ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Математика и информатика»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по дисциплине

«Высшая алгебра и функциональный анализ»

Авторы
Галабурдин А.В., доцент, к.ф.-м. н.
Карпова С.И., ст. преподаватель

Ростов-на-Дону, 2014

Оглавление

Изучение математики студентами различных специальностей включает обязательное освоение трех основных разделов математики: математического анализа, аналитической геометрии и высшей алгебры. В результате синтеза и обобщения указанных разделов математики на бесконечномерный случай возникла новая область математики – функциональный анализ. В настоящее время методы и идеи функционального анализа активно используются во всех областях математики.

Теория векторных пространств, разработанная в высшей алгебре, получила дальнейшее развитие в функциональном анализе, который занимается изучением бесконечномерных структур, являющихся некоторым обобщением векторных пространств. Данное учебное пособие посвящено изложению основ области математики, которая лежит на пересечении ее важнейших разделов высшей алгебры и функционального анализа.

I. *n*- МЕРНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Определение. ***n***-мерным вектором ***a*** называется упорядоченная совокупность ***n*** чисел.

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots a_n)$$

Числа $a_1, a_2, \dots a$ называются компонентами вектора ***a.***

Два ***n***-мерных вектора ***a***$=(a_1, a_2, \dots a_n)$ и ***b***$=(b_1, b_2, \dots b_n)$ называются равными, если равны их соответствующие компоненты, то есть если $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, … $a_n = b_n$.

Определение. Суммой двух ***n***-мерных векторов

a $=(a_1, a_2, \dots a_n)$ и ***b*** $=(b_1, b_2, \dots b_n)$

называется ***n***-мерный вектор ***c*** $=(c_1, c_2, \dots c_n)$

a+b=c,

компоненты которого равны сумме соответствующих компонент векторов ***a*** и ***b***,

$$c_1 = a_1 + b_1\ ,\ \ c_2 = a_2 + b_2,\ \dots\ c_n = a_n + b_n.$$

Свойства операции сложения ***n***-мерных векторов .

1.Сложение ***n***-мерных векторов коммутативно, то есть ***a+b=b+a.***

2. Сложение ***n***-мерных векторов ассоциативно, то есть (***a+b)+c=a+(b+c).***

Коммутативность и ассоциативность операции сложения ***n***-мерных векторов следует из коммутативности и ассоциативности операции сложения чисел, к которой сводится сложение ***n***-мерных векторов.

3. Существует такой ***n***-мерный вектор **0**$=(0,0,\dots 0)$, который обладает свойством

a+0=0+a=a, где ***a –*** любой ***n***-мерный вектор.

4. Для любого ***n***-мерного вектора ***a*** существует противоположный вектор (-***a)***, такой, что ***a+***(-***a)=0.***

Справедливость свойств 3 и 4 следует из соответствующих свойств чисел (существование нуля и противоположного числа).

Определение. Произведение ***n***-мерного вектора ***a*** на число k вектор k***a,*** компоненты которого равны произведению компонент вектора ***a*** на число k.

$$k\boldsymbol{a} = (ka_1, ka_2, \ldots ka_n)$$

Свойства операции умножения ***n***-мерных векторов на число

1. k**(*a*±*b*)=*ka*±*kb***

Действительно, пусть имеем два вектора $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots a_n)$ и $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots b_n)$, тогда

$(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$, а

$k(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}) = (ka_1 + kb_1, ka_2 + kb_2, \ldots, ka_n + kb_n) = k\boldsymbol{a}\pm k\boldsymbol{b}$.

2. (k±*m*) ***a*= *ka*±*ma***

$$(k\pm m)\,\boldsymbol{a} = ((\mathrm{k}\pm\mathrm{m})a_1, (\mathrm{k}\pm\mathrm{m})a_2, \ldots, (\mathrm{k}\pm\mathrm{m})a_n,) =$$

$$= (ka_1 \pm ma_1, ka_2 \pm ma_2, \ldots, ka_n \pm ma_n) = k\boldsymbol{a}\pm m\boldsymbol{a}.$$

3. k(m***a*) =(*km*)*a***

$k(m\boldsymbol{a}) = k(ma_1, ma_2, \ldots ma_n) = (kma_1, kma_2, \ldots kma_n) = (km)\boldsymbol{a}$

4. 1***a*= *a***

Справедливость последнего свойства непосредственно следует из определения операции умножения вектора на число.

Определение. ***n***- мерным векторным пространством называется совокупность всех ***n***- мерных векторов с действительными компонентами, рассматриваемая с определенными на ней операциями сложения векторов и умножения вектора на число.

II. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Выше было дано определение пространства n-мерных векторов, на которых определены операции сложения и умножения на число. В математике существуют и множества элементов другой природы, на которых определены операции сложения и умножения на число (множество матриц одинаковой размерности, множество функций, имеющих одинаковые области определения и так долее). Поэтому целесообразно рассмотреть и изучить свойства подобных множеств, не зависимо от природы его элементов.

Определение. Множество M элементов $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \ldots$ любой природы называется линейным пространством, если на нем определены операция сложения элементов, ставящая в соответствие каждой паре элементов $\hat{a}$ и $\hat{b}$ однозначно определенный элемент $\hat{a} + \hat{b} \in M$ и операция умножения на действительное число, ставящая в соответствие любому элементу $\hat{a}$ и действительному числу λ однозначно определенный элемент $\lambda \cdot \hat{a} \in M$, при этом выполняются следующие соотношения, называемые аксиомами:

1. $\hat{a} + \hat{b} = \hat{b} + \hat{a}$;
2. $\hat{a} + (\hat{b} + \hat{c}) = (\hat{a} + \hat{b}) + \hat{c}$;
3. существует нулевой элемент $\hat{0}$ такой, что для любого элемента $\hat{a}$ справедливо соотношение $\hat{a} + \hat{0} = \hat{a}$;
4. для каждого элемента $\hat{a}$ существует противоположный элемент $(-\hat{a})$ такой, что $\hat{a} + (-\hat{a}) = \hat{0}$;
5. для любого элемента $\hat{a}$ выполняется соотношение $1 \cdot \hat{a} = \hat{a}$;
6. $\lambda(\alpha \cdot \hat{a}) = (\lambda\alpha) \cdot \hat{a}$;
7. $(\lambda + \alpha) \cdot \hat{a} = \lambda \cdot \hat{a} + \alpha \cdot \hat{a}$;
8. $\lambda \cdot (\hat{a} + \hat{b}) = \lambda \cdot \hat{a} + \lambda \cdot \hat{b}$.

Примеры линейных пространств.

1. Множество векторов трехмерного пространства представляют собой линейное пространство. При этом выполняются все аксиомы, представленные в определении.

2.Множество функций непрерывных на некотором отрезке $[a,b]$, так как известно, что сумма непрерывных функций и произведение непрерывной функции на число есть также непрерывная функция. Выполнение аксиом 1,2,5,6,7,8 вполне очевидно. Нулевым элементом пространства является постоянная фун-кция тождественно равная нулю на указанном отрезке, а противоположным элементом для данной функции $x(t)$ является функция $-x(t)$.

Из приведенного определения линейного пространства вытекают некоторые его свойства, представленные ниже в виде теорем.

Теорема II.1. Нулевой элемент линейного пространства единственен.

Допустим, что существуют два нулевых элемента $\hat{0}_1$ и $\hat{0}_2$. Тогда по аксиоме 3 $\hat{0}_1+\hat{0}_2=\hat{0}_1$, поменяв местами слагаемые в левой части по той же аксиоме, получим $\hat{0}_2+\hat{0}_1=\hat{0}_2$. Но по аксиоме 1 $\hat{0}_1+\hat{0}_2=\hat{0}_2+\hat{0}_1$ и в силу однозначности операции сложения имеем $\hat{0}_1=\hat{0}_2$.

Теорема II.2. Для каждого элемента линейного пространства существует единственно определенный противоположный элемент.

Пусть для некоторого элемента $\hat{a}$ существуют два противоположных элемента $(-\hat{a}_1)$ и $(-\hat{a}_2)$.

Рассмотрим сумму трех элементов $(-\hat{a}_1)+\hat{a}+(-\hat{a}_2)$. С одной стороны получим

$(-\hat{a}_1)+\hat{a}+(-\hat{a}_2)=(-\hat{a}_1)+(\hat{a}+(-\hat{a}_2))=(-\hat{a}_1)$.

С другой стороны

$(-\hat{a}_1)+\hat{a}+(-\hat{a}_2)=((-\hat{a}_1)+\hat{a})+(-\hat{a}_2)=(-\hat{a}_2)$.

В силу аксиомы 2 и однозначности операции сложения $(-\hat{a}_1)=(-\hat{a}_2)$.

Теорема II.3. Нулевой элемент линейного пространства равен произведению любого элемента на вещественное число 0: $0\cdot\hat{a}=\hat{0}$.

$$0\cdot\hat{a}=0\cdot\hat{a}+\hat{0}=0\cdot\hat{a}+(\hat{a}+(-\hat{a}))=(0\cdot\hat{a}+\hat{a})+(-\hat{a})=$$

$$=(0+1)\cdot\hat{a}+(-\hat{a})=\hat{a}+(-\hat{a})=\hat{0}.$$

Теорема II.4. Для любого элемента $\hat{a}$ линейного пространства противоположный ему элемент равен произведению этого элемента на число -1:

$(-\hat{a})=(-1)\cdot\hat{a}$.

Сложим элементы $\hat{a}$ и $(-1)\cdot\hat{a}$:

$$\hat{a}+(-1)\cdot\hat{a}=(1+(-1))\cdot\hat{a}=0\cdot\hat{a}=\hat{0}.$$

Следовательно, в силу аксиомы 4 $(-\hat{a})=(-1)\cdot\hat{a}$.

Теорема II.5. Произведение нулевого элемента пространства на любое число равно нулевому элементу $\alpha\cdot\hat{0}=\hat{0}$.

Действительно, для любого элемента пространства $\hat{a}$ имеем

$\alpha\cdot\hat{a}=\alpha\cdot(\hat{a}+\hat{0})=\alpha\cdot\hat{a}+\alpha\cdot\hat{0}$ то есть $\alpha\cdot\hat{a}=\alpha\cdot\hat{a}+\alpha\cdot\hat{0}$. Прибавим к правой и левой частям данного соотношения $(-\alpha)\cdot\hat{a}$, получим

$\alpha\cdot\hat{a}+(-\alpha)\cdot\hat{a}=\alpha\cdot\hat{a}+(-\alpha)\cdot\hat{a}+\alpha\cdot\hat{0}$ или $(\alpha-\alpha)\cdot\hat{a}=(\alpha-\alpha)\cdot\hat{a}+\alpha\cdot\hat{0}$.

Тогда $0\cdot\hat{a}=0\cdot\hat{a}+\alpha\cdot\hat{0}$ или $\hat{0}=\hat{0}+\alpha\cdot\hat{0}$ то есть $\hat{0}=\alpha\cdot\hat{0}$, что и требовалось доказать.

Для элементов линейного пространства можно, используя введенные операции, ввести операцию вычитания $\hat{a}-\hat{b}=\hat{a}+(-1)\cdot\hat{b}$

Два линейных пространства M и M' называются изоморфными, если между их элементами установлено взаимнооднозначное соответствие при котором каждому элементу $\hat{a}\in M$ поставлен в соответствие элемент $\hat{a}'\in M'$, называемый образом элемента $\hat{a}$, причем разные элементы из пространства M имеют разные образы и каждый элемент из пространства M' служит образом некоторого элемента из пространства M, и если образом суммы двух элементов пространства M служит сумма образов этих элементов в пространстве M', а образом произведения элемента на число является произведение образа данного элемента на то же число. То есть если элементам $\hat{a}$ и $\hat{b}$ из пространства M соответствуют элементы $\hat{a}'$ и $\hat{b}'$ из пространства M', элементу $\hat{a}+\hat{b}$ соответствует элемент $\hat{a}'+\hat{b}'$, а элементу $\lambda\cdot\hat{a}$, где λ - некоторое число, соответствует элемент $\lambda\cdot\hat{a}'$.

В качестве примера двух изоморфных линейных пространств можно привести пространство полиномов степени не выше чем ***n***

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

и ***n+1***- мерное векторное пространство , то есть пространство векторов .

$$\boldsymbol{a}=\left(a_0,a_1,\ldots,a_{n-1},a_n\right).$$

Действительно, каждому полиному можно поставить в соответствие вектор, компоненты которого представляют собой коэффициенты полинома степени ***n***, если степень полинома ниже, то первые соответствующие компоненты вектора будут равны нулю.

При этом сумме двух полиномов

$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ и

$Q_n(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n$

$P_n(x)+Q(x)=(a_0+b_0)x^n+(a_1+b_1)x^{n-1}+\ldots+(a_{n-1}+b_{n-1})x+a_n+b_n$

будет соответствовать вектор ***a+b***
$=\left(a_0+b_0,a_1+b_1,\ldots,a_{n-1}+b_{n-1},a_n+b_n\right)$, представляющий собой сумму векторов $\boldsymbol{a}=\left(a_0,a_1,\ldots,a_{n-1},a_n\right)$ и $\boldsymbol{b}=\left(b_0,b_1,\ldots,b_{n-1},b_n\right)$, которые являются образами полиномов $P_n(x)$ и $Q_n(x)$, а произведению $\lambda P_n(x)=\lambda a_0x^n+\lambda a_1x^{n-1}+\ldots+\lambda a_{n-1}x+\lambda a_n$, где λ - некоторое число будет соответствовать вектор

$$\lambda\,\boldsymbol{a}=\left(\lambda a_0,\lambda a_1,\ldots,\lambda a_{n-1},\lambda a_n\right).$$

III. БАЗИС ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА

Определение. Линейной комбинацией элементов линейного пространства $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_n$ называется сумма произведений этих элементов на вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$

$$\alpha_1 \cdot \hat{a}_1 + \alpha_2 \cdot \hat{a}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \hat{a}_n .$$

Определение. Элементы линейного пространства $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_n$ называются линейно-зависимыми, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, одновременно не равные нулю, что линейная комбинация этих элементов равна нулю

$$\alpha_1 \cdot \hat{a}_1 + \alpha_2 \cdot \hat{a}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \hat{a}_n = \hat{0} .$$

Определение. Элементы линейного пространства $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_n$ называются линейно-независимыми, если их линейная комбинация равна нулю $\hat{0}$ лишь при условии $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$.

Примеры. В пространстве 3[х]-мерных векторов вектора $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ и $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ являются линейно-зависимыми, так, как $1 \cdot \vec{a} + 3 \cdot \vec{b} + 5 \cdot \vec{c} = \vec{0}$.

А вектора $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ и $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$ будут линейно-независимыми. Действительно, допустим, что существуют числа α_1, α_2 и α_3 ,одновременно не равные нулю, такие, что $\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. То есть числа α_1, α_2 и α_3 должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 + 5 \cdot \alpha_3 = 0 \\ 3 \cdot \alpha_1 - \alpha_2 + 7 \cdot \alpha_3 = 0 \\ 5 \cdot \alpha_1 + 4 \cdot \alpha_2 - 6 \cdot \alpha_3 = 0 \end{cases} .$$

Это однородная система линейных уравнений, которая имеет ненулевые решения лишь в том случае, когда ее определитель равен нулю. Но определитель данной системы уравнений $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 7 \\ 5 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 169 \neq 0$ и значит приведенная система уравнений имеет только нулевые решения $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$, следовательно указанная система векторов линейно-независима.

Определение. Совокупность линейно-независимых элементов линейного пространства $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n$ называется базисом этого пространства, если для любого элемента $\hat{a}$ этого пространства найдутся такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, что $\vec{a} = \alpha_1 \cdot \hat{e}_1 + \alpha_2 \cdot \hat{e}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \hat{e}_n$.

Подобное представление элемента $\hat{a}$ называется его разложением по базису $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называются координатами данного элемента в данном базисе.

Теорема III.1. Каждый элемент $\hat{a}$ линейного пространства может быть разложен по данному базису $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n$ единственным способом.

Допустим некоторый элемент $\hat{a}$ имеет два различных разложения по базису

$\hat{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$:

$\hat{a} = \alpha_1 \cdot \hat{e}_1 + \alpha_2 \cdot \hat{e}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \hat{e}_n$ и $\hat{a} = \beta_1 \cdot \hat{e}_1 + \beta_2 \cdot \hat{e}_2 + \dots + \beta_n \cdot \hat{e}_n$.

Тогда

$$\hat{a} + (-1) \cdot \hat{a} = \alpha_1 \cdot \hat{e}_1 + \alpha_2 \cdot \hat{e}_2 + \dots + \alpha_n + (-1) \cdot (\beta_1 \cdot \hat{e}_1 + \beta_2 \cdot \hat{e}_2 + \dots + \beta_n \cdot \hat{e}) =$$

$$= (\alpha_1 - \beta_1) \cdot \hat{e}_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \cdot \hat{e}_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) \cdot \hat{e}_n = (1 + (-1)) \cdot \hat{a} = 0 \cdot \hat{a} = \hat{0}$$

.

В силу линейной независимости $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n$ коэффициенты при элементах базиса в разложении $\hat{a} + (-1) \cdot \hat{a}$ должны равняться нулю. То есть $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, …, $\alpha_n = \beta_n$, из чего и следует единственность разложения элемент $\hat{a}$.

Теорема III.2. При сложении двух элементов линейного пространства их соответствующие координаты складываются, а при умножении элемента на число его координаты умножаются на это число.

Пусть $\hat{a}=\alpha_1\cdot\hat{e}_1+\alpha_2\cdot\hat{e}_2+\ldots+\alpha_n\cdot\hat{e}_n$ и $\hat{b}=\beta_1\cdot\hat{e}_1+\beta_2\cdot\hat{e}_2+\ldots+\beta_n\cdot\hat{e}_n$ разложение элементов линейного пространства по базису $\hat{e}_1,\hat{e}_2,\ldots,\hat{e}_n$. Тогда, используя свойства операций сложения элементов пространства и умножения элементов пространства на число, будем иметь

$$\hat{a}+\hat{b}=\alpha_1\cdot\hat{e}_1+\alpha_2\cdot\hat{e}_2+\ldots+\alpha_n\cdot\hat{e}_n+\beta_1\cdot\hat{e}_1+\beta_2\cdot\hat{e}_2+\ldots+\beta_n\cdot\hat{e}=$$
$$=(\alpha_1+\beta_1)\cdot\hat{e}_1+(\alpha_2+\beta_2)\cdot\hat{e}_2+\ldots+(\alpha_n+\beta_n)\cdot\hat{e}_n.$$

Из полеченного следует, что при сложении двух элементов линейного пространства их соответствующие координаты складываются.

Далее, рассмотрим произведение элемента $\hat{a}$ на число λ

$$\lambda\cdot\hat{a}=\lambda\cdot(\alpha_1\cdot\hat{e}_1+\alpha_2\cdot\hat{e}_2+\ldots+\alpha_n\cdot\hat{e}_n)=\lambda\cdot\alpha_1\cdot\hat{e}_1+\lambda\cdot\alpha_2\cdot\hat{e}_2+\ldots+\lambda\cdot\alpha_n\cdot\hat{e}_n$$

, то есть при умножении элемента линейного пространства на число его координаты умножаются на это число.

Определение. Линейное пространство ***M*** называется ***n***-мерным, если в нем существует ***n*** линейно-независимых элементов, а любые ***n+1*** элементов пространства будут линейно-зависимыми.

Тот факт, что линейное пространство ***M*** является ***n***- мерным обозначается следующим образом ***diam M=n***.

Теорема III.3. Если ***M*** линейное пространство размерности ***n*** , то любые ***n*** линейно-независимых элементов этого пространства образуют базис.

Пусть $\hat{e}_1,\hat{e}_2,\ldots,\hat{e}_n$ система линейно-независимых элементов пространства ***M*** размерности ***n***, и пусть $\hat{a}$ произвольный элемент этого пространства. Тогда по определению ***n***- мерного линейного пространства система ***n+***1 элементов

$\hat{a},\hat{e}_1,\hat{e}_2,\ldots,\hat{e}_n$,линейно-зависимой и следовательно существуют одновременно не равные нулю числа

$\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ такие, что

$\alpha_0 \cdot \hat{a} + \alpha_1 \cdot \hat{e}_1 + \alpha_2 \cdot \hat{e}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \hat{e}_n = \hat{0}$.

При этом $\alpha_0 \neq 0$ так как в случае $\alpha_0 = 0$ $0 \cdot \hat{a} + \alpha_1 \cdot \hat{e}_1 + \alpha_2 \cdot \hat{e}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \hat{e} = \alpha_1 \cdot \hat{e}_1 + \alpha_2 \cdot \hat{e}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \hat{e} = \hat{0}$, что означает линейную зависимость элементов $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_n$, которые образуют базис пространства и значит не могут быть линейно - зависимыми. Тогда умножив соотношение $\alpha_0 \cdot \hat{a} + \alpha_1 \cdot \hat{e}_1 + \alpha_2 \cdot \hat{e}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \hat{e}_n = \hat{0}$ на число $1/\alpha_0$, получим

$\hat{a} + \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \cdot \hat{e}_1 + \alpha_2 \frac{\alpha_2}{\alpha_0} \cdot \hat{e}_2 + \ldots + \frac{\alpha_n}{\alpha_0} \cdot \hat{e}_n = \frac{1}{\alpha_0} \hat{0}$. Учитывая, что по теореме II.5 $\frac{1}{\alpha_0} \hat{0} = \hat{0}$, прибавим к обеим частям полученного соотношение выражение $-\frac{\alpha_1}{\alpha_0} \cdot \hat{e}_1 - \alpha_2 \frac{\alpha_2}{\alpha_0} \cdot \hat{e}_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_0} \cdot \hat{e}_n$. Тогда будем иметь

$$\hat{a} + \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \cdot \hat{e}_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_0} \cdot \hat{e}_2 + \ldots + \frac{\alpha_n}{\alpha_0} \cdot \hat{e}_n - \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \cdot \hat{e}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_0} \cdot \hat{e}_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_0} \cdot \hat{e}_n =$$

$$= -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} \cdot \hat{e}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_0} \cdot \hat{e}_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_0} \cdot \hat{e}_n \qquad \text{или}$$

$$\hat{a} + \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0} - \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \right) \cdot \hat{e}_1 + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_0} - \frac{\alpha_2}{\alpha_0} \right) \cdot \hat{e}_2 + \ldots + \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_0} - \frac{\alpha_n}{\alpha_0} \right) \cdot \hat{e}_n = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} \cdot \hat{e}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_0} \cdot \hat{e}_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_0} \cdot \hat{e}_n.$$

Из полученного следует

$\hat{a} + 0 \cdot \hat{e}_1 + 0 \cdot \hat{e}_2 + \ldots + 0 \cdot \hat{e}_n = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} \cdot \hat{e}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_0} \cdot \hat{e}_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_0} \cdot \hat{e}_n$.

То есть $\hat{a} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} \cdot \hat{e}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_0} \cdot \hat{e}_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_0} \cdot \hat{e}_n$, а это означает, что произвольный элемент пространства может быть разложен по системе элементов $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_n$ и данная система элементов образует базис данного пространства.

Теорема III.4. Если линейное пространство ***M*** имеет базис, состоящий из ***n*** элементов, то размерность пространства равно ***n***.

Пусть ***n*** элементов $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_n$ пространства ***M*** образуют базис. Докажем, что любые ***n+*1** элементов данного пространства $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_n, \hat{a}_{n+1}$ будут линейно-зависимыми. Разложим эти элементы по указанному базису

$$\hat{a}_1 = \alpha_{11}\hat{e}_1 + \alpha_{12}\hat{e}_2 + \ldots + \alpha_{1n}\hat{e}_n$$

$$\hat{a}_2 = \alpha_{21}\hat{e}_1 + \alpha_{22}\hat{e}_2 + \ldots + \alpha_{2n}\hat{e}_n$$

....

$\hat{a}_{n+1} = \alpha_{n+11}\hat{e}_1 + \alpha_{n+12}\hat{e}_2 + \ldots + \alpha_{n+1n}\hat{e}_n$, составим их линейную комбинацию и приравняем ее нулевому элементу

$$c_1\hat{a}_1 + c_2\hat{a}_2 + \ldots + c_{n+1}\hat{a}_{n+1} = \hat{0}.$$

Заменим в данном выражении элементы $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_n, \hat{a}_{n+1}$ их разложениями по базису, соответствующим образом преобразовав его

$$c_1\hat{a}_1 + c_2\hat{a}_2 + \ldots + c_{n+1}\hat{a}_{n+1} = c_1(\alpha_{11}\hat{e}_1 + \alpha_{12}\hat{e}_2 + \ldots + \alpha_{1n}\hat{e}_n) + c_2(\alpha_{21}\hat{e}_1 + \alpha_{22}\hat{e}_2 + \ldots + \alpha_{2n}\hat{e}_n) + \ldots +$$
$$+ c_{n+1}(\alpha_{n+11}\hat{e}_1 + \alpha_{n+12}\hat{e}_2 + \ldots + \alpha_{n+1n}\hat{e}_n) = (\alpha_{11}c_1 + \alpha_{21}c_2 + \ldots + \alpha_{n+11}c_{n+1})\hat{e}_1 + (\alpha_{12}c_1 +$$
$$\alpha_{22}c_2 + \ldots + \alpha_{n+12}c_{n+1})\hat{e}_2 + \ldots + (\alpha_{1n}c_1 + \alpha_{2n}c_2 + \ldots + \alpha_{n+1n}c_{n+1})\hat{e}_n = \hat{0}.$$

Для того чтобы это соотношение выполнялось, следует потребовать равенства нулю коэффициентов при базисных элементах $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_n$

$$\begin{cases} \alpha_{11}c_1 + \alpha_{21}c_2 + \ldots + \alpha_{n+11}c_{n+1} = 0 \\ \alpha_{12}c_1 + \alpha_{22}c_2 + \ldots + \alpha_{n+12}c_{n+1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1n}c_1 + \alpha_{2n}c_2 + \ldots + \alpha_{n+1n}c_{n+1} = 0 \end{cases}.$$

Полученные соотношения можно рассматривать как однородную систему ***n+1*** линейных уравнений относительно ***n*** неизвестных величин $c_1, c_2, \ldots, c_n$, которая, как известно из теории линейных систем уравнений, имеет ненулевое решение. А это означает, что существуют не равные одновременно нулю постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_n$, при которых линейная комбинация $c_1\hat{a}_1 + c_2\hat{a}_2 + \ldots + c_{n+1}\hat{a}_{n+1}$ равна $\hat{0}$, то есть линейную зависимость элементов $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_n, \hat{a}_{n+1}$.

Координатный критерий линейной независимости.

Для того, чтобы система элементов ***n***- мерного линейного пространства ***M*** $\hat{a}_1, \hat{a}_2, ..., \hat{a}_m$ (***n*** ≥ ***m***) была линейно-независимой необходимо и достаточно, чтобы матрица, составленная из координат этих элементов имела ранг равный ***m.***

Доказательство необходимости. Пусть система элементов линейного пространства $\hat{a}_1, \hat{a}_2, ..., \hat{a}_m$ линейно независима, и пусть элементы этой системы в рассматриваемом базисе $\hat{e}_1, \hat{e}_2, ..., \hat{e}_n$ имеют следующие разложения

$$\hat{a}_1 = \alpha_{11}\hat{e}_1 + \alpha_{12}\hat{e}_2 + ... + \alpha_{1n}\hat{e}_n$$

$$\hat{a}_2 = \alpha_{21}\hat{e}_1 + \alpha_{22}\hat{e}_2 + ... + \alpha_{2n}\hat{e}_n$$

……………………………………..

$$\hat{a}_m = \alpha_{m1}\hat{e}_1 + \alpha_{m2}\hat{e}_2 + ... + \alpha_{mn}\hat{e}_n$$

Тогда матрица, составленная из координат этих векторов

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

имеет ***n*** строк и ***m*** столбцов.

Ранг матрицы ***A*** в дальнейшем будем обозначать - $rang(A)$.

Построим линейную комбинацию элементов $\hat{a}_1, \hat{a}_2, ..., \hat{a}_m$, потребуем, чтобы она равнялась нулевому элементу и заменим каждый элемент в линейной комбинации его разложением по введенному базису

$$c_1\hat{a}_1 + c_2\hat{a}_2 + ... + c_m\hat{a}_m = c_1(\alpha_{11}\hat{e}_1 + \alpha_{12}\hat{e}_2 + ... + \alpha_{1n}\hat{e}_n) + c_2(\alpha_{21}\hat{e}_1 + \alpha_{22}\hat{e}_2 + ... + \alpha_{2n}\hat{e}_n) + ... +$$

$$+ c_m(\alpha_{m1}\hat{e}_1 + \alpha_{m2}\hat{e}_2 + ... + \alpha_{mn}\hat{e}_n) = (\alpha_{11}c_1 + \alpha_{21}c_2 + ... + \alpha_{m1}c_m)\hat{e}_1 + (\alpha_{12}c_1 +$$

$$\alpha_{22}c_2 + ... + \alpha_{m2}c_m)\hat{e}_2 + ... + (\alpha_{1n}c_1 + \alpha_{2n}c_2 + ... + \alpha_{mn}c_m)\hat{e}_n = \hat{0}.$$

Для того чтобы данная линейная комбинация равнялась нулю, коэффициенты при базисных элементах $\hat{e}_1, \hat{e}_2, ..., \hat{e}_n$ должны быть равны нулю. Таким об-разом, опять приходим к однородной системе линейных уравнений относительно $c_1, c_2, ..., c_m$

$$\begin{cases} \alpha_{11}c_1 + \alpha_{21}c_2 + \ldots + \alpha_{m1}c_m = 0 \\ \alpha_{12}c_1 + \alpha_{22}c_2 + \ldots + \alpha_{m2}c_m = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1n}c_1 + \alpha_{2n}c_2 + \ldots + \alpha_{n+1n}c_m = 0 \end{cases}$$

Матрицей этой системы будет приведенная выше матрица ***A***. Так как система элементов $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_m$ линейно-независима, то построенная выше линейная комбинация будет равна нулевому элементу только в том случае, когда все постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_m$ равны нулю. Это означает, что полученная однородная система линейных уравнений имеет лишь нулевое решение. Из теории линейных систем уравнений известно, что в этом случае ранг матрицы ***A*** должен быть равен ***m***: $rang(A) = m$. И тем самым необходимость доказана.

