ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Прикладная математика»

Конспект лекций

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ПРИЛОЖЕНИЯ

Автор

Братищев А.В.

Ростов-на-Дону, 2016

Аннотация

Конспект лекции спецкурса на студентов инженерных специальностей автоматизации, управления, электротехники, робототехники, системного анализа. Лекции читаются в мультимедийном режиме, поэтому конспект не содержит доказательств, рисунков и примеров. Предполагается, что студент имеет распечатку этого курса, а во время лекции вносит в соответствующие места распечатки (на обратной стороне листа) доказательства, рисунки, примеры, а также выделяет ключевые слова определений. Спецкурс является прямым продолжением курса математики автора для первого и второго семестров, конспект которого также выложен на сайте кафедры. Поэтому сохранена нумерация глав. Представлен список вопросов к рубежным контролям и список заданий к контрольным работам.

Автор:

доктор физ.-мат. наук,

профессор кафедры "Прикладная математика"

Братищев А.В.

ГЛАВА 9 ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ПРИЛОЖЕНИЯ.
§ 9.1 Комплексные числа. Топология расширенной комплексной плоскости.
§ 9.2 Аналитическая функция и ее физический смысл.
§ 9.3 Интегрирование аналитических функций.
§ 9.4 Ряды с комплексными членами. Полюсы. Вычеты.
§ 9.5 Изменение аргумента функции вдоль кривой. Годограф.
§ 9.6 Преобразование Лапласа.
§ 9.7 Преобразование Фурье.
§ 9.8 Элемент теории графов. Уравнение линейной цепи.
§ 9.9 *Z*- преобразование и разностные уравнения.
ЛИТЕРАТУРА
СПИСКИ В ОПРОСОВ И ТИПОВЫХ ЗАДАЧ К ЗАЧЁТУ

§ 9.1 Комплексные числа. Топология расширенной комплексной плоскости.

Опр. Мнимой единицей называется символ $i=\sqrt{-1}$ со свойством $i^2:=-1$. Комплекс ным числом (в алгебраической форме) называется выражение вида $z:=a+bi,\quad a,b\in\mathrm{R}$.

Джероламо Кардано (1501 -1576) - итальянский математик, инженер, философ, медик, астролог. Автор >130 монографий. Карданный подвес и карданный вал. В трактате «*Ars magna*», 1545) впервые опубликовал формулу Тартальи решения кубического ура внения, формулу Феррари решения уравнения четвёртой степени. Первым в Европе стал использовать отрицательные корни уравне ний. Обнаружил, что кубическое уравнение может иметь три веще ственных корня (этот факт остался незамеченным даже в трудах Омара Хайяма), причём сумма этих корней всегда равна коэффи циенту при x^2 с противоположным знаком (одна из формул Виета)

Рафаэль Бомбелли (1526 - 1572) - итальянский математик, инже-нер-гидравлик. Главный труд *L'Algebra*, написан в 1560 г., издан в 1579 г. Б. Первым в Европе приводит правила работы с отри-цательными числами, включая правило знаков для умножения. Первым оценил пользу комплексных чисел, в частности для решения уравнений третьей степени по формулам Кардано. Определил произведение комплексных чисел. Придумал первые скобки. Первый стал использовать числовое (а не словесное, как ранее) обозначение для показателя степени (дужкой снизу).

Опр. Каждой точке с радиусом-вектором $\{a,b\}$ евклидовой плоскости $\tilde{\mathrm{R}}^2$ с ПДСК сопоставим комплексное число $z:=a+bi$. Тем самым устанавливаем взаимно однозначное соответствие между векторами R^2 и множеством комплексных чисел C. Ось абсцисс назовем вещественной осью и обозначим Re. Ось ординат - мнимой осью и обозначим Im. Единицей измерения на последней будет i. Совокупность точек и так переименованных осей называется комплексной плоскостью, которую будем обозначать той же буквой C.

Пр.

Опр. Для $z := a + bi$ число $\operatorname{Re} z := a$ называется вещественной частью, а число $\operatorname{Im} z := b$ - коэффициентом мнимой части комплексного числа z.

Опр. Суммой (разностью) комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ называется комплексное число $z_1 \pm z_2 := (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i$.

Опр. Произведением комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ называется комплексное число $z_1 z_2 := (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$.

Пр.

Опр. Комплексное число $\overline{z} := a - bi$ называется сопряженным к комплексному числу $z = a + bi$.

Пр. $z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 \geq 0$.

Опр. Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется число $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$.

ЗАМЕЧАНИЕ $|z_2 - z_1| = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$, то есть, модуль разности комплексных чисел, совпадает с расстоянием между соответствующими точками z_1, z_2 комплексной плоскости C.

Опр. Частным от деления комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ называется комплексное число $\dfrac{z_1}{z_2} := \dfrac{z_1 \overline{z}_2}{z_2 \overline{z}_2} = \dfrac{z_1 \overline{z}_2}{|z_2|^2}$.

Пр.

Карл Фри́дрих Га́усс (1777 - 1855) - великий немецкий математик, астроном и физик. Его исследования посвящены высшей алгебре, теории чисел, дифференциальной геометрии, геоде зии, небесной механике, теоретической астрономии, теории электричества и магнетизма. Разработал новую арифметиче скую теорию квадратичных формы. Доказал основную теоре му алгебры, исследовал уравнения, к которым приводит задача деления круга на равные части. Ввел комплексную плоскость. Строго изложил теорию комплексных чисел. Заложил основы теории сходимости рядов. Пришел к идее о возможности неевклидовой геометрии. Доказал возможность построения с помощью циркуля и линейки правильных 17- и 257-угольников.

Опр. Главным значением аргумента комплексного числа $z := a + bi \neq 0$ называется величина угла $\arg z \in [0; 2\pi)$ или $\arg z \in (-\pi, \pi]$ между положительным направлением вещественной оси и направлением на точку z, отсчитываемого против часовой стрелки.

ЗАМЕЧАНИЕ Аргумент - от *лат.* argumentum – знак.

ЗАМЕЧАНИЕ Функция $\arg z$, определена на $\mathrm{C} \setminus \{0\}$, и определяет бесконечнозначную функцию $Arg\,z := \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Опр. Если $z = a + bi,\ \varphi := \arg z,\ r := \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$, то выражение

$$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

называется тригонометрической формой комплексного числа.

$$e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi \text{ - формула Эйлера (1775).}$$

Пр.

Опр. $z = re^{i\varphi}$ - показательная форма комплексного числа.

Операции умножения, деления и возведения в степень комплексных чисел упрощаются при переходе к тригонометрической форме, как показывает следующая

ТЕОРЕМА 9.1 Пусть $z_k = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k), \quad k = 1,2$. Тогда:

1) $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$;

2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$;

3) алгебраическое уравнение $z^n - a = 0$ имеет ровно n комплексных корней, которые вычисляются по формуле $z_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$, где $a = |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $k = 0,\dots n-1$.

ПРИМЕР $\left(\sqrt[4]{1}\right)_k = \sqrt[4]{|1|}(\cos\dfrac{2\pi k}{4} + i\sin\dfrac{2\pi k}{4}) = \cos\dfrac{\pi k}{2} + i\sin\dfrac{\pi k}{2}, \quad k = 0,1,2,3.$

Опр. Для комплексного числа $z = a + bi \quad e^z := e^a e^{bi}$.

СЛЕДСТВИЕ Для комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i\ \ e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$.

Опр. Добавим к комплексной плоскости одну “бесконечно удаленную точку” ∞. Полученное множество называется расширенной комплексной плоскостью (сферой Римана) и обозначается $\overline{\mathrm{C}} := \mathrm{C} \bigcup \{\infty\}$.

Опр. ε-окрестностью конечной точки z_0 называется круг $D(z_0, \varepsilon) := \{z \in \mathrm{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$. ε-окрестностью бесконечно удаленной точки ∞ называется множество внешность круга $D(\infty, \varepsilon) := \left\{z \in \mathrm{C} : |z| > \dfrac{1}{\varepsilon}\right\} \bigcup \{\infty\}$. При таком определении ε-окрестность стягивается к бесконечно удаленной точке ∞, когда $\varepsilon \to 0$.

Опр. Пусть комплекснозначная функция (КЗФ) $f(t)$ определена в окрестности точки $t_0 \in \mathrm{R}$ и принимает значения в $\overline{\mathrm{C}}$. Говорят, что $f(t)$ имеет предел $b \in \overline{\mathrm{C}}$ при $t \to t_0$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \quad f(t) \in D(b, \varepsilon).$$

ПРИМЕР (*электротехнический смысл КЗФ*) Комплексное сопротивление емкости

$\underline{Z}_C := \frac{1}{\omega Ci} = -\frac{1}{\omega C} i$, комплексное сопротивление индуктивности $\underline{Z}_L := \omega Li$ являются комплекснозначными функциями от частоты ω.

Опр. Комплекснозначная функция (КЗФ) $f(t):[\alpha,\beta] \to \bar{\mathrm{C}}$ называется непрерывной в точке $t_0 \in [\alpha,\beta]$, если $\lim\limits_{t\to t_0} f(t) = f(t_0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ Пусть дана непрерывная $\overline{\text{КЗФ}}$ $f(t) = x(t) + y(t)i : [\alpha,\beta] \to \mathrm{C}$. Как и в случае евклидовой плоскости определяются кривая $l := \{ f(t) \in \mathrm{C} : t \in [\alpha,\beta]\}$ замкнутая, спрямляемая и гладкая кривые. В последнем случае условие $\forall t \in [\alpha,\beta] \;\; f'(t) = x'(t) + y'(t)i \neq 0$ равносильно существованию касательной в каждой точке этой кривой.

