мильтон (1805 -1865) - ирландский математик и физик. Основные работы посвящены математической оптике, механике, вариационному исчислению. Разрабатывал теорию комплексных чисел. Идею комплексных чисел распространил на пространство, определив четыре единицы: 1, i, j, k. Ввел понятие кватерниона, *термин* вектор. Ввел (1846) скалярное произведение как скалярную часть и векторное произведение как векторную часть произведения двух кватернионов. Автор предельно общего вариационного принципа наименьшего действия, применяемого во многих разделах физики.

Михаил Васильевич Остроградский (1801- 1862) - выдающийся российский математик, механик, педагог. В 1822 г. в Париже слушал лекции Коши, Ампера, Лапласа, Пуассона, Фурье.
Результаты в механике и различных разделах математики.
Преподавал в различных вузах Петербурга. Долгое время был главным наблюдателем за преподаванием математики в кадетских корпусах.
Ученики - В.Я. Буняковский, И.А. Вышнеградский и др.

Пр. В задаче трех тел рассматривается свободное движение трех материальных точек P_1, P_2, P_3 с соответствующими массами m_1, m_2, m_3, взаимными расстояниями $r_3 := \rho(P_1, P_2)$ $r_2 := \rho(P_1, P_3), r_1 := \rho(P_2, P_3)$ и силовой функцией $U = \frac{m_1 m_2}{r_3} + \frac{m_1 m_3}{r_2} + \frac{m_2 m_3}{r_1}$ (тогда $\Pi := -U$ - потенциальная энергия системы). В соответствии с замечанием 1 свободное движение системы трех точек описывается 9 дифференциальными уравнениями второго порядка

$$\begin{cases} m_i x_i'' = \dfrac{\partial U}{\partial x_i} \\ m_i y_i'' = \dfrac{\partial U}{\partial y_i} \\ m_i z_i'' = \dfrac{\partial U}{\partial z_i} \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3,$$

или НСОДУ 18 порядка $\begin{cases} m_i \dfrac{dx_i}{dt} = x_i', & m_i \dfrac{dy_i}{dt} = y', & m_i \dfrac{dz_i}{dt} = z_i' \\ m_i \dfrac{dx_i'}{dt} = \dfrac{\partial U}{\partial x_i}, & m_i \dfrac{dy_i'}{dt} = \dfrac{\partial U}{\partial y_i}, & m_i \dfrac{dz_i'}{dt} = \dfrac{\partial U}{\partial z_i} \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3.$

ЗАМЕЧАНИЕ 2 У свободной системы n материальных точек в потенциальном поле канонические переменные совпадают с импульсами соответствующих точек, а функция Гамильтона - с полной энергией этой системы.

СЛЕДСТВИЕ Пусть система материальных точек консервативная, то есть потенциальное поле стационарное: $U = U(x, y, z)$, и на нее наложены только стационарные связи:

$$\begin{cases} g_1(x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n) = 0 \\ \quad . \quad . \quad . \\ g_m(x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n) = 0 \end{cases}, \quad m < 3n.$$

Тогда полная энергия $H = T + U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - U(x_1, y_2, z_3, ..., x_n, y_n, z_n)$ не зависит от t, и будучи функцией Гамильтона для функции Лагранжа, является первым интегралом: $\frac{dH}{dt} \equiv 0$. То есть имеет место закон сохранения энергии $H = T + U \equiv const$.

Пр. Так как в задаче трех тел система консервативная, то для нее также имеем место закон сохранения энергии: $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) = \frac{m_1 m_2}{r_3} + \frac{m_1 m_3}{r_2} + \frac{m_2 m_3}{r_1} + const$.

ГЛАВА 2
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ АВТОМАТОВ

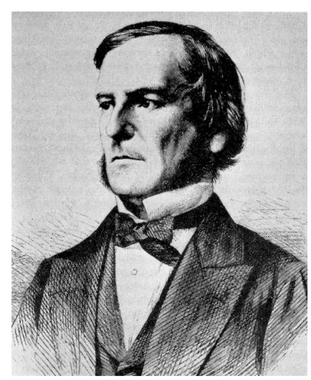
§ 2.1 Функциональные преобразователи. Логические схемы.

Опр. Обозначим множество $A := \{0,1\}$. Отображение $F : A^n \to A^m$ называется функциональным преобразователем.

Опр. Отображение $f : A^n \to A$ называется двоичной (булевой) функцией от n двоичных переменных.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Функциональный преобразователь $F : A^n \to A^m$ является отображением $F = (f_1, ..., f_m)$, координатные функции которого есть булевы функции от n переменных.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 Существуют $2 = 2^{2^0}$ постоянные булевы функции 0 и 1.



Джордж Буль (1815-1864) - английский математик и логик. Один из основателей математической логики. Идеи применения символического метода к логике впервые высказаны им в статье «Математический анализ логики» (1847). В «Исследование законов мышления» (1854) , изложен общий символический метод логического вывода. Показал, как из любого числа высказываний, включающих любое число терминов, вывести любое заключение, следующее из этих высказываний, путём чисто символических манипуляций.

Опр. Булевы функции, не содержащие переменных называются нульарными.

ЗАМЕЧАНИЕ 3 Существует $4 = 2^{2^1}$ булевых функции относительно одной двоичной переменной (*унарные*). Их табличное задание следующее:

p	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Функция f_2 называется тождественной, f_1, f_4 - постоянные, $\overline{x} = \neg x := f_3(x)$ - отрицание.

ЗАМЕЧАНИЕ 4 Существует $16 = 2^{2^2}$ булевых функций от двух двоичных переменных (*бинарные операции*): $p \vee q$ - дизъюнкция; $p \wedge q = pq$ - конъюнкция; $p \Rightarrow q$ - импликация; $p \oplus q$ - сложение по модулю два; $p \Leftrightarrow q$ - эквиваленция; $p \,|\, q = \neg(pq)$ - штрих Шеффера; $p \downarrow q = \neg(p \vee q)$ - стрелка Пирса.

