ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Математика и информатика»

Учебно-методическое пособие

по дисциплине

Имитационное моделирование Лабораторные работы

Автор
Галабурдин А.В.

Ростов-на-Дону, 2026

Аннотация

«Учебно-методическое пособие» предназначено для студентов очной формы обучения направления 09.03.03 «Прикладная информатика», профиль: Прикладная информатика в экономике.

Авторы

канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Математика и информатика»
Галабурдин А. В.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование – это универсальный метод получения, описания и использования знаний. Оно используется в любой профессиональной деятельности. Исследование любого явления, объекта или процесса сводится, как правило, к созданию ее модели. Модель в общем смысле есть создаваемый с целью получения и (или) хранения информации специфический объект (в форме мысленного образа, описания знаковыми средствами либо материальной системы), отражающий свойства, характеристики и связи объекта – оригинала произвольной природы, существенные для задачи.

В зависимости от характера изучаемых процессов в системе все виды моделирования могут быть разделены:

– детерминированные;
– стохастические;
– статические и динамические;
– дискретные;
– непрерывные;
– дискретно-непрерывные.

Детерминированное моделирование отображает детерминированные процессы, т.е. процессы, в которых предполагается отсутствие всяких случайных воздействий.

Стохастическое моделирование отображает вероятностные процессы и события. В этом случае анализируется ряд реализаций случайного процесса, и оцениваются средние характеристики, т. е. набор однородных реализаций.

Статическое моделирование служит для описания поведения объекта в какой-либо момент времени, а динамическое моделирование отражает поведение объекта во времени.

Дискретное моделирование служит для описания процессов, которые предполагаются дискретными, соответственно непрерывное моделирование позволяет отразить непрерывные процессы в системах, а дискретно-непрерывное моделирование используется для случаев, когда хотят выделить наличие как дискретных, так и непрерывных процессов.

Под математическим моделированием будем понимать процесс установления соответствия данному реальному объекту некоторого математического объекта, называемого математической моделью, и исследование этой модели, позволяющее получать характеристики рассматриваемого реального объекта. Вид математической модели зависит как от природы реального объекта, так и задач исследования объекта и требуемой достоверности, и точности решения этой задачи. Любая математическая модель, как

и всякая другая, описывает реальный объект лишь с некоторой степенью приближения к действительности. Математическое моделирование для исследования характеристик процесса функционирования систем можно разделить на:

– аналитическое;

– имитационное;

– комбинированное.

Для аналитического моделирования характерно то, что процессы функционирования элементов системы записываются в виде некоторых функциональных соотношений или логических условий. Аналитическая модель может быть исследована следующими методами:

а) аналитическим, когда стремятся получить в общем виде явные зависимости для искомых характеристик;

б) численным, когда, не умея решать уравнений в общем виде, стремятся получить числовые результаты при конкретных начальных данных;

в) качественным, когда, не имея решения в явном виде, можно найти некоторые свойства решения.

При имитационном моделировании реализующий модель алгоритм воспроизводит процесс функционирования системы во времени, причем имитируются элементарные явления, составляющие процесс, с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени, что позволяет по исходным данным получить сведения о состояниях процесса в определенные моменты времени, дающие возможность оценить характеристики системы.

Основным преимуществом имитационного моделирования по сравнению с аналитическим является возможность решения более сложных задач. Имитационные модели позволяют достаточно просто учитывать такие факторы, как наличие дискретных и непрерывных элементов, нелинейные характеристики элементов системы, многочисленные случайные воздействия и др., которые часто создают трудности при аналитических исследованиях. В настоящее время имитационное моделирование — наиболее эффективный метод исследования больших систем, а часто и единственный практически доступный метод получения информации о поведении системы, особенно на этапе ее проектирования.

Данные лабораторные работы направлены на вырабатывание практических навыков построения имитационных моделей. Особенностью выполнения работ является то, что студент при их выполнении учится самостоятельно принимать решения, развивает свои исследовательские способности.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

Целью работы является приобретение навыка регрессионного анализа

Линейная регрессия

Имеются некоторые данные, по которым мы предполагаем линейную зависимость. Необходимо эту зависимость восстановить в виде параметров функции.