Опр. Кривая называется жордановой, если КЗФ $f(t)$ взаимно однозначная, то есть кривая не имеет точек самопересечения. Кривая называется замкнутой жордановой, если она замкнута и сужение $f(t):[\alpha,\beta) \to \mathrm{C}$ взаимно однозначное.

ПРИМЕР Окружность $S(z_0,R) := \{z \in \mathrm{C} : |z - z_0| = R\}$, задаваемая КЗФ $f(t) = z_0 + R\mathrm{e}^{ti}$, $t \in [0,2\pi]$, есть гладкая жорданова замкнутая кривая.

Опр. Совокупность $\Gamma(G)$ граничных точек множества G называется границей множества. Множество $\bar{G} := G \cup \Gamma(G)$ называется замыканием множества G. Множества $\Gamma(G)$ и $\bar{G}$ всегда замкнуты.

ПРИМЕР $\Gamma([0,1]) = \{0,1\}; \quad \Gamma(D(z_0,R)) = S(z_0,R), \quad \bar{D}(z_0,R) = D(z_0,R) \bigcup S(z_0,R)$.

Опр. Множество G называется несвязным, если его можно разбить на два подмножества, каждое из которых не содержит предельных точек другого подмножества. В противном случае множество называется связным.

Пр.

Опр. Открытое связное множество называется областью.

ЗАМЕЧАНИЕ Открытое множество является областью тогда и только тогда, когда любые две его точки можно соединить ломаной, принадлежащей этому множеству.

Пр.

Опр. Область G называется односвязной, если ее граница $\Gamma(G)$ есть связное множество.

Пр.

Опр. Область G называется n-связной если её границу можно разбить на n попарно непересекающихся замкнутых и связных множеств (- компонент связности).

Пр.

ТЕОРЕМА 9.2 Замкнутая ограниченная жорданова кривая l разбивает $\bar{\mathrm{C}}$ на две одно-связных области: внутренность кривой $\operatorname{int} l$, которая является ограниченной областью и границей которой является кривая l: $\Gamma(\operatorname{int} l)=l$, и внешность кривой $\operatorname{ext} l$, имеющей ∞ внутренней точкой и граница которой тоже совпадает с l: $\Gamma(\operatorname{ext} l)=l$ (Жордан,1882) .

§ 9.2 Аналитическая функция и ее физический смысл.

Опр. Пусть $G\subset\overline{\mathrm{C}}$. Отображение $w=f(z)$: $G\to\overline{\mathrm{C}}$ называется функцией комплекс ного переменного (ФКП).

Леона́рд Э́йлер (1707, Базель-1783, Санкт-Петербург) - выда ющийся математик, механик, физик, астроном XVIII века.

Автор более чем 800 работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближён ным вычисле ниям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и др.

Ввел функцию комплексного переменного, формулу Эйлера, условие Даламбера-Эйлера.

Почти полжизни провёл в России (1726-1741; 1776-1783).

ЗАМЕЧАНИЕ Пусть функция $f(z)=:u(x,y)+iv(x,y)$ определена в окрестности точки $z_0=x_0+iy_0$ и принимает значения в C. Тогда она непрерывна в точке $z_0=x_0+iy_0$, если и только если отображение $F(x,y):=(u(x,y),v(x,y))$ непрерывно в точке $(x_0,y_0)\in\tilde{\mathrm{R}}^2$.

ПРИМЕР ФКП $w:=\arg z:\mathrm{C}\setminus\{0\}\to[-\pi,\pi)$,

$$\arg z:=\begin{cases} arctg\,\frac{y}{x}, & z\in \text{первой или четвертой четверти},\\ arctg\,\frac{y}{x}+\pi, & z\in \text{второй четверти},\\ arctg\,\frac{y}{x}-\pi, & z\in \text{третьей четверти}, \end{cases},$$

непрерывна в области $\mathrm{C}\setminus(-\infty,0]$, так как $arctg\,\dfrac{y}{x}$ непрерывна как функция двух вещественных переменных.

Опр. Пусть ФКП $f(z)$ определена в окрестности точки z_0. Она называется дифферен цируемой в этой точке, если существует конечный предел $f_z'(z_0):=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$. Этот предел называется производной функции $f(z)$ в точке z_0.

ТЕРЕМА 9.3 (*критерий Эйлера дифференцируемости ФКП в точке*) Пусть функция комплексного переменного $w=f(z)$ определена в окрестности точки $z_0=x_0+y_0 i$. Тогда равносильны утверждения:

1) $f(z)$ дифференцируема в точке z_0;
2) отображение $F(x,y):=(u(x,y),v(x,y))$ дифференцируемо в точке (x_0,y_0) и

удовлетворяет в ней уравнениям Коши-Римана: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.

ЗАМЕЧАНИЕ Уравнения Коши-Римана в полярной системе координат имеют вид

$$r\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial \varphi},\quad r\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

СЛЕДСТВИЕ Если $f(z)$ дифференцируема в точке z, то ее производную можно вычислять по формуле $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$.

Определим элементарные функции комплексного переменного.

Опр. $\sin z:=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$; $\cos z:=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$; $tgz:=\frac{\sin z}{\cos z}$; $ctgz:=\frac{\cos z}{\sin z}$;

$\ln z:=\ln|z|+i\arg z,$ для $-\pi\le\arg z<\pi,\ z\neq 0$;

$Lnz:=\ln|z|+iArgz,$ где $Argz:=\{\arg z+2\pi k\}$;

$z^a:=e^{aLnz}$; $a^z:=e^{zLna}$, где $a\neq 0$.

Опр. Функция комплексного переменного называется целой, если она дифференци руема в каждой точке плоскости C .

ТЕОРЕМА 9.4 (*свойства основных элементарных функций*)

1) Функция e^z целая $2\pi i$-периодическая и не имеет нулей в плоскости C .

2) Функции $\sin z,\ \cos z$ целые 2π -периодические и

$$\sin z=0\ \Leftrightarrow\ z=\pi k, k\in Z;\qquad \cos z=0\ \Leftrightarrow\ z=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z.$$

3) Функция $tg\,z$ дифференцируема в каждой точке из C за исключением точек $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k\right\}$;

функция $ctg\,z$ дифференцируема в каждой точке из C за исключением точек $\{\pi k\}$;

4) Функция $\ln z$ дифференцируема в каждой точке плоскости с разрезом $C\setminus(-\infty,0]$ и является обратной к функции e^z в полосе $G=\{z\in C:|\operatorname{Im} z|<\pi\}$;

5) Функция $z^a:=e^{a\ln z}, a\in C\setminus\{0\}$, является дифференцируемой в плоскости с разрезом $C\setminus(-\infty,0]$;

6) Функция $a^z:=e^{\ln a\, z},\ a\in C\setminus\{0\}$ целая и не имеет нулей в C .

Пр. 1 $\cos i=$

Пр. 2 $i^i:=$.

Опр. Функция комплексного переменного называется аналитической в точке $z_0\in C$, если она дифференцируема в каждой точке некоторой ε-окрестности $D(z_0,\varepsilon)$. Точка, в которой $f(z)$ не аналитическая, называется особой точкой функции (Кондорсе, Лагранж, 1797).

ПРИМЕР $f(z)=\dfrac{1}{z-z_0}$ аналитическая в любой точке C кроме $z=z_0$.

Опр. Функция $f(z):G\to\mathrm{C}$ называется аналитической (голоморфной) в области G, если она аналитическая в каждой точке этой области.

ЗАМЕЧАНИЕ Голоморфный от *греч.* $o\lambda o\zeta$ - целый + $\mu o\rho\varphi\eta$ - форма.

Опр. Функция $f(z)$ называется аналитической (голоморфной) на замкнутом множестве K, если она аналитическая в некоторой области, содержащей K.

ЗАМЕЧАНИЕ (*физический смысл аналитической функции*) Пусть в материальной односвязной плоской области G известна напряженность электростатического поля $\bar{E}=\left\{E_1(x,y),E_2(x,y)\right\}$, порождаемого зарядами, сосредоточенными на границе $\Gamma(G)$. Тогда существует аналитическая в G функция $f(z)=u(x,y)+v(x,y)$, которая называется комплексным потенциалом электростатического поля, и которая обладает свойствами:

1) $\forall z=x+yi \quad E_1(x,y)+E_2(x,y)i=-i\overline{f'(z)}$;

2) линии уровня $u(x,y)=C$ совпадают с силовыми линиями этого поля;

3) линии уровня $v(x,y)=C$ совпадают с эквипотенциальными линиями поля.

§ 9.3 Интегрирование аналитических функций.

Опр. Пусть l есть кусочно гладкая кривая в области G, и $f(z):G\to\mathrm{C}$ - непрерывная функция комплексного переменного. Разобьем кривую точками $z_0,...,z_n$, выберем точки $\xi_k\in z_{k-1}z_k$. Образуем интегральную сумму $S\left(T,E\right):=\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta z_k$, где $E:=\{\xi_k\},T:=\{z_k\}$. Обозначим. $d(T)$ диаметр разбиения кривой l. Интегралом от ФКП $f(z)$ на кривой l называется конечный предел $\lim\limits_{d(T)\to 0}S(T,E)=:\int\limits_l f(z)dz$.

ТЕОРЕМА 9.5 (*свойства интеграла от ФКП*)

1) Если ФКП $f(z)$ непрерывна в односвязной области G, то равносильны утверждения:

а) $f(z)$ голоморфна в G;

б) для любой спрямляемой кривой l интеграл $\int\limits_l f(z)dz$ зависит только от ее концов;

в) для любого замкнутого спрямляемого контура l $\int\limits_l f(z)dz=0$.