ЗАМЕЧАНИЕ 5 Существует 2^{2^n} булевых функций от n двоичных переменных.

Опр. Булева функция задаваемая в виде упорядоченной системы унарных и бинарных операций над входящими в неё двоичными переменными и постоянными 0, 1, называется логической формулой (переключательной функцией).

ЗАМЕЧАНИЕ Приоритет выполнения операций в логической формуле задаётся с помощью скобок, а также в следующей последовательности: 1) отрицание; 2) конъюнкция; 3) дизъюнкция; 4) все остальные бинарные операции, при этом последовательность их выполнения также должна регулироваться скобками.

Опр. Суперпозицией (композицией) функций называется сложная функция, составленная из этих функций.

ТЕОРЕМА 1 (*Шеннона*) Любая булева функция может быть представлена как суперпозиция трёх операций $(\neg, \vee, \wedge)$ над двоичными переменными.

Докажем сначала тождество Шеннона: для любой булевой функции

$$f(x_1,...,x_k,..,x_n) = x_k f(x_1,..,1,..,x_n) \vee \overline{x}_k f(x_1,..,0,..,x_n).$$

Действительно, при $x_k = 0$ $f(x_1,..,0,..,x_n) = 0 \wedge f(x_1,..,1,..,x_n) \vee 1 \wedge f(x_1,..,0,..,x_n)$,

а при $x_k = 1$ $f(x_1,...,1,..,x_n) = 1 \wedge f(x_1,..,1,..,x_n) \vee 0 \wedge f(x_1,..,0,..,x_n)$

Применим эту формулу последовательно к переменным $x_1, x_2,.., x_n$.

$$f(x_1,..,x_n) = x_1 f(1,x_2,..,x_n) \vee \overline{x}_1 f(0,x_2,..,x_n) = x_1 x_2 f(1,1,x_3,..,x_n) \vee$$

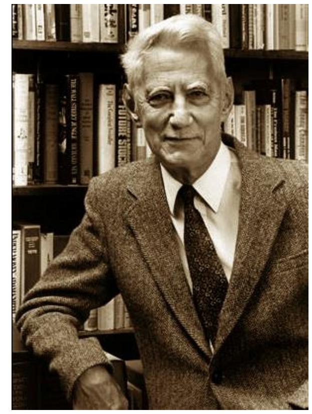
$$\vee x_1 \overline{x}_2 f(1,0,x_3,..,x_n) \vee \overline{x}_1 x_2 f(0,1,x_3,..,x_n) \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 f(0,0,x_3,..,x_n) =$$

$$= \left[x_i^{\sigma i} := \begin{cases} x_i, & \text{если } \sigma_i = 1 \\ \overline{x}_i, & \text{если } \sigma_i = 0 \end{cases} \right] = x_1^1 x_2^1 f(1,1,x_3,..,x_n) \vee x_1^1 x_2^0 f(1,0,x_3,..,x_n) \vee$$

$$\vee x_1^0 x_2^1 f(0,1,x_3,..,x_n) \vee x_1^0 x_2^0 f(0,0,x_3,..,x_n) = \bigvee_{\sigma_1,\sigma_2 \in \{0,1\}} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} f(\sigma_1,\sigma_2,x_3,..,x_n) =$$

$$= ... = \bigvee_{\sigma_1,..,\sigma_m \in \{0,1\}} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} ... x_n^{\sigma_n} f(\sigma_1,...,\sigma_n) = \bigvee_{f(\sigma_1,...,\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot ... \cdot x_n^{\sigma_n}.$$

Доказана формула Шеннона $f(x_1,..,x_n) = \bigvee_{f(\sigma_1,...,\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} ... x_n^{\sigma_n}$.



Клод Э́лвуд Ше́ннон (1916-2001) -американский инженер и математик, его работы являются синтезом математических идей с конкретным анализом чрезвычайно сложных проблем их технической реализации. Является основателем теории информации, нашедшей применение в современных высокотехнологических системах связи. Внес огромный вклад в теорию вероятностных схем, теорию автоматов и теорию систем управления — области наук, входящие в понятие «кибернетика». В статье «Математическая теория связи», 1948 г., предложил использовать слово «бит» для обозначения наименьшей единицы информации.

Опр. Замыканием подмножества М булевых функций называется множество $[M]$ булевых функций, которые получаются из M с помощью операции суперпозиции (составления сложных функций).

ПРИМЕР Для $M=\{\wedge\}$ имеем $[M]=\{x_1\wedge x_1=x_1,\ x_2,\ x_1\wedge x_2,\ x_3,\ x_1\wedge x_3,\ x_1\wedge x_2\wedge x_3,\ldots\}$.

Опр. Подмножество M булевых функций называется функционально полным (базисом), если $[M]$ совпадает со всем множеством булевых функций.

ПРИМЕР В силу теоремы Шеннона подмножество $M=\{\neg,\vee,\wedge\}$, называемое базисом Буля, функционально полное.

ЗАМЕЧАНИЕ Известен критерий Поста функциональной полноты произвольного множества M.

Опр. Функционально полное множество M называется базисом (минимальным базисом), если удаление хотя бы одной функции из M делает оставшееся множество не функционально полным.