Пусть имеется обучающая выборка $X^l = (x_i, y_i)_{i=1}^l$

Модель линейной регрессии ($w \in \mathbb{R}^n$) представляет собой параметрическую функцию:

$$a(x, w) = \sum_{j=1}^{n} w_j f_j(x)$$

В случае полиномиальной регрессии $f_j(x)=x^{j-1}$

Чтобы наша модель аппроксимировала данные из обучающей выборки наилучшим образом, мы должны подобрать вектор весов W. Вручную это делать достаточно муторно. Задача подбора значений вектора весов при наличии функционала, определяющего стоимость (он так и называется, функция стоимости или функция потерь), является задачей безусловной оптимизации.

Линейная регрессия – это простая модель, поэтому мы можем применить метод наименьших квадратов. В качестве функции потерь используется среднеквадратическая ошибка, которую мы минимизируем, что по сути своей является уменьшением ошибки на обучающей выборке:

$$Q(w) = \sum_{i=1}^{l} (a(x_i, w) - y_i)^2 \to \min_{w}$$

Или $Q(w) = \|AW - Y\|^2 \to \min w$

Необходимым условием минимума будет равенство градиента по вектору W нулю в точке минимума

$$\frac{\partial Q}{\partial w}(w) = 2A^T(AW - Y) = 0$$

Получаем систему

$$A^T AW = A^T Y$$

Выражаем искомый вектор весов

$$W^* = (A^T A)^{-1} A^T Y = A^+ Y$$

Задание на лабораторную работу

1.Вывести систему линейных уравнений для определения параметров полиномиальной регрессии

2.Разработать программу построения полиномиальной регрессии.

3.Используя исходные данные для индивидуального задания, построить регрессионные модели для различных степеней полиномов n=2,3,5. Представить результаты графически.

4.Оценить качество построенных моделей по коэффициент детерминации R^2.

Содержание отчета

1.Постановка задачи для самостоятельной работы

2. Экранные формы, показывающие порядок выполнения индивидуального задания с соответствующими пояснениями, и результаты, полученные в ходе её выполнения.

Исходные данные для индивидуального задания

x	**0**	**0,5**	**1**	**1,5**	**2**	**2,5**	**3**	**3,5**	**4**	**4.5**	**5**
Y1	**0**	**0.3**	**1**	**2.3**	**4**	**6.3**	**9**	**11.3**	**16**	**23**	**25**
Y2	**1**	**1.6**	**3**	**5.6**	**9**	**13.3**	**19**	**23.6**	**33**	**47**	**51**
Y3	**0.5**	**0.8**	**2.5**	**2.8**	**4.5**	**6.6**	**9.5**	**11.8**	**16.5**	**23.5**	**25.5**
Y4	**0.5**	**0.81**	**2.6**	**2.8**	**4.5**	**6.5**	**9.5**	**12**	**16.5**	**24**	**25**
Y5	**1**	**1.3**	**2**	**3.3**	**5**	**7.3**	**10**	**12.3**	**17**	**24**	**26**
Y6	**0**	**0.6**	**2**	**4.6**	**8**	**12.3**	**18**	**22.6**	**32**	**46**	**50**
Y7	**0**	**0.3**	**1**	**2.3**	**4**	**6.1**	**9**	**11.3**	**16**	**23**	**24**
Y8	**1**	**1.6**	**3**	**5.6**	**9**	**13.3**	**19**	**23.6**	**33**	**47**	**51**
Y9	**1**	**1.6**	**5.1**	**5.6**	**9**	**13.1**	**19**	**23.6**	**33**	**47.5**	**50.5**
Y10	**0**	**0.6**	**4.1**	**4.6**	**8**	**12.1**	**18**	**22.6**	**32**	**45.5**	**49.5**

Контрольные вопросы

1. В чем отличие линейной от нелинейной регрессии?

2. В чем отличие линейной регрессии от полиномиальной?