Доказательство достаточности. Пусть теперь известно, что $rang(A) = m$ Тогда полученная ранее однородная система линейных уравнений будет иметь лишь нулевое решение. Следовательно, также ранее построенная линейная комбинация элементов $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_m$ будет равна нулевому элементу только тогда, когда все постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_m$ будут одновременно равняться нулю, из чего и следует линейная независимость элементов $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_m$.

Из рассмотренного выше критерия следует, что необходимым и достаточным условием линейной зависимости системы элементов $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_m$ является выполнение неравенства $rang(A) < m$. Действительно, для того, чтобы линейная комбинация указанной системы элементов равнялась нулевому элементу, когда постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_m$ одновременно не равны нулю, необходимо наличие у полеченной выше однородной системы линейных уравнений ненулевых решений. А это, как известно, возможно только при условии $rang(A) < m$.

Следствие. Если число элементов равно размерности пространства ***m=n***, то система элементов $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_n$ будет линейно независимой тогда и только тогда, когда определитель матрицы, составленной из координат этих элементов, отличен от нуля.

Действительно, матрица ***A*** в этом случае будет квадратной и ее ранг будет равен ***n*** тога и только тогда, когда ее определитель будет отличен от нуля.

Если же число элементов ***m > n***, то легко доказать, что такая система элементов всегда будет линейно зависимой, так как в линейной комбинации этих элементов $c_1\hat{a}_1 + c_2\hat{a}_2 + \ldots + c_{n+1}\hat{a}_{n+1} + c_{n+2}\hat{a}_{n+2} + \ldots + c_m\hat{a}_m$ можно положить равными нулю постоянные $c_{n+2},\ldots,c_m$ и тогда в силу того, что размерность пространства равна ***n*** существует значения постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}$,одновременно не равных нулю, при которых линейная комбинация первых ***n+1*** элементов системы будет равна нулевому элементу. Тогда получим $c_1\hat{a}_1 + c_2\hat{a}_2 + \ldots + c_{n+1}\hat{a}_{n+1} + 0\hat{a}_{n+2} + \ldots + 0\hat{a}_m = \hat{0}$, что и требовалось доказать.

Пример. Рассмотрим пространство полиномов, степень которых не выше трех. Докажем, что система элементов этого пространства $P_1(t) = 3t^2 - 5$, $P_2(t) = 7t^3 + 5t$, $P_3(t) = t^2 - t$, $P_4(t) = 5t^3 - t^2$ является линейно независимой.

Возьмем в качестве базиса систему элементов $\hat{e}_1 = 1, \hat{e}_2 = t, \hat{e}_3 = t^2$, $\hat{e}_3 = t^3$. Тогда разложение представленных выше полиномов по данному базису будет иметь вид

$$P_1(t) = -5\cdot\hat{e}_1 + 0\cdot\hat{e}_2 + 3\cdot\hat{e}_3 + 0\cdot\hat{e}_4$$

$$P_2(t) = 0\cdot\hat{e}_1 + 5\cdot\hat{e}_2 + 0\cdot\hat{e}_3 + 7\cdot\hat{e}_4$$

$$P_3(t) = 0\cdot\hat{e}_1 - 1\cdot\hat{e}_2 + 1\cdot\hat{e}_3 + 0\cdot\hat{e}_4$$

$$P_4(t) = 0\cdot\hat{e}_1 + 0\cdot\hat{e}_2 - 1\cdot\hat{e}_3 + 5\cdot\hat{e}_4.$$

Тогда соответствующий определитель будет иметь вид

$$|A| = \begin{vmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -5\cdot\begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 7 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -5\left(5\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) = = -5(25+7) = -160 \neq 0$$

Следовательно данная система элементов линейно независимая.

Связь координат одного элемента в разных базисах.

Пусть в ***n***- мерном линейном пространстве ***M*** имеется два базиса: первый базис $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_n$ и второй базис $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \ldots, \hat{e}'_n$. В первом базисе разложение элемента $\hat{a} \in M$ имеет вид $\hat{a} = \beta_1 \cdot \hat{e}_1 + \beta_2 \cdot \hat{e}_2 + \ldots + \beta_n \cdot \hat{e}_n$, а во втором - $\hat{a} = \beta'_1 \cdot \hat{e}'_1 + \beta'_2 \cdot \hat{e}'_2 + \ldots + \beta'_n \cdot \hat{e}'_n$. Известны разложения элементов второго базиса по элементам первого

$$\hat{e}'_1 = \alpha_{11}\hat{e}_1 + \alpha_{12}\hat{e}_2 + \ldots + \alpha_{1n}\hat{e}_n$$
$$\hat{e}'_2 = \alpha_{21}\hat{e}_1 + \alpha_{22}\hat{e}_2 + \ldots + \alpha_{2n}\hat{e}_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\hat{e}'_n = \alpha_{n1}\hat{e}_1 + \alpha_{n2}\hat{e}_2 + \ldots + \alpha_{nn}\hat{e}_n$$

Матрица $P = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$, строки которой представляют собой координаты векторов второго базиса в первом базисе называется матрицей перехода.

Связь между элементами первого и второго базисов приведенная выше может быть представлена в векторном виде. Для этого введем вектор –столбец

$\vec{e} = \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \ldots \\ \hat{e}_n \end{pmatrix}$, координатами которого являются элементы первого базиса и вектор – столбец $\vec{e}' = \begin{pmatrix} \hat{e}'_1 \\ \hat{e}'_2 \\ \ldots \\ \hat{e}'_n \end{pmatrix}$, координаты которого есть элементы второго базиса. Тогда связь между элементами введенных двух базисов может быть выражена в виде

$$\begin{pmatrix} \hat{e}'_1 \\ \hat{e}'_2 \\ \dots \\ \hat{e}'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \dots \\ \hat{e}_n \end{pmatrix} \quad \text{или } \vec{e}\,' = P \cdot \vec{e}\,.$$

Матрицу ***P*** называют матрицей перехода, от базиса $\vec{e}$ к базису $\vec{e}\,'$.

Очевидно, что аналогичным образом можно перейти от базиса $\vec{e}\,'$ к базису $\vec{e}$, используя матрицу перехода ***Q***: $\vec{e} = Q \cdot \vec{e}\,'$. Тогда $\vec{e} = Q \cdot \vec{e}\,' = Q \cdot P \cdot \vec{e}\,'$, из чего следует, что $Q \cdot P = I$, где I - единичная матрица. То есть $Q = P^{-1}$, значит матрица ***P*** имеет обратную и, следовательно, является невырожденной.

Выясним теперь как преобразуются координаты элемента линейного пространства при переходе от базиса $\vec{e}$ к базису $\vec{e}\,'$.

$$\hat{a} = \beta'_1 \cdot \hat{e}'_1 + \beta'_2 \cdot \hat{e}'_2 + \dots + \beta'_n \cdot \hat{e}'_n = \beta'_1 \cdot (\alpha_{11}\hat{e}_1 + \alpha_{12}\hat{e}_2 + \dots + \alpha_{1n}\hat{e}_n) +$$
$$+ \beta'_2 \cdot (\alpha_{21}\hat{e}_1 + \alpha_{22}\hat{e}_2 + \dots + \alpha_{2n}\hat{e}_n) + \dots + \beta'_n \cdot (\alpha_{n1}\hat{e}_1 + \alpha_{n2}\hat{e}_2 + \dots + \alpha_{nn}\hat{e}_n) =$$
$$(\alpha_{11}\beta'_1 + \alpha_{21}\beta'_2 + \dots + \alpha_{n1}\beta'_n)\hat{e}_1 + (\alpha_{12}\beta'_1 + \alpha_{22}\beta'_2 + \dots + \alpha_{n2}\beta'_n)\hat{e}_2 + \dots +$$
$$(\alpha_{1n}\beta'_1 + \alpha_{2n}\beta'_2 + \dots + \alpha_{nn}\beta'_n)\hat{e}_n = \beta_1 \cdot \hat{e}_1 + \beta_2 \cdot \hat{e}_2 + \dots + \beta_n \cdot \hat{e}_n\,.$$

Приравнивая коэффициенты при $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n$, получим

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_{11}\beta'_1 + \alpha_{21}\beta'_2 + \dots + \alpha_{n1}\beta'_n \\ \beta_2 = \alpha_{12}\beta'_1 + \alpha_{22}\beta'_2 + \dots + \alpha_{n2}\beta'_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \beta_n = \alpha_{1n}\beta'_1 + \alpha_{2n}\beta'_2 + \dots + \alpha_{nn}\beta'_n \end{cases}$$

Если ввести вектора $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \beta'_1 \\ \beta'_2 \\ \dots \\ \beta'_n \end{pmatrix}$, то полученные выше соотношения, связывающие компоненты элемента $\hat{a}$ в базисе $\vec{e}$ и базисе $\vec{e}\,'$ могут быть представлены в виде

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \dots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1}\\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\beta_1'\\ \beta_2'\\ \dots\\ \beta_n'\end{pmatrix},\quad \text{или}\quad \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \dots\\ \beta_n\end{pmatrix}=P^T\cdot\begin{pmatrix}\beta_1'\\ \beta_2'\\ \dots\\ \beta_n'\end{pmatrix},$$

где P^T - транспонированная матрица P.

Данное соотношение позволяет осуществить переход от компонент элемента $\hat{a}$ в базисе $\vec{e}\,'$ и базисе $\vec{e}$

Умножая обе части приведенного выше соотношения на матрицу $\left(P^T\right)^{-1}$, его можно представить в ином виде

$$\begin{pmatrix}\beta_1'\\ \beta_2'\\ \dots\\ \beta_n'\end{pmatrix}=\left(P^T\right)^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \dots\\ \beta_n\end{pmatrix}.$$

Это соотношение позволяет осуществить переход от компонент элемента $\hat{a}$ в базисе $\vec{e}$ и базисе $\vec{e}\,'$.

Пример. Рассмотрим множество квадратных матриц порядка 2, вида

$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$. Определив операции сложения и умножения матриц на число так, как эти операции определяются в линейной алгебре, получим линейное пространство. Действительно, выполнение аксиом 1, 2, 5, 6, 7, 8 в определении линейного пространства непосредственно следует из свойств операций сложения матриц и умножения матриц на число. Роль нулевого элемента данного пространства играет нулевая матрица $\hat{0}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, а противоположным элементом для матрицы $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, будет матрица $(-A)=\begin{pmatrix}-a_{11} & -a_{12}\\ -a_{21} & -a_{22}\end{pmatrix}$.

Возьмем в качестве первого базиса следующие четыре матрицы

$$\hat{e}_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \hat{e}_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \hat{e}_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \hat{e}_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Покажем, что данная система элементов является линейно независимой, для чего построим линейную комбинацию этих элементов и приравняем ее нулевому элементу

$$c_1 \cdot \hat{e}_1 + c_2 \cdot \hat{e}_2 + c_3 \cdot \hat{e}_3 + c_3 \cdot \hat{e}_4 = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что полученное соотношение выполняется только в том случае, когда $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0, c_4 = 0$, из чего и следует линейная независимость системы элементов и возможность рассматривать ее в качестве базиса данного линейного пространства.

В качестве второго базиса возьмем систему элементов

$$\hat{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \hat{e}'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \hat{e}'_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \hat{e}'_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Докажем линейную независимость данной системы элементов, для чего определим разложение каждого ее элемента по элементам первого базиса.

$$\hat{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \hat{e}_1 + 1 \cdot \hat{e}_2$$

$$\hat{e}'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \hat{e}_2 + 1 \cdot \hat{e}_4$$

$$\hat{e}'_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \hat{e}_1 + 1 \cdot \hat{e}_3$$

$$\hat{e}'_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \hat{e}_1 + 1 \cdot \hat{e}_4$$

Тогда матрица, составленная из координат этих векторов, будет иметь вид

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы ***B***

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) = 2 \neq 0.$$

Значит, эта система элементов линейно независимая и может служить базисом рассматриваемого линейного пространства.

Возьмем элемент данного пространства $\hat{a}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 7\end{pmatrix}$, который имеет разложение по элементам первого базиса следующего вида

$$\hat{a}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 7\end{pmatrix}=1\cdot\hat{e}_1+3\cdot\hat{e}_2+5\cdot\hat{e}_3+7\cdot\hat{e}$$

Найдем разложение элемента $\hat{a}$ по элементам второго базиса, для чего построим матрицу перехода $P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, для которой $P^T=B$ и найдем $\left(P^T\right)^{-1}=B^{-1}$.

Как известно обратная матрица по отношению к данной матрице B является транспонированная матрица алгебраических дополнений элементов исходной матрицы деленных на определитель исходной матрицы

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}B_{11}/|B| & B_{21}/|B| & B_{31}/|B| & B_{41}/|B|\\ B_{12}/|B| & B_{22}/|B| & B_{32}/|B| & B_{42}/|B|\\ B_{13}/|B| & B_{23}/|B| & B_{33}/|B| & B_{43}/|B|\\ B_{14}/|B| & B_{24}/|B| & B_{34}/|B| & B_{44}/|B|\end{pmatrix}.$$

Определим алгебраические дополнения B_{ij} элементов матрицы B:

$$B_{11}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=1 \qquad B_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=-1$$

$$B_{13}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=0 \qquad B_{14}=-\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=1$$

$$B_{21}=-\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=1 \qquad B_{22}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

$$B_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=0 \qquad B_{24}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=-1$$

$$B_{31}=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}=-1 \qquad B_{32}=-\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1$$

$$B_{33}=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2 \qquad B_{34}=-\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&0\end{vmatrix}=-1$$

$$B_{41}=-\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{vmatrix}=-1 \qquad B_{42}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{vmatrix}=1$$

$$B_{43}=-\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&0&0\end{vmatrix}=0 \qquad B_{44}=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1.$$

Тогда, учитывая, что $|B|=2$ получим

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}1/2&1/2&-1/2&-1/2\\-1/2&1/2&1/2&1/2\\0&0&1&0\\1/2&-1/2&-1/2&1/2\end{pmatrix}=\left(P^T\right)^{-1}.$$

Тогда $\begin{pmatrix}\beta_1'\\\beta_2'\\\ldots\\\beta_n'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2&1/2&-1/2&-1/2\\-1/2&1/2&1/2&1/2\\0&0&1&0\\1/2&-1/2&-1/2&1/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\5\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\7\\5\\0\end{pmatrix}$, то есть разложение элемента $\hat{a}=\begin{pmatrix}1&3\\5&7\end{pmatrix}$ по базису $\hat{e}_1',\hat{e}_2',\hat{e}_3',\hat{e}_4'$ имеет следующий вид

$$\hat{a}=-4\cdot\hat{e}_1'+7\cdot\hat{e}_2'+5\cdot\hat{e}_3'+0\cdot\hat{e}_4'.$$

До сих пор рассматривались конечномерные линейные пространства. Однако в математике часто приходиться иметь дело и с несколько иными линейными пространствами.

Определение. Линейное пространство называется бесконечномерным, если для любого натурального числа $\boldsymbol{n}$ в нем существует $\boldsymbol{n}$ линейно независимых эле-ментов.

Пример. Рассмотрим множество $C_{[a,b]}$ функций $x(t)$ непрерывных на отрезке $[a,b]$. Очевидно, что для элементов этого множества выполняются все аксиомы присутствующие в определении линейного пространства. Покажем, что это бесконечномерное линейное пространство. Действительно, для любого натурального числа ***n*** система элементов $\mathbf{1, t, t^2, \ldots t^{n-1}}$ является линейно неза-висимой, ибо в противном случае их линейная комбинация

$$C_0 \cdot 1 + C_1 \cdot t + C_2 \cdot t^2 + \ldots + C_{n-1} \cdot t^{n-1},$$

которая при коэффициентах $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$, одновременно не равных нулю, представляет полином, оказалась бы тождественно равной нулю. Но тож-дественно равный нулю полином есть 0, а он соответствует случаю, когда все коэффициенты $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ одновременно равны нулю.

IV. НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

На множестве вещественных и комплексных чисел вводится понятие модуля, которое позволяет определить понятие расстояния на числовой прямой ив комплексной плоскости. Наличие данного понятия позволяет рассматривать вопросы о сходимости последовательностей и рядов, непрерывности и дифференцируемости функций. Обобщая это понятия, вводится понятие нормы на множествах игой природы.

Определение. Линейное пространство E называется нормированным пространством, если каждому элементу $\hat{a}$ этого пространства поставлено в соответствие неотрицательное число $\|\hat{a}\|$, которое называется нормой данного элемента, так, что выполняются следующие три аксиомы:

1. $\|\hat{a}\| \geq 0$; $\|\hat{a}\| = 0$ только тогда, когда $\hat{a} = \hat{0}$;
2. $\|\alpha \cdot \hat{a}\| = |\alpha| \cdot \|\hat{a}\|$, где α -число
3. $\|\hat{a} + \hat{b}\| \leq \|\hat{a}\| + \|\hat{b}\|$, аксиома треугольника (неравенство треугольника).

Примеры.

1. Векторное ***n***- мерное пространство можно считать нормированным, если норму ***n***-мерного вектора ***a*** $= (a_1, a_2, \ldots a_n)$ определить как $\|a\| = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$. Так, как

$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \geq 0$ и равняться эта сумма нулю может лишь в том случае, когда все компоненты вектора равны нулю, то следует признать справедливость первой аксиомы. Выполнение второй аксиом также вполне очевидно ибо $\|\alpha \cdot a\| = \sum_{k=1}^{n} |\alpha \cdot a_k| = \sum_{k=1}^{n} |\alpha| \cdot |a_k| = |\alpha| \cdot \sum_{k=1}^{n} |a_k| = |\alpha| \cdot \|a\|$.

Докажем справедливость третьей аксиомы. Пусть имеются два ***n***-мерных вектора ***a*** $= (a_1, a_2, \ldots a_n)$ и ***b*** $= (b_1, b_2, \ldots b_n)$.

Тогда $\|a+b\| = \sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k| \leq \sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|) = \sum_{k=1}^{n} |a_k| + \sum_{k=1}^{n} |b_k| = \|a\| + \|b\|$, что и требовалось доказать.

2. Рассмотрим пространство $C_{[a,b]}$ непрерывных функций $x(t)$ на отрезке $[a,b]$. В этом случае норму элементов пространства можно ввести следующим образом $\|x(t)\| = \max\limits_{[a,b]} |x(t)|$. Другими словами нормой функции, принадлежащей данному пространству, наибольшее по модулю значение функции на отрезке $[a,b]$. При этом выполняются все аксиомы, обязательные для нормы. Первая аксиома выполняется в силу того, что модуль любой величины всегда отрицателен и равен нулю, только когда величина равна нулю и, значит, максимальное по модулю значение функции на рассматриваемом отрезке в данном случае тоже равно нуль. А это означает, что в этом случае функция тождественно равна нулю на всем отрезке $[a,b]$. Справедливость второй аксиомы следует из свойства мо-дулю, которое утверждает, что модуль произведения двух величин равен произведению их модулей. По аналогичной причине следует признать и выполнение третьей аксиомы, так как для любых двух величин U и V выполняется соотношение $|U+V| \le |U| + |V|$.

3.Рассмотрим еще одно пространство функций, определенных на отрезке $[a,b]$.

Но в отличие от предыдущего примера норму функции $x(t)$ введем как квадратный корень из интеграла от квадрата данной функции по указанному отрезку

$$\|x(t)\| = \sqrt{\int_a^b x^2(t)dt}.$$

Докажем, что введенная таким образом норма будет удовлетворять всем трем аксиомам. Выполнение первой аксиомы следует из того, что под знаком интеграла стоит $x^2(t) \ge 0$ и, значит, по свойству определенного интеграла интеграл $\int_a^b x^2(t)dt \ge 0$, а квадратный корень из неотрицательной величины тоже есть величина неотрицательная. Нулевое значение норма может принимать только в том случае, когда равен нулю интеграл $\int_a^b x^2(t)dt = 0$, а это возможно лишь в случае, когда $x^2(t) \equiv 0$

на всем отрезке, то есть когда на всем отрезке $[a,b]$ $x(t)\equiv 0$. Справедливость второй аксиомы вытекает из следующей цепочки преобразований

$$\|\alpha \cdot x(t)\| = \sqrt{\int_a^b \alpha^2 x^2(t)dt} = \sqrt{\alpha^2 \cdot \int_a^b x^2(t)dt} = |\alpha| \cdot \sqrt{\int_a^b x^2(t)dt} = |\alpha| \cdot \|x(t)\|$$

Третья аксиома в данном случае принимает вид

$$\sqrt{\int_a^b (x(t)+y(t))^2 dt} \le \sqrt{\int_a^b x^2(t)dt} + \sqrt{\int_a^b y^2(t)dt}.$$

Прежде, чем доказать справедливость приведенного неравенства, докажем неравенство $\int_a^b |x(t)\cdot y(t)|dt \le \sqrt{\int_a^b x^2(t)dt} \cdot \sqrt{\int_a^b y^2(t)dt}$.

Известно, что $(U-V)^2 \ge 0$ или $U^2+V^2-2\cdot U\cdot V \ge 0$. Тогда $U^2+V^2 \ge 2\cdot U\cdot V$, $\frac{U^2}{2}+\frac{V^2}{2} \ge U\cdot V$ или $U\cdot V \le \frac{U^2}{2}+\frac{V^2}{2}$.

Положим в полученном неравенстве $U=\frac{|x(t)|}{\|x(t)\|}$ и $V=\frac{|y(t)|}{\|y(t)\|}$, будем иметь

$$\frac{|x(t)|}{\|x(t)\|}\cdot\frac{|y(t)|}{\|y(t)\|} \le \frac{|x(t)|^2}{2\cdot\|x(t)\|^2}+\frac{|y(t)|^2}{2\cdot\|y(t)\|^2}.$$

Проинтегрируем данное неравенство по отрезку $[a,b]$

$$\frac{\int_a^b |x(t)|\cdot|y(t)|dt}{\|x(t)\|\cdot\|y(t)\|} \le \frac{\int_a^b |x(t)|^2 dt}{2\cdot\|x(t)\|^2}+\frac{\int_a^b |y(t)|^2 dt}{2\cdot\|y(t)\|^2}.$$

Интегралы, стоящие в числителях дробей в правой части полученного неравенства равны соответственно $\|x(t)\|^2$ и $\|y(t)\|^2$. Учитывая это обстоятельство, получаем

$$\frac{\int_a^b |x(t)|\cdot|y(t)|dt}{\|x(t)\|\cdot\|y(t)\|} \le \frac{\|x(t)\|^2}{2\cdot\|x(t)\|^2}+\frac{\|y(t)\|^2}{2\cdot\|y(t)\|^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.$$

Окончательно имеем $\frac{\int_a^b |x(t)|\cdot|y(t)|dt}{\|x(t)\|\cdot\|y(t)\|} \le 1$ или

$$\int_a^b |x(t)\cdot y(t)|dt \le \|x(t)\|\cdot\|y(t)\|$$, то есть

$$\int_a^b |x(t)\cdot y(t)|dt \le \sqrt{\int_a^b x^2(t)dt}\cdot\sqrt{\int_a^b y^2(t)dt}$$, что и требовалось доказать.

Долее, имеем

$$\|x(t)+y(t)\|^2 = \int_a^b (x(t)+y(t))^2 dt = \int_a^b \left(x^2(t)+2x(t)\cdot y(t)\right)+y^2(t))dt =$$

$$\int_a^b x^2(t)dt + 2\cdot\int_a^b x(t)\cdot y(t)dt + \int y^2(t)dt .$$

Учитывая, что $x(t)\cdot y(t) \le |x(t)\cdot y(t)|$ и, следовательно, по свойству определенного интеграла $\int_a^b x(t)\cdot y(t)dt \le \int_a^b |x(t)\cdot y(t)|dt$ получим

$$\int_a^b x^2(t)dt + 2\cdot\int_a^b x(t)\cdot y(t)dt + \int y^2(t)dt \le \int_a^b x^2(t)dt + 2\cdot\int_a^b |x(t)\cdot y(t)|dt + \int_a^b y^2(t)dt =$$

$$\|x(t)\|^2 + 2\cdot\int_a^b |x(t)\cdot y(t)|dt + \|y(t)\|^2 .$$

С учетом доказанного неравенства $\int_a^b |x(t)\cdot y(t)|dt \le \|x(t)\|\cdot\|y(t)\|$ получим

$$\|x(t)\|^2 + 2\cdot\int_a^b |x(t)\cdot y(t)|dt + \|y(t)\|^2 \le \|x(t)\|^2 + 2\cdot\|x(t)\|\cdot\|y(t)\| + \|y(t)\|^2 =$$

$$\left(\|x(t)\| + \|y(t)\|\right)^2 .$$

Окончательно, опуская промежуточные выкладки, имеем

$$\|x(t)+y(t)\|^2 \le \left(\|x(t)\| + \|y(t)\|\right)^2 .$$

Извлекая квадратный корень из левой и правой частей данного неравенства, получим доказываемое соотношение

$$\|x(t)+y(t)\| \le \|x(t)\| + \|y(t)\| .$$

V. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение. Множество объектов любой природы называется метрическим пространством, если на каждой паре элементов этого множества $\hat{a}$ и $\hat{b}$ может быть определена числовая функция $\rho(\hat{a},\hat{b})$, которая называется расстоянием между данными элементами и выполняются следующие аксиомы

1. $\rho(\hat{a},\hat{b}) \geq 0$, $\rho(\hat{a},\hat{b}) = 0$ только при $\hat{a} = \hat{b}$;
2. $\rho(\hat{a},\hat{b}) = \rho(\hat{b},\hat{a})$, аксиома симметрии;
3. $\rho(\hat{a},\hat{b}) \leq \rho(\hat{a},\hat{c}) + \rho(\hat{c},\hat{b})$, аксиома треугольника;

Следует отметить, что под расстоянием в данном случае понимается похожесть, близость элементов. Чем больше похожи элементы по своим свойствам, тем меньше расстояние между ними и наоборот.

Необходимо также отметить то обстоятельство, что мы имеем дело с произвольным множеством, а не с множеством, представляющим собой линейное пространство, на котором введены операции сложения элементов и умножения элементов на число.

Если множество представляет собой линейное нормированное пространство, то расстояние между его элементами можно ввести, используя норму по следующей формуле $\rho(\hat{a},\hat{b}) = \left\|\hat{a}-\hat{b}\right\|$. Покажем, что и в этом случае выполняются аксиомы, которые фигурируют в определении метрического пространства.

Справедливость первой аксиомы следует из первой аксиомы из определения нормированного пространства $\rho(\hat{a},\hat{b}) = \left\|\hat{a}-\hat{b}\right\| \geq 0$. Справедливость второй аксиоме вытекает из нижеследующего

$$\rho(\hat{a},\hat{b}) = \left\|\hat{a}-\hat{b}\right\| = \left\|(-1)\cdot(\hat{b}-\hat{a})\right\| = 1\cdot\left\|\hat{b}-\hat{a}\right\| = \rho(\hat{b},\hat{a}).$$

Докажем теперь выполнение третьей аксиомы

$$\rho(\hat{a},\hat{b}) = \left\|\hat{a}-\hat{b}\right\| = \left\|\hat{a}-\hat{c}+\hat{c}-\hat{b}\right\| = \left\|(\hat{a}-\hat{c})+(\hat{c}-\hat{b})\right\|$$

Далее, используя третью аксиому из определения нормированного пространства. получим

$$\left\|(\hat{a}-\hat{c})+(\hat{c}-\hat{b})\right\| \leq \left\|\hat{a}-\hat{c}\right\| + \left\|\hat{c}-\hat{b}\right\| = \rho(\hat{a},\hat{c}) + \rho(\hat{c},\hat{b}).$$

Примеры.

1.Рассмотрим множество окружностей на координатной плоскости радиуса ***R*** с центром, расположенным в точке с координатами ***(a,b)*.** Очевидно, чем ближе радиусы двух окружностей и ближе их центры, тем больше совпадают эти окружности на координатной плоскости. Тогда расстояние между окружностью **C_1** радиуса ***R_1*** с центром в точке ***(a_1,b_1)*** и окружностью **C_2** радиуса ***R_2*** с центром в точке ***(a_2,b_2)*** можно определить по формуле $\rho(C_1,C_2)=\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2+(R_1-R_2)^2}$.

Покажем, что в этом случае будут выполняться все три аксиомы. Действительно, выполнение первой аксиомы очевидно, так как $\rho(C_1,C_2)=\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2+(R_1-R_2)^2}\ge 0$ и $\rho(C_1,C_2)=0$ только тогда, когда $a_1=a_2$, $b_1=b_2$ и $R_1=R_2$, то есть когда окружности совпадают.

Долее $\rho(C_1,C_2)=\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2+(R_1-R_2)^2}=$ $=\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2+(R_2-R_1)^2}=\rho(C_2,C_1)$ и тем самым доказано выполнение второй аксиомы.