2) (*теорема Коши для сложного контура*) Пусть граница $(n+1)$-связной области G состоит из внешней Γ_0 и n штук внутренних $\Gamma_1,...,\Gamma_n$ кусочно гладких замкнутых жордановых кривых. Обход каждой из кривых выбран так, чтобы область G оставалась слева. Если $f(z)$ аналитическая на $\bar{G}$, то

$$\int\limits_{\Gamma_0}f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\Gamma_k^{-1}}f(z)dz.$$

3) (*формула Коши*) Если $f(z)$ аналитическая в точке $z = z_0$, то

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0} dz, \qquad f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz.$$

Пр. При $n \geq 1$ $\displaystyle\int\limits_{|t-z_0|=R} \frac{dt}{(t-z_0)^n} =$

ЗАМЕЧАНИЕ (*способы вычисления интегралов от ФКП*)

1) $\displaystyle\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_C f(z)dz = \int\limits_C (udx - vdy) + \int\limits_C (vdx + udy)i$, то есть с помощью криволинейного интеграла второго рода.

2) Если $l = \{\varphi(t) : t \in [\alpha, \beta]\}$ - кусочно гладкая кривая, то $\displaystyle\int\limits_l f(z)dz = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$, то есть с помощью интеграла от КЗФ.

3) Если $f(z)$ голоморфна в односвязной области G и $F(z)$ - первообразная этой функции, то $\forall z_1, z_2 \in G$ $\displaystyle\int\limits_{z_1 z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$, то есть с помощью формулы Ньютона-Лейбница.

§ 9.4 Ряды с комплексными членами. Полюсы. Вычеты.

Определения сходимости и абсолютной сходимости для рядов с комплексными членами $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n i)$ формулируются так же, как и для рядов с вещественными членами.

ЗАМЕЧАНИЕ (*свойства числовых рядов*)

1) Ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n i)$ сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

2) (*достаточное условие расходимости*) Если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq 0$ или не существует, то $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ряд расходится.

3) Если ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ абсолютно сходится, то абсолютно сходится любой ряд, полученный из данного перестановкой или группировкой членов. При этом он сходится к тому же числу.

4) (*признаки Коши и Даламбера*) Если существует предел $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|z_k|}=q$ ($\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right|=q$), то при $q<1$ ряд сходится абсолютно, при $q>1$ ряд расходится, а при $q=1$ нужны дополнительные исследования.

ПРИМЕР Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ абсолютно сходится в каждой точке $z\in\mathrm{C}$, так как по признаку Даламбера $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{|z^{n+1}|n!}{(n+1)!|z^n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|z|}{n+1}=0$. Так как $\forall x\in\mathrm{R}\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$, то естественно положить $\forall z\in\mathrm{C}\quad e^z:=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$. Несложно показать, что при таком обобщении понятия экспоненты сохраняется равенство: $\forall z_1,z_2\in\mathrm{C}\quad e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$.

Опр. Ряд по степеням

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n:=...+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+...+a_n(z-z_0)^n+...$$

называется сходящимся на множестве $K\subseteq\overline{\mathrm{C}}$, если $\forall z\in K$ сходятся ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$. В противном случае ряд называется расходящимся.

Пр. Найдем множество точек сходимости ряда $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$.

ТЕОРЕМА 9.6 (*свойства функциональных рядов*)

1) Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{|a_n|}=\frac{1}{R}$ или $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=R$, то степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ равномерно сходится внутри круга сходимости $D(z_0,R)\in\mathrm{C}$ с радиусом сходимости степенного ряда $=R$, и расходится в каждой точке вне замыкания $\bar{D}(z_0,R)$ этого круга. Сумма степенного ряда является аналитической функцией в круге сходимости.

2) Пусть функция $f(z)$ голоморфна на окружности $S(z_0,r_0)$. Положим

$$\forall n\ge 0\quad a_n:=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t-z_0|=r_0}\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt,\qquad \forall n\ge 1\quad a_{-n}:=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t-z_0|=r_0}f(t)(t-z_0)^n dt.$$

Пусть существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=:R,\quad \lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{-n-1}|}{|a_{-n}|}=r$. Тогда ряд по степеням $(z-z_0)^n$ (*- ряд Лорана функции* $f(z)$) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ сходится к $f(z)$ равномерно внутри кольца $\mathrm{R}(z_0,r,R):=\{z\in\mathrm{C}:r<|z-z_0|<R\}$, и имеет на каждой компоненте его

границы особые точки.

Пр. 1 Целая функция e^z

Пр. 2 Найдем ряд Маклорена функции $\sin z$.

Опр. Особая точка z_0 аналитической функции $f(z)$ называется изолированной особой точкой однозначного характера (ИОТОХ), если $f(z)$ аналитична в некоторой проколотой окрестности $\mathrm{R}\left(z_0,0,\varepsilon\right)$.

Опр. ИОТОХ z_0 называется полюсом функции $f(z)$, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$. Полюс z_0 называется полюсом порядка n (≥ 1), если существует конечный и не равный нулю предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)\cdot(z-z_0)^n$. Полюс первого порядка называется простым.

Пр. Функция $f(z)=\dfrac{1}{(z-z_0)^k}, k\in \mathrm{N}$.

ЗАМЕЧАНИЕ Пусть функция $f(z)$ имеет ИОТОХ в $z=z_0$. z_0 является полюсом тогда и только тогда, когда главная часть ряда Лорана имеет конечное число членов.

Опр. Пусть $z_0\in\overline{\mathrm{C}}$ - ИОТОХ функции $f(z)$. Вычетом функции $f(z)$ в точке z_0 называется число $\operatorname*{Res}\limits_{z_0} f(z):=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(z)dz$, где C - замкнутая спрямляемая жорданова кривая, охватывающая z_0, причем ее внутренность $\operatorname{int} C$ должна оставаться слева при обходе точки z_0 по контуру C.

ЗАМЕЧАНИЕ В силу теоремы Коши вычет не зависит от выбора C.

Огюсте́н Луи́ Коши́ (1789- 1857) - великий французский математик, член Петербургской Академии Наук. Написал свыше 800 работ. Много работал в области комплексно го анализа, в частности, устано вил формулу и создал теорию интегральных вычетов. Ввёл понятие радиуса сходимости ряда. Впервые дал строгое определение основ ным понятиям математического анализа – пределу, непрерывности, производной, дифференциалу, интегралу, сходимости ряда и т. д. Его определение непрерывности опиралось на понятие бесконечно малого как переменной величины, стремящаяся к нулю. Глубоко изучил краевую задачу с начальными условиями, которая с тех пор называется «задача Коши».

Опр. Пусть КЗФ $f(t)$ непрерывна на $(-\infty,+\infty)$. Если существует конечный предел $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)dt := \lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R} f(t)dt$, то он называется интегралом в смысле главного значения .

ТЕОРЕМА 9.7 (*свойства вычетов*)

1) Если $z_0 \neq \infty$, то $\operatorname*{Res}_{z_o} f(z) = a_{-1}$. Если $z_0 = \infty$, то $\operatorname*{Res}_{z_o} f(z) = -a_{-1}$.

2) (*основная теорема о вычетах*) Если $f(z)$ аналитическая в односвязной области $G \subset \mathrm{C}$ за исключением ИОТОХов $z_1,...,z_n \in G$, C - спрямляемая замкнутая жорданова кривая в G, охватывающая $z_1,...,z_n$, то

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z_k} f(z).$$

3) Пусть у рациональной функции $r(z) := \dfrac{p(z)}{g(z)}$ $\deg p(z) =: m,\ \deg g(z) =: n$ и $g(x)$ не имеет нулей на прямой $\operatorname{Im} z = a$. Тогда

$$\int_{-\infty+ai}^{\infty+ai} r(x)e^{i\lambda x}dx = \begin{cases} 2\pi i \sum\limits_{\operatorname{Im} z_k > a} \operatorname*{\mathit{Res}}\limits_{z_k}\left(r(z)e^{i\lambda z}\right), & \text{\textit{если}}\ \ n-m \geq 1, \lambda > 0 \\ -2\pi i \sum\limits_{\operatorname{Im} z_k < a} \operatorname*{\mathit{Res}}\limits_{z_k}\left(r(z)e^{i\lambda z}\right), & \text{\textit{если}}\ \ n-m \geq 1, \lambda < 0 \\ 2\pi i \sum\limits_{\operatorname{Im} z_k > a} \operatorname*{\mathit{Res}}\limits_{z_k} r(z), & \text{\textit{если}}\ \ n-m \geq 2, \lambda = 0 \end{cases},$$

где z_k - нули $g(z)$, лежащие в соответствующей полуплоскости.

4) Если z_0 - полюс порядка n функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{Res}_{z_o} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_o} \left[f(z)(z-z_0)^n \right]^{(n-1)}.$$

5) Пусть $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ в окрестности z_0, функции $\varphi(z), \psi(z)$ аналитическая в z_0, $\varphi(z_0) \neq 0$ и $\psi(z)$ имеет простой нуль в точке z_0. Тогда точка z_0 является простым полюсом функции $f(z)$ и $\operatorname*{Res}_{z_o} f(z) = \dfrac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.

Пр. Вычислим интеграл $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^2(z-i)} dz$.

§ 9.5 Изменение аргумента функции вдоль кривой. Годограф.

Опр. Пусть функция $f(z)$ аналитическая на кривой $l := \{ z = z(t),\ t \in [\alpha, \beta] \}$ и $\forall z \in l\ \ f(z) \neq 0$. Это обеспечивает непрерывность аргумента $\arg f(z(t))$ как непрерывных функции на кривой l. Произведем разбиение $\alpha =: t_0 < ... < t_n := \beta$ отрезка $[\alpha, \beta]$, и по функции $\arg f\left(z(t)\right)$ и разбиению образуем интегральную сумму

$$S(T) = \sum_{k=1}^{n} \left(\arg f(z(t_k)) - \arg f(z(t_{k-1})) \right).$$

Можно доказать, что существует конечный предел $\Delta_l \arg f(z) = \int\limits_l d\arg f(z) := \lim\limits_{d(T)\to 0} S(T)$.