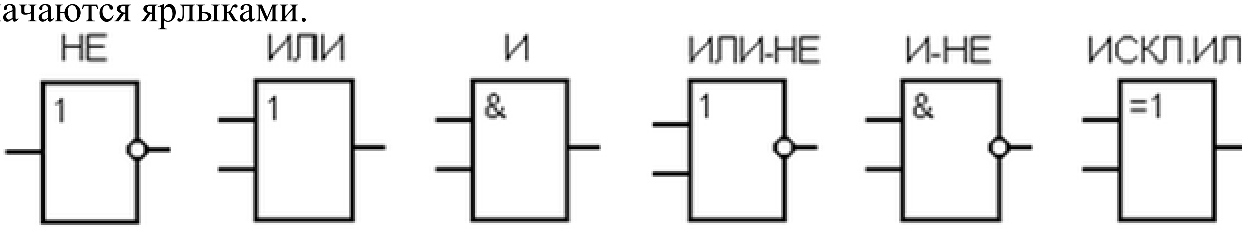
ТЕОРЕМА 2 Следующие подмножества операций являются базисами:

1) $M=\{\neg,\vee\}$; 2) $M=\{\neg,\wedge\}$; 3) $M=\{|\}$; 4) $M=\{1,\wedge,\oplus\}$.

Опр. Класс электронных схем, реализующих одну и ту же основную логическую функцию, называется логическим элементом (ЛЭ).

ПРИМЕР Штрих Шеффера имеет реализации в так называемых ТТЛ, ДТЛ, МОП-логике и ряд других (курсы электроники и схемотехники).

Обозначение. Логические элементы называются "и", "или", "не", "и-не", "или-не" и обозначаются ярлыками.



Опр. Логической схемой (ЛС) называется схема, составленная из логических элементов (ЛЭ), путем соединения выходов одних ЛЭ со входами других по следующим правилам:

1) выход ЛЭ можно присоединить ко входам нескольких ЛЭ;

2) на вход ЛЭ можно подавать сигналы двух типов (0 или 1);

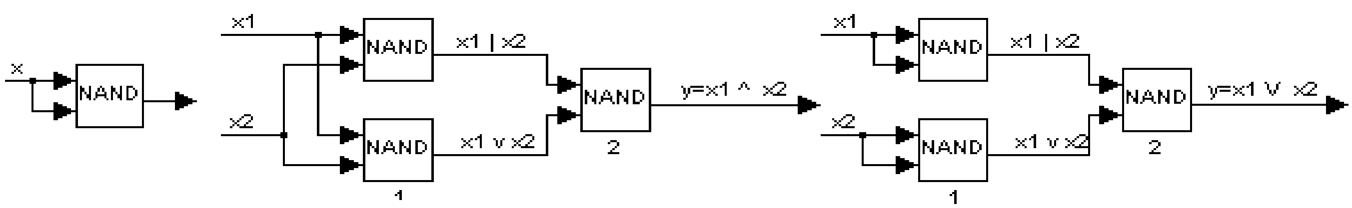
3) выходы ЛЭ нельзя соединять вместе;

4) выходы ЛЭ нельзя подключать к собственным входам.

Опр. Логическая схема с n входами $x_1,...,x_n$ и m выходами $z_1,...,z_m$, описываемая функциональным преобразователем

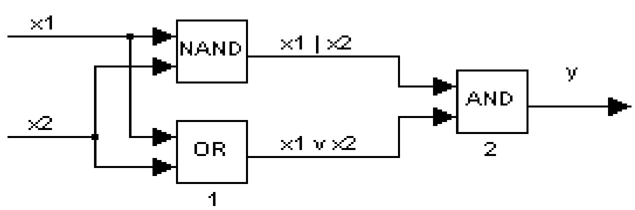
$$\begin{cases} z_1 = f_1(x_1,..,x_n) \\ \text{.........................} : A^n \to A^m \\ z_m = f_m(x_1,..,x_n) \end{cases}$$

называется комбинационной схемой (КС) или (n,m) – полюсником.
ЗАМЕЧАНИЕ В комбинационной схеме могут присутствовать и контуры (обратные связи). Согласно определению ЛС контур содержит не менее двух ЛЭ.
ПРИМЕР Реализуем функции булева базиса $\neg, \vee, \wedge$ комбинационной схемой в элементном базисе "и-не".



Опр. Две КС называются эквивалентными, если их функциональные преобразователи совпадают.

Опр. Задачей анализа КС называется задача нахождения ее функционального преобразователя. Последний формируется пошагово, двигаясь по логическим элементам схемы от ее выходов ко входам.
ПРИМЕР Произведем анализ КС



$$z = \overline{y_1 y_2} = \overline{\overline{(x_1 x_2)}(x_1 \vee x_2)} = x_1 x_2 \vee \overline{(x_1 \vee x_2)} = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 = \overline{x_1 \oplus x_2}\,.$$

Опр. Задачей синтеза КС называется процесс ее построения, включающий три этапа:
1) нахождение функционального преобразователя по словесному описанию;
2) минимизация функционального преобразователя;
3) построение КС в данном элементном базисе.

ПРИМЕР Спроектируем логическое устройство «Электронный регистратор пропущенных ударов в боксерском поединке с тремя судьями. Очко противнику засчитывается, если удар признали не менее двух судей».

Схему создадим в элементном базисе Буля и в базисе И-НЕ.

Сначала создаем булеву функцию с тремя булевыми переменными по количеству судей. Переменная принимает значение 1, если судья засчитал удар. В противном случае значение 0. На основании словесного описания таблица истинности принимает следующий вид.