Справедливость выполнения третьей аксиомы $\rho(C_1,C_2)\le\rho(C_1,C_3)+\rho(C_3,C_2)$ или

$$\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2+(R_1-R_2)^2}\le\sqrt{(a_1-a_3)^2+(b_1-b_3)^2+(R_1-R_3)^2}+$$
$$+\sqrt{(a_2-a_3)^2+(b_2-b_3)^2+(R_2-R_3)^2}$$

следует из известного свойства треугольника, которое утверждает, что сумма длин двух сторон треугольника не меньше длины третьей стороны. Параметры первой окружности a_1,b_1,R_1 можно рассматривать как координаты первой вершины треугольника в пространстве, параметры второй и третьей окружностей можно соответственно рассматривать как координаты второй a_2,b_2,R_2 и третьей a_3,b_3,R_3. Тогда величины

$$\rho(C_1,C_2)=\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2+(R_1-R_2)^2},$$
$$\rho(C_1,C_3)=\sqrt{(a_1-a_3)^2+(b_1-b_3)^2+(R_1-R_3)^2}\text{ и}$$
$$\rho(C_3,C_2)=\sqrt{(a_3-a_2)^2+(b_3-b_2)^2+(R_3-R_2)^2}$$

можно рассматривать как длины трех сторон этого треугольника, из чего и следует справедливость третьей аксиомы.

2. Пространство непрерывных функций $x(t)$ на отрезке $[a,b]$ также является метрическим пространством. В силу того, что данное пространство является нормированным расстояние между его элементами можно ввести по формуле

$$\rho(x(t), y(t)) = \|x(t) - y(t)\| = \max_{[a,b]} |x(t) - y(t)|.$$

Из доказанного выше следует, что в этом случае все аксиомы будут выполняться.

3. Рассмотрим опять пространство функций, определенных на отрезке $[a,b]$.

Но теперь норму функции $x(t)$ определим как квадратный корень из интеграла от квадрата данной функции по указанному отрезку

$$\|x(t)\| = \sqrt{\int_a^b x^2(t)dt}.$$

Тогда по аналогии с предыдущим примером расстояние между элементами этого пространства можно определить как

$$\rho(x(t), y(t)) = \|x(t) - y(t)\| = \sqrt{\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt}$$

Предел последовательности.

Рассмотрим последовательность элементов метрического пространства $\{\hat{a}_n\}$.

Определение. Элемент метрического пространства $\hat{a}_0$ называется пределом последовательности элементов $\{\hat{a}_n\}$ этого пространства если числовая последовательность $\rho(\hat{a}_n, \hat{a}_0)$ сходится к нулю

$$\lim_{n\to\infty} \hat{a}_n = \hat{a}_0.$$

Используя определение предела числовой последовательности это определение можно представить в ином, более развернутом виде.

Определение. Элемент метрического пространства $\hat{a}_0$ называется пределом последовательности элементов $\{\hat{a}_n\}$ этого пространства, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое натуральное число ***N***, что при $n > N$

будет выполняться неравенство $\rho(\hat{a}_n, \hat{a}_0) < \varepsilon$.

Последовательность элементов метрического пространства $\{\hat{a}_n\}$ в этом случае называется сходящейся.

Теорема IV.1. Если существует предел последовательности элементов метрического пространства $\{\hat{a}_n\}$, то он единственный.

Допустим, что некоторая последовательность элементов метрического пространства $\{\hat{a}_n\}$ имеет два разных предела $\hat{a}_0$ и $\hat{a}'_0$, тогда по аксиоме треугольника $\rho(\hat{a}_0, \hat{a}'_0) \le \rho(\hat{a}_0, \hat{a}_n) + \rho(\hat{a}_n, \hat{a}'_0)$. Но последовательности $\rho(\hat{a}_0, \hat{a}_n)$ и $\rho(\hat{a}_n, \hat{a}'_0)$ сходятся к нулю, то есть для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое натуральное число ***N***, что при $n > N$ будут выполняться неравенства $\rho(\hat{a}_0, \hat{a}_n) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\rho(\hat{a}_n, \hat{a}'_0) < \frac{\varepsilon}{2}$, то есть $\rho(\hat{a}_0, \hat{a}'_0) < \varepsilon$. Другими словами , выбирая n достаточно большим можно сделать расстояние между элементами $\hat{a}_0$ и $\hat{a}'_0$ меньше любого заданного, сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$. А это и означает равенства этих элементов $\hat{a}_0 = \hat{a}'_0$.

При изучении математического анализа важную роль играет свойство полноты числовой прямой, которое заключается в том, что всякая фундаментальная последовательность чисел (то есть последовательность чисел $\{a_n\}$обладающая свойством, в соответствии с которым для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное ***N***, что $|a_n - a_k| < \varepsilon$ при всех $n > N$ и $k > N$) сходится к некоторому пределу. Ниже будут рассмотрены множества обладающие аналогичным свойством.

Определение. Последовательность элементов $\{\hat{a}_n\}$ метрического пространства называется фундаментальной, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное ***N***, что $\rho(\hat{a}_n, \hat{a}_k) < \varepsilon$ при всех $n > N$ и $k > N$.

Теорема IV.2. Всякая сходящаяся последовательность элементов метрического пространства является фундаментальной.

Пусть последовательность $\{\hat{a}_n\}$ является сходящейся и $\lim\limits_{n\to\infty}\hat{a}_n=\hat{a}_0$, то есть числовая последовательность $\rho(\hat{a}_n,\hat{a}_0)$ сходится к нулю. Это значит, что для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon>0$ существует такое натуральное ***N***, что при $n>N$ и $k>N$ будут выполняться, соответственно, неравенства $\rho(\hat{a}_n,\hat{a}_0)<\dfrac{\varepsilon}{2}$ и $\rho(\hat{a}_k,\hat{a}_0)<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда используя данные неравенства по аксиоме треугольника имеем $\rho(\hat{a}_n,\hat{a}_k)\le\rho(\hat{a}_n,\hat{a}_0)+\rho(\hat{a}_0,\hat{a}_k)<\varepsilon$, что и требовалось доказать.

Определение. Если в метрическом пространстве любая фундаментальная последовательность элементов сходится, то такое пространство называется полным.

Примеры.

1. В качестве первого примера можно привести уже упомянутое выше множество действительных чисел.

2. Пространство непрерывных на отрезке $C_{[a,b]}$ функций также является полным. Полнота этого пространства следует из критерия Коши равномерной сходимости последовательности функций: для того, чтобы последовательность функций $\{x_n(t)\}$ сходилась в пространстве $C_{[a,b]}$, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной, то есть чтобы для всякого $\varepsilon>0$ существовало такое натуральное ***N***, что при любых $n>N$ и $k>N$ выполнялось неравенство $\rho(x_n(t),x_k(t))=\max\limits_{[a,b]}|x_n(t)-x_k(t)|<\varepsilon$, или, что в принципе тоже самое, чтобы неравенство $|x_n(t)-x_k(t)|<\varepsilon$ выполнялось для всех $t\in[a,b]$.

3. В качестве примера неполного пространства приведем множества всех рациональных чисел. Рассмотрим следующую последовательность рациональных чисел 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, …. Легко видеть, что эта последовательность представляет собой последовательные приближения величины $\sqrt{2}$. Чем больше но-

мер члена данной последовательности, тем больше точность вычисления $\sqrt{2}$ и тем меньше будут отличаться друг от друга близко расположенные члены последовательности, то есть будет выполняться соотношение $|a_n - a_k| < \varepsilon$ для достаточно больших ***n*** и ***k***, то есть при $n > N$ и $k > N$ для достаточно больших ***N.*** Другими словами эта последовательность является фундаментальной. Но предела эта последовательность на множестве рациональных чисел не имеет, так как, очевидно, что ее пределом будет число $\sqrt{2}$, которое является иррациональным и не принадлежит множеству рациональных чисел. Таким образом указанная последовательность является фундаментальной но не имеющей предела на множестве рациональных чисел, а само множество рациональных чисел не является полным.

Банаховы пространства.

Всякое нормированное пространство является метрическим, так как в нем может быть введено расстояние между его элементами можно ввести по следующей формуле $\rho(\hat{a},\hat{b}) = \left\|\hat{a} - \hat{b}\right\|$. Поэтому все, что было сказано о метрических пространствах (предел последовательности элементов, понятие фундаментальной последовательности , полноты пространства и так далее) справедливо и для пространств нормированных.

Определение. Нормированное пространство называется банаховым, если оно является полным.

Примеры.

1.Множество действительных чисел является банаховам пространством. Это пространство нормированное (нормой элементов пространства является модуль числа, для которого выполняются все аксиомы). Кроме того, так как для действительных чисел имеет место критерий Коши (для того, чтобы последовательность чисел имела предел она должна быть фундаментальной), это пространство является полным .

2. Пространство непрерывных на отрезке $C_{[a,b]}$ также является банаховым, в силу того, что оно нормировано и является полным, что и было доказано ранее.

Ряды в банаховых пространствах.

Пусть ***E*** банахово пространство и пусть $\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \dots, \hat{\varphi}_n \dots$ бесконечная последовательность элементов этого пространства. Бесконечная сумма

$$\hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2 + \dots + \hat{\varphi}_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{\varphi}_k$$

Называется рядов в банаховом пространстве ***E.***

Рассмотрим конечную сумму первых ***n*** элементов указанной последовательности

$\hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2 + \dots + \hat{\varphi}_n = \sum_{k=1}^{n} \hat{\varphi}_k = \hat{a}_n$, которая называется частичной суммой рассматриваемого ряда.

Определение. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \hat{\varphi}_k$ называется сходящимся в пространстве ***E,*** если сходится его последовательность частичных сумм $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_n \dots$.

Предел данной последовательности $\hat{a}$ принимается в качестве суммы данного ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \hat{\varphi}_k = \hat{a}$.

Определение. Если сходится числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|\hat{\varphi}_k\|$, то говорят, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \hat{\varphi}_k$ сходится абсолютно.

Теорема IV.3. Всякий абсолютно сходящийся ряд в банаховом пространстве будет сходящимся.

Рассмотрим последовательность частичных сумм абсолютно сходящегося ряда

$\sum_{k=1}^{\infty} \hat{\varphi}_k : \hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_n, \dots$. Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|\hat{\varphi}_k\|$ сходится, то будет сходиться и последовательность частичных сумм этого числового ряда $s_1, s_2, \dots s_n, \dots$ и, значит, она является фундаментальной. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное ***N***, что при любых $n > N$ и $k > N$ $(k > n)$ выполняется $|s_k - s_n| < \varepsilon$ или $\left| \sum_{m=1}^{k} \|\varphi_m\| - \sum_{m=1}^{n} \|\varphi_m\| \right| < \varepsilon$ из чего следует $\left| \sum_{m=n}^{k} \|\varphi_m\| \right| < \varepsilon$.

По свойству нормы (аксиома 3) $\left\|\sum_{m=n}^{k}\hat{\varphi}_m\right\| \le \sum_{m=n}^{k}\|\hat{\varphi}_m\| = \left|\sum_{m=n}^{k}\|\hat{\varphi}_m\|\right| < \varepsilon$. Но $\sum_{m=n}^{k}\hat{\varphi}_m = \hat{a}_k - \hat{a}_n$ то есть любого $\varepsilon > 0$ существует такое ***N***, что при любых $n > N$ и $k > N$ $(k > n)$ $\|\hat{a}_k - \hat{a}_n\| < \varepsilon$. Это означает, что последовательность $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_n \ldots$ фундаментальная и ,значит, она сходится, следовательно сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\hat{\varphi}_k$.

VI. ПОПОЛНЕНИЕ ПРОСТРАНСТВ

Определение. Множество M^* в линейном пространстве *М*, называется линейным многообразием, если для любых элементов $\hat{x}$ и $\hat{y}$ этого множества и любых чисел α и β элемент $\alpha\hat{x}+\beta\hat{y}$ также принадлежит множеству M^*.

Пример.

Множество полиномов, степень которых не выше n, является линейным многообразием в пространстве $C_{[a,b]}$. В самом деле, если α и β некоторые числа, а $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ и $Q_n(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n$ два полинома степени не выше n, то $\alpha P_n(x)+\beta Q_n(x)=(\alpha a_0+\beta b_0)x^n+(\alpha a_1+\beta b_1)x^{n-1}+\ldots+$ $(\alpha a_{n-1}+\beta b_{n-1})x+(\alpha a_n+\beta b_n)$ тоже будет полиномом степени не выше n и будет принадлежать тому же множеству.

Определение. Линейное многообразие M^*, принадлежащее линейному нормированному пространству E называется плотным в пространстве E, если для любого элемента $\hat{x}\in E$ и любого числа $\varepsilon>0$ существует элемент $\hat{z}\in M^*$ такой что $\|\hat{x}-\hat{z}\|<\varepsilon$.

Если множество M^* плотно в нормированном пространстве E и $\hat{x}\in E$, то выбирая последовательно $\varepsilon=1, \varepsilon=1/2, \ldots, \varepsilon=1/n\ldots$ для каждого ε найдем $\hat{z}_1\in M^*$, $\hat{z}_2\in M^*$,…, $\hat{z}_n\in M^*\ldots$такие, что $\|\hat{x}-\hat{z}_n\|<1/n$, где $n=1,2,\ldots$ Переходя к пределу при $n\to\infty$ в полученном неравенстве, приходим к выводу, что числовая последовательность $\rho(\hat{x},\hat{z}_n)=\|\hat{x}-\hat{z}_n\|$ стремится к нулю и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\hat{z}_n=\hat{x}$.

Пример.

Рассмотрим пространство действительных чисел R и множество рациональных чисел Q, которое является плотным в пространстве R, так как известно, что для каждого действительного числа r и любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое рациональное число q, что $|r-q| < \varepsilon$.

Теорема IV.4 Всякое нормированное пространство E можно рассматривать как линейное многообразие, плотное в некотором банаховом пространстве $Б$.

Пространство $Б$ в этом случае называется пополнением пространства E.

Рассмотрим всевозможные фундаментальные последовательности элементов $\{\hat{x}_n\}$ пространства E. Две последовательности элементов $\{\hat{x}_n\}$ и $\{\hat{x}_n^1\}$ пространства E будем называть эквивалентными, если числовые последовательности $\rho(\hat{x}_n, \hat{x}_n^1) = \left\|\hat{x}_n - \hat{x}_n^1\right\|$ будут стремиться к нулю при $n \to \infty$ и факт эквивалентности этих последовательностей будем обозначать $\{\hat{x}_n\} \sim \{\hat{x}_n^1\}$. Далее, все фундаментальные последовательности $\{\hat{x}_n\}$ пространства E разобъем на непересекающиеся классы (группы) таким образом, чтобы все эквивалентные фундаментальные последовательности попали в один класс. Полученные классы обозначим через $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ … и так далее, а множество всех таких классов обозначим через $Б$. Если фундаментальная последовательность $\{\hat{x}_n\}$ принадлежит классу $\tilde{x}$, то есть $\{\hat{x}_n\} \in \tilde{x}$, то ее будем называть представителем данного класса. Любой элемент $\hat{x}$ пространства E будем отождествлять с последовательностью $\{\hat{x}\}$, у которой все члены равны элементу $\hat{x}$. Легко видеть, что подобные последовательности тоже будут фундаментальными и их тоже присоединим к множеству $Б$. Будем теперь множество $Б$ рассматривать как линейное нормированное пространство. При этом операцию сложения элементов пространства определим следующим образом: если $\{\hat{x}_n\} \in \tilde{x}$ и $\{\hat{y}_n\} \in \tilde{y}$, то суммой элементов (классов) пространства $Б$ $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ будем называть класс, содержащий фундаментальную последовательность $\{\hat{x}_n + \hat{y}_n\}$. Докажем, что эта последовательность тоже будет фундаментальной, а значит будет существовать и класс ее содержащий. Действительно, если $\{\hat{x}_n\} \in \tilde{x}$ и $\{\hat{y}_n\} \in \tilde{y}$ фундаментальные последовательности, то из определения фундаментальной последовательности следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют такие натуральные N_1 и N_2, что $\rho(\hat{x}_n, \hat{x}_k) < \varepsilon/2$ при всех $n > N_1$ и $k > N_1$ и $\rho(\hat{y}_n, \hat{y}_k) < \varepsilon/2$ при всех $n > N_2$ и $k > N_2$. Тогда, если взять в качестве N наибольшее из чисел N_1 и N_2, то при всех $n > N$ и $k > N$ будут выполняться неравенства $\rho(\hat{x}_n, \hat{x}_k) < \varepsilon/2$ и $\rho(\hat{y}_n, \hat{y}_k) < \varepsilon/2$. Значит $\rho(\hat{x}_n + \hat{y}_n, \hat{x}_k + \hat{y}_k) = \|\hat{x}_n + \hat{y}_n - (\hat{x}_k + \hat{y}_k)\| \le \|\hat{x}_n - \hat{x}_k\| + \|\hat{y}_n - \hat{y}_k\| = = \rho(\hat{x}_n, \hat{x}_k) + \rho(\hat{y}_n, \hat{y}_k) < \varepsilon$ при всех $n > N$ и $k > N$. А это означает, что последовательность $\{\hat{x}_n + \hat{y}_n\}$ фундаментальная.

Покажем теперь, что введенная операция сложения элементов пространства $Б$ не зависит от выбора представителей классов $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$. Для этого возьмем другие фундаментальные последовательности, являющиеся представителями классов $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$: $\{\hat{x}'_n\} \in \tilde{x}$ и $\{\hat{y}'_n\} \in \tilde{y}$. Докажем, что из $\{\hat{x}_n\} \sim \{\hat{x}'_n\}$ и $\{\hat{y}_n\} \sim \{\hat{y}'_n\}$ следует $\{\hat{x}_n + \hat{y}_n\} \sim \{\hat{x}'_n + \hat{y}'_n\}$, то есть, что фундаментальные последовательности $\{\hat{x}_n + \hat{y}_n\}$ и $\{\hat{x}'_n + \hat{y}'_n\}$ принадлежат одному и тому же классу и определяют один и тот же элемент пространства $Б$. Для этого воспользовавшись неравенством треугольника, получим

$$\rho(\hat{x}_n + \hat{y}_n, \hat{x}'_n + \hat{y}'_n) = \|\hat{x}_n + \hat{y}_n - (\hat{x}'_n + \hat{y}'_n)\| = \|\hat{x}_n - \hat{x}'_n + \hat{y}_n - \hat{y}'_n\| \le$$

$$\le \|\hat{x}_n - \hat{x}'_n\| + \|\hat{y}_n - \hat{y}'_n\|.$$ Из $\{\hat{x}_n\} \sim \{\hat{x}'_n\}$ и $\{\hat{y}_n\} \sim \{\hat{y}'_n\}$ следует, что $\|\hat{x}_n - \hat{x}'_n\| \to 0$ и $\|\hat{y}_n - \hat{y}'_n\| \to 0$ при $n \to \infty$ и значит

$$\rho(\hat{x}_n + \hat{y}_n, \hat{x}'_n + \hat{y}'_n) = \|\hat{x}_n + \hat{y}_n - (\hat{x}'_n + \hat{y}'_n)\| \le \|\hat{x}_n - \hat{x}'_n\| + \|\hat{y}_n - \hat{y}'_n\| \to 0$$

$n \to \infty$ и $\{\hat{x}_n + \hat{y}_n\} \sim \{\hat{x}'_n + \hat{y}'_n\}$.

Произведением элемента $\tilde{x}$ пространства $Б$, содержащим последовательность $\{\hat{x}_n\}$ и ей эквивалентные, на число α будем называть элемент $\alpha\tilde{x}$, который является классом, содержащим последовательность $\{\alpha\hat{x}_n\}$ и ей эквивалентные фундаментальные последовательности.

Для обоснования законности такого определения данной операции следует доказать, что последовательность $\{\alpha\hat{x}_n\}$ тоже является фундаментальной и что введенная таким образом операция является однозначной. То есть, не зависит от того, какая фундаментальная последовательность выбрана в качестве представителя класса $\tilde{x}$.

При $\alpha \neq 0$ из фундаментальности последовательности $\{\hat{x}_n\}$ следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное *N*, что при всех $n > N$ и $k > N$ выполняется неравенство $\rho(\hat{x}_n, \hat{x}_k) < \varepsilon / |\alpha|$. Значит для любого числа $\varepsilon > 0$ при всех $n > N$ и $k > N$ выполняется $\rho(\alpha\hat{x}_n, \alpha\hat{x}_k) = \|\alpha\hat{x}_n - \alpha\hat{x}_k\| = |\alpha|\|\hat{x}_n - \hat{x}_k\| < \varepsilon$ и значит последовательность $\{\hat{x}_n\}$ является фундаментальной. Если же $\alpha = 0$, то результат умножения представляет собой последовательность, состоящую из одних нулевых элементов $\{\hat{x}_n\} = \{\hat{0}\}$. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ и для любых n и k будет выполняться соотношение $\rho(\hat{0}, \hat{0}) = \|\hat{0} - \hat{0}\| = 0 < \varepsilon$, из чего следует фундаментальность последовательности $\{\hat{0}\}$

Выберем в качестве представителя класса $\tilde{x}$ последовательность $\{\hat{x}'_n\}$, эквивалентную ранее взятой в качестве представителя последовательности $\{\hat{x}_n\}$, и докажем, что последовательности $\{\alpha\hat{x}_n\}$ и $\{\alpha\hat{x}'_n\}$ тоже будут эквивалентными. Действительно, из $\{\hat{x}_n\} \sim \{\hat{x}'_n\}$ следует, что $\rho(\hat{x}_n, \hat{x}'_n) = \|\hat{x}_n - \hat{x}'_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Но тогда $\rho(\alpha\hat{x}_n, \alpha\hat{x}'_n) = \|\alpha\hat{x}_n - \alpha\hat{x}'_n\| = |\alpha|\|\hat{x}_n - \hat{x}'_n\| \to 0$ при $n \to \infty$ и значит последовательности $\{\alpha\hat{x}_n\}$ и $\{\alpha\hat{x}'_n\}$ эквивалентны, представляют один и тот же класс, то есть результат операции умножения элемента пространства $Б$ не зависит от выбора представителя класса $\tilde{x}$.

Докажем теперь справедливость всех восьми аксиом в определении линейного пространства. В силу того, что операции сложения элементов пространства $Б$ и умножения его элементов на число сводится ,соответственно, к операции сложения элементов и умножения элементов на число линейного пространства E, следует сразу же признать справедливость аксиом 1,2,5,6,7,8. В качестве нулевого элемента пространства $Б$ можно взять выше рассмотренный класс с представителем $\{\hat{0}\}$, последовательности все элементы которой равны $\hat{0}$. Элемент $(-\tilde{x})$, противоположный элементу $\tilde{x}$ с представителями $\{\hat{x}_n\}$, является класс эквивалентных последовательностей $\{-\hat{x}_n\}$. В результате все аксиомы определения линейного пространства будут выполняться.

Теперь необходимо ввести норму пространства $Б$. Норму элемента $\tilde{x}$ можно определить как предел норм элементов последовательности $\{\hat{x}_n\}$представляющей класс $\tilde{x}$: $\|\tilde{x}\|_Б = \lim\limits_{n\to\infty}\|\hat{x}_n\|$. Этот предел существует, так как последовательность $\{\hat{x}_n\}$ фундаментальная. Действительно из фундаментальности $\{\hat{x}_n\}$ следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное *N,* что при всех $n > N$ и $k > N$ выполняется неравенство $\|\hat{x}_n - \hat{x}_k\| < \varepsilon$.

Далее, из неравенства треугольника следует $\|\hat{x}_n\| = \|(\hat{x}_n - \hat{x}_k) + \hat{x}_k\| \le \|\hat{x}_n - \hat{x}_k\| + \|\hat{x}_k\|$ или $\|\hat{x}_n\| - \|\hat{x}_k\| \le \|\hat{x}_n - \hat{x}_k\|$.

Поменяв местами $\hat{x}_n$ и $\hat{x}_k$, получим неравенство $\|\hat{x}_k\|-\|\hat{x}_n\| \le \|\hat{x}_n - \hat{x}_k\|$ или $\|\hat{x}_n\|-\|\hat{x}_k\| \ge -\|\hat{x}_n - \hat{x}_k\|$. Объединяя данное неравенство с неравенством доказанным ранее, получим $\big|\|\hat{x}_n\|-\|\hat{x}_k\|\big| \le \|\hat{x}_n - \hat{x}_k\|$. Из этого неравенства и фундаментальности последовательности $\{\hat{x}_n\}$следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное *N*, что при всех $n > N$ и $k > N$ выполняется неравенство $\big|\|\hat{x}_n\|-\|\hat{x}_k\|\big| \le \|\hat{x}_n - \hat{x}_k\| < \varepsilon$, то есть фундаментальность числовой последовательности $\|\hat{x}_n\|$, а в силу полноты множества действительных чисел и существование предела $\|\tilde{x}\|_Б = \lim\limits_{n\to\infty}\|\hat{x}_n\|$.

Докажем теперь независимость нормы от выбора представителя. Выберем другой представитель класса $\tilde{x}$ - последовательность $\{\hat{x}'_n\}$. Тогда используя только что доказанное неравенство получим $\big|\|\hat{x}'_n\|-\|\hat{x}_n\|\big| \le \|\hat{x}'_n - \hat{x}_n\|$. Так как $\{\hat{x}'_n\} \sim \{\hat{x}_n\}$, то $\|\hat{x}'_n - \hat{x}_n\| \to 0$ и $\big|\|\hat{x}'_n\|-\|\hat{x}_n\|\big| \to 0$. Следовательно $\lim\limits_{n\to\infty}\|\hat{x}_n\| = \lim\limits_{n\to\infty}\|\hat{x}'_n\|$, что и доказывает независимость нормы от выбора представителя.

Докажем, что введенная таким образом норма удовлетворяет соответствующим аксиомам. Так как $\|\hat{x}_n\| \ge 0$, то $\|\tilde{x}\|_Б = \lim\limits_{n\to\infty}\|\hat{x}_n\| \ge 0$, что доказывает справедливость первой аксиомы. Справедливость второй аксиомы доказывает нижеследующее $\|\alpha\tilde{x}\|_Б = \lim\limits_{n\to\infty}\|\alpha\hat{x}_n\| = \lim\limits_{n\to\infty}|\alpha|\|\hat{x}_n\| = |\alpha|\lim\limits_{n\to\infty}\|\hat{x}_n\| = |\alpha|\|\tilde{x}\|_Б$.

Далее, $\|\tilde{x}+\tilde{y}\|_Б = \lim\limits_{n\to\infty}\|\hat{x}_n + \hat{y}_n\| \le \lim\limits_{n\to\infty}(\|\hat{x}_n\| + \|\hat{y}_n\|) = \|\tilde{x}_n\|_Б + \|\tilde{y}_n\|_Б$ и доказано выполнение третьей аксиомы.

Покажем теперь, что исходное пространство E является некоторым многообразием в пространстве $Б$. Любой элемент $\hat{x} \in E$ будем рассматривать как класс, содержащий последовательность $\{\hat{x}\}$, состоящую только из элементов $\hat{x}$, $\hat{x}$,…, $\hat{x}$,…. Такой класс обозначим через $\hat{x}$, а последовательность $\{\hat{x}\}$ назовем стационарной. Тогда очевидно, что класс $\alpha\hat{x}$ будет содержать стационарную последовательность $\{\alpha\hat{x}\}$, а класс $\hat{x}+\hat{y}$ будет содержать стационарную последовательность $\{\hat{x}+\hat{y}\}$. Значит множество E всех классов, содержащих стационарные последовательности, является многообразием в пространстве $Б$.

Докажем, что линейное многообразие E плотно в пространстве $Б$. Отметим, что по определению норма $\|\hat{x}\|_Б = \lim\limits_{n\to\infty}\|\hat{x}\| = \|\hat{x}\|$. Пусть класс $\tilde{x}\in Б$, докажем существование последовательности $\{\hat{x}_n\}\in E$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty}\|\tilde{x}-\hat{x}_n\| = 0$. Это и означает плотность E в пространстве *Б*. Допустим, что $\{\hat{x}_n\}$ представитель класса $\tilde{x}$. Тогда из фундаментальности $\{\hat{x}_n\}$ следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное *N*, что при всех $n > N$ и $k > N$ выполняется неравенство $\|\hat{x}_n - \hat{x}_k\| < \varepsilon/2$. Зафиксируем $n > N$, тогда $\lim\limits_{k\to\infty}\|\hat{x}_n - \hat{x}_k\| = \|\hat{x}_n - \tilde{x}\|_Б$ и, следовательно, $\|\hat{x}_n - \tilde{x}\| < \varepsilon/2$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty}\|\tilde{x} - \hat{x}_n\| = 0$.

В завершении докажем, что полученное пространство $Б$ будет банаховым пространством. Для этого рассмотрим фундаментальную в $Б$ последовательность $\{\tilde{x}_n\}$. В силу того, что E плотно в $Б$ существует последовательность $\{\hat{x}_n\}\in E$ такая, что неравенство $\|\tilde{x}_n - \hat{x}_n\|_Б < \varepsilon$ справедливо для любого $\varepsilon > 0$. Положив $\varepsilon = 1/n$, где, $n = 1,2,\ldots$ получим $\|\tilde{x}_n - \hat{x}_n\|_Б < 1/n$. Из неравенства треугольника имеем $\|\hat{x}_n - \hat{x}_m\|_Б \le \|\hat{x}_n - \tilde{x}_n\|_Б + \|\tilde{x}_n - \tilde{x}_m\|_Б + \|\tilde{x}_m - \hat{x}_m\|_Б \le$ $\le 1/n + \|\tilde{x}_n - \tilde{x}_m\|_Б + 1/m$.

Тогда существует такое натуральное *N*, что при всех $n > N$ и $m > N$ величина $\|\tilde{x}_n - \tilde{x}_m\|_Б$ будет меньше любого $\varepsilon_1 > 0$ и значит $\|\hat{x}_n - \hat{x}_m\|_Б \le 1/n + \varepsilon_1 + 1/m$

Но за счет выбора *N* число $1/n + \varepsilon_1 + 1/m$ можно сделать меньше любого $\varepsilon > 0$, то есть $\left\|\hat{x}_n - \hat{x}_m\right\|_{Б} \to 0$ при $n \to \infty$ и $m \to \infty$.