Его называют изменением аргумента функции $f(z)$ вдоль кривой l.
ТЕРЕМА 9.8 (*свойства изменения аргумента функции*)

1) $\Delta_l(\arg f_1 \cdot f_2) = \Delta_l(\arg f_1) + \Delta_l(\arg f_2)$; $\quad \Delta_l\left(\arg\dfrac{f_1}{f_2}\right) = \Delta_l(\arg f_1) - \Delta_l(\arg f_2)$.

2) Пусть кривая l разбита на два куска: $l = l_1 \bigcup l_2$. Тогда $\Delta_l(\arg f) = \Delta_{l_1}(\arg f) + \Delta_{l_2}(\arg f)$.

3) $\Delta_{l^{-1}}(\arg f) = -\Delta_l(\arg f)$.

4) (*принцип аргумента*) Пусть функция $f(z)$ непрерывна на $\overline{\operatorname{int} l}$ и аналитическая внутри $\operatorname{int} l$ замкнутой спрямляемой жордановой кривой l за исключением конечного числа полюсов. Пусть $\forall\, z \in l \quad f(z) \neq 0$. Тогда, если $\lambda_1,...,\lambda_m$ - нули $f(z)$ в $\operatorname{int} l$ с кратностями соответственно $p_1,...,p_m$, $\mu_1,...,\mu_n$ - ее полюсы в $\operatorname{int} l$ порядков $q_1,...,q_n$, то
$$\frac{1}{2\pi}\Delta_l \arg f(z) = N - P, \text{ где } N := p_1 + ... + p_m,\ P := q_1 + ... + q_n.$$

Опр. Пусть функция $f(z)$ аналитическая на кривой l. Тогда множество точек $f(l) := \{f(z) : z \in l\}$ называется годографом функции $f(z)$ относительно кривой l.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Годограф от hodos - *греч*. путь + grapho - *греч*. пишу.
ЗАМЕЧАНИЕ 2 (*геометрический смысл изменения аргумента функции вдоль кривой*)
Изменение аргумента функции $f(z)$ вдоль кривой, деленное на 2π, совпадает с числом оборотов точки $w = f(z)$ вокруг начала координат при ее движении по годографу $f(z)$.
Пр.

§ 9.6 Преобразование Лапласа.

Опр. Комплекснозначная функция $f(t)$ на $(-\infty, \infty)$ называется оригиналом, если она удовлетворяет условиям:

1) $\forall t < 0 \quad f(t) = 0$;
2) $\exists \sigma, C > 0 \quad \forall t \geq 0 \quad |f(t)| < Ce^{\sigma t}$;
3) $\forall R > 0 \ \ f(t)$ имеет не более конечного числа точек разрыва первого рода на $[0, R]$.

Опр. Число $\sigma_f := \inf \sigma$ называется показателем роста оригинала.

Кпр. Функция $f(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{t-1}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ не является оригиналом, так как имеет разрыв второго рода в точке $t = 1$. Функция $f(t) := \begin{cases} e^{t^2}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ не является оригиналом, так как $\sigma_f = \infty$.

Опр. Изображением оригинала называется функция комплексного переменного

$$F(p) := \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \,.$$

Обозначение. $F(p) \div f(t)$ читается "функция $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$".

Опр. Отображение $\mathrm{L} f := F(p)$ называется преобразованием Лапласа.

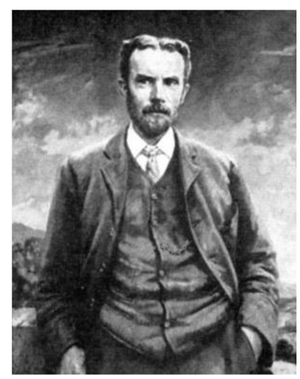
Пьер-Симо́н Лапла́с (1749-1827) -французский математик, механик, физик и астроном; известен работами в области небесной механики, дифференциальных уравнений, один из создателей теории вероятностей.

Диалог с Наполеоном: - Вы написали такую огромную книгу о системе мира и ни разу не упомянули о его Творце!

- Сир, я не нуждался в этой гипотезе.

«Если бы какое-нибудь разумное существо смогло узнать положения и скорости всех частиц в мире в некий момент, оно могло бы совершенно точно предсказать все мировые события».

Пр. 1 Найдем преобразование Лапласа функции Хевисайда $\chi(t) := \begin{cases} 1, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$.



О́ливер Хе́висайд (1850-1925) - английский учёный-самоучка, инженер, математик и физик. Впервые применил комплексные числа для изучения электрических цепей, разработал технику применения преобразования Лапласа для решения дифференциальных уравнений. Переформулировал уравнения Максвелла в терминах трехмерных векторов, напряжённостей электрического и магнитного полей и электрической и магнитной индукций. Разработал теорию линий передач («телеграфные уравнения»). Независимо от других математиков создал векторный анализ.

«Математика есть наука экспериментальная, определения появляются последними».

Пр. 2 $e^{\alpha t}\chi(t) \div$

ЗАМЕЧАНИЕ Изображение $F(p)$ является аналитической функцией в полуплоскости

$$G_{\sigma_f} := \left\{ z \in \mathrm{C} : \operatorname{Re} p > \sigma_f \right\}.$$

Опр. Несобственный интеграл $\Gamma(p) := \int\limits_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} dt,\ \operatorname{Re} p > 0$, называется гамма-функцией

ЗАМЕЧАНИЕ Можно доказать, что гамма-функция является аналитической функцией в области $\overline{\mathrm{C}} | \setminus \{0, -1, \ldots\}$, а в точках $p = 0, -1, \ldots$ она имеет простые полюсы.

Пр.1 $\Gamma(n+1) = \int\limits_0^{\infty} t^n e^{-t} dt =$

Пр. 2 $\forall \operatorname{Re}\nu > -1 \quad \forall p > 0 \quad t^{\nu}\chi(t) \div \int\limits_0^{\infty} t^{\nu} e^{-pt} dt =$

Опр. Сверткой оригиналов $f_1(t),\ f_2(t)$ называется интеграл

$$[f_1 * f_2](t) := \int\limits_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \,.$$

ТЕОРЕМА 9.9 (*свойства преобразований Лапласа*)

1) Пусть E – пространство оригиналов, F пространство функций, аналитических в какой-либо правой полуплоскости. Тогда преобразование Лапласа $\mathrm{L}: E \to F$ является линейным.

2) (*теорема подобия*) $\forall \operatorname{Re}\alpha > 0 \quad f(\alpha t) \div \dfrac{1}{\alpha} F\left(\dfrac{p}{\alpha}\right).$

3) (*теорема запаздывания*) $\forall \alpha > 0 \;\; f(t-\alpha) \div e^{-\alpha p} F(p)$.

4) (*теорема смещения*) $\exists \alpha \in \mathrm{C} \;\; e^{\alpha t} f(t) \div F(p-\alpha)$.

5) (*изображение производной оригинала*) $f'(t) \div -f(+0) + pF(p)$.

6) (оригинал производной изображения) $F'(p) \div -t\, f(t)$.

7) (*изображение интеграла оригинала*) $\int\limits_0^t f(\tau) d\tau \div \dfrac{1}{p} F(p)$.

8) (*оригинал интеграла изображения*) $\int\limits_p^{\infty} F(z) dz \div \dfrac{1}{t} f(t), \quad \operatorname{Re} p > \sigma_f$.

9) (*изображение свертки*) $\int\limits_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \div F_1(p) F_2(p)$.

10) (*интеграл Дюамеля*) $pF_1(p)F_2(p) \div f_1(+0) f_2(t) + \int\limits_0^t f_1'(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$.

11) (*изображение произведения*) $\int\limits_0^{\infty} F_1(z) F_2(p-z) dz \div f_1(t) \cdot f_2(t)$.

12) $\lim\limits_{p\to\infty} pF(p) = f(+0), \quad \lim\limits_{p\to+0} F(p) = f(+\infty)$.

ПРИМЕР Пусть функция $f_0(t)$ имеет конечное число точек разрыва первого рода на отрезке $[0,T]$ и $\forall t \in (-\infty,0) \cup (T,+\infty) \;\; f_0(t) = 0$. Обозначим её изображение $F_0(p) \div f_0(t)$. Образуем периодическую на $[0,+\infty)$ функцию $f(t) := \begin{cases} f_0(t-kT), & t \in [kT,(k+1)T),\ k = 0,1,... \\ 0, & t \in (-\infty,0) \end{cases}$,

и найдем изображение последней при $\operatorname{Re} p > 0$, используя теорему запаздывания

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt=\sum_{k=0}^\infty \int_{kT}^{(k+1)T} f_0(t-kT)e^{-pt}dt=\sum_{k=0}^\infty e^{-kTp}F_0(p)=\frac{F_0(p)}{1-e^{-Tp}}.$$

ТЕОРЕМА 9.10 (*о восстановлении оригинала по изображению*)

1) Пусть функция $F(p)$ голоморфна в полуплоскости $G_\sigma :=\{z\in \mathrm{C}:\mathrm{Re}\, z>\sigma\}$,

$\forall\varepsilon>0$ при $z\in G_{\sigma-\varepsilon},\ z\to\infty$ $F(z)\to 0$ и интеграл $\int\limits_{\sigma+\varepsilon-\infty i}^{\sigma+\varepsilon+\infty i} F(p)dp$ абсолютно сходится.

Тогда $F(p)$ является изображением функции $f(t):=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma+\varepsilon-\infty i}^{\sigma+\varepsilon+\infty i} F(p)e^{tp}dp$.

2) Пусть аналитическая в точке $z=\infty$ функция $F(p)$ имеет ряд Лорана $F(p)=\sum\limits_{k=0}^\infty \dfrac{a_k}{p^{k+1}}$.