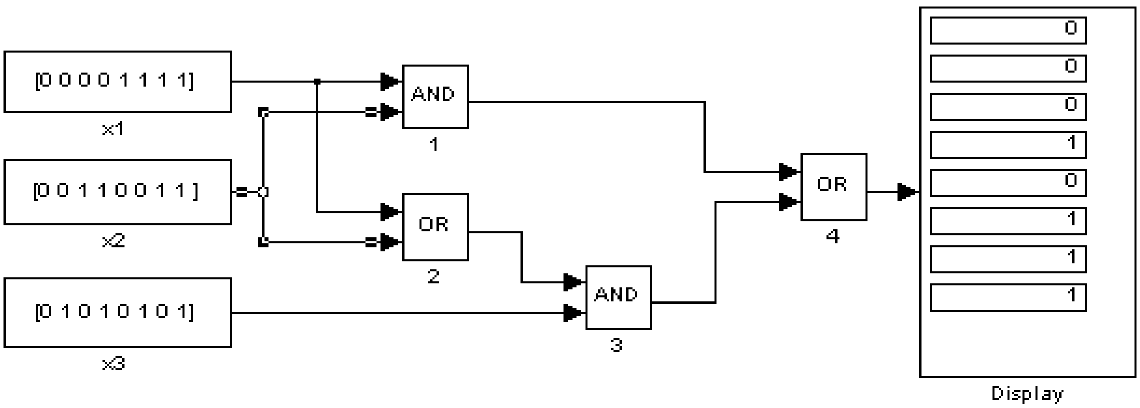
x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Минимизируя соответствующую СДНФ, получаем такую логическую формулу

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3 = x_1x_2 \vee (x_1 \vee x_2)x_3 .$$

По ней проектируем логическое устройство в булевом базисе.

На построенной в пакете SIMULINK действующей модели показаны результаты принятия решения по 8 нанесенным ударам.



В этом базисе для построения схемы понадобилось четыре элемента.

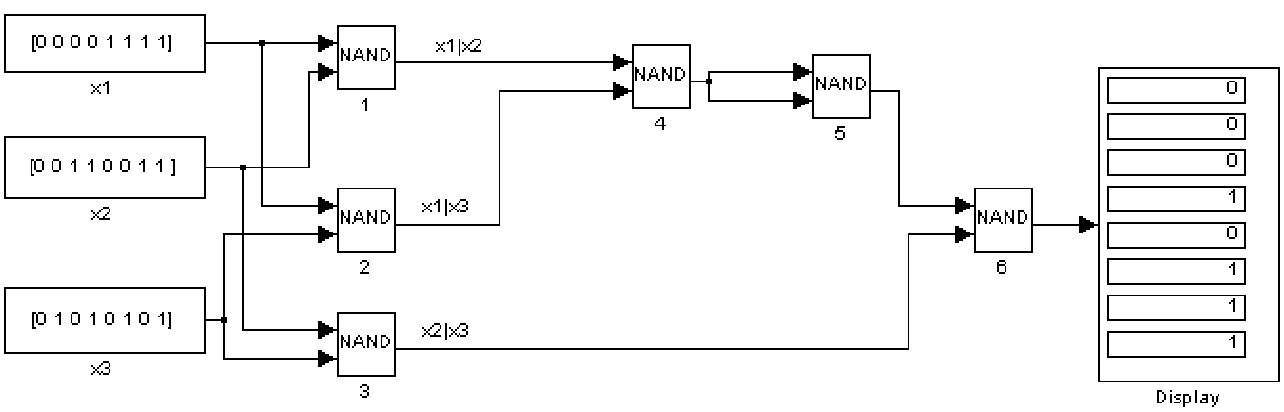
Для представления формулы в базисе И-НЕ воспользуемся определением $\overline{p \wedge q} = p \mid q$ и законом двойного отрицания:

$$f(x_1,x_2,x_3) = \overline{\overline{x_1x_2 \vee x_1x_3} \wedge \overline{x_2x_3}} = \overline{x_1x_2 \vee x_1x_3} \mid (x_2 \mid x_3) = \overline{x_1x_2} \wedge \overline{x_1x_3} \mid (x_2 \mid x_3) =$$

$$= \overline{\overline{(x_1 \mid x_2) \wedge (x_1 \mid x_3)}} \mid (x_2 \mid x_3) = \overline{(x_1 \mid x_2) \mid (x_1 \mid x_3)} \mid (x_2 \mid x_3) =$$

$$= \Big(\big((x_1 \mid x_2) \mid (x_1 \mid x_3)\big) \Big| \big((x_1 \mid x_2) \mid (x_1 \mid x_3)\big)\Big) \Big| (x_2 \mid x_3) .$$

По последней формуле строим логическую схему в базисе И-НЕ. Для этого нам понадобится шесть однотипных элементов.



§ 2.2 Элементы теории цифровых автоматов.

Напомним определение конечного автомата.

Опр. Конечным автоматом Мили называется множество из пяти объектов $\mathrm{A} = (S, A, B, \delta, \lambda)$, в котором:

S - конечное непустое множество (пространство) состояний,

A - конечное непустое множество входных сигналов (входной алфавит),

B - конечное непустое множество выходных сигналов (выходной алфавит),

$\delta : S \times A \to S$ - функция переходов,

$\lambda : S \times A \to B$ - функция выходов.

Джордж Х. Мили (1927 –2010) - американский ученый. Работал в лабораториях Белла. Позже преподавал в Гарварде. Изобрёл одноименный автомат Мили - тип преобразователя конечного состояния. Был также пионером модульного программирования - один из ведущих дизайнеров языка программирования IPL-V и давний сторонник макропроцессоров в программирование на языке ассемблера.

ЗАМЕЧАНИЕ Автоматы могут задаваться:

1) в виде взвешенного орграфа (диаграмма состояний автомата) или в виде блок-схемы программы, реализующей поведение автомата,
2) таблично (функции переходов и выходов задаются в виде таблиц или совмещенной таблицы состояний).