Из фундаментальности $\{\hat{x}_n\}$ в $Б$ следует ее фундаментальность в пространстве E, так как $\left\|\hat{x}_n - \hat{x}_m\right\|_{Б} = \left\|\hat{x}_n - \hat{x}_m\right\|$. Тогда существует класс $\tilde{x}$, включающий в себя последовательность $\{\hat{x}_n\}$. Так как $\left\|\tilde{x}_n - \tilde{x}\right\|_{Б} \le \left\|\tilde{x}_n - \hat{x}_n\right\|_{Б} + \left\|\tilde{x} - \hat{x}_n\right\|_{Б} \le {}^1\!/_n + \left\|\tilde{x} - \hat{x}_n\right\|_{Б}$, то при $n \to \infty$ $\left\|\tilde{x} - \hat{x}_n\right\|_{Б} \to 0$ в силу того, что E плотно в $Б$, и теперь теорема доказана.

VII. ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

В некоторых множествах кроме операций сложения элементов и умножения элементов на число вводится еще и операция скалярного произведения элементов, которая бывает весьма полезной при решении многих задач. Обобщив понятие скалярного произведения, рассмотрим линейные пространства, в которых определяется скалярное произведение элементов и которые называются Евклидовыми пространствами.

Определение. Линейное пространство называется Евклидовым, если в нем для каждой пары элементов $\hat{a}$ и $\hat{b}$ ставится в соответствие действительное число $(\hat{a},\hat{b})$, называемое скалярным произведением, которое удовлетворяет следующим аксиомам

1. $(\hat{a},\hat{a}) \geq 0$, $(\hat{a},\hat{a}) = 0$ только тогда, когда $\hat{a} = \hat{0}$;
2. $(\hat{a},\hat{b}) = (\hat{b},\hat{a})$;
3. $(\alpha \cdot \hat{a},\hat{b}) = \alpha \cdot (\hat{a},\hat{b})$;
4. $(\hat{a}+\hat{c},\hat{b}) = (\hat{a},\hat{b}) + (\hat{c},\hat{b})$;

Используя введенное скалярное произведение элементов можно ввести норму пространства по формуле $\|\hat{a}\| = \sqrt{(\hat{a},\hat{a})}$. Докажем, что в этом случае будут вы-полняться все соответствующие норме аксиомы. Действительно первая аксиома выполняется так как $\|\hat{a}\| = \sqrt{(\hat{a},\hat{a})} \geq 0$ и в силу того , что $(\hat{a},\hat{a}) = 0$ только тогда, когда $\hat{a} = \hat{0}$ очевидно ; $\|\hat{a}\| = 0$ только тогда, когда $\hat{a} = \hat{0}$;

Справедливость второй аксиомы следует из приведенных ниже выкладок

$$\|\alpha \cdot \hat{a}\| = \sqrt{(\alpha \cdot \hat{a}, \alpha \cdot \hat{a})} = \sqrt{\alpha^2 \cdot (\hat{a},\hat{a})} = |\alpha| \cdot \sqrt{(\hat{a},\hat{a})} = |\alpha| \cdot \|\hat{a}\|$$

Для доказательства справедливости третьей аксиомы докажем вначале неравенство Коши-Буняковского. $|(\hat{a},\hat{b})| \leq \|\hat{a}\| \cdot \|\hat{b}\|$.

Для этого рассмотрим выражение $(\hat{a} - x \cdot \hat{b}, \hat{a} - x \cdot \hat{b})$, которое является квадратным трехчленом от действительной переменной ***x*** , принимающим в силу первой аксиомы только неотрицательные значения

$$(\hat{a} - x \cdot \hat{b}, \hat{a} - x \cdot \hat{b}) = (\hat{a}, \hat{a} - x \cdot \hat{b}) + (-x \cdot \hat{b}, \hat{a} - x \cdot \hat{b}) = (\hat{a},\hat{a}) +$$

$$+ (\hat{a}, -x \cdot \hat{b}) - x \cdot (\hat{b}, \hat{a} - x \cdot \hat{b}) = (\hat{a},\hat{a}) - x \cdot (\hat{a},\hat{b}) - x \cdot (\hat{b},\hat{a}) - x \cdot (\hat{b}, -x \cdot \hat{b}) =$$

$(\hat{a},\hat{a})-2x\cdot(\hat{a},\hat{b})+x^2\cdot(\hat{b},\hat{b})\geq 0$.

Квадратный трехчлен принимает неотрицательные значения при положительном коэффициенте при x^2 только тогда, когда его дискриминант неотрицателен, то есть $4\cdot(\hat{a},\hat{b})^2-4\cdot(\hat{a},\hat{a})\cdot(\hat{b},\hat{b})\leq 0$ или $(\hat{a},\hat{b})^2-\|\hat{a}\|^2\cdot\|\hat{b}\|^2\leq 0$.

Из полученного имеем $(\hat{a},\hat{b})^2\leq\|\hat{a}\|^2\cdot\|\hat{b}\|^2$. Извлекая квадратный корень из обеих частей данного неравенства, получим доказываемое соотношение

$$\left|(\hat{a},\hat{b})\right|\leq\|\hat{a}\|\cdot\|\hat{b}\|.$$

Докажем теперь справедливость аксиомы треугольника для введенной нормы, используя неравенство Коши-Буняковского

$$\|\hat{a}+\hat{b}\|^2=(\hat{a}+\hat{b},\hat{a}+\hat{b})=(\hat{a},\hat{a}+\hat{b})+(\hat{b},\hat{a}+\hat{b})=(\hat{a},\hat{a})+$$
$$(\hat{a},\hat{b})+(\hat{b},\hat{a})+(\hat{b},\hat{b})=\|\hat{a}\|^2+2\cdot(\hat{a},\hat{b})+\|\hat{b}\|^2\leq\|\hat{a}\|^2+2\cdot\left|(\hat{a},\hat{b})\right|$$
$$\|\hat{b}\|^2\leq\|\hat{a}\|^2+2\cdot\|\hat{a}\|\cdot\|\hat{b}\|+\|b\| \quad =(\|\hat{a}\|+\|\hat{b}\|)^2.$$

Таким образом, опуская промежуточные преобразования, получим неравенство

$$\|\hat{a}+\hat{b}\|^2\leq\left(\|\hat{a}\|+\|\hat{b}\|\right)^2.$$

После извлечения квадратного корня их обеих частей этого неравенство получим доказываемое соотношение

$$\|\hat{a}+\hat{b}\|\leq\|a\|+\|\hat{b}\|.$$

Примеры.

1.Рассмотрим ***n***-мерное векторное пространство, на котором операция скалярного умножения двух векторов $\vec{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ и $\vec{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ вводится как $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+\ldots+a_n\cdot b_n$. Выполнение соответствующих аксиом доказывается достаточно легко.

В самом деле $\left(\vec{a},\vec{a}\right)=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)\geq 0$ и , очевидно, что $\left(\vec{a},\vec{a}\right)=0$ только тогда, когда все компоненты вектора $\vec{a}$ равны нулю, то есть когда $\vec{a}=\vec{0}$, что доказывает выполнение первой аксиомы.

Далее

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+\ldots+a_n\cdot b_n=b_1\cdot a_1+b_2\cdot a_2+\ldots+b_n\cdot a_n=(\vec{b},\vec{a})$$

.

Это доказательство второй аксиомы.

Наконец, рассмотрим теперь три вектора $\vec{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ и $\vec{c}=(c_1,c_2,\ldots,c_n)$.

$$(\hat{a}+\hat{c},\hat{b})=(a_1+c_1)\cdot b_1+(a_2+c_2)\cdot b_2+\ldots+(a_n+c_n)\cdot b_n=$$
$$=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+\ldots+a_n\cdot b_n+c_1\cdot b_1+c_2\cdot b_2+\ldots+c_n\cdot b_n=$$
$$=(\vec{a},\vec{b})+(\vec{c},\vec{b}).$$

Тем самым доказано выполнение третьей аксиомы.

2.Рассмотрим множество функций L_2, определенных и интегрируемых с квадратом на отрезке $[a,b]$, то есть множество функций $x(t)$ для которых существует интеграл $\int_a^b x^2(t)dt$. Скалярное произведение двух функций $x(t)$ и $y(t)$ определим следующим образом $(x(t),y(t))=\int_a^b x(t)\cdot y(t)dt$. Докажем, что и в этом случае выполняются все три аксиомы.

Интеграл $\int_a^b x^2(t)dt\geq 0$, так как под знаком интеграла стоит неотрицательная функция $x^2(t)$ неотрицательность интеграла следует из соответствующего свойства определенного интеграла. Причем данный интеграл равен нулю при $x(t)\equiv 0$.

Далее $(x(t),y(t))=\int_a^b x(t)\cdot y(t)dt=\int_a^b y(t)\cdot x(t)dt=(y(t),x(t))$ из чего следует справедливость второй аксиомы.

Рассмотрим теперь три функции интегрируемые с квадратом $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$.

Тогда

$$(x(t)+z(t),y(t))=\int_a^b \left(x(t)+z(t)\right)\cdot y(t)dt=\int_a^b x(t)\cdot y(t)dt+$$

$+\int_a^b z(t)\cdot y(t)dt = (x(t), y(t) + (z(t), y(t))$ это доказывает выполнение третьей аксиомы.

Определение. Полное евклидово пространство бесконечной размерности в норме порожденной скалярным произведением называется гильбертовым пространством.

Из определения следует, что в гильбертовом пространстве норма элемента определяется как квадратный корень из скалярного произведения элемента самого на себя.

Ортогональность элементов.

Определение. Два элемента евклидова пространства $\hat{a}$ и $\hat{b}$ называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю $(\hat{a}, \hat{b}) = 0$.

Можно доказать что нулевой элемент пространства ортогонален любому элементу. Нулевой элемент можно представить как произведение любого элемента пространства на число 0, то есть $\hat{0} = 0\cdot\hat{a}$. Тогда скалярное произведение нулевого элемента на произвольный элемент пространства $\hat{b}$ равно

$$(\hat{0}, \hat{b}) = (0\cdot\hat{a}, \hat{b}) = 0\cdot(\hat{a}, \hat{b}) = 0.$$

Определение. Система элементов евклидова пространства $\hat{i}_1, \hat{i}_2, \ldots, \hat{i}_n$ не равных нулю называется ортогональной, если любые два элемента этой системы являются ортогональными.

В качестве простейшего примера ортогональной системы элементов можно привести систему векторов единичной длины $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ направленных вдоль осей координат в трехмерном пространстве.

Теорема V.1. Ортогональная система элементов евклидова пространства линейно независима.

Пусть $\hat{i}_1, \hat{i}_2, \ldots, \hat{i}_n$ ортогональная система элементов и пусть существует постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$ такие, что $C_1\hat{i}_1 + C_2\hat{i}_2 + \ldots + C_n\hat{i}_n = \hat{0}$.

Умножим данное равенство скалярно на $\hat{i}_1$

$$C_1(\hat{i}_1, \hat{i}_1) + C_2(\hat{i}_2, \hat{i}_1) + \ldots + C_n(\hat{i}_n, \hat{i}_1) = (\hat{0}, \hat{i}_1).$$

Но $(\hat{i}_2,\hat{i}_1)=0$, …, $(\hat{i}_n,\hat{i}_1)=0$ и $(\hat{0},\hat{i}_1)=0$, а $(\hat{i}_1,\hat{i}_1)=\left\|\hat{i}_1\right\|^2$.

Тогда $C_1\left\|\hat{i}_1\right\|^2=0$. Но $\hat{i}_1\neq\hat{0}$ следовательно $C_1=0$.

Аналогичным образом, умножая соотношение $C_1\hat{i}_1+C_2\hat{i}_2+\ldots+C_n\hat{i}_n=\hat{0}$ последовательно на $\hat{i}_2,\hat{i}_3,\ldots,\hat{i}_n$ можно доказать, что и остальные постоянные $C_2,C_3,\ldots,C_n$ в этом случае также равны нулю, что и доказывает линейную независимость системы элементов $\hat{i}_1,\hat{i}_2,\ldots,\hat{i}_n$.

Определение. Ортогональная система элементов евклидова пространства называется ортонормированной, если норма каждого элемента системы равна единице.

Очевидно, что любую ортогональную систему можно сделать ортонормированной. Для этого достаточно каждый элемент $\hat{i}_k$ умножить на число $1/\left\|\hat{i}_k\right\|$.

Ортогонализация линейно независимой системы элементов.

Рассмотрим бесконечную систему элементов евклидова пространства $\hat{\varphi}_1,\hat{\varphi}_2,\ldots,\hat{\varphi}_n,\ldots$.

Определение. Бесконечную систему элементов $\hat{\varphi}_1,\hat{\varphi}_2,\ldots,\hat{\varphi}_n,\ldots$ будем считать линейно независимой , если при любом ***k*** система элементов $\hat{\varphi}_1,\hat{\varphi}_2,\ldots,\hat{\varphi}_k$ линейно независима.

Определение. Бесконечная система элементов $\hat{i}_1,\hat{i}_2,\ldots,\hat{i}_n,\ldots$ называется ортогональной, если все элементы системы отличны от нулевого элемента и скалярное произведение $\left(\hat{i}_k,\hat{i}_m\right)=0$, если $k\neq m$.

Возьмем линейно независимую бесконечную систему элементов $\hat{\varphi}_1,\hat{\varphi}_2,\ldots,\hat{\varphi}_n,\ldots$ и построим по ней ортогональную систему $\hat{i}_1,\hat{i}_2,\ldots,\hat{i}_n,\ldots$.

Положим $\hat{i}_1=\hat{\varphi}_1$. Элемент $\hat{i}_2$ будем искать в виде $\hat{i}_2=\hat{\varphi}_2-c_{21}\hat{i}_1$, причем величину c_{21} выберем таким образом, чтобы выполнялось соотношение $\left(\hat{i}_1, \hat{i}_2\right) = 0$: $\left(\hat{\varphi}_2 - c_{21}\hat{i}_1, \hat{i}_1\right) = 0$ то есть $(\hat{\varphi}_2, \hat{i}_1) - c_{21}(\hat{i}_1, \hat{i}_1) = 0$. Отсюда получим $c_{21} = \dfrac{(\hat{\varphi}_2, \hat{i}_1)}{(\hat{i}_1, \hat{i}_1)}$. Далее, элемент $\hat{i}_3$ ищем в виде $\hat{i}_3 = \hat{\varphi}_3 - c_{31}\hat{i}_1 - c_{32}\hat{i}_2$, причем постоянные c_{31} и c_{32} будем определять из условия ортогональности элемента $\hat{i}_3$ к элементам $\hat{i}_1$ и $\hat{i}_2$:

$(\hat{i}_1, \hat{i}_3) = (\hat{i}_1, \hat{\varphi}_3 - c_{31}\hat{i}_1 - c_{32}\hat{i}_2) = (\hat{i}_1, \hat{\varphi}_3) - c_{31}(\hat{i}_1, \hat{i}_1) = 0$ и значит $c_{31} = \dfrac{(\hat{i}_1, \hat{\varphi}_2)}{(\hat{i}_1, \hat{i}_1)}$, аналогично

$(\hat{i}_2, \hat{i}_3) = (\hat{i}_2, \hat{\varphi}_3 - c_{31}\hat{i}_1 - c_{32}\hat{i}_2) = (\hat{i}_2, \hat{\varphi}_3) - c_{32}(\hat{i}_2, \hat{i}_2) = 0$

из этого получим $c_{32} = \dfrac{(\hat{i}_2, \hat{\varphi}_3)}{(\hat{i}_2, \hat{i}_2)}$.

Продолжая этот процесс и далее, к^{ый} элемент будем искать в виде

$$\hat{i}_k = \hat{\varphi}_k - c_{k1}\hat{i}_1 - c_{k2}\hat{i}_2 - \ldots - c_{kk-1}\hat{i}_{r-1}.$$

Потребуем, чтобы элемент $\hat{i}_k$ был ортогонален всем найденным ранее элементам $\hat{i}_1, \hat{i}_2, \ldots, \hat{i}_{k-1}$. Для этого приравняем к нулю скалярные произведения этих элементов и $\hat{i}_k$:

$(\hat{i}_1, \hat{\varphi}_k) - c_{k1}(\hat{i}_1, \hat{i}_1) = 0$.

$(\hat{i}_2, \hat{\varphi}_k) - c_{k2}(\hat{i}_2, \hat{i}_2) = 0$

....

$(\hat{i}_{k-1}, \hat{\varphi}_k) - c_{kk-1}(\hat{i}_{k-1}, \hat{i}_{k-1}) = 0$.

Из данных соотношений определим значения постоянных $c_{k1}, c_{k2}, \ldots c_{kk-1}$

$$c_{k1} = \frac{(\hat{i}_1, \hat{\varphi}_k)}{(\hat{i}_1, \hat{i}_1)}\; c_{k2} = \frac{(\hat{i}_2, \hat{\varphi}_k)}{(\hat{i}_2, \hat{i}_2)},\; \ldots,\; c_{kk-1} = \frac{(\hat{i}_{k-1}, \hat{\varphi}_k)}{(\hat{i}_{k-1}, \hat{i}_{k-1})}.$$

VIII. РЯДЫ ФУРЬЕ

Пусть в гильбертовом пространстве дана бесконечная ортогональная система элементов $\hat{i}_1, \hat{i}_2, \ldots, \hat{i}_n, \ldots$.

Определение. Бесконечная сумма вида

$$\alpha_1 \cdot \hat{i}_1 + \alpha_2 \cdot \hat{i}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \hat{i}_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot \hat{i}_k,$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ - числа называется рядом по ортогональной системе $\hat{i}_1, \hat{i}_2, \ldots, \hat{i}_n \ldots$.

Если $\hat{a}$ некоторый элемент гильбертова пространства, тогда числа $c_k = \dfrac{(\hat{a}, \hat{i}_k)}{\|\hat{i}_k\|^2}$ называются коэффициентами Фурье элемента $\hat{a}$ по ортогональной системе $\hat{i}_1, \hat{i}_2, \ldots, \hat{i}_n \ldots$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \hat{i}_k$ называется рядом Фурье для элемента $\hat{a}$ по ортогональной системе $\hat{i}_1, \hat{i}_2, \ldots, \hat{i}_n \ldots$.

Определение. Сумма первых ***n*** слагаемых ряда Фурье

$$c_1 \cdot \hat{i}_1 + c_2 \cdot \hat{i}_2 + \ldots + c_n \cdot \hat{i}_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \hat{i}_k$$

называется частичной суммой этого ряда.

Возьмем первые ***n*** элементов ортогональной системы $\hat{i}_1, \hat{i}_2, \ldots, \hat{i}_n$ и построим их линейные комбинации $\hat{b} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \cdot \hat{i}_k$. Вычислим квадрат расстояния между элементами $\hat{a}$ и $\hat{b}$

$$\rho^2(\hat{a}, \hat{b}) = \|\hat{a} - \hat{b}\|^2 = \left\|\hat{a} - \sum_{k=1}^{n} \beta_k \cdot \hat{i}_k\right\|^2 = \left(\hat{a} - \sum_{k=1}^{n} \beta_k \cdot \hat{i}_k, \hat{a} - \sum_{k=1}^{n} \beta_k \cdot \hat{i}_k\right) =$$

$$= (\hat{a}, \hat{a}) - \left(\hat{a}, \sum_{k=1}^{n} \beta_k \cdot \hat{i}_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k \cdot \hat{i}_k, \hat{a}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k \cdot \hat{i}_k, \sum_{k=1}^{n} \beta_k \cdot \hat{i}_k\right).$$

Учитывая ортогональность элементов $\hat{i}_1, \hat{i}_2, \ldots, \hat{i}_n$, последнее слагаемое представимо в виде

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\beta_k\cdot\hat{i}_k,\sum_{k=1}^{n}\beta_k\cdot\hat{i}_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2(\hat{i}_k,\hat{i}_k)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2\left\|\hat{i}_k\right\|^2.$$

Заметим также, что из определения коэффициентов Фурье c_k следует $\left(\hat{a},\hat{i}_k\right)=c_k\left\|\hat{i}_k\right\|^2$. Это позволяет нужным образом преобразовать второе и третье слагаемые $\left(\hat{a},\sum_{k=1}^{n}\beta_k\cdot\hat{i}_k\right)=\left(\sum_{k=1}^{n}\beta_k\cdot\hat{i}_k,\hat{a}\right)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k\left(\hat{a},\hat{i}_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k c_k\left\|\hat{i}_k\right\|^2$.

Тогда

$$\rho^2(\hat{a},\hat{b})=\|\hat{a}\|^2-2\sum_{k=1}^{n}\beta_k c_k\left\|\hat{i}_k\right\|^2+\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2\left\|\hat{i}_k\right\|^2=\|\hat{a}\|^2+\sum_{k=1}^{n}\left\|\hat{i}_k\right\|^2\left(\beta_k^2-2\beta_k c_k\right)=$$

$$=\|\hat{a}\|^2+\sum_{k=1}^{n}\left\|\hat{i}_k\right\|^2\left(\beta_k^2-2\beta_k c_k\right)=\|\hat{a}\|^2+\sum_{k=1}^{n}\left\|\hat{i}_k\right\|^2\left(\beta_k^2-2\beta_k c_k+c_k^2-c_k^2\right)=$$

$$=\|\hat{a}\|^2+\sum_{k=1}^{n}\left\|\hat{i}_k\right\|^2\left(\beta_k^2-2\beta_k c_k\right)=\|\hat{a}\|^2+\sum_{k=1}^{n}\left\|\hat{i}_k\right\|^2\left(\beta_k^2-2\beta_k c_k+c_k^2\right)-\sum_{k=1}^{n}\left\|\hat{i}_k\right\|^2c_k^2=$$

$$=\|\hat{a}\|^2+\sum_{k=1}^{n}\left\|\hat{i}_k\right\|^2\left(\beta_k^2-2\beta_k c_k\right)=\|\hat{a}\|^2+\sum_{k=1}^{n}\left\|\hat{i}_k\right\|^2(\beta_k-c_k)^2-\sum_{k=1}^{n}\left\|\hat{i}_k\right\|^2c_k^2.$$

Полученное выражение для квадрата расстояния между элементами $\hat{a}$ и $\hat{b}$, показывает, что оно достигает минимум при $\beta_k=c_k$, то есть, когда коэффициенты в линейной комбинации равны коэффициентам Фурье. Это свойство коэффициентов Фурье называется их минимальным свойством. Другими словами это свойство можно сформулировать следующим образом: наилучшее приближение любого элемента пространства линейными комбинациями построенными с использованием первых ***n*** элементов ортогональной системы $\hat{i}_1,\hat{i}_2,\ldots,\hat{i}_n$ является линейная комбинация построенная с коэффициентами Фурье данного элемента.

Обозначим через $\rho_n=\left\|\hat{a}-\sum_{k=1}^{n}c_k\hat{i}_k\right\|$. Тогда используя преобразования, аналогичные преобразованиям проведенным ранее, получим

$$\rho_n^2=\left\|\hat{a}-\sum_{k=1}^{n}c_k\hat{i}_k,\right\|^2=\left(\hat{a}-\sum_{k=1}^{n}c_k\hat{i}_k,\hat{a}-\sum_{k=1}^{n}c_k\hat{i}_k\right)=(\hat{a},\hat{a})-\left(\hat{a},\sum_{k=1}^{n}c_k\cdot\hat{i}_k\right)-$$

$$-\left(\sum_{k=1}^{n}c_k\cdot\hat{i}_k,\hat{a}\right)+\left(\sum_{k=1}^{n}c_k\cdot\hat{i}_k,\sum_{k=1}^{n}c_k\cdot\hat{i}_k\right)=\|\hat{a}\|^2-2\sum_{k=1}^{n}c_k\left(\hat{a},\hat{i}\right)+$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \left\|\hat{i}_k\right\|^2 = \left\|\hat{a}\right\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \left\|\hat{i}_k\right\|^2 + \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \left\|\hat{i}_k\right\|^2 = \left\|\hat{a}\right\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \left\|\hat{i}_k\right\|^2 .$$

Так как $\rho_n^2 \geq 0$, то $\left\|\hat{a}\right\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \left\|\hat{i}_k\right\|^2 \geq 0$ и ,следовательно,

$$\left\|\hat{a}\right\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \left\|\hat{i}_k\right\|^2 .$$

Это неравенство называется неравенством Бесселя.

Но $\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \left\|\hat{i}_k\right\|^2$ представляет собой частичную сумму неотрицательного числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \left\|\hat{i}_k\right\|^2$.

Известно, что ряд с неотрицательными членами сходятся тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена сверху. Значит, из полученного выше неравенства, которое можно представить в виде $\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \left\|\hat{i}_k\right\|^2 \leq \left\|\hat{a}\right\|^2$, следует ограниченность последовательности частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \left\|\hat{i}_k\right\|^2$, то есть его сходимость.

Определение. Ортогональная система $\hat{i}_1, \hat{i}_2, \ldots, \hat{i}_n \ldots$ из гильбертова пространства называется полной, если для любого элемента $\hat{a}$ пространства выполняется равенство $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \hat{i}_k = \hat{a}$.

Полная ортогональная система называется ортогональным базисом гильбертова пространства.

Ранее было показано, что $\rho_n^2 = \left\| \hat{a} - \sum_{k=1}^{n} c_k \hat{i}_k , \right\|^2 = \left\|\hat{a}\right\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \left\|\hat{i}_k\right\|^2$. Из этого можно сделать вывод о том, что для полноты ортогональной системы необходимо и достаточно выполнения равенства $\rho_n^2 = \left\|\hat{a}\right\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \left\|\hat{i}_k\right\|^2 = 0$ или

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \left\|\hat{i}_k\right\|^2 = \left\|\hat{a}\right\|^2 .$$

Полученное равенство называется равенством Парсеваля. Таким образом только в случае полной ортогональной системы неравенство Бесселя переходит в равенство Парсеваля.

Примеры полных ортогональных систем.

1. Рассмотрим пространство L_2 функций $x(t)$ интегрируемых с квадратом на отрезке $[-\pi, \pi]$ и в этом пространстве ортогональную систему функций

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots, \cos nt, \sin nt, \dots,$$

которая называется тригонометрической системой.

Ортогональность данной системы доказывается вычислением, соответствующих интегралов, учитывая, что скалярное произведение в пространстве L_2 определяется как $(x(t), y(t)) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} x(t) \cdot y(t)dt$:

$$(1, \cos nt) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos ntdt = \frac{\sin nt}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\sin n\pi}{n} - \frac{\sin n(-\pi)}{n} = 0,$$

$$(1, \sin nt) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin ntdt = -\frac{\cos nt}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{\cos n\pi}{n} + \frac{\cos n(-\pi)}{n} =$$

$$-\frac{\cos n\pi}{n} + \frac{\cos n\pi}{n} = 0, \quad \text{при} \quad n \neq 0$$

$$(\cos nt, \sin mt) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cdot \sin mtdt = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin(m-n)t}{2} + \frac{\sin(m+n)t}{2}\right)dt =$$

$$-\frac{\cos(m-n)t}{2(m-n)} - \frac{\cos(m+n)t}{2(m+n)}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{\cos(m-n)\pi}{2(m-n)} - \frac{\cos(m+n)\pi}{2(m+n)} +$$

$$+\frac{\cos(m-n)(-\pi)}{2(m-n)} + \frac{\cos(m+n)(-\pi)}{2(m+n)} = -\frac{\cos(m-n)\pi}{2(m-n)} - \frac{\cos(m+n)\pi}{2(m+n)} +$$

$$\frac{\cos(m-n)\pi}{2(m-n)} + \frac{\cos(m+n)\pi}{2(m+n)} = 0.$$

Следует отметить, что последнее скалярное произведение равно нулю и при $m = n$.

$$(\cos nt, \cos mt) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cdot \cos mtdt = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\cos(m-n)t}{2} + \frac{\cos(m+n)t}{2}\right)dt =$$

$$\frac{\sin(m-n)t}{2(m-n)}+\frac{\sin(m+n)t}{2(m+n)}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{\sin(m-n)\pi}{2(m-n)}+\frac{\sin(m+n)\pi}{2(m+n)}-$$

$$-\frac{\sin(m-n)(-\pi)}{2(m-n)}+\frac{\sin(m+n)(-\pi)}{2(m+n)}=0 \quad \text{при} \quad m\neq n,$$

$$(\sin nt,\sin nt)=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nt\cdot\sin mtdt=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\cos(m-n)t}{2}-\frac{\cos(m+n)t}{2}\right)dt=$$

$$\frac{\sin(m-n)t}{2(m-n)}-\frac{\sin(m+n)t}{2(m+n)}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{\sin(m-n)\pi}{2(m-n)}-\frac{\sin(m+n)\pi}{2(m+n)}-$$

$$-\frac{\sin(m-n)(-\pi)}{2(m-n)}+\frac{\sin(m+n)(-\pi)}{2(m+n)}=0 \quad \text{при} \quad m\neq n.$$

Полнота этой ортогональной системы следует из теоремы Вейерштрасса, утверждающей, что любая непрерывная функция может быть приближена с любой заданной точностью частичной суммой ряда Фурье тригонометрической системы.

С другой стороны любая функция интегрируемая с квадратом может быть приближена с любой точностью непрерывными функциями.