Тогда её оригинал вычисляется по формуле $f(t)=\chi(t)\cdot\sum\limits_{k=0}^\infty \dfrac{a_k}{k!}t^k$.

3) Рациональная функция $R(p)$ относительной степени ≤ -1 с полюсами $\lambda_1,\dots,\lambda_n$

является изображением функции $f(t)=\chi(t)\cdot\sum\limits_{k=1}^n \underset{\lambda_k}{Res}(R(p)e^{pt})$.

Таблица преобразований Лапласа некоторых элементарных функций.

f	F	f	F
$\delta_\alpha,\ \alpha\ge 0$	$e^{-\alpha p}$	$t\cos at\cdot\chi(t)$	$\dfrac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$
$\delta_\alpha^{(n)},\ \alpha\ge 0$	$p^n e^{-\alpha p}$	$sh\, at\cdot\chi(t)$	$\dfrac{a}{p^2-a^2}$
$t^n\cdot\chi(t)$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	$e^{at}\cdot\chi(t)$	$\dfrac{1}{p-a}$
$\chi(t-\alpha),\ \alpha\ge 0$	$\dfrac{1}{p}e^{-\alpha p}$	$ch\, at\cdot\chi(t)$	$\dfrac{p}{p^2-a^2}$
$\sin at\cdot\chi(t)$	$\dfrac{a}{p^2+a^2}$	$t^n e^{at}\cdot\chi(t)$	$\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
$\cos at\cdot\chi(t)$	$\dfrac{p}{p^2+a^2}$	$e^{bt}\sin at\cdot\chi(t)$	$\dfrac{a}{(p-b)^2+a^2}$
$t\sin at\cdot\chi(t)$	$\dfrac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$	$e^{bt}\cos at\cdot\chi(t)$	$\dfrac{p-b}{(p-b)^2+a^2}$

ЗАМЕЧАНИЕ 1 Теоремы 9.9, 9.10 и таблица преобразований дают метод решения ЛДУ n-ого порядка, НСЛДУ, ЛДУ в частных производных и интегральных уравнений.

Пр. Решим задачу Коши для НСЛДУ $\begin{cases} x_1' = -x_2 + 2 \\ x_2' = \ \ x_1 + 1 \end{cases}$ с начальными условиями $\begin{cases} x_1(0) = -1 \\ x_2(0) = \ \ 0 \end{cases}$.

§ 9.7 Преобразование Фурье.

Опр. Пусть $f(t) \in L_1(-\infty,\infty)$: интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$ сходится в смысле Лебега. Можно показать, что интеграл $\hat{f}(\omega) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\omega ti}dt$, $\omega \in (-\infty,\infty)$, сходится. Он называется преобразованием Фурье функции $f(t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1) (*физический смысл*) Если $f(t)$ рассматривается как аналоговый сигнал (например, электрический) и $f(t) \in L_2(-\infty,\infty)$, то преобразование Фурье $\hat{f}(\omega)$ называется непрерывным (интегральный) спектр сигнала. Энергия сигнала пропорциональна норме

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt}\,.$$

Опр. Временная область - область определения сигнала $f(t)$. Частотная область - область определения спектра $\hat{f}(\omega)$.

Жан Батист Жозеф Фурье (1768 - 1830) - французский математик и физик. Доказал, что всякую произвольно начерченную линию, составленную из отрезков дуг разных кривых, можно представить единым аналитическим выражением - рядом Фурье $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi}{l}x + b_k \sin\frac{k\pi}{l}x$. Свои методы (ряды и интегралы Фурье) использовал в теории распространения тепла.

ЗАМЕЧАНИЕ Пусть выполнено одно из условий:

а) $f(t) \in L_1(-\infty,\infty)$ и удовлетворяет условию Дини в точке t_0;

б) $f(t),\ \hat{f}(\omega) \in L_1(-\infty,\infty),\ f(t)$ непрерывна в точке t_0.

Тогда имеет место формула обращения в этой точке $f(t_0) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{t_0\omega i}d\omega$.

ТЕОРЕМА 9.11 (*свойства преобразования Фурье*)

1) Преобразование Фурье является линейным отображением.

2) Если $f(t) \in L_1(-\infty,\infty)$, то $\hat{f}(\omega)$ непрерывна на $(-\infty,\infty)$, и $\lim\limits_{\omega\to\infty} \hat{f}(\omega) = 0$.

3) Если $f(t)$ k раз дифференцируема на $(-\infty,\infty)$ и $f^{(k)}(t) \in L_1(-\infty,\infty)$, то

$$f^{(k)}(\omega) = (\omega i)^k \hat{f}(\omega)\,.$$

4) Если $f(t),\dots,t^k f(t)\in L_1(-\infty,\infty)$, то $(t^k f(t))(\omega)=i^k \hat f^{(k)}(\omega)$.

5) Если $f_1(t),\ f_2(t)\in L_1(-\infty,\infty)$, то существует их свертка

$$[f_1 * f_2](t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\in L_1(-\infty,\infty) \quad \text{и} \quad [f_1 * f_2](\omega)=\hat f_1(\omega)\hat f_2(\omega).$$

Пр.1 Найдем преобразование функции $f(t)=\begin{cases}4-t^2, & |t|\le 2\\ 0, & |t|>2\end{cases}$.

Пр 2. Найдем с помощью вычетов обратное преобразование Фурье функции

$$\hat f(\omega)=\frac{1}{(\omega^2+9)(25\omega^2+4)}.$$

§ 9.8 Элемент теории графов. Уравнение линейной цепи.

ЗАМЕЧАНИЕ Параграф введен по трем причинам:

1) Будущий инженер должен знать технику графов.

2) Познакомить с эффективным способ составления уравнений электрической цепи.

3) Дать одно из важнейших приложений преобразования Лапласа.

Опр. Графом называется пара $G:=(V,E)$, состоящая из конечного множества V точек (от *англ*. vertex - вершина) и подмножества E упорядоченных пар вершин (дуги графа) или неупорядоченных пар вершин (от *англ*. edge - ребро).

ЗАМЕЧАНИЕ Ребро, соединяющее вершины v_1, v_2, будем обозначать $\{v_1,v_2\}$, а дугу, соединяющую эти вершины, (v_1,v_2).

Пр.

Опр. Граф называется орграфом (ориентированным графом), если E состоит только из дуг и неориентированным, если E состоит только из ребер.

Пр.

Опр. Ребро (дуга) с началом и концом в одной и той же вершине, называется петлёй.

Опр. Два ребра с общим началом и общим концом или две, дуги с общим началом и общим концом, называются кратными.

Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ Иногда графом называется граф без петель и кратных дуг. В этом случае граф, допускающий кратные ребра, иногда называются мультиграфом, а граф, допускаю щий кратные рёбра и петли, называется псевдографом.

Опр. Вершины с общим ребром (дугой), а так же рёбра (дуги), имеющие общую вершину, называются смежными.

Опр. Если v есть вершина ребра e, то v и e называются инцидентными.

Обозначение. Если $V=\{v_1,...,v_n\}$, $E=\{e_1,...,e_m\}$, то $n(G):=n$, $m(G):=m$.
Пр.

Опр. Матрицей смежности графа (орграфа) G, называется матрица $A(G)=(a_{ij})$ размера $n(G)\times n(G)$, у которой a_{ij} равно числу рёбер, соединяющих вершины v_i, v_j (числу дуг с началом в вершине v_i и концом в v_j).
ЗАМЕЧАНИЕ Матрица смежности графа симметрична, а матрица смежности орграфа нет, вообще говоря.
Пр.

Опр. Матрицей инцидентности орграфа G называется матрица $B(G)=(b_{ij})$ размера $n(G)\times m(G)$, у которой

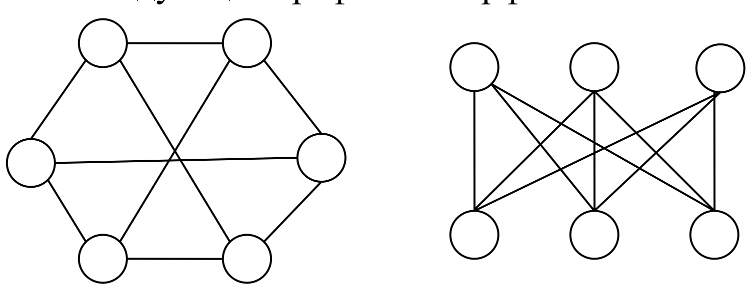
$$b_{ij}=\begin{cases}-1, \textit{ если } v_i - \textit{начало дуги}, \ v_j - \textit{конец дуги } (v_i,v_j)\\ \ \ 0, \textit{ если } v_i, v_j - \textit{несмежные вершины}\\ \ \ 1, \textit{ если } v_i - \textit{конец дуги}, \ v_j - \textit{начало дуги } (v_i,v_j)\end{cases}.$$

Пр.

Опр. Графы $G_1=(V_1,E_1)$, $G_2(V_2,E_2)$ называются изоморфными, если существуют биек тивные отображения $\varphi: V_1\to V_2$, $\psi: E_1\to E_2$, сохраняющее отношение инцидентности:

$$\forall\, v\in V_1 \ \ \forall\, e\in E_1 \big(v \ \textit{инцидентна} \ e\big) \ \Rightarrow \ \big(\varphi(v) \ \textit{инцидентна} \ \psi(e)\big).$$

ПРИМЕР Следующие графы изоморфны.



Опр. Орграфы $G_1=(V_1,E_1)$, $G_2(V_2,E_2)$ называются изоморфными, если эти биекции сохраняют ориентацию: $\forall\, e=(v_1,v_2)\in E_1$ $\psi(e)=(\varphi(v_1),\varphi(v_2))\in E_2$.
ЗАМЕЧАНИЕ Если графы G_1, G_2 изоморфны, то $m(G_1)=m(G_2)$ и $n(G_1)=n(G_2)$.
Пр.