ПРИМЕР (автомат "*мудрый отец*")

Пусть входной алфавит обозначает оценки, приносимые из школы сыном

$A = \{a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_3 = 4,\ a_4 = 5\}$;

выходной алфавит – внешнюю реакцию отца

$B = \{\ b_1 = \text{наказать},\ b_2 = \text{поругать},\ b_3 = \text{успокоить},$

$b_4 = \text{выразить надежду},\ b_5 = \text{порадоваться},\ b_6 = \text{похвалить}\ \}$

пространство состояний – возможные психические состояния отца

$S = \{\ q_1 = \text{крайнее раздражение},\ q_2 = \text{напряженность},$

$q_3 = \text{миролюбие},\ q_4 = \text{удовлетворение}\ \}$.

Кроме того, путем наблюдений можно составить таблицы функций переходов и выходов.

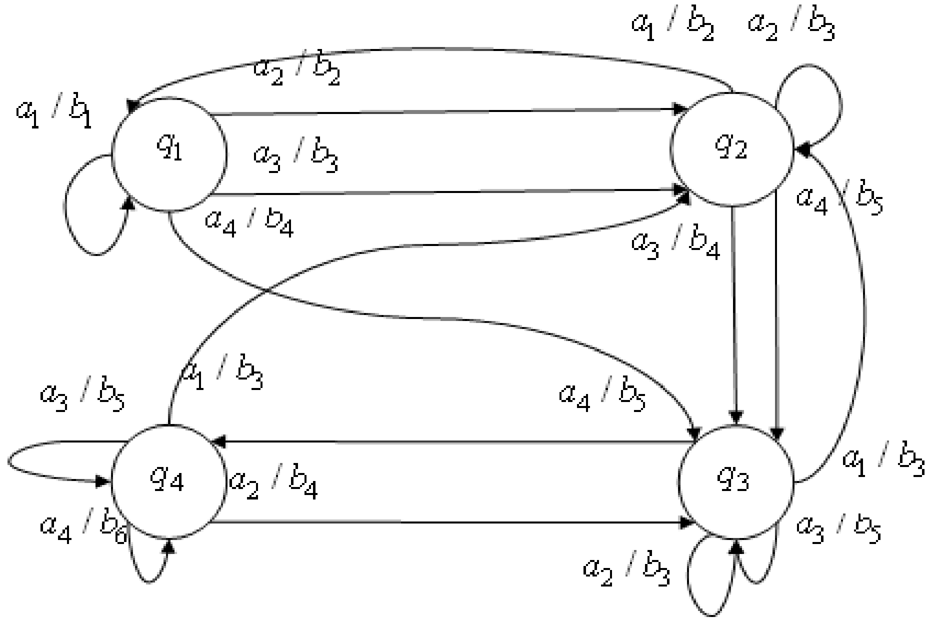
δ:

$a \setminus q$	q_1	q_2	q_3	q_4
a_1	q_1	q_1	q_2	q_2
a_2	q_2	q_2	q_3	q_3
a_3	q_2	q_3	q_3	q_4
a_4	q_3	q_3	q_4	q_4

λ:

$a \setminus q$	q_1	q_2	q_3	q_4
a_1	b_1	b_2	b_3	b_3
a_2	b_2	b_3	b_3	b_4
a_3	b_3	b_4	b_5	b_5
a_4	b_4	b_5	b_5	b_6

По этим таблицам строим диаграмму состояний автомата.



Рассмотрим специальный класс автоматов.

Опр. Пусть $A=\{0,1\}^n$, $B=\{0,1\}^m$, $S=\{0,1\}^p$. Тогда функции перехода и выхода

$$\delta:\{0,1\}^p\times\{0,1\}^n=\{0,1\}^{p+n}\to\{0,1\}^p,\quad \lambda:\{0,1\}^p\times\{0,1\}^n=\{0,1\}^{p+n}\to\{0,1\}^m$$

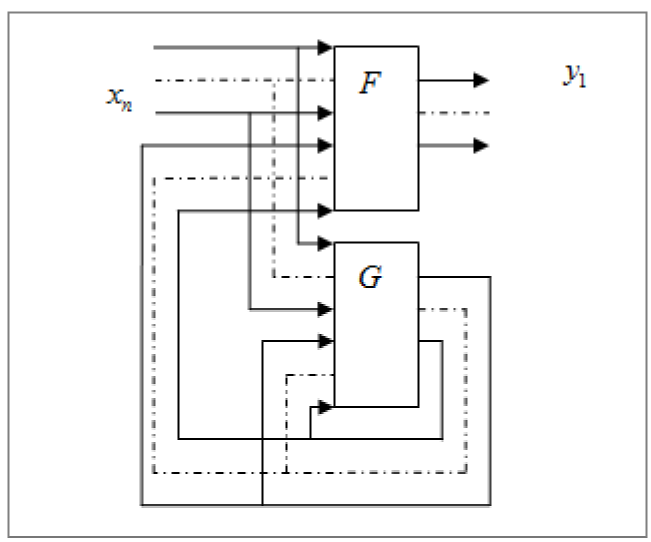
являются функциональными преобразователями. Обозначим их соответственно

$$G(q_1,...,q_p,x_1,...,x_n)=\big(g_1(q_1,...,q_p,x_1,...,x_n),...,g_p(q_1,...,q_p,x_1,...,x_n)\big):\{0,1\}^{p+n}\to\{0,1\}^p,$$

$$F(q_1,...,q_p,x_1,...,x_n)=\big(f_1(q_1,...,q_p,x_1,...,x_n),...,f_m(q_1,...,q_p,x_1,...,x_n)\big):\{0,1\}^{p+n}\to\{0,1\}^m,$$

и реализуем в виде логических схем (ЛС) с $p+n$ входами и соответственно p, m выходами

Составим из них ЛС, соединив выходы левого блока с соответствующими входами правого и левого блоков. n входов сделаем общими для обоих блоков. Полученная ЛС всегда находится в определенном состоянии, пока на нее не действуют входные сигналы. Ввиду того, что один и тот же сигнал может вызвать разные выходные сигналы, эта ЛС не будет комбинационной. Она называется последовательностной схемой или цифровым автоматом.