Вычислим квадраты норм элементов тригонометрической системы

$$\|1\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}1^2\,dt=t\Big|_{-\pi}^{\pi}=2\pi,$$

$$\|\cos nt\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 ntdt=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2nt}{2}\right)dt=\frac{t}{2}+\frac{\sin 2nt}{4n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{\pi}{2}+\frac{\sin 2n\pi}{4n}-$$

$$-\frac{-\pi}{2}-\frac{\sin(-2n\pi)}{4n}=\pi,$$

$$\|\sin nt\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 ntdt=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos 2nt}{2}\right)dt=\frac{t}{2}-\frac{\sin 2nt}{4n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{\pi}{2}-\frac{\sin 2n\pi}{4n}-\frac{-\pi}{2}+\frac{\sin(-2n\pi)}{4n}=\pi.$$

Тогда, используя формулы полученные ранее, любую функцию интегрируемую с квадратом $x(t)$ можно представить в виде ряда

$$x(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt),$$

где коэффициенты ряда определяются по формулам

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)dt,\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\cos ktdt,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\sin ktdt.$$

В качестве примера разложим в тригонометрический ряд Фурье функцию $t^2 - t$ на отрезке $[-\pi, \pi]$, вычислив вначале коэффициенты ряда

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t^2 - t)dt = \frac{\pi^2}{3}, \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t^2 - t)\cos kt dt = \frac{4}{k^2}(-1)^k,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t^2 - t)\sin kt dt = \frac{2}{k}(-1)^k.$$

Тогда данное разложение будет иметь вид

$$t^2 - 1 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k 4}{k^2}\cos kt + \frac{(-1)^k 2}{k}\sin kt\right).$$

2.Рассмотрим пространство L_2 функций $x(t)$ интегрируемых с квадратом на отрезке $[-1,1]$, в котором возьмем бесконечную систему элементов $1, t, t^2, \ldots t^n \ldots$. Ранее было доказано, что данная система является линейно независимой при любом ***n***. Полнота системы многочленов на отрезке $[-1,1]$ следует из теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении любой непрерывной функции на указанном отрезке многочленами. Для получения из данной линейно независимой системы элементов ортогональной системы ее необходимо ортогонализовать, используя приведенный ранее алгоритм ортогонализации. Тогда положим $\hat{i}_1 = 1$, а следующий элемент будем искать в виде

$\hat{i}_2 = t - c_{21} \cdot 1$, требуя ортогональности элементов $\hat{i}_1$ и $\hat{i}_1$: $(\hat{i}_1, \hat{i}_2) = \int_{-1}^{1}(t - c_{21})dt = \frac{t^2}{2} - c_{21}t\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - c_{21} - \frac{1}{2} - c_{21} = -2c_{21} = 0$

Значит $c_{21} = 0$ и $\hat{i}_2 = t$.

Следующий элемент ищем в виде $\hat{i}_3 = t^2 - c_{31}1 - c_{32}t$. Следуя алгоритму, получим

$$(\hat{i}_1, \hat{i}_3) = \int_{-1}^{1}(t^2 - c_{31}1 - c_{32}t)dt = \frac{t^3}{3} - c_{31}t - c_{32}\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - c_{31} - c_{32}\frac{1}{2} -$$

$$\frac{1}{3} - c_{31} + c_{32}\frac{1}{2} = \frac{2}{3} - 2c_{31} = 0, \quad c_{31} = \frac{1}{3}.$$

$$(\hat{i}_2, \hat{i}_3) = \int_{-1}^{1} t(t^2 - c_{31}1 - c_{32}t)dt = \int_{-1}^{1}(t^3 - c_{31}t - c_{32}t^2)dt = \frac{t^4}{4} - c_{31}\frac{t^2}{2} -$$

$$-c_{32}\frac{t^3}{3}\bigg|_{-1}^{1}=\frac{1}{4}-c_{31}\frac{1}{2}-c_{32}\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+c_{31}\frac{1}{2}-c_{32}\frac{1}{3}=-c_{32}\frac{2}{3}=0.$$

Следовательно, $c_{32}=0$, а элемент $\hat{i}_3=t^2-\dfrac{1}{3}$.

Полученные выражения для элементов ортогональной системы можно представить в виде $\hat{i}_1=1(t^2-1)^0$, $\hat{i}_2=\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}(t^2-1)$, $\hat{i}_2=\dfrac{1}{12}\dfrac{d^2}{dt^2}(t^2-1)^2$.

Аналогичные выражения можно получить и для остальных элементов. Эти выражения с точностью до постоянного множителя совпадают с многочленами Лежандра, которые определяются по формуле $P_n(t)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dt^n}\left(t^2-1\right)^n$.

Вычислим нормы элементов данной системы, для чего воспользуемся интегралом $\int\limits_{-1}^{1}P_n(t)^2\,dt=\dfrac{2}{2n+1}$.

Тогда, любую функцию $x(t)$ интегрируемую с квадратом на отрезке $[-1,1]$ можно представить в виде ряда $x(t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_kP_k(t)$,

где коэффициенты ряда c_k определяются по формулам $c_k=\dfrac{2k+1}{2}\int\limits_{-1}^{1}x(t)P_k(t)dt$.

IX. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

Одним из важнейших понятий математики является понятие функции. Функция считается заданной, если установлен закон, в соответствии с которым каждому числу одного числового множества, именуемого областью определения, ставится в соответствие некоторое число другого числового множества, называемого областью значений. Если вместо числовых множеств рассматривать множества другой природы, то придем к более общему понятию. В частности, если в качестве области определения взять не числовое множество, а множество какой угодно другой природы, то получим несколько иной объект, который называется функционалом.

Определение. Говорят, что на линейном пространстве ***M*** задан функционал, если задан закон, в соответствии с которым каждому элементу этого пространства $\hat{a}$ ставится в соответствие некоторое число $\widetilde{F}(\hat{a})$.

Примеры.

1. Рассмотрим пространство ***n***-мерных векторов, на котором определим функционал, ставящий в соответствие каждому вектору ***a*** = $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ число, определяемое по формуле

$\widetilde{F}(a)$ = C·$\boldsymbol{a}^2$ = C·($\boldsymbol{a_1}^2$+ $\boldsymbol{a_2}^2$+…+ $\boldsymbol{a_n}^2$).

2. Пусть $x_0(t)$ некоторая фиксированная функция пространства $C_{[a,b]}$. Тогда на данном пространстве можно определить интегральный функционал, который каждой функции $x(t) \in C_{[a,b]}$ ставит в соответствие число $\widetilde{F}(x(t)) = \int_a^b x_0(t) \cdot x(t) dt$.

3. Рассмотрим множество квадратных матриц порядка 2, вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Ранее было показано, что это множество представляет собой линейное пространство. Следом квадратной матрицы *A* (обозначается *trA*) называется сумма элементов ее главной диагонали. Таким образом, след приведенной выше матрицы второго порядка $trA = a_{11} + a_{22}$ и на множестве квадратных матриц можно определить функционал, который ставит в соответствие каждой квадратной матрице второго порядка ее след $\widetilde{F}(A) = a_{11} + a_{22}$.

Определение. Функционал называется линейным, если он удовлетворяет следующим условиям

1. $\widetilde{F}(\hat{a}+\hat{b}) = \widetilde{F}(\hat{a}) + F(\hat{b})$ - условие аддитивности;
2. $\widetilde{F}(\alpha\cdot\hat{a}) = \alpha\cdot\widetilde{F}(\hat{a})$, α - некоторое число, это условие однородности.

Из приведенных выше в качестве примера функционалов, второй и третий функционалы являются линейными. Действительно, для второго функционала имеем

$$\widetilde{F}(x(t)+y(t)) = \int_a^b x_0(t)\cdot(x(t)+y(t))dt = \int_a^b x_0(t)\cdot x(t)dt +$$

$$+\int_a^b x_0(t)\cdot x(t)dt = \widetilde{F}(x(t)) + \widetilde{F}(y(t)),$$

$$\widetilde{F}(\alpha\cdot x(t)) = \int_a^b x_0(t)\cdot\alpha\cdot x(t)dt = \alpha\cdot\int_a^b x_0(t)\cdot x(t)dt = \alpha\cdot\widetilde{F}(x(t)),$$

Тем самым доказано линейность второго функционала. Докажем теперь линейность третьего функционала. Пусть имеем две квадратные матрицы второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$.

$$\widetilde{F}(A+B) = a_{11} + a_{22} + b_{11} + b_{22} = \widetilde{F}(A) + \widetilde{F}(B)$$

и тем самым доказано выполнение условия аддитивности.

Пусть α - некоторое число, тогда

$$\widetilde{F}(\cdot\alpha A) = \alpha\cdot a_{11} + \alpha\cdot a_{22} = \alpha\cdot(a_{11}+a_{22}) = \alpha\cdot\widetilde{F}(A),$$

что доказывает выполнение условия однородности.

Многие понятия, которые были рассмотрены в математическом анализе по отношения к функциям , можно перенести и на функционалы.

Определение. Функционал $\widetilde{F}(\hat{a})$ называется ограниченным, если существует постоянная C такая, что для всех тов $\hat{a}$ справедливо неравенство $\left|\widetilde{F}(\hat{a})\right| \le C$.

Докажем ограниченность выше рассмотренного функционала $\widetilde{F}(x(t)) = \int_a^b x_0(t) \cdot x(t) dt$

Так как данный функционал определен на пространстве функций непрерывных на отрезке $[a,b]$, а функции $x_0(t)$ и $x(t)$ принадлежат этому пространству, то функции $x_0(t)$ и $x(t)$ непрерывны на $[a,b]$, а значит и ограничены на $[a,b]$.

Следовательно, существуют такие постоянные C_1 и C_2, что на отрезке $[a,b]$ справедливы неравенства $|x_0(t)| \le C_1$ и $|x(t)| \le C_2$. Обозначим $\Delta = b - a$. Тогда использую известное свойства определенного интеграла будем иметь

$$\left|\widetilde{F}(x(t))\right| = \left|\int_a^b x_0(t) \cdot x(t) dt\right| \le \int_a^b |x_0(t) \cdot x(t)| dt \le \max_{[a,b]} |x_0(t) \cdot x(t)| \cdot \Delta \le$$

$$\le \max_{[a,b]} |x_0(t)| \cdot \max_{[a,b]} |x(t)| \cdot \Delta \le C_1 \cdot C_2 \cdot \Delta = C,$$ то есть $\left|\widetilde{F}(x(t))\right| \le C$,

что и требовалось доказать.

Будем считать далее, что областью определения функционала является метрическое линейное пространство.

Определение. Функционал $\widetilde{F}(\hat{a})$ называется непрерывным на элементе $\hat{a}_0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что неравенство $\left|\widetilde{F}(\hat{a}) - \widetilde{F}(\hat{a}_0)\right| < \varepsilon$ выполняется как только $\rho(\hat{a}, \hat{a}_0) < \delta$.

Как видно определение непрерывности функционала практически не отличается от определения непрерывности функции.

Докажем непрерывность функционала $\widetilde{F}(x(t)) = \int_a^b x_0(t) \cdot x(t) dt$, определенного на пространстве $C_{[a,b]}$.

Возьмем в качестве элемента $\hat{a}_0 = x(t)$, а в качестве элемента $\hat{a} = z(t)$. Функции $x_0(t)$ и $z(t) - x(t)$ принадлежат пространству $C_{[a,b]}$, значит они ограничены, то есть существует такая постоянная C_1, что на отрезке $[a,b]$ справедливо неравенства $|x_0(t)| \le C_1$.

Зададим число $\varepsilon > 0$, и рассмотрим такие функции $z(t)$, чтобы выполнялось соотношение $\max\limits_{[a,b]}\left|(z(t)-x(t))\right| < \dfrac{\varepsilon}{C_1\Delta}$, где $\Delta = b-a$. Тогда

$$\left|\tilde{F}(\hat{a})-\tilde{F}(\hat{a}_0)\right| = \left|\int_a^b x_0(t)\cdot z(t)dt - \int_a^b x_0(t)\cdot x(t)dt\right| = \left|\int_a^b (x_0(t)\cdot z(t) - x_0(t)\cdot x(t))dt\right| =$$

$$= \left|\int_a^b x_0(t)\cdot(z(t)-x(t))dt\right| \le \int_a^b \left|x_0(t)\cdot(z(t)-x(t))\right|dt \le$$

$$\le \max_{[a,b]}\left|x_0(t)\cdot(z(t)-x(t))\right|\cdot\Delta \le \max_{[a,b]}\left|x_0(t)\right|\cdot\max_{[a,b]}\left|(z(t)-x(t))\right|\cdot\Delta <$$

$$< C_1\cdot\frac{\varepsilon}{C_1\Delta}\Delta = \varepsilon.$$

Таким образом, следует положить $\delta = \dfrac{\varepsilon}{C_1\Delta}$. В этом случае из выше изложенного следует, что из $\max\limits_{[a,b]}\left|(z(t)-x(t))\right| < \dfrac{\varepsilon}{C_1\Delta}$ или другими словами из неравенства $\rho_{C_{[a,b]}}(z(t),x(t)) < \delta$ следует неравенство $\left|\tilde{F}(z(t))-\tilde{F}(x(t))\right| < \varepsilon$, что и следовало доказать.

X. ОПЕРАТОРЫ

В предыдущем разделе было введено понятие функционала, как некоторое обобщение понятия функции. В отличии от функции функционал представляет собой отображение некоторого множества на множество числовое. Если рассматривать отображение одного множества элементов произвольной природы на другое множество элементов произвольной природы , то мы придем к понятию оператора.

Пусть X и Y два линейных пространства и пусть множество $D \subset X$, а множество $R \subset Y$

Определение. Говорят, что на множестве D линейного пространства X задан оператор $A\hat{x}$, если задан закон, в соответствии с которым каждому элементу $\hat{x}$ этого множества ставится в соответствие некоторый элемент $\hat{y} = A\hat{x}$ множества R.

Элемент $\hat{y}$ при этом называется образом элемента $\hat{x}$, а элемент $\hat{x}$ называется прообразом элемента $\hat{y}$.

В этом случае множество D называется областью определения оператора $A\hat{x}$, а множество R называется областью изменения оператора $A\hat{x}$. Иногда, для того чтобы указать что эти множества являются областью определения и областью значений именно оператора $A\hat{x}$, их обозначают, соответственно, $D(A)$ и $R(A)$.

Два оператора $A\hat{x}$ и $B\hat{x}$ называются равными, если совпадают их области определения $D(A) = D(B)$ и значений $R(A) = R(B)$ и для всех $\hat{x} \in D(A)$ справедливо $A\hat{x} = B\hat{x}$.

Определение. Оператор $A\hat{x}$ называется взаимно однозначным, если каждому образу $\hat{y}$ соответствует единственный прообраз $\hat{x}$.

Примеры.

1. Рассмотрим пространство функций $x(t)$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ - $C_{[a,b]}$ и на нем оператор, определенный формулой

$$y(t) = \int_a^b \sqrt{t + x(s)^2}\, ds.$$

Этот оператор отображает пространство непрерывных функций само на себя.

2. Рассмотрим ***n***-мерное векторное пространство и матрицу P, состоящую из ***n*** столбцов и ***m*** строк $P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mn} \end{pmatrix}$. Если умножить ***n***-мерный вектор, рассматривая его как вектор-столбец $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$, справа на матрицу, то , очевидно, получим ***m***-мерный вектор-столбец $P\cdot\vec{a}=\vec{b}$. Таким образом матрицу P можно рассматривать как оператор, отображающий ***n***-мерное векторное пространство но ***m***-мерное векторное пространство.

3. Вновь рассмотрим пространство функций $x(t)$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ - $C_{[a,b]}$, а на этом пространстве дифференциальный оператор

$Ax(t)=(\frac{d}{dt}-\omega)x(t)$, где ω - некоторая постоянная величина. Очевидно, что данный оператор определен не на всем пространстве $C_{[a,b]}$, а лишь на том множестве функций, которые имеют непрерывную производную.

Пусть даны три множества: множество F принадлежащее линейному прос-транству *X*, множество ***G***, принадлежащее линейному пространству ***Z*** и множество ***H***, принадлежащее линейному пространству ***Y.*** И пусть два оператора: оператор $A\hat{x}=\hat{z}$, с областью определения F и областью значений ***G*** и оператор $B\hat{z}=\hat{y}$, с областью определения ***G*** и областью значений ***H.***

В этом случае можно рассмотреть значения оператора $B\hat{z}$ от оператора $A\hat{x}$

$B(A\hat{x})=\hat{y}$, то есть новый оператор, ставящий в соответствие элементу $\hat{x}\in F$ элемент $\hat{y}=B(A\hat{x})\in H$. Полученный таким образом оператор $C\hat{x} = B(A\hat{x})$ называется суперпозицией или произведением операторов $A\hat{x}$ и $B\hat{z}$.

Пример.

1. Рассмотрим дифференциальный оператор

$Ax(t) = (\frac{d}{dt} - \omega)x(t) = z(t)$, определенный на множестве непрерывных функций пространства $C_{[a,b]}$, имеющих непрерывные производные, и интегральный оператор $Bz(t) = \int_a^b \sqrt{t + z(s)^2}\,ds$, определенный на всем пространстве $C_{[a,b]}$. Тогда суперпозицией этих операторов будет оператор

$$C\hat{x} = B(A\hat{x}) = \int_a^b \sqrt{t + \left(\left(\frac{d}{ds} - \omega\right)x(s)\right)^2}\,ds.$$

Определение. Множество ***M***, принадлежащее нормированному пространству X называется ограниченным, если существует такое число ***C***, что для всех элементов $\hat{x}$ множества ***M*** выполняется неравенство $\|\hat{x}\| \le C$.

Пример.

В пространстве функций $x(t)$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ - $C_{[a,b]}$ множество функций $\sin \alpha x$, где α любое действительное число, является ограниченным., так как $\|\sin \alpha x\| \le 1$ и в этом случае ***C****=1.*

Определение. Оператор $A\hat{x}$ с областью определения $D(A) \subset X$ и областью значений $R(A) \subset Y$, где X и Y нормированные пространства называется ограниченным, если он всякое ограниченное множество ***M***, принадлежащее области определения, отображает на ограниченное множество пространства Y.

Пример.

Рассмотрим в пространстве функций $x(t)$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ - $C_{[a,b]}$ интегральный оператор

$Ax(t)=\int\limits_a^b \sin(t-s)\cdot x(s)ds$, который отображает данное пространство само на себя. В пространстве $C_{[a,b]}$ рассмотрим некоторое ограниченное множество ***M*** функций $x(t)$ таких, что $\|x(t)\|\le C$ или $\max\limits_{[a,b]}|x(t)|\le C$, где ***C***– некоторое число.

Тогда $\|Ax(t)\|=\max\limits_{[a,b]}\left|\int\limits_a^b \sin(t-s)\cdot x(s)ds\right|\le \max\limits_{[a,b]}\int\limits_a^b |\sin(t-s)\cdot x(s)|ds\le$

$\le \max\limits_{[a,b]}|\sin(t-s)\cdot x(s)|\cdot\Delta\le \max\limits_{[a,b]}|\sin(t-s)|\cdot\max\limits_{[a,b]}|x(s)|\cdot\Delta\le$

$\le \max\limits_{[a,b]}|x(s)|\cdot\Delta\le C\cdot\Delta$, где $\Delta=b-a$. Таким образом, для всех элементов множества, на которое отображается ограниченное множество ***M*** , справедливо неравенство $\|Ax(t)\|\le C\cdot\Delta$ и, следовательно, оно является ограниченным.

Значит, рассмотренный оператор также является ограниченным.

Пусть имеется два линейных нормированных пространства X и Y и пусть задан оператор $A\hat{x}$, с областью определения $D(A)\subset X$ и областью значений $R(A)\subset Y$.

Определение. Элемент $\hat{y}_0\in R(A)$ называется пределом оператора $A\hat{x}$ при $\hat{x}\to\hat{x}_0$, если для любого числа $\varepsilon>0$ найдется такое число $\delta>0$, что для всех элементов удовлетворяющих неравенству $\|\hat{x}-\hat{x}_0\|<\delta$ справедливо соотношение $\|A\hat{x}-y_0\|<\varepsilon$

$$\lim_{\hat{x}\to\hat{x}_0} A\hat{x}=\hat{y}_0 .$$

Определение. Оператор $A\hat{x}$ с областью определения $D(A)\subset X$ и областью значений $R(A)\subset Y$ называется непрерывным на элементе $\hat{x}_0\in D(A)$, если для любого числа $\varepsilon>0$ найдется такое число $\delta>0$, что для всех элементов удовлетворяющих неравенству $\|\hat{x}-\hat{x}_0\|<\delta$ справедливо соотношение

$\|A\hat{x} - A\hat{x}_0\| < \varepsilon$.

Другими словами оператор $A\hat{x}$ будет непрерывным на элементе $\hat{x}_0 \in D(A)$, если $\lim\limits_{\hat{x}\to\hat{x}_0} A\hat{x} = A\hat{x}_0$.

Пример.

Докажем, что рассмотренный выше определенный на $C_{[a,b]}$ интегральный оператор $Ax(t) = \int\limits_a^b \sin(t-s)\cdot x(s)ds$ является непрерывным. Возьмем элемент $x_0(t) \in C_{[a,b]}$ и зададим число $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\|Ax(t) - Ax_0(t)\| = \left\|\int\limits_a^b \sin(t-s)\cdot x(s)ds - \int\limits_a^b \sin(t-s)\cdot x_0(s)ds\right\| =$$

$$= \left\|\int\limits_a^b \sin(t-s)\cdot(x(s) - x_0(s))ds\right\| = \max_{[a,b]}\left|\int\limits_a^b \sin(t-s)\cdot(x(s)-x_0(s))ds\right| \le$$

$$\le \max_{[a,b]}\int\limits_a^b \left|\sin(t-s)\cdot(x(s)-x_0(s))\right|ds \le \max_{[a,b]}\left|\sin(t-s)\cdot(x(s)-x_0(s))\right|\cdot\Delta \le$$

$$\le \max_{[a,b]}\left|\sin(t-s)\right|\cdot\max_{[a,b]}\left|(x(s)-x_0(s))\right|\cdot\Delta \le \max_{[a,b]}\left|(x(s)-x_0(s))\right|\cdot\Delta.$$

Очевидно, что если $\|x(t) - x(t)_0\| < \dfrac{\varepsilon}{\Delta}$ то есть если будет выполняться неравенство $\max\limits_{[a,b]}\left|(x(s)-x_0(s))\right| < \dfrac{\varepsilon}{\Delta}$, то из выше изложенного будет выполняться соотношение $\|Ax(t) - Ax_0(t)\| \le \max\limits_{[a,b]}\left|(x(s)-x_0(s))\right|\cdot\Delta < \varepsilon$.

Из этого следует непрерывность данного оператора, причем в данном случае $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\Delta}$.

XI. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Определение. Оператор $A\hat{x}$ с областью определения $D(A)\subset X$ и областью значений $R(A)\subset Y$, где X и Y линейные нормированные пространства, называется линейным, если он удовлетворяет условиям

1. $A\alpha\cdot\hat{x}=\alpha\cdot A\hat{x}$, где α - некоторое число, а $\hat{x}\in D(A)$ (это условие однородности)

2. $A(\hat{x}+\hat{y})=A\hat{x}+A\hat{y}$, где $\hat{x},\hat{y}\in D(A)$ (это условие аддитивности).

Примеры.

1. Рассмотрим дифференциальный оператор $Ax(t)=(\frac{d}{dt}-\omega)x(t)$, определенный на множестве непрерывных функций пространства $C_{[a,b]}$, имеющих непрерывные производные и докажем его линейность.

$A\alpha x(t)=(\frac{d}{dt}-\omega)\alpha x(t)=\alpha(\frac{d}{dt}-\omega)x(t)=\alpha Ax(t)$ и тем самым доказано выполнение условия однородности.

$A(x(t)+y(t))=(\frac{d}{dt}-\omega)(x(t)+y(t))=(\frac{d}{dt}-\omega)x(t)+(\frac{d}{dt}-\omega)y(t)$, то есть доказано выполнение условия аддитивности, а ,следовательно, и линейность данного оператора.

Докажем линейность интегрального оператора $Ax(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)ds$ определенный на пространстве $C_{[a,b]}$, где $K(t,s)$ - непрерывная функция двух переменных, причем $t,s\in[a,b]$. Легко видеть, что данный оператор однородный $A\alpha x(t)=\int_a^b K(t,s)\alpha x(s)ds=\alpha\int_a^b K(t,s)x(s)ds=\alpha Ax(t)$.

Также легко доказывается и аддитивность

$$A(x(t)+y(t))=\int_a^b K(t,s)(x(s)+y(s))ds=\int_a^b K(t,s)x(s)ds+$$

$$+\int_a^b K(t,s)x(s)ds=Ax(t)+Ay(t).$$

Определение. Линейный оператор $A\hat{x}$, отображающий нормированное пространство на нормированное пространство, называется ограниченным, если существует такое число C, что для любого элемента $\hat{x} \in D(A)$ выполняется неравенство $\|A\hat{x}\| < C\|\hat{x}\|$.

Наименьшая из констант C, для которой выполняется данное неравенство, называется нормой линейного оператора: $\|A\| = C$. Следовательно справедливо неравенство $\|A\hat{x}\| < \|A\|\|\hat{x}\|$

Определение. Точной верхней гранью числового множества ***M*** (обозначается $\sup M$) называется такое число C, для которого для каждого числа x из данного множества выполняется неравенство $x < C$ и для любого числа C_1,

меньшего C, найдется число x_1 из множества ***M*** такое, что $x_1 > C_1$.

Учитывая данное определение норму линейного оператора можно определить следующим образом $\|A\| = \sup\limits_{\|\hat{x}\| \le 1} \|A\hat{x}\|$.

То есть норма линейного оператора равна точной верхней грани множества норм значений данного оператора на элементах пространства имеющих норму не превышающую единицу.

Действительно разделив левую и правую части неравенства $\|A\hat{x}\| < C\|\hat{x}\|$ на $\|\hat{x}\|$ и учитывая свойства нормы и линейность оператора получим

$$\frac{\|A\hat{x}\|}{\|\hat{x}\|} < C, \qquad \left\|\frac{1}{\|\hat{x}\|} A\hat{x}\right\| < C, \qquad \left\|A\frac{\hat{x}}{\|\hat{x}\|}\right\| < C.$$

Значит нормой оператора является наименьшее значение C, для которого выполняется неравенство $\left\|A\frac{\hat{x}}{\|\hat{x}\|}\right\| < C$. Но норма

элемента $\frac{\hat{x}}{\|\hat{x}\|}$ равна единице, так как по свойству нормы

$\left\|\frac{\hat{x}}{\|\hat{x}\|}\right\| = \frac{1}{\|\hat{x}\|}\|\hat{x}\| = 1$. Следовательно, норму оператора можно определить как наименьшее число C, для которого выполняется неравенство $\|A\hat{x}\| < C$ на множестве элементов с единичной нормой

$\|\hat{x}\| = 1$ или $\|A\| = \sup\limits_{\|\hat{x}\|=1} \|A\hat{x}\| = \sup\limits_{\|\hat{x}\|\le 1} \|A\hat{x}\|$.

Теорема IX.1. Из непрерывности линейного оператора $A\hat{x}$ на нулевом элементе следует его непрерывность на любом элементе $\hat{x}$ из области определения $D(A)$.

Докажем вначале, что для линейного оператора $A\hat{0} = \hat{0}$. Действительно, если $\hat{x}$ некоторый элемент из $D(A)$, то $A\hat{0} = A(0 \cdot \hat{x}) = 0 \cdot A\hat{x} = \hat{0}$. Далее, из непрерывности оператора на нулевом элементе следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что неравенство $\|A\hat{x} - A\hat{0}\| = \|A\hat{x}\| < \varepsilon$ будет выполняться как только $\|\hat{x} - \hat{0}\| = \|\hat{x}\| < \delta$. Возьмем теперь произвольные элементы $\hat{x}$ и $\hat{x}_0$ из $D(A)$ и положим $\hat{z} = \hat{x} - \hat{x}_0$. Тогда из вышеизложенного если $\|\hat{z}\| < \delta$, то $\|A\hat{z}\| < \varepsilon$ или другими словами неравенство $\|A(\hat{x} - \hat{x}_0)\| < \varepsilon$, а значит в силу линейности оператора и неравенство $\|A\hat{x} - A\hat{x}_0\| < \varepsilon$ будет выполняться, если $\|\hat{x} - \hat{x}_0\| < \delta$. А это и означает непрерывность оператора $A\hat{x}$ на произвольном элементе $\hat{x}_0 \in D(A)$.

Теорема IX.2. Для того, чтобы линейный оператор $A\hat{x}$ был ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы он был непрерывным.

Доказательство достаточности. Если оператор $A\hat{x}$ непрерывен, то из его непрерывности в нуле следует, что для $\varepsilon = 1$ существует такое число $\delta > 0$, что при $\|\hat{x}\| < \delta$ выполняется неравенство $\|A\hat{x}\| < 1$. Тогда для любого элемента $\hat{x} \in D(A)$ имеем $\left\| A\left(\frac{\delta\hat{x}}{2\|\hat{x}\|}\right) \right\| < 1$, так как $\left\| \frac{\delta\hat{x}}{2\|\hat{x}\|} \right\| = \frac{\delta}{2\|\hat{x}\|}\|\hat{x}\| = \frac{\delta}{2} < \delta$, а в силу линейности оператора и свойства нормы получим $\left\| A\left(\frac{\delta\hat{x}}{2\|\hat{x}\|}\right) \right\| = \left\| \frac{\delta}{2\|\hat{x}\|} A\hat{x} \right\| = \frac{\delta}{2\|\hat{x}\|}\|A\hat{x}\| < 1$. Разделив данное неравенство на $\frac{\delta}{2\|\hat{x}\|}$,получим $\|A\hat{x}\| < \frac{2}{\delta}\|\hat{x}\|$, что означает ограниченность оператора.

Доказательство необходимости. Пусть $A\hat{x}$ ненулевой ограниченный оператор.

(Нулевой оператор это оператор, отображающий любой элемент $\hat{x} \in D(A)$ в нуль. Этот оператор подробнее будет рассмотрен ниже.) Возьмем произвольно число $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \frac{\varepsilon}{\|A\|}$. Тогда для любого $\hat{x} \in D(A)$ и такого, что $\|\hat{x}\| < \delta$ получим $\|A\hat{x}\| < \|A\|\|\hat{x}\| < \|A\|\frac{\varepsilon}{\|A\|} = \varepsilon$. Это доказывает непрерывность оператора на нулевом элементе, а значит по теореме IX.1 и непрерывность на любом элементе.