Опр. Последовательность ребер графа $\{v_1,v_2\},\{v_2,v_3\},...\ \{v_{k-1},v_k\}$ (дуг орграфа $(v_1,v_2),(v_2,v_3),...,(v_{k-1},v_k)$) называется маршрутом длины $k-1$ (путем длины $k-1$).
Маршрут (путь) называется замкнутым, если $v_1=v_k$.
Пр.

Опр. Композицией маршрутов $\mu_1 := \{v_1, v_2\}, ..., \{v_{k-1}, v_k\}$, $\mu_2 := \{v_k, v_{k+1}\}, ..., \{v_{l-1}, v_l\}$ называется маршрут $\mu_1 \circ \mu_2 := \{v_1, v_2\}, ..., \{v_{k-1}, v_k\}, \{v_k, v_{k+1}\}, ..., \{v_{l-1}, v_l\}$.

Опр. Маршрут $\mu^{-1} := \{v_k, v_{k-1}\}, ..., \{v_2, v_1\}$ называется обратным к маршруту

$$\mu := \{v_1, v_2\}, ..., \{v_{k-1}, v_k\}.$$

Опр. Незамкнутый маршрут (путь), в котором все ребра (дуги) попарно различны, называется цепью. Цепь называется простой, если в ней все вершины попарно различны.
Пр.

Опр. Замкнутый маршрут (путь), в котором все ребра (дуги) попарно различны, называется циклом (контуром). Цикл (контур) называется простым, если все его вершины попарно различны.

ЗАМЕЧАНИЕ Во всяком замкнутом маршруте (замкнутом пути) можно выделить простой цикл (простой контур).
Пр.

Опр. Подграфом графа (V, E) называется граф (V_1, E_1), со свойством $V_1 \subseteq V$, $E_1 \subseteq E$

Опр. Граф называется связным, если любые две его вершины связаны маршрутом. Всякий максимальный связанный подграф называется компонентой связности графа G. Обозначение $p(G)$ - число компонент связности графа G.
Пр.

Опр. Число рёбер $d(v)$, инцидентных вершине v, называется степенью вершины. Если $d(v) = 0$, то v называется изолированной вершиной. Если $d(v) = 1$, то v называется висячей (концевой).
Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ 1) Для связного графа G $m(G) \geq n(G) - 1$.
2) Изолированная вершина является компонентой связности.
3) Все вершины замкнутого маршрута, как следует из определения, не являются висячими, то есть $\forall v \ d(v) \geq 2$.

Опр. Деревом называется связный граф, не имеющий циклов.

ТЕОРЕМА 9.12 (*свойства дерева*)
1) Дерево необходимо имеет висячую вершину.
2) Следующие утверждения равносильны: а) G - дерево; б) G - связный граф и $n(G) = m(G) + 1$; в) любые две вершины графа G можно соединить единственной простой цепью.
3) Дерево G не содержит циклов, но соединяя какие-либо его вершины ребром, получаем граф, в котором ровно один простой цикл и этот цикл содержит добавленное ребро.

Пр.

Опр. Цикломатическим числом графа G называется величина

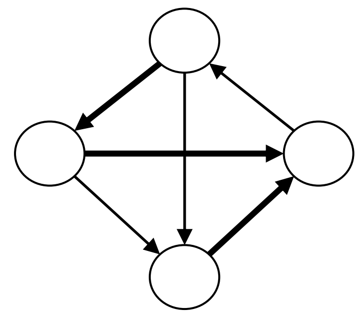
$$\nu(G)) := m(G) - n(G) + p(G).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1) $\nu\left(G\right) \ge 0$.

2) Связанный граф является деревом тогда и только тогда, когда $\nu\left(G\right) = 0$.

Опр. Остовным деревом связного графа G называют любой подграф G_0, содержащий все вершины G и являющийся деревом.

ЗАМЕЧАНИЕ Так как у остовного дерева связного графа G должно быть $n(G)-1$ ребер, то оно не должно содержать $m(G)-\left(n(G)-1\right)=\nu(G)$ ребер графа G



ПРИМЕР Рассмотрим граф на рисунке.

У него $n(G)=4,\ m(G)=6,\ p(G)=1$. $\nu(G)=6-4+1=3$. Выберем, например, $G_1=(\{v_4\},\varnothing)$. Так как $1<n(G)=4$, то процесс построения остовного дерева продолжим.

$$G_2 := \left(\{v_4,v_1\},\{(v_4,v_1)\}\right). \quad n(G_2)=2<4 \quad \Rightarrow$$

$$G_3 = \left(\{v_4,v_1,v_3\},\{(v_4,v_1),(v_1,v_3)\}\right). \quad n(G_3)=3<4 \quad \Rightarrow$$

$$G_4 = \left(\{v_4,v_1,v_3,v_2\},\{(v_4,v_1)(v_1,v_3),(v_3,v_2)\}\right). \quad n(G_4)=4.$$

Остовное дерево построено. Оно не содержит $\nu(G)=3$ ребра графа.

ЗАМЕЧАНИЕ Всюду ниже $G=(V,E)$ есть граф без петель (мультиграф). $m:=m(G)$. На ребрах задана произвольная ориентация, так что G есть орграф. Под циклом понимается любой замкнутый маршрут.

Опр. Сопоставим каждому циклу μ n-ку целых чисел

$$C(\mu)=\{C_1^+(\mu)-C_1^-(\mu),\dots,C_m^+(\mu)-C_m^-(\mu)\},$$

где $C_k^+(\mu)$ есть число проходов k-го ребра при обходе цикла μ, совпадающих с ориентацией ребра, $C_k^-(\mu)$- число проходов k-го ребра с ориентацией, противоположной заданной ориентации ребра. Вектор $C(\mu)\in\mathbf{Z}^m$ называется вектор-циклом, соответствующим циклу μ.

ЗАМЕЧАНИЕ 1) $C(\mu)=0$ тогда и только тогда, когда при обходе цикла каждое ребро или вообще не проходится или число проходов каждого ребра в прямом и противопо ложном направлениях совпадают.

2) Для любого цикла μ на дереве $C(\mu)=0$.

3) $C(\mu_1\circ\mu_2)=C(\mu_1)+C(\mu_2)$.

4) $C(\mu^{-1})=-C(\mu)$.

5) $C(\mu_1\circ\mu_2^{-1})=0 \quad \Leftrightarrow \quad C(\mu_1)=C(\mu_2)$.

Опр. Цикл μ называется линейной комбинацией циклов $\mu_1,\dots,\mu_s$, если

$$\exists \alpha_1,\dots,\alpha_s\in\mathbf{Z} \quad C(\mu)=\alpha_1C(\mu_1)+\dots+\alpha_sC(\mu_s).$$

Опр. Последовательность циклов $\mu_1,...,\mu_5$ называется линейно независимой, если линейно независимы вектор-циклы $C(\mu_1),...,C(\mu_s)$ над полем Q.

Опр. Последовательность циклов $\mu_1,...,\mu_5$ называется цикловым базисом графа G, если эти циклы линейно независимы, и каждый цикл из $\mathbf{Z}^m(G)$ является их линейной комбинацией.

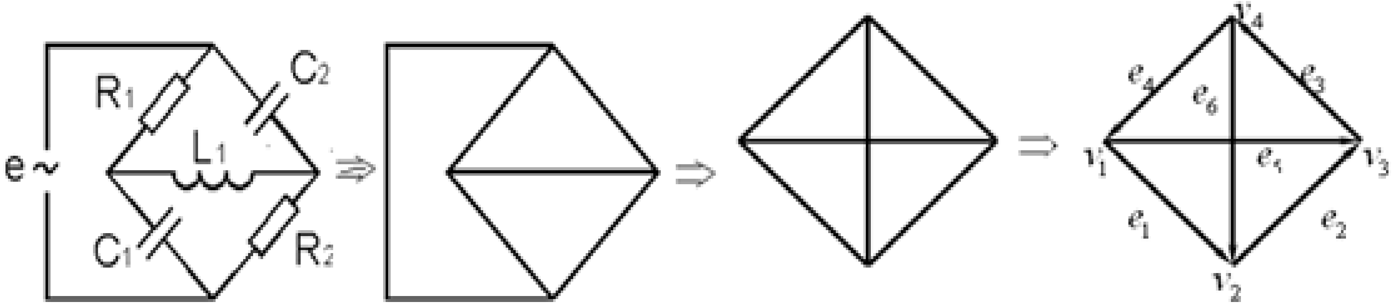
Пр.

Опр. Матрица $C(G)$, строками которой являются координаты вектор-циклов какого-либо циклового базиса, называется цикломатической матрицей графа G.

ТЕОРЕМА 9.13 (*свойства циклового базиса связного мультиграфа*)

1) Если при некоторой ориентации ребер выполняется равенство
$$\exists \alpha_1,...,\alpha_s \in \mathrm{Q} \quad C(\mu)=\alpha_1 C(\mu_1)+...+\alpha_s C(\mu_s),$$
то оно сохраняется при любой другой его ориентации.
2) Цикловые базисы мультиграфа имеют одно и тоже количество элементов, которое травно $\nu(G)$, поэтому $C(G)$ имеет размер $\nu(G)\times m(G)$.
3) Если связный орграф не является деревом ($\nu(G)>0$), то в нем существует цикловой базис, состоящий из простых циклов.

Пр.