ЗАМЕЧАНИЕ Цифровой автомат задается еще и:
3) аналитически (G,F задаются в виде функциональных преобразователей),
4) в виде логической схемы.

Произвольный автомат можно реализовать как составную часть цифрового автомата. Для построения последнего нам понадобятся некоторые понятия.

Опр. Пусть A - конечное множество и $2^n \geq card\, A$. Тогда инъективное отображение $K: A \to \{0,1\}^n$ называется кодировщиком множества A, а сюръективное $D:\{0,1\}^n \to A$ - декодировщиком множества A.

ЗАМЕЧАНИЕ Пусть $\Phi: A \to B$ - отображение конечного множества A в конечное множе ство B и $2^n \geq card\, A$, $2^m \geq card\, B$. Тогда это отображение можно представить в виде компо зиции $\Phi = D \circ F \circ K$, где $K: A \to \{0,1\}^n$ - кодировщик, $F:\{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$ - функциональный преобразователь и $D:\{0,1\}^m \to B$ - декодировщик. Область определения и область значений функционального преобразователя по числу элементов, вообще говоря, больше соответственно областей A, B для отображения Φ.

ПРИМЕР Образуем по автомату "мудрый отец" соответствующий цифровой автомат, который назовем "*цифровой отец*". Для этого составим, например, такие таблицы кодировщиков и декодировщиков. Для $K_A: A \to \{0,1\}^2$

A	a_1	a_2	a_3	a_4
$X=\{0,1\}^2$	00	01	10	11

Для $K_S: S \to \{0,1\}^2$

S	q_1	q_2	q_3	q_4
$Z=\{0,1\}^2$	00	01	10	11

Для $D_S:\{0,1\}^2 \to S$

$Z=\{0,1\}^2$	00	01	10	11
S	q_1	q_2	q_3	q_4

Для $D_B:\{0,1\}^3 \to B$

$Y=\{0,1\}^3$	000	001	010	011	100	101	110	111
E	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	-	-

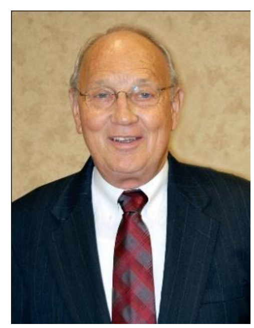
Обозначим $Z = x_1x_2$ код состояния, $X = x_3x_4$ - код входа, $x_1^+x_2^+$ - значение функции переходов, $y_1y_2y_3$ - значение функции выходов. По этим таблицам строим функцию переходов $G:\{0,1\}^2 \times \{0,1\}^2 = \{0,1\}^4 \to \{0,1\}^2$, $(x_1^+, x_2^+) := G(x_1,x_2,x_3,x_4)$ и функцию выходов $F:\{0,1\}^2 \times \{0,1\}^2 = \{0,1\}^4 \to \{0,1\}^3$, $(y_1,y_2,y_3) := F(x_1,x_2,x_3,x_4)$ цифрового автомата "цифровой отец" в виде таблицы.

Z	X	$Z\times X$	$G:$	$F:$
x_1x_2	x_3x_4	$x_1x_2x_3x_4$	$x_1^+x_2^+$	$y_1y_2y_3$
00	00	0000	00	000
00	01	0001	01	001
00	10	0010	01	010
00	11	0011	10	011
01	00	0100	00	001
01	01	0101	01	010
01	10	0110	10	011
01	11	0111	10	100
10	00	1000	01	010
10	01	1001	10	010
10	10	1010	10	100
10	11	1011	11	100
11	00	1100	01	010
11	01	1101	10	011
11	10	1110	11	100
11	11	1111	11	101

Опр. Автомат Мили $\mathrm{A}=(S,A,B,\delta,\lambda)$, у которого функция выходов задается в виде $\lambda(q,a)=h(\delta(q,a))$, где $h:S\to B$ - отображение (называемое определяющим), называется автоматом Мура. То есть функция выходов автомата Мура определяется только состоянием автомата, но не q, как у автомата Мили, а состоянием $\delta(q,a)$, в которое он переходит при подаче буквы a.

Обозначение. $\mathrm{A}=(S,A,B,\delta,h)$.

ЗАМЕЧАНИЕ Каждый автомат Мили порождает эквивалентный ему автомат Мура с числом состояний $\leq card\, S\cdot card\, B$ по правилу: каждое состояние исходного автомата заменяется на несколько состояний в количестве, равном числу различных значений функции выходов при переходе автомат в это состояние.



Э́двард Фо́рест Мур (1925-2003) - американский математик и информа тики. Работал в Bell Labs в течение 10 лет. Профессор университета Висконсин-Мадисон. Был первым, кто использовал наиболее распро странённый в наши дни тип конечного автомата: автомат Мура. Совместно с Клодом Шенноном Мур проделал плодотворную работу по теории вычислимости и построении надёжных схем с использованием менее надёжных реле.

Опр. Синтезом автомата называется построение автомата по заданному его поведению «вход-выход». 1) На этапе абстрактного синтеза строятся таблицы переходов и выходов или граф автомата. Минимизируется число состояний. 2) На этапе структурного синтеза строится схема, реализующая автомат из логических элементов заданного вида.
3) На этапе надежностного синтеза преобразовывают построенные схемы с целью обеспечения надежности их функционирования. 4) Если автомат строится из физических элементов, то на этапе технического синтеза отыскивают и устраняют искажения сигналов, возникающие вследствие неидеальности применяемых элементов.