3. Понятие множественной регрессии

4. Опишите процесс обучения регрессионной модели

5. Параметры качества регрессионной модели

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

Задачи линейного программирования

Пример реализации задачи об использования ресурсов

Постановка задачи

Хозяйство производит три вида продукции А, В, С стоимостью 250, 900 и 2500 руб. На изготовление единицы продукции А расходуются 2м кабеля стандартного сечения, 0,5 м^2 стального листа и 2,5 чел.- час. рабочего времени. Для изготовления продукции В используются 3м кабеля и 2,5 чел.-час. рабочего времени. Аналогичные данные для продукции С составляют: 4 м кабеля, 0,8 м^2 стального листа и 4 чел.-час. рабочего времени.

В распоряжении фабрики имеется 2000м кабеля стандартного сечения, 90м^2 стального листа и 650 чел.- час рабочего времени. Найти план выпуска продукции, при котором прибыль от их реализации будет максимальной, при условии, что продукции А должно быть не менее 10 шт.

Составление экономико-математической модели

1 этап. Построение целевой функции

Обозначим через X_1, X_2, X_3 количество производимых единиц, соответственно продукции А, В, С. При условии, что их реализационная цена составляет, соответственно, 250, 900 и 2500 руб., имеем следующую целевую функцию:

$$Z = 250X_1 + 900X_2 + 2500X_3 \rightarrow \max$$

2 этап. Система ограничений.

Имеются три ресурса для изготовления продукции и ограничение на выпуск А:

кабель $2X_1+3X_2 +4X_3 \le 2000$

стальной лист $0,5X_1+0,8X_3 \le 90$

рабочее время $2,5X_1+2,5X_2 + 4X_3 \le 650$

дополнительное ограничение $X_1 \ge 10$

3 этап. Условия неотрицательности переменных:

$X_1 \ge 0$, $X_2 \ge 0$, $X_3 \ge 0$.

Решение задач линейного программирования

Рассмотрим пример применения MATLAB к решению задач линейного программирования

$$Y = 40x_1 + 50x_2 + 30x_3 + 20x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 7x_4 \le 15 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 \le 9 \\ 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 8x_4 \le 30 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_3 \ge 0; x_4 \ge 0$$

Для решения подобных задач в Matlab используется функция

$$[x, L, f] = linprog(c, A, b[, A1, b1, lx, rx])$$

С – вектор коэффициентов целевой функции

A,b-система ограничений вида $Ax \le b$

A1,b1-система ограничений вида $A1x = b1$

lx, rx - параметры ограничений вида $lx \le x \le rx$, $lx \le x$, $x \le rx$

L – минимум целевой функции

x- вектор решения

f- параметр, характеризующий вычислительный процесс

Программа, решающая указанную выше задачу имеет вид

```
C=[-40 -50 -30 -20];

A=[3 5 2 7;4 3 3 5;5 6 4 8];

b=[15 9 30];

Lx=[0 0 0 0];

[x,Y]=linprog(C,A,b,[],[],Lx);

Y=-Y;

%максимум функции

max=Y

%достигается при x

xe=x
```

Результат работы программы

Optimization terminated.

max =

150.0000

xe =

0.0000

3.0000

0.0000

0.0000

Рассмотрим задачу со смешанными условиями ограничения

$$Y = 5x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 5 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \ge 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

Программа, решающая эту задачу имеет вид

```
C=[-5 2 1];

A=[2 1 1;-5 -3 4];

b=[5 1];

A1=[3 2 1];

b1=[6];
```

```
Lx=[0 0 0];
[x,Y]=linprog(C,A,b,A1,b1,Lx);
Y=-Y;
%максимум функции
max=Y
%достигается при x
xe=x
```

Результаты работы программы

```
Optimization terminated.
max =
   10.0000
xe =
    2.0000
    0.0000
    0.0000
```

Задание на лабораторную работу

1. Представить математическую постановку задачи

2.Разработать программу решения задачи.

Содержание отчета

1 Экранные формы, показывающие порядок выполнения задач, изложенных в лабораторной работы

2.Постановка задачи для самостоятельной работы

3. Математическая постановка задачи

4. Экранные формы, показывающие порядок выполнения индивидуального задания с соответствующими пояснениями, и результаты, полученные в ходе её выполнения.