ТЕОРЕМА 9.14. Пусть электрическая цепь образована двухполюсными элементами $e_1, e_2, ..., e_m$. По этой цепи образуем связный мультиграф, сопоставив каждому элементу ребро, а каждому $i-$му узлу соединений этих элементов или проводнику между этими элементами - вершины $v_1, ..., v_n$. Зададим на каждом ребре ориентацию, превратив граф в орграф. Обозначим через $U=\begin{pmatrix} u_1 \\ ... \\ u_m \end{pmatrix}$ матрицу падений напряжений на соответствующих элементах цепи, а через $I=\begin{pmatrix} i_1 \\ ... \\ i_m \end{pmatrix}$ - матрицу токов, проходящих по соответствующим

дугам. Тогда:

1) (*электротехнический смысл матрицы* $C(G)$) однородная СЛАУ $C(G)\cdot U=0$ совпадает с уравнением Кирхгофа для напряжений цепи;

2) (*электротехнический смысл матрицы* $B(G)$)

а) $rang\ B(G)=n-1$;

б) если из СЛАУ $B(G)\cdot I=0$ выбросить одно какое-либо уравнение, то получится уравнение Кирхгофа для токов.

3) Уравнения пунктов 1), 2) являются линейными интегро-дифференциальными. Преобразование Лапласа переводит и в СЛАУ. Остается решить СЛАУ и применить к полученным решениям обратное преобразование Лапласа.

Пр.

ЗАМЕЧАНИЕ Родоначальник теории графов Леонард Эйлер. В 1736 году в одном из своих писем он формулирует и предлагает решение задачи о семи кёнигсбергских

мостах, ставшей впоследствии одной из классических задач теории графов. В ходе рас суждений Эйлер пришёл к следующим выводам: **1)**Число нечётных вершин (вершин, к которым ведёт нечётное число рёбер) графа должно быть чётно. Не может существовать граф, который имел бы нечётное число нечётных вершин. **2)** Если все вершины графа чётные, то можно, не отрывая карандаша от бумаги, начертить граф, при этом можно начинать с любой вершины графа и завершить его в той же вершине. **3)** Если ровно две вершины графа нечётные, то можно, не отрывая карандаша от бумаги, начертить граф, при этом можно начинать с любой из нечётных вершин и завершить его в другой нечет ной вершине. **4)** Граф с более чем двумя нечётны ми вершинами невозможно начертить одним росчерком.

Дальнейшая история мостов. В 1905 году был построен Императорский мост по приказу кайзера, который не смог решить задачу мостов Кёнигсберга и стал жертвой шутки, которую сыграли с ним учёные умы, присутствовавшие на светском приёме (если добавить восьмой мост, то задача становится разрешимой). Разрушен в ходе бомбарди ровки во время Второй мировой войны. На его опорах в 2005 году был построен Юбилей ный мост. На данный момент (2016 год) в Калининграде 8 мостов.

Игры на основе графов. Палочки. Точки.

§ 9.9 *Z*- преобразование и разностные уравнения.

Опр. Последовательность комплексных чисел $\left\{ f(k) \right\}_{k=0}^{\infty}$, обладающая свойством $\exists C, \sigma > 0 \quad \forall k \ge 0 \quad \left| f(k) \right| \le Ce^{\sigma k}$, называется оригиналом.

Опр. Изображением (*Z*-преобразованием) оригинала называется функция $F(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{f(k)}{z^k}$

Обозначение. $Z(f(k)) = F(z)$ или $f(k) \div F(z)$ - операция перехода от оригинала к изображению.

ЗАМЕЧАНИЕ Изображение является аналитической функцией с центром в бесконечно удаленной точке $D\left(\infty, \dfrac{1}{e^{\sigma}} \right) = \left\{ z \in \bar{\mathbb{C}} : |z| > e^{\sigma} \right\}$.

Пр. 1 Единичный импульс (дельта-импульс Кронекера) $\delta(k) := \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k > 0 \end{cases}$.

Пр. 2 Пусть $f(k) = \dfrac{a^k}{k!}$.

Пр. 3 Найдем оригинал по изображению $F(z) = \dfrac{1}{z-a}, \ a \ne 0$.

ТЕОРЕМА 9.15 (*свойства Z- преобразования*)

1) Множество оригиналов E и множество аналитических в точке $z = \infty$ функций F являются векторными пространствами, а *Z*-преобразование является их изоморфизмом.
2) (*связь с преобразованием Лапласа*) Если по оригиналу $\{ f(k) \}$ построить ступенчатую функцию $f(t) := f(k), \ k \le t < k < k+1, \ k = 0,1,\ldots$,то изображение последней по Лапласу и *Z*- преобразование $F(z)$ связаны равенством $\left[Lf \right](p) = \dfrac{1-e^{-p}}{p} \cdot F(e^p)$.
3) (*теорема опережения* (*смещения*)) $f(k+1) \div z(F(z) - f(0))$.
4) (*дифференцирование изображений*) $kf(k) \div -zF'(z)$.
5) (*свертка оригиналов*) $\sum\limits_{i=0}^{k} f(k-i) g(i) \div F(z) G(z)$.
6) (*сложная свертка*) $f_1(k) f_2(k) \div \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_C F_1(\zeta) F_2(\dfrac{z}{\zeta}) \dfrac{d\zeta}{\zeta}$.
7) (*формула обращения*) $f(k) = \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_C F(z) z^{k-1} dz$, где C - спрямляемый жорданов контур, охватывающий бесконечно удаленную точку; $f(k) = \sum\limits_{i=1}^{r} \operatorname*{Res}_{\lambda_i} \left(f(z) z^{k-1} \right)$, если $f(z)$ есть рациональная функция с полюсами $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$.

8) (*масштабирование частоты*) $\lambda^k f(k) \div F(\frac{z}{\lambda})$.

Пр. Найдем оригинал по изображению $F(z) = \ln\frac{z}{z-1}$, где $|z|>1, F(\infty)=0$.

Опр. Система уравнений

$$a_0 x(k+n) + a_1 x(k+n-1) + \ldots + a_n x(k) = y(k), \quad k = 0,1,\ldots, \quad (1)$$

где $a_0 \neq 0$, $\{x(k)\}, \{y(k)\} \subset C$, называется линейным разностным уравнением *n*-го порядка с постоянными коэффициентами.

ЗАМЕЧАНИЕ Первая задача, сводящаяся к решению линейного разностного уравнения, появилась в 1202 году в трактате “Liber abbaci” Леонардо да Пиза, известного также под именем Фибоначчи: “ Некоторый человек положил пару кроликов в месте, окруженном со всех сторон стеной. Сколько пар кроликов может быть произведено от этой пары в год, если предполагается, что каждый месяц каждая пара рождает новую пару, которая со второго месяца становится продуктивной?”. Обозначим число пар в n-ом месяце через $x(n)$. Эта последовательность удовлетворяет такому рекуррентному равенству $x(n+2)-x(n+1)-x(n)=0$, которое является одновременно и линейным разностным уравнением второго порядка.

Леона́рдо Пиза́нский (Фибона́ччи) (1170, Пиза-1250) - первый круп ный математик средневековой Европы. По предложению отца-купца изучал в Алжире математику у арабских учителей. Позже посетил Египет, Сирию, Византию, Сицилию для пополнения знаний.

В 1200 году вернулся в Пизу и начал писать «Книги абака» (1202). В ней подробно исследованы возможности применения индийских цифр. Способствовал распространению в Европе позиционной системы счисления, более удобной для вычислений, чем римская нотация. Впервые в Европе использовал отрицательные числа, которые рассматривал как долг. Дал первое доказательство того, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке (доказательство Архимеда до нас оно не дошло).

Опр. Пусть даны числа $x_0,\ldots,x_{n-1} \in C$. Решением разностного уравнения (1) с начальными данными $x_0,\ldots,x_{n-1}$ называется последовательность чисел $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ которая

удовлетворяет всем уравнениям (1) и начальным условиям $x(0)=x_0,\ldots,x(n-1)=x_{n-1}$.

ТЕОРЕМА 9.16 (*свойства решений разностного уравнения*)

1) Для любой n-ки чисел $y_0,\ldots,y_{n-1} \in C$ решение задачи Коши для однородного разностного уравнения с начальными условиями $y(0)=y_0,\ldots,y(n-1)=y_{n-1}$ существует и единственно.
2) Пусть $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ есть нули кратностей соответственно $p_1,\ldots,p_r$ характеристического

многочлена $Q(z) := a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$. Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид $f(k) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{p_i} C_{i\,j} k^{j-1} \lambda_i^k$.

Рассмотрим разностное уравнение вида, используемое в курсе теории управления,

$$a_0 y(k+n) + \ldots + a_n y(k) = b_0 x(k+n) + \ldots + b_m x(k), \quad k = 0, \ldots, \quad (2)$$

с начальными условиями $y(0) = y_0, \ldots,, y(n-1) = y_{n-1}$, где $\{x(k)\}$ - известный оригинал, а - $\{y(k)\}$ искомое решение. Обозначим

$$P(z) := b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m,$$

$$P_0(z) = a_0 y_0 z^n + (a_0 y_1 + a_1 y_0) z^{n-1} + \ldots + (a_0 y_{n-1} + a_1 y_{n-2} + \ldots + a_{n-1} y_0) z,$$

$$P_x(z) = (b_0 x(0)) z^m + (b_0 x(1) + b_1 x(0)) z^{m-1} + \ldots + (b_0 x(m-1) + \ldots + b_{m-1} x(0)) z.$$

Тогда:

3) решение однородного уравнения с заданными начальными условиями единственно и равно $y_o(k) = \sum_{i=1}^{r} \operatorname{Res}_{\lambda_i} \left(\frac{P_0(z)}{Q(z)} z^{k-1} \right) \div \frac{P_0(z)}{Q(z)}$;

4) решение неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями равно $y_ч(k) \div \frac{P(z)}{Q(z)} X - \frac{P_x(z)}{Q(z)}$, а его решение с исходными начальными условиями равно

$$y(k) := y_o(k) + y_ч(k) \div \frac{P(z)}{Q(z)} X + \frac{P_0(z) - P_x(z)}{Q(z)};$$

Пр.1 Решение задачи Л.Пизанского о кроликах равно $x(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$.