Действия с операторами.

Определение. Суммой двух операторов $A\hat{x}$ и $B\hat{x}$, действующих из линейного пространства X в линейное пространство Y, называется оператор $C\hat{x}$, ставящий в соответствие элементу $\hat{x}$ пространства X элемент пространства Y

$$\hat{y} = C\hat{x} = A\hat{x} + B\hat{x}.$$

Оператор $C\hat{x}$ определен на множестве $D(C)$, которое является пересечением областей определения операторов $A\hat{x}$ и $B\hat{x}$ $D(C) = D(A) \cap D(B)$.

Докажем линейность оператора $C\hat{x}$.

$C(\hat{x}+\hat{y}) = A(\hat{x}+\hat{y}) + B(\hat{x}+\hat{y}) = A\hat{x} + A\hat{y} + B\hat{x} + B\hat{y} = (A\hat{x}+B\hat{x}) + {}$ ${}+(A\hat{y}+B\hat{y}) = C\hat{x} + C\hat{y}$ и тем самым доказана аддитивность оператора $C\hat{x}$,

$C(\alpha\hat{x}) = A(\alpha\hat{x}) + B(\alpha\hat{x}) = \alpha A\hat{x} + \alpha B\hat{x} = \alpha(A\hat{x}+B\hat{x}) = \alpha C\hat{x}$, где α - число. И этим доказана однородность оператора $C\hat{x}$.

Определение. Произведением оператора $A\hat{x}$, действующего из линейного пространства X в линейное пространство Y, на число α называется оператор $C\hat{x}$ ставящий в соответствие элементу $\hat{x}$ пространства X элемент пространства Y

$$\hat{y} = C\hat{x} = \alpha A\hat{x}.$$

Очевидно, что области определения операторов $A\hat{x}$ и $C\hat{x}$ совпадают.

Достаточно просто доказывается линейность оператора $C\hat{x}$.

$$C(\hat{x}+\hat{y}) = \alpha A(\hat{x}+\hat{y}) = \alpha A\hat{x} + \alpha A\hat{y} = C\hat{x} + C\hat{y}$$

$$C(\lambda\hat{x}) = \alpha A(\lambda\hat{x}) = \alpha\lambda A\hat{x} = \lambda C\hat{x}$$, где α и λ - числа

Обозначим через $\boldsymbol{L}$ множество всех линейных непрерывных операторов, определенных всюду в линейном нормированном пространстве X со значениями в линейном нормированном пространстве Y. Докажем, что это множество является линейным пространством, с определенными выше операциями сложения и умножения на число.

Действительно, первая, вторая, пятая, шестая, седьмая и восьмая аксиомы из определения линейного пространства выполняются в силу того, области значения операторов является линейное пространство Y. Нулевым элементом пространства служит нулевой оператор - $O\hat{x}$, который отображает любой элемент пространства X в $\hat{0}$. Этот оператор является линейным, так как $O(\hat{x}+\hat{y}) = \hat{0}+\hat{0} = O\hat{x}+O\hat{y}$ и $O(\alpha\hat{x}) = \hat{0} = \alpha O\hat{x}$. Кроме того для любого линейного оператора $A\hat{x}$ справедливо $A\hat{x}+O\hat{x} = A\hat{x}+\hat{0}-A\hat{x}$ и это доказывает справедливость третьей аксиомы. В качестве противоположного элемента для любого оператора $A\hat{x}$ можно взять оператор $(-1)\cdot A\hat{x}$.Действительно

$A\hat{x}+(-1)\cdot A\hat{x} = (1-1)A\hat{x} = 0\cdot A\hat{x} = \hat{0} = O\hat{x}$, что доказывает справедливость четвертой аксиомы.

Можно доказать также, что это пространство является нормированным, определив норму его элементов так, как была определена норма оператора ранее. Докажем, что при этом будут выполняться все соответствующие аксиомы.

Действительно, из $\|A\| = \sup\limits_{\|\hat{x}\|=1}\|A\hat{x}\| = \sup\limits_{\|\hat{x}\|\le 1}\|A\hat{x}\|$ следует, что $\|A\| \ge 0$ и только $\|O\| = \sup\limits_{\|\hat{x}\|=1}\|O\hat{x}\| = \sup\limits_{\|\hat{x}\|=1}\|\hat{0}\| = 0$.

Далее, $\|\alpha A\| = \sup\limits_{\|\hat{x}\|=1}\|\alpha A\hat{x}\| = \sup\limits_{\|\hat{x}\|=1}\alpha\|A\hat{x}\| = \alpha\sup\limits_{\|\hat{x}\|=1}\|A\hat{x}\| = \alpha\|A\|$,

где α - число, и

$$\|A+B\| = \sup_{\|\hat{x}\|=1}\|A\hat{x}\| = \sup_{\|\hat{x}\|=1}\|A\hat{x}+B\hat{x}\| \le \sup_{\|\hat{x}\|=1}(\|A\hat{x}\|+\|B\hat{x}\|) \ge$$

$$\le \sup_{\|\hat{x}\|=1}\|A\hat{x}\| + \sup_{\|\hat{x}\|=1}\|B\hat{x}\| = \|A\|+\|B\| \cdot$$

Тем самым доказано выполнение всех аксиом.

Примеры линейных операторов.

Рассмотрим интегральный оператор $Ax(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds = y(t)$, где $K(t,s)$ - непрерывная функция при $t \in [a,b]$ и $s \in [a,b]$. Докажем, что этот оператор является непрерывным линейным оператором, отображающим пространство $C_{[a,b]}$ само на себя. Линейность данного оператора следует из нижеследующих выкладок

$$A(x_1(t)+x_2(t)) = \int_a^b K(t,s)(x_1(s)+x_2(s))ds = \int_a^b K(t,s)x_1(s)ds +$$

$$\int_a^b K(t,s)x_2(s)ds = Ax_1(t) + Ax_2(t),$$

$$A(\alpha x(t)) = \int_a^b K(t,s)\alpha x(s)ds = \alpha\int_a^b K(t,s)x(s)ds = \alpha Ax(t) \cdot$$

Для доказательства непрерывности данного оператора достаточно доказать его непрерывность на нулевом элементе, в силу теоремы IX.1. Тогда, учитывая, что из непрерывности функции $K(t,s)$ при $t \in [a,b]$ и $s \in [a,b]$, следует ее ограниченность, то есть существование такой постоянной ***M*** , что $|K(t,s)| \le M$, получим

$$\|Ax(t)\| = \max_{[a,b]}\left|\int_a^b K(t,s)x(s)ds\right| \le \max_{[a,b]}\int_a^b |K(t,s)||x(s)|ds \le$$

$$\max_{[a,b]}\int_a^b M|x(s)|ds \le M\max_{[a,b]}|x(s)|(b-a) = M(b-a)\|x(s)\|.$$

Следовательно, имеем $\|Ax(t)\| \le M_1\|x(s)\|$. Зададим $\varepsilon > 0$, тогда в качестве $\delta>0$ можно взять $\delta=\dfrac{\varepsilon}{M_1}$, и если $\|x(s)\|<\delta$, то из полученного выше неравенства будем иметь $\|Ax(t)\|\le M_1\|x(s)\|<M_1\dfrac{\varepsilon}{M_1}=\varepsilon$, то есть $\|Ax(t)\|<\varepsilon$, а это означает непрерывность рассматриваемого оператора на нулевом элементе.

Рассмотрим теперь этот же оператор , как оператор отображающий пространство $L^2_{[a,b]}$ само на себя. При этом не будем требовать непрерывности функции $K(t,s)$ при $t\in[a,b]$ и $s\in[a,b]$, а будем предполагать, что существует интеграл $\int\limits_a^b\int\limits_a^b K^2(t,s)dsdt$, равный Ω^2. Линейность данного оператора было доказана выше. Для доказательства непрерывности оператора воспользуемся неравенством Коши-Буняковского, доказанного ранее $|(\hat{a},\hat{b})|\le\|\hat{a}\|\cdot\|\hat{b}\|$. В пространстве $L^2_{[a,b]}$ это неравенство будет иметь вид $\left|\int\limits_a^b x(t)y(t)dt\right|\le\sqrt{\int\limits_a^b x^2(t)dt}\sqrt{\int\limits_a^b y^2(t)dt}$, которое после возведения его в квадрат принимает вид

$$\left|\int\limits_a^b x(t)y(t)dt\right|^2\le\int\limits_a^b x^2(t)dt\int\limits_a^b y^2(t)dt.$$

Возьмем в качестве $y(t)$ функцию $K(t,s)$, тогда получим

$$\left|\int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds\right|^2\le\int\limits_a^b K^2(t,s)ds\int\limits_a^b x^2(s)ds.$$

Проинтегрировав данное неравенство по переменной t в пределах от a до b, будем иметь $\int\limits_a^b\left|\int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds\right|^2dt\le\int\limits_a^b\int\limits_a^b K^2(t,s)ds\int\limits_a^b x^2(s)ds$. Это означает

$$\|A\hat{x}-A\hat{0}\|^2=\|A\hat{x}\|^2=\int\limits_a^b\left|\int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds\right|^2dt\le\int\limits_a^b\int\limits_a^b K^2(t,s)ds\int\limits_a^b x^2(s)ds=$$

$=\Omega^2\|x(t)\|^2$, то есть $\|A\hat{x}\|^2\le\Omega^2\|x(t)\|^2$.

Извлекая квадратный корень из обеих частей полученного неравенства, получим

$\|A\hat{x}\| \le \Omega \|x(t)\|$. Если задать $\varepsilon > 0$, то в качестве $\delta > 0$ можно взять $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\Omega}$, и если $\|x(s)\| < \delta$, то из полученного ранее неравенства будем иметь $\|Ax(t)\| \le \Omega \|x(s)\| < \Omega \dfrac{\varepsilon}{\Omega} = \varepsilon$, то есть $\|Ax(t)\| < \varepsilon$. Это означает непрерывность данного оператора на нулевом элементе, из которой следует непрерывность оператора на любом элементе.

Рассмотрим теперь оператор дифференцирования $Dx(t) = \dfrac{d}{dt} x(t)$, определенный на множестве функций, имеющих производную, пространства $C_{[a,b]}$. Линейность этого оператора следует из свойств производной функции. Однако данный оператор не является непрерывным. Действительно, рассмотрим последовательность функций $y_n(t) = \dfrac{\sin nt}{n}$. Норма элементов этой последовательности равна $\|y_n(t)\| = \max\limits_{[a,b]} \left| \dfrac{\sin nt}{n} \right| = \dfrac{1}{n}$, а $Dy_n(t) = \dfrac{d}{dt} \dfrac{\sin nt}{n} = \cos nt$.

Докажем, что оператор не является непрерывным на нулевом элементе. Норма $\|Dy_n(t)\| = \|\cos nt\| = \max\limits_{[a,b]} |\cos nt| = 1$. Следовательно, величина $\|Dy_n(t) - D0\| = 1$ и не может принимать значения меньше любого $\varepsilon > 0$, как того требует определение непрерывности оператора, какие бы малые значения ни принимала величина $\|y_n(t) - 0\| = \dfrac{1}{n}$, при увеличении n. Это означает, что оператор не является непрерывным по крайней мере на нулевом элементе.

Рассмотрим теперь тот же оператор дифференцирования, определенный на множестве $C^1_{[a,b]}$ непрерывных на $[a,b]$ функций $x(t)$ и имеющих на $[a,b]$ непрерывные производные и отображающий это пространство на некоторое множество пространства $C_{[a,b]}$. Очевидно, что это множество представляет собой линейное пространство. На нем можно ввести норму $\|x(t)\| = \max\limits_{[a,b]}|x(t)| + \max\limits_{[a,b]}\left|\frac{d}{dt}x(t)\right|$.

Покажем, что введенная таким образом норма удовлетворяет всем обязательным для норм аксиомам.

$\|x(t)\| = \max\limits_{[a,b]}|x(t)| + \max\limits_{[a,b]}\left|\frac{d}{dt}x(t)\right| \geq 0$ и только при $x(t) = 0$ $\|x(t)\| = 0$.

$$\|\alpha x(t)\| = \max_{[a,b]}|\alpha x(t)| + \max_{[a,b]}\left|\frac{d}{dt}\alpha x(t)\right| = \alpha\max_{[a,b]}|x(t)| + \alpha\max_{[a,b]}\left|\frac{d}{dt}x(t)\right| = \alpha\|x(t)\|$$

$$\|x(t)+y)t)\| = \max_{[a,b]}|x(t)+y(t)| + \max_{[a,b]}\left|\frac{d}{dt}(x(t)+y(t))\right| \leq \max_{[a,b]}|x(t)| +$$

$$+\max_{[a,b]}|y(t)| + \max_{[a,b]}\left|\frac{d}{dt}x(t)\right| + \max_{[a,b]}\left|\frac{d}{dt}y(t)\right| = \|x(t)\| + \|y(t)\|.$$

Таким образом выполняются все три аксиомы.

Докажем теперь непрерывность на нулевом элементе оператора дифференцирования.

$$\|Dx(t) - D0\|_{C_{[a,b]}} = \|Dx(t)\|_{C_{[a,b]}} = \max_{[a,b]}|x'(t)| \leq \max_{[a,b]}|x(t)| + .$$

$+\max\limits_{[a,b]}|x'(t)| = \|x(t)\|_{C^1_{[a,b]}}$, таким образом

$$\|Dx(t) - D0\|_{C_{[a,b]}} \leq \|x(t)\|_{C^1_{[a,b]}}.$$

Зададим $\varepsilon > 0$, тогда в качестве $\delta > 0$ можно взять $\delta = \varepsilon$, и если

$\|x(s)\|_{C^1_{[a,b]}} < \delta$, то из полученного выше неравенства будем иметь, то есть

$\|Dx(t) - D0\|_{C_{[a,b]}} \leq \|x(t)\|_{C^1_{[a,b]}} \leq \varepsilon$. Следовательно, оператор дифференцирования в данном случае является непрерывным.

Обратный оператор.

Изучая различные разделы математики часто приходиться иметь дело с решением различных уравнений и систем уравнений (алгебраические уравнения, системы линейных уравнений, дифференциальные уравнения и системы уравнений, уравнения в частных производных). Используя введенное выше понятие оператора все эти уравнения можно представить в виде

$A\hat{x} = \hat{y}$,где $A\hat{x}$ - некоторый оператор, а $\hat{y}$ - заданная правая часть.

Определение. Оператор $A\hat{x}$ называется обратимым, если для любого элемента $\hat{y}$ из области значений оператора уравнение $A\hat{x} = \hat{y}$ имеет единственное решение.

Если оператор $A\hat{x}$, с областью определения $D(A)$ и областью значений $R(A)$ является взаимно однозначным, то можно рассмотреть обратное отображение множества $R(A)$ на множество $D(A)$, когда каждому элементу $\hat{y} = A\hat{x}$ множества $R(A)$ ставится в соответствие элемент $\hat{x}$ множества $D(A)$. То есть в этом случае можно рассматривать оператор $A^{-1}\hat{y}$ с областью определения $R(A)$ и областью значений $D(A)$, который называется обратным по отношению к оператору $A\hat{x}$. Тогда решение уравнения $A\hat{x} = \hat{y}$ можно представить в виде $\hat{x} = A^{-1}\hat{y}$.

Введем множество нулей оператора $N\{A\}$, то есть множество таких элементов $\hat{x}$ из области определения, для которых $A\hat{x} = \hat{0}$.

Теорема IX.3. Линейный оператор $A\hat{x}$ отображает свою область определения $D(A)$ на область значений взаимно однозначно тогда и только тогда, его множество нулей $N\{A\}$ состоит только из одного нулевого элемента $\hat{0}$.

Доказательство достаточности. Пусть множество нулей $N\{A\}$ оператора $A\hat{x}$ состоит только из одного нулевого элемента $\hat{0}$. Допустим , что существует элемент $\hat{y}$ из области значений, который имеет два прообраза в области определения $\hat{x}_1$ и $\hat{x}_2$. То есть $A\hat{x}_1 = \hat{y}$ и $A\hat{x}_2 = \hat{y}$. Вычитая первое из приведенных равенств, второе и учитывая линейность оператора, получим

$A\hat{x}_1 - A\hat{x}_2 = \hat{y} - \hat{y}$ или $A(\hat{x}_1 - \hat{x}_2) = \hat{0}$. Это значит, что элемент принадлежит множеству нулей $N\{A\}$ и равен $\hat{x}_1 - \hat{x}_2 = \hat{0}$ и, следовательно, $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$. Полученное противоречие доказывает достаточность.

Доказательство необходимости. Допустим теперь, что оператор $A\hat{x}$ взаимно однозначен, но тем не менее множество нулей $N\{A\}$ содержит по крайней мере один элемент $\hat{z}$ отличный от нулевого элемента. Тогда для некоторого элемента $\hat{y}$ из области значений найдется элемент $\hat{x}$ из области определения такой, что $A\hat{x} = \hat{y}$. Но тогда $A(\hat{x} + \hat{z}) = A\hat{x} + A\hat{z} = \hat{y}$ и из $\hat{x} + \hat{z} \neq \hat{x}$ следует , что одному образу $\hat{y}$ соответствует два прообраза $\hat{x}$ и $\hat{x} + \hat{z}$, то есть имеем противоречие с выше принятым допущением о взаимно однозначности оператора $A\hat{x}$.

Таким образом из доказанной теоремы следует, что линейный оператор $A\hat{x}$ имеет обратный только тогда, когда уравнение $A\hat{x} = \hat{0}$ имеет в качестве решения лишь нулевой элемент $\hat{0}$.

Докажем, что обратный оператор $A^{-1}\hat{y}$ линейного оператора $A\hat{x}$ также будет линейным. Пусть элементы $\hat{y}_1$ и $\hat{y}_2$ принадлежат области значений $R(A)$ и $\hat{x}_1 = A^{-1}\hat{y}_1$, $\hat{x}_2 = A^{-1}\hat{y}_2$. их прообразы из области определения. Тогда $A(\hat{x}_1 + \hat{x}_2) = A\hat{x}_1 + A\hat{x}_2 = \hat{y}_1 + \hat{y}_2$ и значит $A^{-1}(\hat{y}_1 + \hat{y}_2) = \hat{x}_1 + \hat{x}_2 = A^{-1}(\hat{y}_1) + A^{-1}(\hat{y}_2)$. Тем самым доказана аддитивность обратного оператора. Далее, если α - некоторое число, то $A(\alpha\hat{x}_1) = \alpha A\hat{x}_1 = \alpha\hat{y}_1$ и значит $A^{-1}(\alpha\hat{y}_1) = \alpha\hat{x}_1 = \alpha A^{-1}\hat{y}_1$, что доказывает однородность обратного оператора.

Теорема IX.4. для того чтобы линейный оператор A имел ограниченный обратный, необходимо и достаточно, чтобы существовало число $m > 0$ такое, что

$\|A\hat{x}\| \geq m\|\hat{x}\|$ для всех $\hat{x}$ из области определения оператора $D(A)$.

Доказательство необходимости. Пусть обратный оператор A^{-1} существует и ограничен на области значений оператора *A* - $R(A)$. Значит существует такое число *C>0*, что для любого элемента $\hat{y}$ из $R(A)$ будет выполняться неравенство $\|A^{-1}\hat{y}\| \le C\|\hat{y}\|$. Тогда пологая $\hat{y} = A\hat{x}$, получим $\|\hat{x}\| \le C\|A\hat{x}\|$, откуда получим , разделив данное неравенство на *C*, $\|A\hat{x}\| \ge \frac{1}{C}\|\hat{x}\|$ и ,значит $m = \frac{1}{C}$.

Доказательство достаточности. Пусть выполняется неравенство $\|A\hat{x}\| \ge m\|\hat{x}\|$, следовательно, если $A\hat{x} = \hat{0}$, то $\hat{x} = \hat{0}$. Значит, множество нулей оператора включает в себя лишь нулевой элемент и по теореме IX.2 существует обратный оператор A^{-1} отображающий взаимно однозначно область $R(A)$ на область $D(A)$. Полагая, $\hat{x} = A^{-1}\hat{y}$ в неравенстве $\|A\hat{x}\| \ge m\|\hat{x}\|$, будем иметь $\|\hat{y}\| \ge m\|A^{-1}\hat{y}\|$. Разделив данное неравенство на *m* ,получим $\frac{1}{m}\|\hat{y}\| \ge \|A^{-1}\hat{y}\|$ или неравенство $\|A^{-1}\hat{y}\| \le \frac{1}{m}\|\hat{y}\|$, которое справедливо для всех элементов $\hat{y}$ из $R(A)$. А это и означает ограниченность обратного оператора на области $R(A)$.

Определение. Линейный непрерывный оператор *A*, определенный на пространстве *X* и имеющий областью значений пространство *Y* называется непрерывно обратимым, если *A* обратим и обратный оператор является непрерывным.

Пример.

1.Опять рассмотрим дифференциальный оператор $Ax(t) = (\frac{d}{dt} - \omega)x(t) = z(t)$, определенный на множестве непрерывных функций пространства $C_{[a,b]}$, имеющих непрерывные производные и принимающие нулевые значения при $t=a$. Для того, чтобы получить выражение для обратного оператора $A^{-1}z(t)$ нужно решить дифференциальное уравнение $(\frac{d}{dt}-\omega)x(t)=z(t)$. Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка, решение которого следует искать в виде $x(t)=u(t)v(t)$, где $u(t)$ и $v(t)$ неизвестные функции. Подставив данное представление решения в дифференциальное уравнение, получим

$$u'(t)v(t)+u(t)v'(t)-\omega u(t)v(t)=z(t).$$

Тогда $u'(t)v(t)+u(t)(v'(t)-\omega v(t))=z(t)$ и потребуем , чтобы

$$v'(t)-\omega v(t)=0.$$

Рассматривая это равенство как уравнение с разделяющимися переменными, найдем его решение.

$$\frac{dv(t)}{dt}=\omega v(t),\quad \frac{dv(t)}{v(t)}=\omega dt,\quad \ln v(t)=\omega t,\quad v(t)=e^{\omega t}.$$

Используя найденное значение функции $v(t)$, получим

$$u'(t)e^{\omega t}=z(t),\qquad u'(t)=z(t)e^{-\omega t},$$

$u(t)=\int\limits_a^t z(\tau)e^{-\omega\tau}d\tau$,тогда $x(t)=u(t)v(t)=e^{\omega t}\int\limits_a^t z(\tau)e^{-\omega\tau}d\tau$.

Таким образом, обратным оператором для дифференциального оператора $Ax(t)=(\frac{d}{dt}-\omega)x(t)$ будет интегральный оператор

$$A^{-1}z(t)=e^{\omega t}\int\limits_a^t z(\tau)e^{-\omega\tau}d\tau.$$

Определение. Оператор, отображающий каждый элемент пространства на себя, называется тождественным или единичным.

Тождественный оператор обозначается символом I

Пусть A линейный непрерывный оператор, отображающий пространство X на пространство Y.

Определение. Оператор A_R^{-1} называется правым обратным к оператору A, если $AA_R^{-1} = I_Y$, где I_Y - тождественный оператор, действующий в пространстве Y.

Определение. Оператор A_L^{-1} называется левым обратным к оператору A, если $A_L^{-1}A = I_X$, где I_X - тождественный оператор, действующий в пространстве X.

Теорема IX.5. Если у оператора A существует правый обратный оператор A_R^{-1}, то уравнение $A\hat{x} = \hat{y}$ имеет решение $\hat{x} = A_R^{-1}\hat{y}$, а если оператор A имеет левый обратный A_L^{-1}, то приведенное выше уравнение имеет не более одного решения.

Из $A(A_R^{-1}\hat{y}) = (AA_R^{-1})\hat{y} = I_Y\hat{y} = \hat{y}$ следует, что $\hat{x} = A_R^{-1}\hat{y}$ является решением уравнения $A\hat{x} = \hat{y}$. Далее, пусть $\hat{x} \in N\{A\}$, то есть $A\hat{x} = \hat{0}$

Применяя к последнему равенству оператор A_L^{-1}, получим $A_L^{-1}(A\hat{x}) = (A_L^{-1}A)\hat{x} = I_X\hat{x} = \hat{x} = \hat{0}$. Это означает, что любой элемент $\hat{x} \in N\{A\}$ равен нулевому и ,следовательно, $N\{A\}$ включает в себя только нулевой элемент. Тогда по теореме IX.3 оператор A взаимно однозначен и значит уравнение $A\hat{x} = \hat{y}$ имеет единственное решение.

Сильная и слабая сходимости.

Пусть E линейное нормированное пространство.

Определение. Последовательность $\{\hat{x}_n\} \subset E$ называется сходящейся по норме к элементу $\hat{x}_o \in E$, если $\|\hat{x}_n - \hat{x}_o\| \to 0$ при $n \to \infty$.

При этом элемент $\hat{x}_o$ называется пределом последовательности $\{\hat{x}_n\}$: $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{x}_n = \hat{x}_0$, а саму последовательность $\{\hat{x}_n\}$называют сильно сходящейся.

Данное определение аналогично определению предела в метрическом пространстве, которое было дано ранее, поэтому свойства сходящихся по норме последовательностей аналогичны свойствам сходящихся последовательностей в метрическом пространстве.

Определение. Если для любого непрерывного функционала $\widetilde{F}(\hat{x})$ справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty} F(\hat{x}_n) = F(\hat{x}_0)$, то говорят, что последовательность $\{\hat{x}_n\}$ сходится к $\hat{x}_o$ слабо. В этом случае элемент $\hat{x}_o$ называется слабым пределом последовательности $\{\hat{x}_n\}$.

Теорема IX.6 Если последовательность $\{\hat{x}_n\}$ сходится к $\hat{x}_o$ сильно, то она будет сходиться к $\hat{x}_o$ и слабо.

Следует отметить, что любой функционал можно рассматривать как частный случай оператора, у которого областью значений является числовое множество. Поэтому все свойства операторов, которые были изучены ранее, можно распространить и на функционалы. Пусть имеется последовательность $\{\hat{x}_n\}$, сильно сходящаяся к элементу $\hat{x}_o$ и линейный непрерывный функционал $\widetilde{F}(\hat{x})$. Из линейности $\widetilde{F}(\hat{x})$ следует его ограниченность. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число *N*, что неравенство $\|\hat{x}_n - \hat{x}_o\| < \varepsilon$ будет выполняться при $n > N$ и значит $\left|\widetilde{F}(\hat{x}_n) - \widetilde{F}(\hat{x}_o)\right| = \left|\widetilde{F}(\hat{x}_n - \hat{x}_o)\right| \le \|\widetilde{F}\|\|\hat{x}_n - \hat{x}_o\| < \|\widetilde{F}\|\varepsilon$, что означает $\lim\limits_{n\to\infty} F(\hat{x}_n) = F(\hat{x}_0)$ то есть слабую сходимость последовательности $\{\hat{x}_n\}$ к элементу $\hat{x}_o$.

XII. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть линейный оператор *A* имеет область определения $D(A)$, принадлежащую линейному пространству *X***.**

Определение. Число λ называется собственным значением оператора *A,* если существует элемент $\hat{x}$ из области определения $D(A)$ отличный от нулевого, такой , что $A\hat{x} = \lambda\hat{x}$. При этом элемент $\hat{x}$ называется собственным элементом оператора *A,* соответствующим собственному значению λ .

Следует заметить, что собственный элемент оператора определяется с точностью до постоянного числового множителя. То есть, если элемент $\hat{x}$ является собственным элементом оператора *A,* соответствующим собственному значению λ, то элемент $\alpha\hat{x}$, где α любое число отличное от нуля, тоже будет собственным элементом данного оператора, соответствующим тому же собственному значению. В самом деле, если $A\hat{x} = \lambda\hat{x}$, то в силу линейности, умножив данное соотношение на α получим $\alpha A\hat{x} = \alpha\lambda\hat{x}$ или $A\alpha\hat{x} = \lambda\alpha\hat{x}$, а это и означает, что элемент $\alpha\hat{x}$ тоже будет собственным элементом данного оператора.

Теорема X.1. Собственные элементы линейного оператора, соответствующие различным его собственным значениям, линейно независимы.

Докажем данную теорему методом математической индукции. Рассмотрим одно первое собственное значение λ_1, которому соответствует собственный элемент $\hat{x}_1$. В силу того, что $\hat{x}_1 \neq \hat{0}$, система элементов, состоящая только из элемента $\hat{x}_1$, будет линейно независимой. Действительно, равенство $C_1\hat{x}_1 = \hat{0}$ будет выполняться только при $C_1 = 0$. Таким образом, для *n=1* справедливость теоремы доказано.