Индивидуальные задания для решения общей задачи линейного программирования

Ниже приведены задачи линейного программирования, для которых необходимо построить соответствующую математическую модель и реализовать ее с помощью Matlab.

Вариант 1. Предприятие располагает двумя видами сырья S1 и S2 в количествах 15 и 13 условных единиц и изготавливает из него изделия двух видов П1 и П2. Изготовление единицы изделия П1 требует расхода сырья S1 в 1 усл.ед., S2 в 3 усл.ед., а для производства единицы изделия П2 необходимо сырья S1 – 3 усл.ед., сырья S2 - 1 усл.ед. Известна прибыль от реализации одной единицы продукции каждого вида. Для вида П1 она составляет 2 ден.ед, для вида П2 – 3 ден.ед. Требуется найти оптимальный план производства продукции, реализация которого обеспечит предприятию максимальную прибыль.

Вариант 2. На заводе используется сталь трех марок: А, В, С запасы, которых равны соответственно 10, 16 и 12 ед. Завод выпускает два вида изделий. Для изделия 1 требуется по одной единице стали всех марок. Для изделия 2 требуется 2 единицы стали марки В, одна – марки С и не требуется сталь марки А. От реализации единицы изделия вида

1 завод получает 400 руб. прибыли, а вида 2 – 250 руб. Составить план выпуска продукции, дающий наибольшую прибыль.

Вариант 3. Производитель безалкогольных напитков располагает двумя разливочными машинами А и В по 4 шт. каждой. Машина А спроектирована для пол-литровых бутылок, а машина В – для литровых. Машина А может выпускать до 50 пол-литровых бутылок в 1 мин, а машина В – до 30 литровых бутылок в 1 мин. Каждая из машин работает ежедневно по 6 час, при пятидневной рабочей неделе. Прибыль от продажи одной пол-литровой бутылки составляет 4 цента, а одной литровой бутылки – 10 центов. Недельная продукция не может превосходить 259200 л; рынок за неделю принимает не более 288000 пол-литровых бутылок и не более 180000 литровых бутылок. Сколько бутылок пол-литровых и литровых должна выпускать каждая машина А и В за 1 мин., чтобы максимизировать недельную прибыль производителя от продажи безалкогольных напитков, при имеющихся средствах и условиях.

Вариант 4. На фабрике планируется выпустить продукцию двух артикулов: № 1 и № 2 из одинаковой пряжи на одинаковых станках. Планируемый суммарный выпуск 80000 тыс. м. Известно, что фабрика может выделить не более 8400 т основной пряжи и 4500 т дополнительной. Требуется составить такую производственную программу, при которой был бы перевыполнен запланированный выпуск ткани и суммарный выпуск ткани оказался бы максимальным (данные по расходам приведены в таблице).

Ассортимент продукции	расход пряжи на 1 тыс. м ткани, кг	
	основной	дополнительной
продукция № 1	60	45
продукция № 2	70	30

Вариант 5. На предприятии, выпускающем изделия двух типов, производственная мощность цеха сборки составляет 100 изделий первого и 300 изделий второго типа в сутки. Прибыль от продажи изделия первого типа составляет 2540 руб., а второго - 1804 руб. Отдел технического контроля в состоянии проверить не более 178 изделий любого типа в сутки. Складское помещение способно вмещать 260 мест изделий, при этом изделие первого типа занимает 2 места, а изделие второго типа одно место. Предприятию поставлен план выпустить продукцию на 350 тыс. руб. в сутки. Можно ли выполнить такой план? Можно ли превысить его и, если можно, то, на сколько руб.? Сколько изделий при этом следует выпускать в сутки?

Вариант 6. Завод выпускает 2 вида мороженого: сливочное и шоколадное. Для их изготовления используются 2 исходных продукта: молоко и наполнители, расходы которых на 1 кг мороженого и суточные запасы исходных продуктов даны в таблице:

Исходный продукт	Расход исходных продуктов на 1 кг мороженого		Запас, кг
	Сливочное	Шоколадное	
Молоко	0.82	0.56	412
Наполнители	0.49	0.72	372

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на сливочное мороженое превышает спрос на шоколадное мороженое не более чем на 116 кг. Кроме того, установлено, что спрос на шоколадное мороженое не превышает 382 кг в сутки. Отпускная цена 1 кг сливочного мороженого 110 ден.ед., шоколадного – 145 ден.ед. Определить количество мороженого каждого вида, которое должна производить фирма, чтобы доход от реализации продукции был максимальным.