Пр.2 Решим задачу Коши для разностного уравнения третьего порядка $y(k+3) - 3y(k+2) + 3y(k+1) - y(k) = 2^k$, $k \geq 0$, где $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, $y(2) = 1$.

Опр. Пусть функции $f_1, ..., f_n$ определены на $\tilde{\mathrm{R}}^{n+1}$. Нормальной системой разностных уравнений (НСРУ) называется система вида

$$\begin{cases} x_1(k+1) = f_1(k, x_1(k), ..., x_n(k)) \\ \quad . \quad . \quad . \\ x_n(k+1) = f_n(k, x_1(k), ..., x_n(k)) \end{cases}. \qquad (3)$$

или в матричном виде $X(k+1) = F(k, X(k))$.

Опр. Нормальной системой линейных разностных уравнений (НСЛРУ) называется система вида

$$\begin{cases} x_1(k+1) = a_{11}(k) x_1(k) + ... + a_{n1}(k) x_n(k) + b_1(k) \\ \quad . \quad . \quad . \\ x_n(k+1) = a_{n1}(k) x_1(k) + ... + a_{nn}(k) x_n(k) + b_n(k) \end{cases} \qquad (4).$$

или в матричном виде $X(k+1)=A(k)X(k)+B(k)$.

Если матрица $A(k)$ не зависит от k, последняя называется системой с постоянными коэффициентами.

ЗАМЕЧАНИЕ Как и в случае дифференциальных уравнений разрешимость линейного разностного уравнения конечного порядка равносильна разрешимости соответствующей НСЛРУ (4).

Опр. Фундаментальной матрицей НСЛРУ (4) называется матрица размера $n\times n$ $\Phi(k,k_1),\ k,k_1=0,1,\ldots,$ определяемая по правилу $\Phi(k,k_1):=\begin{cases}A(k-1)\ldots A(k_1), & k>k_1\\ E, & k=k_1\\ 0, & k<k_1\end{cases}$.

Опр. Решение $X_1(k)$ НСРУ (3) называется устойчивым (асимптотически) по Ляпунову, если $\forall\varepsilon>0\ \forall k_0\geq 0\ \exists\delta(\varepsilon,k_0)>0\ \forall X_0$, близкого к $X_1(k_0)$: $\|X_0-X_1(k_0)\|<\delta(\varepsilon,k_0)$, решение $X(k)$ НСРУ (4) с начальным условием $X(k_0)=X_0$ удовлетворяет условию $\forall k>k_0\ \|X(k)-X_1(k)\|<\varepsilon$ (соответственно $\lim\limits_{k\to\infty}\|X(k)-X_1(k)\|=0$).

Опр. НСЛРУ (4) называется экспоненциально устойчивой, если для каждого ненулевого решения $X(k)$ с начальным условием $X(k_0)=X_0$

$$\exists C_1,C_2,\sigma_1,\sigma_2>0\quad\forall k\geq k_0\quad C_1e^{-\sigma_1(k-k_0)}\leq\|X(k)\|\leq C_2e^{-\sigma_2(k-k_0)}.$$

Опр. Разностное уравнение (1) называется асимптотически устойчивым, если при любых начальных условиях соответствующее решение $y(k)$ однородного уравнения стремится к нулю: $\lim\limits_{k\to\infty}y(k)=0$.

ТЕОРЕМА 9.17 (*о разрешимости и устойчивости НСРУ*)

1) (*формула Коши*) Решение $X(k)$ НСРУ (3) с начальным условием $X(k_0)=X_0$ имеет вид $X(k)=\Phi(k,k_0)X_0+\sum\limits_{i=k_0}^{k-1}\Phi(k-1,i)B(i),\ k\geq k_0$. Если матрица коэффициентов $A(k)\equiv A$, то $X(k)=A^{k-k_0}X_0+\sum\limits_{i=k_0}^{k-1}A^{k-1-i}B(i),\ k\geq k_0$
2) Решение $X_1(k)$ НСРУ (3) устойчиво тогда и только тогда, когда устойчиво нулевое решение НСРУ $Y(k+1)=F(k,Y(k)+X_1(k))-F(k,X_1(k))$.
3) Пусть НСРУ (1) представима в виде $X(k+1)=A(k)X(k)+B(k,X(k))$, причем НСЛРУ $X(k+1)=A(k)X(k)$ экспоненциально устойчива и $\lim\limits_{\|X\|\to 0}\dfrac{\|B(k,X)\|}{\|X\|}=0$. Тогда нулевое решение этой НСРУ асимптотически устойчиво.
4) Какое-либо решение НСЛРУ (4) устойчиво тогда и только тогда, когда устойчиво нулевое решение однородной НСЛРУ $X(k+1)=A(k)X(k)$. Поэтому корректно говорить об устойчивости НСЛРУ (4).
5) НСЛРУ (2) устойчива тогда и только тогда, когда элементы ее фундаментальной

матрицы $\Phi(k,k_0)$ ограничены при $k > k_0$.

6) НСЛРУ (4) с постоянной матрицей коэффициентов $A(k) \equiv A$ асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда собственные числа этой матрицы по модулю меньше единицы.
7) Разностное уравнение (1) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда нули его характеристического многочлена $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ по модулю меньше единицы

Пр. 1 Проверим на устойчивость нулевого решение НСРУ с помощью пункта 3 теоремы.

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \dfrac{x_2(k)}{2 - x_1(k)} \\ x_2(k+1) = e^{x_1(k)} - e^{x_2(k)} \end{cases}.$$

Пр. 2 Разностное уравнение не является $y(k+3) - 5y(k+2) + 2y(k+1) - y(k) = f(k)$ асимптотически устойчивым.

Опорный конспект лекций на сайте skif@donstu.ru $\Longrightarrow$ *библиотека электронных ресурсов ДГТУ* $\Longrightarrow$ *факультет ИВТ* $\Longrightarrow$ *кафедра прикладной математики*

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного.
2. Пантелеев А.В., Якимова А.С. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах.
3. Нефёдов В.Н., Осипов В.А. Курс дискретной математики.
4. Крылов В.А., Корсаков С.Я. Основы теории цепей.
5. Лосев А.К. Теория линейных электрических цепей.
6. Пугачёв В.С. Основы теории управления.
7. Братищев А.В. Математическая теория управляемых динамически систем.

Взять на абонементе или скачать на сайте *www. techlibrary*

СПИСОК ВОПРОСОВ К ЗАЧЕТУ

1. Опр. комплексной плоскости.
2. Опр. модуля, сопряженного числа, главного значения аргумента. Пр.
3. Опр. тригонометрической, показательной форм комплексного числа. Пр.
4. Опр. произведения, частного комплексных чисел, корня n-ой степени. Пр.
5. Опр. расширенной комплексной плоскости и жордановой кривой. Пр.
6. Опр. несвязного множества, области, n-связной области. Пр.
7. Опр. функции, $\arg z, e^z, \sin z, \cos z$. Пр.
8. Опр. функций, $\ln z, a^z, Ln z, z^a$. Пр.
9. Опр. дифференцируемой ФКП и критерий Эйлера
10. Опр. функции, аналитической в точке, на замкнутом множестве и в области. Пр.
11. Опр. интеграла ФКП по кривой и его свойства.

12. Т. Коши для сложного контура и формула Коши. Пр.
13. Опр. ИОТОХ и полюса. Пр.
14. Опр. ряда по степеням и ряда Лорана функции. Главная и правильная части. Пр.
15. Опр. вычета и его свойства. Пр.
16. Опр. изменения аргумента ФКП вдоль кривой и годографа функции.
17. Опр. оригинала и показателя роста. Пр.
18. Опр. изображения, преобразования Лапласа и свертки функций .
19. Опр. функции Хевисайда и импульсной функции. Пр.
20. Опр. преобразования Фурье и его свойства.
21. Опр. графа и орграфа. Пр.
22. Опр. петель, смежных дуг, матрицы инцидентности. Пр.
23. Опр. инцидентных ребра и вершины и изоморфных графов. Пр.
24. Опр. пути и контура орграфа. Пр.
25. Опр. маршрута, цепи и простой цепи графа. Пр.
26. Опр. цикла и простого цикла графа. Пр.
27. Опр. под графа и связного графа. Пр.
28. Опр. компонент связности, степени вершины. Пр.
29. Опр. висячей, изолированной вершин и дерева. Пр.
30. Опр. цикломатического числа и остовного дерева графа. Пр.
31. Опр. вектор-цикла, циклового базиса и цикломатической матрицы. Пр.
32. Опр. оригинала, изображения и Z-преобразования. Пр.
33. Опр. линейного разностного уравнения и свойства его решений. Пр.

СПИСОК ЗАДАНИЙ К КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ

1. Решить квадратное уравнение и нарисовать корни в комплексной плоскости.
2. Возвести в степень дробь.
3. Решить алгебраическое уравнение пятого порядка и нарисовать корни.
4. Нарисовать в комплексной плоскости множество, заданное неравенствами.
5. Построить передаточную функцию по заданным ее нулям и полюсам.
6. Нарисовать годограф многочлена четвёртой степени относительно мнимой оси, и найти число его нулей в левой полуплоскости.
7. Вычислить значение элементарной функции в точке комплексной плоскости.
8. Вычислить интеграл с помощью основной теоремы о вычетах.
9. Определить характер элементарного стационарного звена второго порядка и вычислить переходную функцию по заданной передаточной функции.
10. Решить задачу Коши для линейного ДУ второго порядка с помощью преобразования Лапласа.
11. Решить задачу Коши для НСЛДУ второго порядка с помощью преобразования Лапласа.
12. Составить уравнения для токов (напряжений) на всех ветвях линейной электрической цепи методом теории графов.
13. Решить задачу Коши для линейного разностного уравнение второго порядка у проверить его на устойчивость.