Допустим теперь, что теорема справедлива для системы состоящей из *k* любых собственных элементов оператора *A,* то есть любые *k* собственных элементов будут линейно независимыми, и докажем, что из этого следует справедливость данной теоремы для любых $k+1$ собственных элементов оператора. Предположим противное. Предположим, что существует линейно зависимая система включающая $k+1$ собственный элемент оператора $\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_k, \hat{x}_{k+1}$, соответствующих различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k, \lambda_{k+1}$. Из этого следует, что существуют такие числа $C_1, C_2, ..., C_k, C_{k+1}$, одновременно не равные нулю, что выполняется равенство

$$C_1\hat{x}_1 + C_2\hat{x}_2 + ... + C_k\hat{x}_k + C_{k+1}\hat{x}_{k+1} = \hat{0}.$$

Применяя к правой и левой частям данного равенства оператор $A - \lambda_{k+1}I$, получим

$$(A-\lambda_{k+1}I)C_1\hat{x}_1 + (A-\lambda_{k+1}I)C_2\hat{x}_2 + ... + (A-\lambda_{k+1}I)C_k\hat{x}_k +$$
$$+ (A-\lambda_{k+1}I)C_{k+1}\hat{x}_{k+1} = (A-\lambda_{k+1}I)\hat{0}.$$

Тогда

$$AC_1\hat{x}_1 - \lambda_{k+1}C_1\hat{x}_1 + AC_2\hat{x}_2 - \lambda_{k+1}C_2\hat{x}_2 + ... + AC_k\hat{x}_k - \lambda_{k+1}C_k\hat{x}_k +$$
$$+ AC_{k+1}\hat{x}_{k+1} - C_{k+1}\lambda_{k+1}\hat{x}_{k+1} = \hat{0}.$$

Далее

$$C_1(A\hat{x}_1 - \lambda_{k+1}\hat{x}_1) + C_2(A\hat{x}_2 - \lambda_{k+1}\hat{x}_2) + ... + C_k(A\hat{x}_k - \lambda_{k+1}\hat{x}_k) +$$
$$+ C_{k+1}(A\hat{x}_{k+1} - \lambda_{k+1}\hat{x}_{k+1}) = \hat{0}$$

Учитывая, что элементы $\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_k, \hat{x}_{k+1}$ являются собственными и соответствуют собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k, \lambda_{k+1}$, полученному соотношению можно придать вид $C_1(\lambda_1\hat{x}_1 - \lambda_{k+1}\hat{x}_1) + C_2(\lambda_2\hat{x}_2 - \lambda_{k+1}\hat{x}_2) + ... + C_k(\lambda_k\hat{x}_k - \lambda_{k+1}\hat{x}_k) +$

$+ C_{k+1}(\lambda_{k+1}\hat{x}_{k+1} - \lambda_{k+1}\hat{x}_{k+1}) = \hat{0}$ или

$$C_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\hat{x}_1 + C_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})\hat{x}_2 + ... + C_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\hat{x}_k = \hat{0}$$

Но по предположению любые k собственных элементов оператора A будут линейно независимыми и значит полученное равенство может выполняться только в том случае, когда все постоянные, стоящие при элементах $\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_k$ одновременно равны нулю, то есть $C_1(\lambda_1 - \lambda_{л+1}) = 0$, $C_2(\lambda_2 - \lambda_{л+1}) = 0$, ... $C_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0$. Так как все собственные значения различны, из полученных соотношений следует, что

$C_1 = 0$ $C_2 = 0 \ldots C_k = 0$. Учитывая это, из линейной зависимости элементов равенства $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_k, \hat{x}_{k+1}$ и соответствующего равенства $C_1\hat{x}_1 + C_2\hat{x}_2 + \ldots + C_k\hat{x}_k + C_{k+1}\hat{x}_{k+1} = \hat{0}$ следует соотношение $C_{k+1}\hat{x}_{k+1} = \hat{0}$, которое возможно лишь при $C_{k+1} = 0$. Значит все числа $C_1, C_2, \ldots, C_k, C_{k+1}$, одновременно равны нулю, что приводит к противоречию, которое и доказывает линейную независимость элементов $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_k, \hat{x}_{k+1}$ и вместе с этим справедливость теоремы.

Примеры.

1.Рассмотрим интегральный оператор $A(x(t) = \int\limits_{-1}^{1} (t-s)^2 x(s)ds$, определенный в линейном пространстве $C_{[-1,1]}$, и найдем его собственные значения и собственные элементы, которые должны удовлетворять интегральному уравнению

$$\int\limits_{-1}^{1} (t-s)^2 x(s)ds = \lambda x(t).$$

Будем искать собственные элементы данного оператора в виде $x(t) = at^2 + bt + c$, где a,b,c - неизвестные постоянные. Подставив данный вид разыскиваемого собственного элемента в оператор, получим

$$\int\limits_{-1}^{1} (t-s)^2 (as^2 + bs + c)ds = \int\limits_{-1}^{1} (t^2 - 2ts + s^2)(as^2 + bs + c)ds =$$

$$\int\limits_{-1}^{1} (at^2s^2 + bt^2s + ct^2 - 2ats^3 - 2bts^2 - 2cts + as^4 + bs^3 + cs^2)ds =$$

$$= at^2\frac{s^3}{3} + bt^2\frac{s^2}{2} + ct^2s - 2at\frac{s^4}{4} - 2bt\frac{s^3}{3} - 2ct\frac{s^2}{2} +$$

$$+ a\frac{s^5}{5} + b\frac{s^4}{4} + c\frac{s^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}at^2 + 2ct^2 - \frac{4}{3}bt + \frac{2}{5}a + c\frac{2}{3} =$$

$$= \lambda at^2 + \lambda bt + \lambda c.$$

Для того, чтобы это соотношение выполнялось тождественно, приравняем коэффициенты при одинаковых степенях полиномов. В результате получим следующую систему линейных уравнений относительно a,b,c

$$\begin{cases} \frac{2}{3}a + 2c = \lambda a \\ -\frac{4}{3}b = \lambda b \\ \frac{2}{5}a + \frac{2}{3}c = \lambda c \end{cases}.$$

Таким образом, задачу о нахождении собственных значения и собственных элементов интегрального оператора удалось свести к задаче о нахождении собственных значении и собственных векторов матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} - \lambda & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{4}{3} - \lambda & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{3} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Перенесем все слагаемые в уравнениях системы в левые части, получим

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{3} - \lambda\right)a + 2c = 0 \\ \left(-\frac{4}{3} - \lambda\right)b = 0 \\ \frac{2}{5}a + \left(\frac{2}{3} - \lambda\right)c = 0 \end{cases}.$$

Так как собственные элементы не могут быть нулевыми, то нас будут интересовать лишь ненулевые решения данной однородной системы линейных уравнений, которые могут существовать только тогда, когда определитель системы равен нулю.

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3} - \lambda & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{4}{3} - \lambda & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{3} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, разлагая его по элементам второй строки, получим $\left(-\frac{4}{3} - \lambda\right)\begin{vmatrix} \frac{2}{3} - \lambda & 2 \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{3} - \lambda \end{vmatrix} = \left(-\frac{4}{3} - \lambda\right)\left(\left(\frac{2}{3} - \lambda\right)^2 - \frac{4}{5}\right) = 0.$

Решив данное уравнение, определим собственные значения оператора.

$$\left(-\frac{4}{3} - \lambda\right) = 0, \quad \lambda_1 = -\frac{4}{3}, \quad \left(\left(\frac{2}{3} - \lambda\right)^2 - \frac{4}{5}\right) = 0, \qquad \lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda - \frac{16}{45} = 0$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{64}{45}}}{2} = \frac{\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{144}{45}}}{2} = \frac{\frac{4}{3} \pm \frac{12}{3\sqrt{5}}}{2}.$$

Тогда $\lambda_2 = \frac{2}{3} - \frac{2\sqrt{5}}{5}$ и $\lambda_3 = \frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Коэффициенты a, b, c, соответствующие собственным функциям рассматриваемого оператора, определяются из приведенной выше однородной системы линейных уравнений, если вместо параметра λ подставить найденные собственные значения.

Рассмотрим сначала первое собственное значение $\lambda_1 = -4/3$, которому будет соответствовать однородная система уравнений $\begin{cases} 2a + 2c = 0 \\ 0 \cdot b = 0 \\ 2/5\, a + 2c = 0 \end{cases}$.

Второе уравнение полученной системы уравнений удовлетворяется при любом b, поэтому его можно исключить их системы $\begin{cases} 2a + 2c = 0 \\ 2/5\, a + 2c = 0 \end{cases}$. Определитель данной системы отличен от нуля $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2/5 & 2 \end{vmatrix} = 4 - \frac{4}{5} = \frac{16}{5} \neq 0$ и значит она имеет только нулевые решения. Тогда положив $b = 1$, учитывая, что коэффициент b может принимать любое значение, получим $a = 0, b = 1, c = 0$. Следовательно, собственная функция, соответствующая собственному значению $\lambda_1 = -4/3$ имеет вид $x_1(t) = t$.

Возьмем теперь второе собственное значение $\lambda_2 = 2/3 - 2\sqrt{5}/5$, которому будет соответствовать однородная система уравнений $\begin{cases} 2\sqrt{5}/5\, a + 2c = 0 \\ \left(-2 + 2\sqrt{5}/5\right) b = 0 \\ 2/5\, a + 2\sqrt{5}/5\, c = 0 \end{cases}$. Из второго уравнения системы определим $b = 0$, после чего его можно исключит из системы $\begin{cases} 2\sqrt{5}/5\, a + 2c = 0 \\ 2/5\, a + 2\sqrt{5}/5\, c = 0 \end{cases}$. Умножим первое уравнение на $1/\sqrt{5}$ и вычтем из первого уравнения системы $\begin{cases} 2\sqrt{5}/5\, a + 2c = 0 \\ 0a + 0c = 0 \end{cases}$. Второе уравнение полученной системы удовлетворяется при любых значениях a, c ,поэтому его можно исключить из системы. Тогда из первого уравнения получим $c = -\sqrt{5}/5a$.

Положив $a=1$, получим $c=-\sqrt{5}/5$ и ,следовательно, собственная функция, соответствующая второму собственному значению $\lambda_2 = 2/3 - 2\sqrt{5}/5$ будет иметь вид $x_2(t) = t^2 - \sqrt{5}/5$.

В завершении рассмотрим третье собственное значение $\lambda_3 = 2/3 + 2\sqrt{5}/5$. Однородная система уравнений в этом случае будет иметь вид

$$\begin{cases} -2\sqrt{5}/5\; a + 2c = 0 \\ \left(-2 - 2\sqrt{5}/5\right) b = 0 \\ 2/5\, a - 2\sqrt{5}/5\; c = 0 \end{cases}.$$

Из второго уравнения системы получаем $b=0$, после чего его можно исключить из системы $\begin{cases} -2\sqrt{5}/5\; a + 2c = 0 \\ 2/5\, a - 2\sqrt{5}/5\; c = 0 \end{cases}$. Далее, умножим первое уравнение системы на $\sqrt{5}/5$ и прибавим ко второму уравнению

$$\begin{cases} -2\sqrt{5}/5\; a + 2c = 0 \\ 0a - 0c = 0 \end{cases}.$$

Тогда из первого уравнения получим $c = \sqrt{5}/5\; a$ и, полагая $a=1$, получим $c=\sqrt{5}/5$. Значит, собственная функция, соответствующая собственному значению $\lambda_3 = 2/3 + 2\sqrt{5}/5$ будет иметь вид $x_3(t) = t^2 - \sqrt{5}/5$.

2. Найдем теперь собственные значения дифференциального оператора второго порядка $A = \dfrac{d^2}{dt^2}$, определенного на множестве непрерывных функций $x(t)$ на отрезке $[0,\pi]$ пространства $C_{[a,b]}$, имеющих непрерывные производные на том же отрезке, и принимающих нулевые значения в граничных точках данного отрезка $x(0)=0$ и $x(\pi)=0$. Собственные функции должны удовлетворять однородному линейному дифференциальному уравнению $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = \lambda x(t)$ или $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} - \lambda x(t) = 0$. Характеристическое уравнение, соответствующее данному дифференциальному уравнению,

$\gamma^2 - \lambda = 0$ имеет корни $\gamma = \pm\sqrt{\lambda}$.

Допустим, $\lambda > 0$, тогда общее решение дифференциального уравнения $x(t) = C_1 e^{\sqrt{\lambda} t} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda} t}$. Требуя, чтобы на концах отрезка данная функция принимала нулевые значения, получим однородную систему линейных уравнений относительно постоянных C_1 и C_2: $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\sqrt{\lambda}\pi} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0 \end{cases}$.

Определитель этой системы не равен нулю $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}\pi} & e^{-\sqrt{\lambda}\pi} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{\lambda}\pi} - e^{\sqrt{\lambda}\pi} \neq 0$, и, значит, приведенная выше однородная система уравнений имеет лишь нулевое решение, соответствующее нулевому решению рассматриваемого дифференциального уравнения, из которого определяются собственные функции изучаемого оператора.

Но собственные функции не могут быть тождественно равными нулю и, следовательно, при $\lambda > 0$ данный оператор не имеет собственных функций.

Рассмотрим случай $\lambda = 0$, который приведет к дифференциальному уравнению $\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = 0$. Двукратное интегрирование данного соотношения позволит получить общее решение этого дифференциального уравнения $x(t) = C_1 t + C_2$. Опять потребуем, чтобы полученное решение обращалась в нуль на концах отрезка. В результате получим однородную систему линейных уравнений $\begin{cases} 0C_1 + C_2 = 0 \\ \pi C_1 + C_2 = 0 \end{cases}$, определитель которой также отличен от нуля $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \pi & 1 \end{vmatrix} = -\pi \neq 0$ и которая тоже имеет только нулевые решения. Значит и $\lambda = 0$ не является собственным значение рассматриваемого оператора.

Исследуем теперь случай $\lambda < 0$. Представим λ в виде $\lambda = -k^2$, где k некоторое число. Тогда получим следующее дифференциальное уравнение для определения собственных функций $\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + k^2 x(t) = 0$. Соответствующее ему характеристическое уравнение $\gamma^2 = k^2$ будет иметь корни $\gamma_1 = k$ и $\gamma_2 = k$, общим решением дифференциального уравнения будет функция

$x(t)=C_1\cos kt+C_2\sin kt$. Требование обращения данного решения в нуль на концах интервала в точках 0 и π приведет к однородной системе уравнений $\begin{cases} C_1 & + & 0C_2 & = & 0 \\ \cos k\pi C_1 & + & \sin k\pi C_2 & = & 0 \end{cases}$.

Определитель системы равен $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos k\pi & \sin k\pi \end{vmatrix}=\sin k\pi$. Он обращается в нуль если k принимает целые положительные значения $1,2,3,\dots$. Таким образом, собственными значениями рассматриваемого дифференциального оператора будут числа $-1,-2,-3,\dots$. Их бесконечное (счетное) количество. Найдем соответствующие им собственные функции. Для целых k приведенная выше система однородных уравнение примет вид $\begin{cases} C_1 & + & 0C_2 & = & 0 \\ (-1)^k C_1 & + & 0C_2 & = & 0 \end{cases}$. Из этой системы следует, что $C_1=0$, а C_2 может принимать любые значения. Следовательно, собственными функциями данного дифференциального оператора, которые соответствуют собственным значениям $\lambda=-k^2$, где k принимает целые положительные значения, являются функции $x(t)=\sin kt$.

Спектр оператора.

В ранее рассматриваемых линейных пространствах при определении операции умножения элемента пространства на число использовались вещественные числа. Однако, практически не меняя выше приведенного определения линейного пространства, можно рассматривать операцию умножения элементов пространства на комплексные числа, не меняя при этом соответствующие аксиомы. В этом случае говорят комплексном линейном пространстве, в отличие от тех линейных пространств, которые изучались до сих пор и которые называются вещественными линейными пространствами. Соответственно, можно ввести в рассмотрение комплексные банаховы пространства, как полные комплексные линейные нормированные пространства.

Число λ будем называть регулярным для оператора *A*, который определен в комплексном банаховом пространстве *Б*, если оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ непрерывно обратим и определен на всем пространстве *Б*. Совокупность регулярных точек оператора *А* называется резольвентным множеством данного оператора (обозначается $\rho(A)$). Если λ принадлежит резольвентному множеству, то оператор $R_\lambda = (A-\lambda I)^{-1}$ называется резольвен-

той оператора ***А*.** Совокупность всех осталь-ных значений λ называется спектром оператора. К спектру относятся все соб-

ственные значения оператора ***А*.** Это следует из того, что $(A-\lambda I)\hat{x}=\hat{0}$ при $\hat{x}\neq\hat{0}$ и по теореме IX.3 оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ не существует. Совокупность собственных значений оператора называется дискретным спектром. Совокупность λ, для которых оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ существует, но определен не на

всем пространстве ***Б*,** называется непрерывным спектром. Таким образом, любое значение λ является регулярным, собственным значением (дискретным спектром) или непрерывным спектром.

XIII. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Рассмотрим оператор *A*, отображающий *n*-мерное линейное пространство *X* на *m*-мерное пространство *Y*. Пусть $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_n$ базис в пространстве *X*, а $\hat{i}_1, \hat{i}_2, \ldots, \hat{i}_m$ базис в пространстве *Y*. Тогда любой элемент $\hat{x}$ пространства *X* можно представить в виде $\hat{x} = x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + \ldots + x_n\hat{e}_n$ и в силу линейности оператора *A* имеем

$$A\hat{x} = A(x_1\hat{e}_1) + A(x_2\hat{e}_2) + \ldots + A(x_n\hat{e}_n) = x_1A\hat{e}_1 + x_2A\hat{e}_2 + \ldots + x_nA\hat{e}_n.$$

Из полученного соотношения следует, что линейный оператор *A* в конечномерном пространстве считается заданным, если известны образы базисных элементов пространства *X*.

Элементы $A\hat{e}_1, A\hat{e}_2, \ldots, A\hat{e}_n$ принадлежат пространству *Y* и, следовательно, могут быть разложены по базису $\hat{i}_1, \hat{i}_2, \ldots, \hat{i}_m$, то есть

$$A\hat{e}_1 = \alpha_{11}\hat{i}_1 + \alpha_{21}\hat{i}_2 + \ldots + \alpha_{m1}\hat{i}_m$$

$$A\hat{e}_2 = \alpha_{12}\hat{i}_1 + \alpha_{22}\hat{i}_2 + \ldots + \alpha_{m2}\hat{i}_m$$

....

$$A\hat{e}_n = \alpha_{1n}\hat{i}_1 + \alpha_{2n}\hat{i}_2 + \ldots + \alpha_{mn}\hat{i}_m.$$

Из этого следует, что

$$A\hat{x} = x_1(\alpha_{11}\hat{i}_1 + \alpha_{21}\hat{i}_2 + \ldots + \alpha_{m1}\hat{i}_m) + x_2(\alpha_{12}\hat{i}_1 + \alpha_{22}\hat{i}_2 + \ldots + \alpha_{m2}\hat{i}_m) + \ldots +$$
$$x_n(\alpha_{1n}\hat{i}_1 + \alpha_{2n}\hat{i}_2 + \ldots + \alpha_{mn}\hat{i}_m) = (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n)\hat{i}_1 +$$
$$+ (\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n)\hat{i}_2 + \ldots + (\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n)\hat{i}_m = \hat{y}.$$

То есть образом элемента $\hat{x}$ пространства *X* является элемент $\hat{y}$ пространства *Y*, с координатми $((\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n), (\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n), \ldots, (\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n))$.

Введем в рассмотрение матрицу $\hat{A}_e$, столбцы которой представляют собой координаты элементов $A\hat{e}_1, A\hat{e}_2, \ldots, A\hat{e}_n$

$$\hat{A}_e = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Данную матрицу можно использовать для определения координат образа $\hat{y}$. Для этого необходимо умножить эту матрицу слева на вектор-столбец координат элемента $\hat{x}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Действительно,

$$\hat{A}_e \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Таким образом линейный оператор *A*, действующий на конечномерном пространстве определяется матрицей $\hat{A}_e$, которая называется матрицей оператора.

Примеры.

1. Рассмотрим оператор *A*, отображающий пространство трехмерных векторов само на себя, и переводящий каждый трехмерный вектор в вектор расположенный симметрично относительно координатной плоскости XOY. В качестве базиса возьмем единичные вектора $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, направленные, соответственно, вдоль координатных осей *OX* ,*OY*, *OZ*. Тогда, очевидно, $A\vec{i} = \vec{i}$, $A\vec{j} = \vec{j}$ и $A\vec{k} = \vec{k}$. Учитывая, что вектора-столбцы координат образов базисных векторов $A\vec{i}, A\vec{j}, A\vec{k}$ равны соответственно $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, матрица данного оператора будет иметь вид $\hat{A}_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2.Рассмотрим оператор дифференцирования $A = \frac{d}{dt}$, определенный на линейном пространстве X полиномов $P_n(t)$, степень которых не выше n. Так как степень полинома при дифференцировании уменьшается на единицу, то данный оператор отображает пространство полиномов, степень которых не выше n, на пространство полиномов Y, степень которых не выше $n-1$. В качестве базиса в пространстве X возьмем систему элементов $1, t, t^2, \ldots, t^n$, а в пространстве Y – систему элементов $1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}$.

Тогда $A1 = \frac{d}{dt}1 = 0 = \left(0 \cdot 1 + 0 \cdot t + \ldots + 0 \cdot t^{n-1}\right)$, а вектор-столбец координат элемента $A1 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$,

$At = \frac{d}{dt}t = 1 = \left(1 \cdot 1 + 0 \cdot t + \ldots + 0 \cdot t^{n-1}\right)$, соответствующий вектор-столбец равен $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$, $At = \frac{d}{dt}t^2 = 2t = \left(0 \cdot 1 + 2 \cdot t + \ldots + 0 \cdot t^{n-1}\right)$, соответствующий вектор-столбец равен $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$ и так далее. Результат действия рассматриваемого оператора на последний элемент базиса пространства

X- $At^n = \frac{d}{dt}t^n = nt^{n-1} = \left(0 \cdot 1 + 0 \cdot t + \ldots + n \cdot t^{n-1}\right)$, соответствующий вектор-столбец $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ n \end{pmatrix}$. Тогда матрицей данного оператора будет матрица $\hat{A}_e$ размерности $(n-1)\times n$ вида $\hat{A}_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}$.

Пусть имеется два оператора *A* и *B,* отображающих *n*-мерное линейное пространство *X* на *m*-мерное пространство *Y,* и пусть заданы матрицы этих операторов,

равные соответственно $\hat{A}_e = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$ и

$$\hat{B}_e = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \dots & \beta_{mn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим оператор C, равный сумме операторов *A* и *B* - $C = A + B$ и определим его матрицу. Так как *J*-ый столбец матрицы оператора представляет собой вектор-столбец элемента, который является результатом действия оператора на *J*-ый элемент базиса, то $C\hat{e}_j = A\hat{e}_j + B\hat{e}_j$ и значит каждый столбец матрицы оператора C представляет собой сумму соответствующих столбцов матриц операторов *A* и *B.* Следовательно, матрица оператора C является суммой матриц операторов *A* и *B:* $\hat{C}_e = \hat{A}_e + \hat{B}_e$.

Пусть теперь оператор $C = \alpha A$, где α - некоторое число. Тогда $C\hat{e}_j = \alpha A\hat{e}_j$, то есть *J*-ый столбец матрицы оператора C равен *J*-му столбцу матрицы оператора *A*, умноженному на число α. Это означает, что $\hat{C}_e = \alpha\hat{A}_e$.

Рассмотрим теперь оператор *A,* отображающий *n*-мерное линейное пространство *X* на *m*-мерное пространство *Y* с матрицей $\hat{A}_e$, и оператор *B* отображающий *m*-мерное линейное пространство *Y* на *k*-мерное пространство *Z* с матрицей $\hat{B}_e$. Введем в рассмотрение оператор C, равный произведению операторов *A* и *B*: $C = B \cdot A$. В этом случае $C\hat{e}_j = B \cdot A\hat{e}_j$. Вектор-столбец соответствующий элементу $\hat{e}_j$ будет представлять собой вектор, у которого все координаты равны нулю, кроме координаты с номером *j*, который равен единице. Тогда при умножении матрицы $\hat{A}_e$ на данный вектор-столбец получится вектор-столбец, все координаты которого совпадают с *j*-м столбцом матрицы $\hat{A}_e$ – $\begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \dots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}$. Далее, умножая полученный вектор-столбец на матрицу оператора *B*

$$\hat{B}_e = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \dots & \beta_{km} \end{pmatrix},$$ получим

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \dots & \beta_{km} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \dots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11}\alpha_{1j} + \beta_{12}\alpha_{2j} + \dots \beta_{1j}\alpha_{mj} \\ \beta_{21}\alpha_{1j} + \beta_{22}\alpha_{2j} + \dots \beta_{2j}\alpha_{mj} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \beta_{k1}\alpha_{1j} + \beta_{k2}\alpha_{2j} + \dots \beta_{kj}\alpha_{mj} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, элемент матрицы оператора C , расположенный в *i*-ой строке и *j*-м столбце равен сумме произведений элементов *i*-ой строки матрицы $\hat{B}_e$ на элементы *j*-го столбца матрицы $\hat{A}_e$, то есть $\hat{C}_e = \hat{B}_e \cdot \hat{A}_e$.

Рассмотрим оператор *A*, отображающий *n*-мерное линейное пространство *X* само на себя. Допустим, что данный оператор имеет обратный A^{-1}. То есть, если $A\hat{x} = \hat{y}$, то $\hat{x} = A^{-1}\hat{y}$ и значит $A\hat{x} = AA^{-1}\hat{y} = \hat{y}$ и оператор AA^{-1} отображает элемент $\hat{y}$ на элемент $\hat{y}$ и следовательно является тождественным $AA^{-1} = I$. Определим матрицу тождественного оператора. Каждый элемент базиса $\hat{e}_i$ тождественный оператор отображает на него же. Значит вектор-столбец, соответствующий элементу $I\hat{e}_i = \hat{e}_i$, представляет собой вектор, все компоненты которого равны нулю, за исключением компоненты с номером *i*, которая будет равна единице. Из этого следует, что все элементы *i*-го столбца матрицы оператора I будут нулями кроме *i*-го, который будут равен единице. А это означает, что матрица тождественного оператора будет единичной $\hat{I}_e = E$. Но тогда $\hat{A}_e\hat{A}_e^{-1} = E$, то есть матрица оператора A^{-1} будет обратной по отношению к матрице оператора A.

Связь между матрицами линейного оператора в разных базисах.

Рассмотрим теперь оператор *A*, отображающий *n*-мерное линейное пространство *X* само на себя. Пусть в пространстве *X* имеется два базиса : первый базис $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_n$ и второй базис $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \ldots, \hat{e}'_n$. Матрица перехода от первого базиса ко второму $P = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$, а сам переход осуществляется по формуле $\vec{e}\,' = P \cdot \vec{e}$, где $\vec{e} = \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \ldots \\ \hat{e}_n \end{pmatrix}$ и $\vec{e}\,' = \begin{pmatrix} \hat{e}'_1 \\ \hat{e}'_2 \\ \ldots \\ \hat{e}'_n \end{pmatrix}$. И пусть матрица оператора *A* в первом базисе $\hat{A}_e = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, а во втором

$$\hat{A}'_e=\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \ldots & a'_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим два элемента пространства X $\hat{x}$ и $\hat{y}$ таких, что $A\hat{x}=\hat{y}$. Пусть в первом базисе элементу $\hat{x}$ соответствует вектор-столбец его координат $\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, а элементу $\hat{y}$ соответствует вектор-столбец $\vec{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$. Вектор-столбец координат элемента $\hat{x}$ во втором базисе $\vec{x}'=\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix}$, элемента $\hat{y}$ - $\vec{y}'=\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \ldots \\ y'_n \end{pmatrix}$. Тогда

$$\hat{A}'\vec{x}'_e=\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \ldots & a'_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \ldots \\ y'_n \end{pmatrix}=\vec{y}'.$$

Но, учитывая, что $\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \ldots \\ y'_n \end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}^T\right)^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$, а $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}^T\right)^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ получим

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}^T \right)^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}^T \right)^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Умножая левую и правую части этого соотношения слева на матрицу $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}^T$, получим

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}^T \right)^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Из полученного соотношения следует, что $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}^T \right)^{-1}$ То есть $\hat{A}_e = P^T \cdot \hat{A}'_e \cdot (P^T)^{-1}$. Полученному соотношению можно придать другой вид, выразив матрицу оператора A во втором базисе пространства X через матрицу оператора в первом базисе. Для этого следует данное соотношение умножить слева на матрицу $(P^T)^{-1}$ и справа на матрицу P^T: $(P^T)^{-1} \cdot \hat{A}_e \cdot P^T = \hat{A}'_e$.

Собственные значения и собственные элементы линейных операторов в конечномерных пространствах.

В силу выше представленного определения, собственным значением линейного оператора, отображающего n-мерное линейное пространство X само на себя называется число λ, для которого существует ненулевой элемент $\hat{x}$ пространства X, удовлетворяющий соотношению $A\hat{x} = \lambda\hat{x}$. Сам элемент $\hat{x}$ в этом случае называется собственным элементом оператора A, соответствующий собственному значению λ. Пусть оператор A

в некотором базисе пространства X имеет матрицу $\hat{A}_e = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Соотношение $A\hat{x} = \lambda\hat{x}$ представим в виде $A\hat{x} - \lambda I\hat{x} = \hat{0}$ или $(A - \lambda I)\hat{x} = \hat{0}$, где I - тождественный оператор.

Тогда матрица оператора $(A - \lambda I)$ будет иметь вид $(\hat{A}_e - \lambda E)$. Учитывая, что вектор-столбец нулевого элемента представляет собой нулевой вектор-столбец $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$, и считая, что элемент $\hat{x}$ представляется вектором-столбцом $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, определение собственного элемента оператора можно свести к нахождению ненулевых решений однородной системы уравнений $(\hat{A}_e - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ или

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & +(a_{22}-\lambda)x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & = & 0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 & a_{n2}x_2 & +\dots & (a_{nn}-\lambda)x_n & = & 0 \end{cases}.$$

Для того, чтобы данная однородная система уравнений имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю $|A - \lambda I| = 0$

или $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$.

Раскрывая этот определитель, получим многочлен от λ степени *n*.

Определение. Многочлен относительно λ степени *n* -

$|A-\lambda I|$ называется характеристическим многочленом оператора *A,* а уравнение $|A-\lambda I|=0$ называется характеристическим уравнением.