Опр. Автомат Мура A обладает полной системой переходов, если

$\forall q_1, q_2 \in S \;\; \exists a \in A \;\; \delta(q_1, a) = q_2$.

Опр. Автомат Мура A обладает полной системой выходов, если каждому состоянию автомата соответствует свой собственный выходной сигнал, отличный от выходных сигналов, соответствующих любому другому состоянию автомата.

ЗАМЕЧАНИЕ В предположении, что область значений функции выхода совпадает с выходным алфавитом, определяющая функция $h: S \to B$ автомата с полной системой выходов является биекцией.

	q_1	q_2
	0	1
a	q_1	q_1
b	q_2	q_2

ПРИМЕР 1 Автомат Мура с двумя состояниями и отмеченной таблицей называется D-триггером (элементом задержки).

В соответствии с определениями он обладает полными системами переходов и выходов. После кодировки входного алфавита и пространства состояний :

A	a	b
$\{0,1\}$	0	1

S	q_1	q_2
$\{0,1\}$	0	1

получаем такую таблицу

$a(t)$	$q(t)$	$q(t+1)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Здесь в момент времени t под воздействием входного сигнала $a(t)$ автомат переходит из состояния $q(t)$ в состояние $q(t+1)$.

	q_1	q_2
	0	1
a	q_1	q_2
b	q_2	q_1

ПРИМЕР 2 Автомат Мура с двумя состояниями и отмеченной таблицей называется T-триггером (триггером со счетным входом).

Он также обладает полными системами переходов и выходов.

При аналогичной кодировке получаем соответствующую таблицу.

$a(t)$	$q(t)$	$q(t+1)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Опр. Набор из автоматов и логических элементов называется структурно полным, если из элементов этого набора можно построить любой конечный автомат.

ТЕОРЕМА 2.3 (*В.М. Глушкова о структурной полноте*) Для того чтобы набор был структурно полным, необходимо и достаточно, чтобы

1) он содержал хотя бы один автомат с двумя состояниями, обладающий полными системами переходов и выходов, и
2) его логические элементы образовывали функционально полную систему для синтеза логических схем.

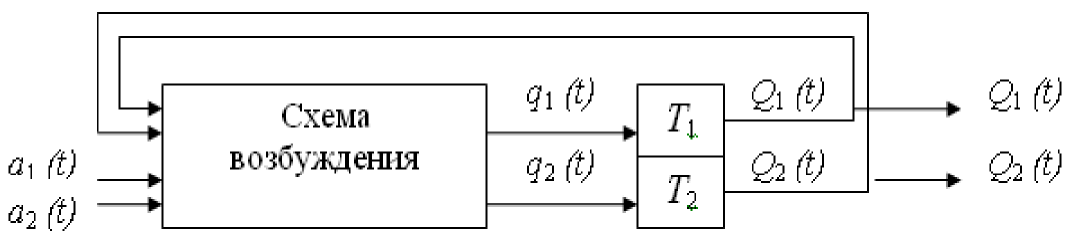
Ви́ктор Миха́йлович Глушко́в (1923-1982) - советский математик, кибернетик. Родился в Ростове-на-Дону. Окончил РГУ. Академик АН СССР (1964), депутат Верховного Совета СССР (1969). Автор трудов по алгебре, кибернетике и вычислительной технике, монографий «Синтез цифровых автоматов» 1962, «Введение в кибернетику», 1964, «Основы безбумажной информатики», 1982, «Логическое проектирование дискретных устройств», 1987, статьи «Кибернетика» в Британской энциклопедии. Создатель теории цифровых автоматов. Под его руководством в 1966 году разработана первая в СССР персональная ЭВМ «МИР-1» (машина для инженерных расчётов).

Опр. Количество триггеров структурной схемы совпадает с числом разрядов пространства состояний ассоциированного цифрового автомата. Булевы функции, определяющие работу этих триггеров, называются *функциями возбуждения* автомата. Построенная по функции возбуждения логическая схема вместе с триггерами, входы которых являются выходами схемы, образует *регистр памяти* синтезируемого автомата.

Опр. Каноническим методом синтеза автомата называется структурный синтез, который проводится в следующей последовательности:

1) Кодирование входных, выходных сигналов и состояний автомата.
2) Выбор элементов памяти.
3) Запись уравнений функций выходов и функций возбуждения автомата.
4) Построение структурной схемы автомата.

ПРИМЕР В случае автомата «цифровой отец» и T-триггеров регистр памяти имеет вид



По таблице переходов Т-триггеров образуем таблицу переходов их параллельного соединения $(Q_1(t+1), Q_2(t+1))$:

$a(t)$	$q(t)$	$q(t+1)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$(q_1(t), q_2(t)) \backslash (Q_1(t), Q_2(t))$	00	01	10	11
00	00	01	10	11
01	01	00	11	10
10	10	11	00	01
11	11	10	01	00

Таблица функций возбуждения заполняется так, чтобы функции переходов регистра памяти и автомата «цифровой отец» совпадали: $\delta = (Q_1(t+1), Q_2(t+1))$ (смотри функциональный преобразователь G автомата «цифровой отец»).

$(a_1(t),a_2(t))\backslash(Q_1(t),Q_2(t))$	00	01	10	11
00	00	00	01	01
01	01	01	10	10
10	01	10	10	11
11	10	10	11	11

В результате получаем такую таблицу выходов схемы возбуждения $(q_1(t),q_2(t))$:

$(a_1(t),a_2(t))\backslash(Q_1(t),Q_2(t))$	00	01	10	11
00	00	01	11	10
01	01	00	00	01
10	01	11	00	00
11	10	11	01	00

ИСТОЧНИКИ

Опорный конспект лекций на сайте skif@donstu.ru $\Longrightarrow$ *библиотека электронных ресурсов ДГТУ* $\Longrightarrow$ *факультет ИВТ* $\Longrightarrow$ *кафедра прикладной математики*

Учебники:

Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление.
Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций функционального анализа.
Братищев А.В. Математическая теория управляемых динамических систем. Уч. пособие.
Нефёдов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики.
Глушков В.М. Цифровые автоматы.