Собственные значения оператора *A* являются корнями характеристического уравнения. Пусть λ_0 корень характеристического уравнения и , следовательно, собственное значение оператора *A.* Подставляя λ_0 в выше представленную одно-родную систему уравнений, получим систему уравнений, из которой определим координаты вектора-столбца собственного элемента оператора *A*

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_0)x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & +(a_{22}-\lambda_0)x_2 & +\ldots & +a_{2n}x_n & = & 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 & a_{n2}x_2 & +\ldots & (a_{nn}-\lambda_0)x_n & = & 0 \end{cases}.$$

Чтобы определить векторы-столбцы собственных элементов оператора необходимо найти фундаментальную систему решений полученной однородной системы уравнений. Для этого данную однородную систему уравнений приводят к треугольному виду, в котором число неизвестных будет больше числа уравнений. Это следует из того, что определитель системы равен нулю и, следовательно, в систему входят линейно зависимые уравнения (то есть такие уравнения, которые могут быть получены посредством сложения других уравнений системы, умноженных на некоторые числа). Далее все неизвестные разделяют на свободные и несвободные. При этом в качестве несвободных неизвестных берут такое их число, которое равно числу оставшихся уравнений системы, после приведения ее к треугольному виду. Кроме того в качестве несвободных неизвестных выбирают такие, чтобы определитель, состав-ленный из коэффициентов, стоящих при этих неизвестных в системе, был отличен от нуля. После этого свободные неизвестные вместе с их коэффициентами переносят в правые части уравнений системы. Полагая поочередно каждое свободное неизвестное равное единице, а остальные свободные неизвестные – нулю, находят значения несвободных неизвестных. Полученные таким образом решения называются фундаментальной системой решений рассматриваемой однородной системы линейных уравнений и являются векторами-столбцами собственных элементов данного оператора, соответствующих собственному значению λ_0.

Пример.

1.Рассмотрим линейный оператор *A*, отображающий трехмерное векторное пространство само на себя и поворачивающий каждый вектор этого пространства на *180⁰*

вокруг оси *OZ.* Построим матрицу этого оператора. В качестве базиса возьмем как и ранее единичные вектора $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, направленные, соответственно, вдоль коор-динатных осей *OX* ,*OY, OZ.* Тогда, учитывая, что при повороте на *180⁰* вектора

$\vec{i}, \vec{j}$ переходят в вектора $-\vec{i}, -\vec{j}$, а вектор $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ при

этом не изменяется, получим

$A\vec{i} = -\vec{i} = -1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$,

$A\vec{j} = -j = 0 \cdot \vec{i} - 1 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$ и

$A\vec{k} = \vec{k} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 1 \cdot \vec{k}$. Следовательно, матрица этого оператора в указанном базисе будет иметь вид $\hat{A}_e = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, а матрица

$$(\hat{A}_e - \lambda E) = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Определим характеристический многочлен этого оператора и найдем его корни

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda) = 0.$$

Тогда собственными значениями оператора будут $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 1$.

Однородная система уравнений, соответствующая собственному значению $\lambda_1 = -1$, содержит лишь одно уравнение $-2x_3 = 0$, так как первые два уравнения системы имеют нулевые коэффициенты при неизвестных в левых частях, а это значит, что они удовлетворяются при любых значениях неизвестных и поэтому могут быть исключены из системы. Этот вид системы соответствует треугольному виду и так как он содержит только одно уравнение с одним неизвестным x_3, то вполне естественно остальные неизвестные x_1 и x_2 выбрать в качестве свободных. Поочередно полагая свободные неизвестные равными единице и учитывая, что $x_3 = 0$, получим два век-тора-столбца собственных элементов, соответствующих собственному значению

$\lambda_1 = -1$: $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Первый вектор соответствует элементу $\vec{i}$, а второй элементу $\vec{j}$.

Рассмотрим теперь второе собственное значение $\lambda_2 = 1$, которому будет соответствовать однородная система уравнений

$$\begin{cases} -x_1 & = 0 \\ \quad -x_2 & = 0 \end{cases}.$$

Третье уравнение системы удовлетворяется при любых значениях неизвестных и поэтому исключается из системы. Полученный вид является треугольным видом системы. Выбирая в качестве свободной неизвестной x_3 и полагая ее равной единице, учитывая, что из полученной однородной системы имеем $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, определяем вектор-столбец собственного элемента $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Этому вектору-столбцу соответствует элемент $\vec{k}$, который и будет собственным элементом, соответствующим собственному значению $\lambda_2 = 1$.

2.Найдем теперь собственные значения и собственные элементы дифференциального оператора $Ax(t) = (1+t)\dfrac{d}{dt}x(t) + x(t)$, действующего в пространстве многочленов, степени не выше третьей. В качестве базиса данного линейного пространства возьмем систему элементов $1, t, t^2, t^3$. Определим матрицу оператора. $A1 = (1+t)\dfrac{d}{dt}1 + 1 = 1$. Соответствующий полученному элементу вектор-столбец его координат имеет вид $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$At = (1+t)\dfrac{d}{dt}t + t = 2t + 1$. Элементу $2t+1$ соответствует вектор-столбец $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. $At^2 = (1+t)\dfrac{d}{dt}t^2 + t^2 = 3t^2 + 2t$. Данному элементу соответствует вектор-столбец $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Наконец $At^3 = (1+t)\dfrac{d}{dt}t^3 + t^3 = 4t^3 + 3t^2$. Этот элемент соответствует вектору-столбцу $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. В результате матрица данного оператора будет иметь вид

$$\hat{A}_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица $(\hat{A}_e - \lambda E) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$.

Далее найдем характеристический многочлен этого оператора и его корни

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) = 0'$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3, \lambda_4 = 4.$$

Однородная система уравнений, соответствующая собственному значению $\lambda_1 = 1$ будет иметь вид $\begin{cases} x_2 & & & = 0 \\ x_2 & +2x_3 & & = 0 \\ & +2x_3 & +3x_4 & = 0 \\ & & 3x_4 & = 0 \end{cases}$. Вычтем из второго уравнения первое, прибавим к третьему уравнению первое, а затем вычтем из полученной суммы второе уравнение

$$\begin{cases} x_2 & & & = 0 \\ & +2x_3 & & = 0 \\ & & 3x_4 & = 0 \\ & & 3x_4 & = 0 \end{cases}.$$

Два последние уравнения полученной системы одинаковы, поэтому одно из них можно исключить. В результате получим треугольный вид данной однородной системы уравнений.

$$\begin{cases} x_2 & & & = 0 \\ & 2x_3 & & = 0 \\ & & 3x_4 & = 0 \end{cases}.$$

В этом случае свободной неизвестной следует выбрать x_1, положив ее равную единице. Остальные неизвестные, как это следует из треугольного вида системы, равны нулю и ,значит, фундаментальная система решений будет состоять из одного вектора-столбца $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, который соответствует собственной функции $x_1(t) = 1$.

Для второго собственного значения $\lambda_2 = 2$ получим следующую однородную систему уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ +2x_3 = 0 \\ x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

Разделим второе уравнение системы на 2 и вычтем из третьего уравнения. В результате получим следующий вид системы

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ +3x_4 = 0 \\ 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

Очевидно, что третье и четвертое уравнения системы одинаковы и одно из них можно опустить

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ 3x_4 = 0 \end{cases}.$$

Данный вид системы соответствует треугольному виду, в качестве свободной неизвестной в этом случае можно выбрать x_2 и перенести ее в правую часть системы, положив равной единице. В результате получим

$$\begin{cases} -x_1 = -1 \\ x_3 = 0 \\ 3x_4 = 0 \end{cases}.$$

Легко видеть, что решением данной системы будут значения неизвестных $x_1 = 1$,

$x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Тогда фундаментальная система решений будет состоять из вектора-столбца $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Этот вектор соответствует элементу $x_2(t) = t + 1$, который является собственной функцией рассматриваемого оператора, соответству-ющая собственному значению $\lambda_2 = 2$.

Далее рассмотрим собственное значение $\lambda_3 = 3$, для которого получим однородную систему уравнений следующего вида

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \\ 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

Третье уравнение этой системы можно отбросить, так как оно удовлетворяется при любых значениях неизвестных. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_4 = 0 \end{cases}$.

В результате система примет треугольный вид. Выберем в качестве свободной неизвестной x_3, перенесем ее в правую часть системы и положим равную единице

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 = -2 \\ 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

Решением данной системы будут значения неизвестных $x_1 = 1, x_2 = 2,\ x_4 = 0$, а фундаментальную систему решений будет представлять вектор $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, определяющий функцию

$x(t) = t^2 + 2t + 1$, являющейся собственной функцией, соответствующей собственному значению $\lambda_3 = 3$.

В завершении рассмотрим $\lambda_4 = 4$, для которого получим систему уравнений

$$\begin{cases} -3x_1 & +x_2 & & & =0 \\ & -2x_2 & +2x_3 & & =0 \\ & & -x_3 & +3x_4 & =0 \\ 0x_1 & +0x_2 & +0x_3 & +0x_4 & =0 \end{cases}.$$

Отбросив последнее уравнение системы, которое удовлетворяется при любых значениях неизвестных, получим однородную систему линейных уравнений треугольного вида $\begin{cases} -3x_1 & +x_2 & & & =0 \\ & -2x_2 & +2x_3 & & =0 \\ & & -x_3 & +3x_4 & =0 \end{cases}$. Далее, назначив в качестве свободного неизвестного x_4, перенеся в правую часть системы уравнений и поло-жив его равным единице, остальные неизвестные найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} -3x_1 & +x_2 & & =0 \\ & -2x_2 & +2x_3 & =0 \\ & & -x_3 & =-3 \end{cases}$$

$x_1 = 1, x_2 = 3$, $x_3 = 3$. Тогда фундаментальная система решений исходной однородной системы линейных уравнений будет состоять из одного вектора $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, который соответствует функции $x(t) = t^3 + 3t^2 + 3t + 1$. Данная функция будет собственной функцией рассматриваемого оператора, соответствующей собственному значению $\lambda_4 = 4$.

Теорема XI.1 Для того чтобы матрица линейного оператора *A*, действующего в *n*-мерном линейном пространстве была диагональной, необходимо и достаточно, чтобы базисные элементы были собственными элементами данного оператора.

Доказательство достаточности. Пусть в n-мерном линейном пространстве задан базис, $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_n$, все элементы которого являются собственными элементами оператора A, то есть $A\hat{e}_1 = \lambda_1\hat{e}_1, A\hat{e}_2 = \lambda_2\hat{e}_2, \ldots, A\hat{e}_n = \lambda_n\hat{e}_n$. Тогда в силу того, что матрица оператора состоит из столбцов, которые являются векторами-столбцами координат элементов $A\hat{e}_1, A\hat{e}_2, \ldots, A\hat{e}_n$ равных в данном случае, соответственно, элементам $\lambda_1\hat{e}_1, \lambda_2\hat{e}_2, \ldots, \lambda_n\hat{e}_n$, матрица оператора A будет иметь диагональный вид $\hat{A}_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_m \end{pmatrix}$.

Доказательство необходимости. Допустим, что матрица оператора A в некотором базисе $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_n$ будет диагональной, то есть будет иметь выше приведенный вид. Тогда , учитывая то обстоятельство, что вектора-столбцы координат элементов базиса $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_n$,соответственно, будут иметь вид $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}_1, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}$, получим

$$A\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1\hat{e}_1,$$

$$A\hat{e}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_2\hat{e}_2,$$

....,

$$A\hat{e} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \hat{e}_1,$$ что и требовалось доказать.

Вид матрицы линейного оператора зависит от выбранного базиса пространства.

Тем не менее собственные значения оператора не зависят от выбранного базиса. Действительно, собственные значения оператора определяются из уравнения $\left|\hat{A}_e - \lambda I\right| = 0$. При переходе к другому базису, матрица линейного оператора преобразуется согласно формуле $\hat{A}'_e = (P^T)^{-1} \cdot \hat{A}_e \cdot P^T$, где $\hat{A}_e$ – матрица оператора в старом базисе, $\hat{A}'_e$ – матрица оператора в новом базисе, P – матрица перехода от старого базиса к новому. Собственные значения оператора в новом базисе определяются из уравнения $\left|\hat{A}'_e - \lambda I\right| = 0$. Тогда используя известные свойства определители, получим

$$\left|\hat{A}'_e - \lambda I\right| = \left|(P^T)^{-1} \cdot \hat{A}_e \cdot P^T - \lambda (P^T)^{-1} \cdot I \cdot P^T\right| = \left|(P^T)^{-1} \cdot (\hat{A}_e - \lambda I) \cdot P^T\right| =$$

$$= \left|(P^T)^{-1}\right| \cdot \left|\hat{A}_e - \lambda I\right| \cdot \left|P^T\right| = \left|(P^T)^{-1} \cdot P^T\right| \cdot \left|\hat{A}_e - \lambda I\right| = |I| \cdot \left|\hat{A}_e - \lambda I\right| = \left|\hat{A}_e - \lambda I\right| = 0.$$

Таким образом, уравнение $\left|\hat{A}'_e - \lambda I\right| = 0$ посредством тождественных преобразований сведено к уравнению $\left|\hat{A}_e - \lambda I\right| = 0$. Следовательно, эти уравнения имеют оди-наковые корни из чего следует, что собственные значения линейного оператора действующего в конечномерном пространстве не зависит от выбранного в этом пространстве базиса.

XIV. ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ.

Многие задачи в математике сводятся к решению уравнений или систем уравнений (алгебраических, дифференциальных, интегральных и так далее). В связи с этим часто возникают проблемы, связанные с существованием и единственностью решений уравнений или систем уравнений того или другого вида, многие из которых можно представить в виде $\hat{x} = A\hat{x}$, где $\hat{x}$ является неизвестным (числом, вектором, функцией или другим математическим объектом), а $A\hat{x}$ некоторый оператор. Из различных методов доказательства существования и единственности решений одним из важнейших методом является принцип сжимающих отображений.

Рассмотрим некоторое полное метрическое пространство *X*. Даже не обязательно линейное. И пусть A некоторый оператор. (не обязательно линейный) отображающий пространство *X* само на себя.

Определение. Элемент $\hat{x}_o$ пространства *X*, на котором действует оператор A. называется неподвижной точкой данного оператора, если $\hat{x}_o = A\hat{x}_o$

Определение. Оператор A называется оператором сжатия, если существует такое число $\alpha < 1$, что для любых двух элементов пространства *X*, на котором определен оператор A $\hat{x}$ и $\hat{y}$ выполняется неравенство $\rho(A\hat{x}, A\hat{y}) \le \alpha\rho(\hat{x}, \hat{y})$.

Докажем, что каждый оператор сжатия является непрерывным. Действительно, зададим $\varepsilon > 0$. Тогда, если положить $\varepsilon = \delta$, то из неравенства $\rho(\hat{x}, \hat{y}) < \delta$ с учетом того что $\alpha < 1$, следует $\rho(A\hat{x}, A\hat{y}) \le \alpha\rho(\hat{x}, \hat{y}) < \alpha\delta < \delta = \varepsilon$. Из чего и следует непрерывность оператора сжатия A.

Теорема XII.1 Всякий оператор сжатия, определенный в полном метрическом пространстве *X*, имеет одну и только одну неподвижную точку.

Допустим, что $\hat{x}_o$ произвольный элемент пространства *X*.

Положим

$$\hat{x}_1 = A\hat{x}_0 , \hat{x}_2 = A\hat{x}_1 = A(A\hat{x}_o) = A^2\hat{x}_o ,$$

$\hat{x}_3 = A\hat{x}_2 = A(A^2\hat{x}_o) = A^3\hat{x}_o$,..., $\hat{x}_n = A\hat{x}_{n-1} = A^n\hat{x}_o$. В результате получим последовательность элементов $\{\hat{x}_n\}$. Докажем, что данная последовательность является фундаментальной. Возьмем два натуральных числа m и n таких, что $m \geq n$. Тогда

$$\rho(\hat{x}_n, \hat{x}_m) = \rho(A\hat{x}_{n-1}, A\hat{x}_{m-1}) \leq \alpha\rho(\hat{x}_{n-1}, \hat{x}_{m-1}) = \alpha\rho(A\hat{x}_{n-2}, A\hat{x}_{m-2}) \leq$$

$$\leq \alpha^2\rho(\hat{x}_{n-2}, \hat{x}_{m-2}) \leq \ldots \leq \alpha^n\rho(\hat{x}_o, \hat{x}_{m-n}).$$

Таким образом доказано справедливость неравенства $\rho(\hat{x}_n, \hat{x}_m) \leq \alpha^n\rho(\hat{x}_o, \hat{x}_{m-n})$.

Далее, используя аксиому треугольника , получим

$$\alpha^n\rho(\hat{x}_o, \hat{x}_{m-n}) \leq \alpha^n(\rho(\hat{x}_o, \hat{x}_1) + \rho(\hat{x}_1, \hat{x}_{m-n})) \leq \alpha^n(\rho(\hat{x}_o, \hat{x}_1) + \rho(\hat{x}_1, \hat{x}_2) +$$

$$+ \rho(\hat{x}_2, \hat{x}_{m-n})) \leq \alpha^n(\rho(\hat{x}_o, \hat{x}_1) + \rho(\hat{x}_1, \hat{x}_2) + \rho(\hat{x}_2, \hat{x}_3) + \rho(\hat{x}_3, \hat{x}_{m-n})) \leq \ldots \leq$$

$$\leq \alpha^n(\rho(\hat{x}_o, \hat{x}_1) + \rho(\hat{x}_1, \hat{x}_2) + \rho(\hat{x}_2, \hat{x}_3) + \ldots + \rho(\hat{x}_{m-n-1}, \hat{x}_{m-n})).$$

Доказанное выше неравенство позволяет утверждать, что

$$\alpha^n(\rho(\hat{x}_o, \hat{x}_1) + \rho(\hat{x}_1, \hat{x}_2) + \rho(\hat{x}_2, \hat{x}_3) + \ldots + \rho(\hat{x}_{m-n-1}, \hat{x}_{m-n})) \leq \alpha^n(\rho(\hat{x}_o, \hat{x}_1) +$$

$$\alpha\rho(\hat{x}_o, \hat{x}_1) + \alpha^2\rho(\hat{x}_o, \hat{x}_1) + \ldots + \alpha^{m-n-1}\rho(\hat{x}_o, \hat{x}_1)) = \alpha^n\rho(\hat{x}_o, \hat{x}_1)\cdot$$

$(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{m-n-1})$. Рассматривая сумму, стоящую в скобках, как сумму первых членов $n - m$ геометрической прогрессии, знаменатель которой равен α, а первое слагаемое равно единице, получим $(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{m-n-1}) = \dfrac{1 - \alpha^{m-n-1}}{1 - \alpha} \leq \dfrac{1}{1 - \alpha}$.

Таким образом, если опустить все промежуточные соотношения, получим следующее неравенство $\rho(\hat{x}_n, \hat{x}_m) \leq \alpha^n\rho(\hat{x}_o, \hat{x}_1)\dfrac{1}{1 - \alpha}$. Если взять достаточно большое n, то учитывая, что $\alpha < 1$, величину

$\alpha^n \rho(\hat{x}_o, \hat{x}_1)\frac{1}{1-\alpha}$ можно сделать сколь угодно малой.

То есть, для любого, сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое натуральное N, что при $n > N$ будет выполняться неравенство $\alpha^n \rho(\hat{x}_o, \hat{x}_1)\frac{1}{1-\alpha} < \varepsilon$. А значит в силу доказанного неравенства, что для любого, сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое натуральное N, что при $n > N$ будет выполняться неравенство $\rho(\hat{x}_n, \hat{x}_m) < \varepsilon$. Следовательно, последовательность элементов

$\{\hat{x}_n\}$ является фундаментальной и так как пространство X является полным, то она имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{x}_n = \hat{x}_*$. Тогда в силу непрерывности оператора A

$A\hat{x}_* = A\lim\limits_{n\to\infty} \hat{x}_n = \lim\limits_{n\to\infty} A\hat{x}_n = \lim\limits_{n\to\infty} \hat{x}_{n+1} = \hat{x}_*$ и тем самым доказано существование неподвижной точки оператора A. Докажем теперь единственность неподвижной точки. Предположим, что у оператора A существует две неподвижные точки $\hat{x}_*$ и $\hat{x}'_*$, то есть $\hat{x}_* = A\hat{x}_*$ и $\hat{x}'_* = A\hat{x}'_*$. Так как оператор A является оператором сжатия, то $\rho(\hat{x}_*, \hat{x}'_*) = \rho(A\hat{x}_*, A\hat{x}'_*) \le \alpha\rho(\hat{x}_*, \hat{x}'_*)$. Значит $\rho(\hat{x}_*, \hat{x}'_*) \le \alpha\rho(\hat{x}_*, \hat{x}'_*)$ и поэтому $\rho(\hat{x}_*, \hat{x}'_*) - \alpha\rho(\hat{x}_*, \hat{x}'_*) \le 0$, то есть $(1-\alpha)\rho(\hat{x}_*, \hat{x}'_*) \le 0$. Учитывая, что $(1-\alpha) > 0$ и $\rho(\hat{x}_*, \hat{x}'_*) \ge 0$ и то обстоятельство, что произведение положительного числа на число неотрицательное может быть величиной неотрицательной только в том случае, когда неотрицательное число $\rho(\hat{x}_*, \hat{x}'_*) \ge 0$ равно нулю. Следовательно, $\rho(\hat{x}_*, \hat{x}'_.) = 0$, то есть $\hat{x}_* = \hat{x}'_*$, а это означает единственность неподвижной точки оператора сжатия.

Как было сказано ранее, принцип сжимающих отображений часто применяется при доказательстве существования и единственности решения уравнений и систем уравнений. Рассмотрим некоторые примеры.

Доказательство существования и единственности корня уравнения $x = f(x)$.

Допустим, что функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$, отображая его на себя и удовлетворяет на этом отрезке условию Липшица, то есть для любых $x_1, x_2 \in [a,b]$ справедливо неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| \le C|x_1 - x_2|$, где постоянная $C < 1$. Тогда функцию $f(x)$ можно рассматривать как оператор сжатия и по ранее доказанной теореме числовая последовательность $\{x_n\}$, где $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ..., $x_n = f(x_{n-1})$ имеет в качестве своего предела единственный корень уравнения $x = f(x)$. Метод нахождения корня по формуле $x_n = f(x_{n-1})$ называется методом последовательных приближений.

Можно доказать, что условие сжатости оператора будет выполнено, если $|f'(x)| \le C < 1$, а это означает, что в этом случае может быть применен метод последовательных приближений.

Рассмотрим теперь уравнение вида $F(x) = 0$, где функция $F(x)$ определена на отрезке $[a,b]$ и кроме того $F(a) < 0$, $F(b) > 0$, $0 < m \le F'(x) \le M$.

Теперь введем функцию $f(x) = x - \lambda F(x)$ и будем рассматривать уравнение $x = f(x)$, которое равносильно уравнению $x = x - \lambda F(x)$ или $F(x) = 0$.

Неравенство $m \le F'(x) \le M$ умножим на $(-\lambda)$ $-\lambda M \le -\lambda F'(x) \le -\lambda m$, а затем прибавим ко всем его частям единицу $1 - \lambda M \le 1 - \lambda F'(x) \le 1 - \lambda m$. Учитывая, что производная $f'(x) = x - \lambda F'(x)$ получим $1 - \lambda M \le f'(x) \le 1 - \lambda m$. Очевидно, что параметр λ можно подобрать так, чтобы выполнялось условие сжатости оператора и затем применить для решения уравнения $F(x) = 0$ метод последовательных приближений.

Обоснование применения метода последовательных приближений к решению систем линейных

уравнений.

Пусть имеется n- мерное векторное пространство и действующий на нем оператор $A\vec{x} = \hat{B}\vec{x} + \vec{b}$, где $\hat{B}$ матрица размерности $n \times n$, $\vec{b}$ - заданный вектор n- мерного векторного пространства, а $\vec{x}$ - произвольный вектор данного пространства. Рассмотрим систему линейных уравнений вида $\vec{x} = \hat{B}\vec{x} + \vec{b}$. Если оператор $A\vec{x} = \hat{B}\vec{x} + \vec{b}$ будет оператором сжатия, то к данной системе уравнений можно применить метод последовательных приближений, реализовав его по формуле $\vec{x}_n = \hat{B}\vec{x}_{n-1} + \vec{b}$. Будем рассматривать данный оператор в нормированном пространстве. Так как расстояние между элементами нормированного пространства $\hat{x}$ и $\hat{y}$ можно ввести как $\rho(\hat{x}, \hat{y}) = \|\hat{x} - \hat{y}\|$, можно сказать, что оператор называется оператором сжатия, если существует такое число $\alpha < 1$, что для любых двух элементов пространства $\hat{x}$ и $\hat{y}$ выполняется неравенство $\|A\hat{x} - A\hat{y}\| \le \alpha \|\hat{x} - \hat{y}\|$.

В нашем случае $\|A\vec{x} - A\vec{y}\| = \|B\vec{x} - B\vec{y}\| = \|B(\vec{x} - \vec{y})\| \le \|B\| \cdot \|\vec{x} - \vec{y}\|$. Следовательно, если норма матрицы $\|B\| \le 1$. И все зависит от того, как ввести метрике в пространстве, то есть определить расстояние между двумя элементами пространства $\rho(\vec{x}, \vec{y})$. Введем метрику посредством соотношения

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)\ \ + \ldots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

, где

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Тогда полагая, что матрица B имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

произведение

$$B\vec{x}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11}x_1+b_{12}x_2+\dots+b_{1n}x_n \\ b_{21}x_1+b_{22}x_2+\dots+b_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{n1}x_1+b_{n2}x_2+\dots+b_{nn}x_n \end{pmatrix}.$$

То есть i-ую компоненту вектора $B\vec{x}$ можно представит в виде $\sum_{k=1}^{n} b_{ik}x_k$.

Аналогично можно показать, что i-ая компонента вектора $B\vec{y}$ представима в виде $\sum_{k=1}^{n} b_{ik}y_k$. Далее, используя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\rho^2(A\vec{x},A\vec{y})=\|B\vec{x}-B\vec{y}\|^2=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}x_k-\sum_{k=1}^{n} b_{ik}x_k)^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}(x_k-y_k))^2\le\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}{}^2\cdot\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}{}^2\cdot\rho^2(\vec{x},\vec{y})=\cdot$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}{}^2\cdot\|\vec{x}-\vec{y}\|^2$$

Таким образом доказана справедливость неравенства

$$\|B\vec{x}-B\vec{y}\|^2\le\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}{}^2\cdot\|\vec{x}-\vec{y}\|^2.$$

Извлекая квадратный корень их обеих частей данного неравенства, получим

$\|B\vec{x}-B\vec{y}\|\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}{}^2}\cdot\|\vec{x}-\vec{y}\|$. Следовательно, для того, чтобы оператор B был оператором сжатия и ,значит для того, чтобы для решения системы линейных уравнений $\vec{x}=\hat{B}\vec{x}+\vec{b}$ можно было бы воспользоваться методом последовательных приближений, достаточно выполнение условия $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}{}^2\le 1}$.

Доказательство теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения.

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ с начальным условием $y(x_o) = y_o$. Будем полагать, что функция $f(x,y)$ определена и непрерывна по совокупности аргументов в области, определяемой неравенствами $a \le x \le b$, $-\infty < y < \infty$ и удовлетворяет в этой области условию Липшица по переменной y: $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le K|y_1 - y_2|$, где K некоторая постоянная. При этом точка x_o должна принадлежать отрезку $[a,b]$.

Проинтегрировав рассматриваемое уравнение по отрезку $[x_o, x] \in [a,b]$, получим

$$\int_{x_o}^{x} \frac{dy}{dx} dx = \int_{x_o}^{x} f(x, y(x))dx, \qquad y(x) - y_o = \int_{x_o}^{x} f(x, y(x))dx$$

или $y(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f(x, y(x))dx$

Будем рассматривать правую часть полученного уравнения как оператор $Ay(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f(x, y(x))dx$, отображающий пространство непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций само на себя. Докажем, что при выполнении некоторых условий данный оператор будет оператором сжатия. Учитывая, что функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной y, получим

$$\rho(Ay_1, Ay_2) = \max_{[a,b]}|Ay_1(x) - Ay_2(x)| = \max_{[a,b]}\left|\int_{x_o}^{x}[f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))]dx\right| \le$$

$$\le \max_{[a,b]}\left|\int_{x_o}^{x}|f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))|dx\right| \le \max_{[a,b]}\left|\int_{x_o}^{x} K|y_1(x) - y_2(x)|dx\right| \le$$

$$\le K\int_{x_o}^{x} \max_{[a,b]}|y_1(x) - y_2(x)|dx = K\int_{x_o}^{x} \rho(y_1, y_2)dx \le K(b-a)\rho(y_1, y_2).$$

Таким образом, доказано выполнение неравенства

$\rho(Ay_1, Ay_2) \le K(b-a)\rho(y_1, y_2)$ и если $K(b-a)<1$ то оператор $Ay(x) = y_o + \int\limits_{x_o}^{x} f(x, y(x))dx$ является оператором сжатия и имеет единственную неподвижную точку $Ay(x) = y(x)$. Это означает, что дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_o) = y_o$ тоже будет иметь единственное решение.

Следует отметить, что данный вывод справедлив только при условии $K(b-a)<1$. А означает, что длина ка $[a, b]$ должна быть достаточно маленькой и удовлетворять неравенству $(b-a) < 1/K$. Другими словами доказано существование и единственность решения указанного уравнения лишь в достаточно малой окрестности точки x_o.

ЛИТЕРАТУРА

1. При работе над учебным пособием использовалась нижеприведенная литература, которая рекомендуется для более углубленного изучения данной дисциплины.

2. Вайнберг М.М. Функциональный анализ: Спец. Курс. Учеб. Пособие для студентов физ.-мат. Фак. Пед. Ин-тов.- М., просвещение, 1979. – 128с.

3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. Главная редакция физико-математической литературы, изд-во «Наука», М.,1974 г.

4. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1977 г.

5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функциональный анализ. Главная редакция физико-математической литературы. Издательство «Наука». М., 1972 г.

6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. Главная редакция физико-математической литературы. Издательство «Наука». М., 1972 г.

7. Треногин В.А. Функциональный анализ. Главная редакция физико-математической литературы. Издательство «Наука». М.. 1980 г.