Задачники:

Сборник задач па математике для втузов. Ч.4. Под ред. Ефимова А.В. Методы оптимизации.

Решебники:

Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Т.2.
Пантелеев А.В. Вариационное исчисление в примерах и задачах.
Летова Т.А., Пантелеев А.В. Экстремум функций в примерах и задачах.
Тишин В.В. Дискретная математика в примерах и задачах.
Взять на абонементе или скачать на сайте *www. techlibrary*

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1) Опр. нормы и нормированного пространства. Пример $C^n_{[a,b]}$.

2) Опр. функционала и линейного непрерывного функционала. Свойства. Пр.

3) Опр. вариации функционала и слабого (сильного) максимума функционала.
4) Опр. сильного дифференциала и производной Фреше функционала. Локальный экстремум.
5) Опр. первой вариации и производной Гато функционала. Экстремаль.
6) Опр. билинейной формы и второй производной функционала в нормированном пространстве. Связь.
7) Необходимое условие экстремали функционалов от функции двух переменных и от n функций (теоремы 1.4, 1.5).
8) Опр. прямого метода вариационного исчисления. Алгоритм метода Ритца (теорема 1.7).
9) Опр. неявного отображения. Пр.
10) Опр. правого обратного и обратного отображений. Пр.
11) Теоремы о дифференцируемости неявного отображения (теорема 1.8).
12) Опр. $(n-m)$ - мерного непрерывно дифференцируемого многообразия. Пр.
13) Алгоритм нахождения условного экстремума функции методом Лагранжа (теорема 1.9). Пр.
14) Опр. задачи Лагранжа на условный экстремум функционала и необходимое условие экстремума (теорема 1.10).
15) Опр. канонических переменных, функции Гамильтона и канонических уравнений.
16) Опр. функции Лагранжа системы материальных точек и действия по Гамильтону. Принцип Гамильтона-Остроградского.
17) Опр. консервативной системы и вывод закона сохранения для нее.
18) Опр. функционального преобразователя, булевой функции и логической формулы. Пр.
19) Опр. замыкания множества булевых функций, функционально полной системы и базиса. Теорема 2.2.
20) Опр. логического элемента, логической и комбинационной схем (КС). Пр.
21) Опр. эквивалентных КС, задач анализа и синтеза КС. Пр.
22) Опр. автомата Мили. Способы задания. Пр.
23) Опр. кодировщика, декодировщика и цифрового автомата. Пр.
24) Опр. автомата Мура. Этапы синтеза автомата. Пр.
25) Опр. полных систем переходов и выходов автомата. *D*- и *T*-триггеры.
26) Опр. структурно полного набора автоматов и логических элементов. Теорема Глушкова.
27) Опр. канонического метода синтеза автомат и функции возбуждения автомата.

СПИСОК ТЕОРЕМ И ПРИМЕРОВ К ЭКЗАМЕНУ

1) Т.1.1 о свойствах функционала.
2) Основная лемма вариационного исчисления.
3) Т.1.2 о вариационной задаче с закрепленными концами и задача. о цепной линии.
4) Найти уравнение геодезической линии на цилиндре.
5) Вывести уравнение минимальной поверхности.

6) Достаточное условие локального экстремума функции (теорема 1.6). Пр.
7) Доказать эквивалентность уравнений Эйлера и канонических уравнений.
8) Доказать, что принцип Гамильтона-Остроградского эквивалентен уравнению сводного движения системы материальных точек в потенциальном поле.
9) Вывести механический смысл канонических переменных и функции Гамильтона свободной системы n материальных точек в потенциальном поле.
10) Теорема 2.1 Шеннона и формула Шеннона представления логической формулы.

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ К ЭКЗАМЕНУ

1) Найти экстремаль функционала $\int_2^4 x\cdot y_x'^4 - 2y\cdot y_x'^3 dx,\ \ y(2)=1,\ \ y(4)=5$

2) Найти экстремаль функционала $\int_0^3 \frac{y_x'}{\sqrt{1+y_x'^2}}dx,\ \ y(0)=1,\ \ y(3)=4$.

3) Найти экстремаль функционала $\int_2^3 2y^2 + x^2 y_x'^2 dx,\ \ y(2)=1,\ \ y(3)=2\ \ \left(y(x)=y(e^u)=: f(u)\right)$

4) Найти экстремаль методом Ритца $\int_0^1 (y_x'^2 + y^2 + 2x)dx,\ \ y(0)=0,\ \ y(1)=2\ \ \left(y=2x+Cx(x-1)\right)$

5) Найти условный экстремум $u = xy^2z^3,\ \ x+2y+3z=6$.

6) Найти условный экстремум $u = x^2+y^2+2z^2,\ \ x-y+z=1$.

7) Решить задачу Лагранжа $\int_0^\infty (x^2+y^2)dt,\ \ x(0)=x_0,\ \ x(\infty)=0,\ \ \ x_t'+x-y=0$.

8) Решить задачу Лагранжа $\int_0^1 (x_t'^2+y_t'^2+1)dx,\ \begin{cases} x(0)=0 \\ y(0)=0 \end{cases},\ \begin{cases} x(1)=2 \\ y(1)=0 \end{cases},\ \ \ x+y-2t^2=0$.

ЛАБОРАТОРНАЫЕ РАБОТЫ ПО MATLAB+SIMULINK

1) Специальные разделы MATLAB.
2) Создание S-моделей логических и дискретных динамических систем.