Вариант 7. Чулочно-носочная фирма производит и продает два вида товаров: мужские носки и женские чулки. Фирма получает прибыль в размере 10 руб. от производства и продажи одной пары чулок и в размере 4 руб. от производства и продажи одной пары носков. Производство каждого изделия осуществляется на трех участках. Затраты труда (в часах) на производство одной пары указаны в следующей табл. 2 для каждого участка:

Участок производства	Чулки	Носки
1	0,023	0,012
2	0,036	0,014
3	0,032	0,026

Рассчитано, что в следующем месяце фирма ежедневно будет располагать следующими ресурсами рабочего времени на каждом из участков: 60 ч на участке 1; 70 ч на участке 2 и 100 ч на участке 3. Сколько пар носков и чулок следует производить ежедневно, если фирма имела максимальную прибыль?

Вариант 8. Фабрика производит два вида красок: первый – для наружных, а второй – для внутренних работ. Для производства красок используются два ингредиента: А и В. Максимально возможные суточные запасы этих ингредиентов составляют 6 и 8 т соответственно. Известны расходы А и В на 1 т соответствующих красок (см. табл.).

Ингреди-енты	Расход ингредиентов, т		Запас, т
	Краска 1-го вида	Краска 2-го вида	
А	1,4	2,1	6,2
В	2,5	1,3	8,1

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску 2-го вида никогда не превышает спроса на краску 1-го вида более, чем на 1,5 т. Кроме того установлено, что спрос на краску 2-го вида никогда не превышает 1,9 т в сутки. Цены одной тонны красок равны: 3500 руб. для краски 1-го вида; 2100 руб. для краски 2-го вида. Какое количество краски каждого вида надо производить, чтобы доход от реализации продукции был максимальным? Какова будет выручка от продажи такой продукции?

Вариант 9. Цех выпускает два вида продукции, используя два вида полуфабрикатов. Продукция используется при комплектовании изделий, при этом на каждую единицу продукции второго вида требуется не более двух единиц продукции первого вида. Нормы расхода полуфабрикатов каждого вида на единицу выпускаемой продукции, общие объемы полуфабрикатов и прибыль от единицы каждой продукции предоставлены в таблице:

Полуфабрикаты	Нормы затрат на единицу продукции		Объем полуфабриката
	П1	П2	
1	1	2	800
2	6	2	2400
Прибыль, руб.	1070	1320	

Определить план производства, доставляющий максимум прибыли от реализации этой продукции. Определить оптимальные объемы продукции и прибыль от ее реализации.

Вариант 10. Фирма производит два безалкогольных широко популярных напитка "Колокольчик" и "Буратино". Для производства 1 л.

"Колокольчика" требуется 0,02 ч. работы оборудования, а для "Буратино" – 0,04 ч., а расход специального ингредиента на них составляет 0,01 кг. и 0,04 кг. на 1 л. соответственно. Ежедневно в распоряжении фирмы 16 кг. специального ингредиента и 24 ч. работы оборудования. Доход от продажи 1 л. "Колокольчика" составляет 4 руб., а "Буратино" – 9 руб.

Определите ежедневный план производства напитков каждого вида, обеспечивающий максимальный доход от продажи.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3

Расчет параметров СМО в неустановившемся режиме

Целью работы является приобретение навыка расчета параметров СМО

Рассмотрим работу СМО с отказами, состоящую из 2 каналов обслуживания, которая обслуживает поток заявок с интенсивностью ***a*=3** при интенсивности обслуживания заявок ***b*=2.** Работа данной СМО описывается системой дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0}{dt} = -3P_0 + 2P_1 \\ \dfrac{dP_1}{dt} = 3P_0 + 5P_1 + 4P_1 \\ \dfrac{dP_2}{dt} = 3P_1 - 4P_2 \end{cases} \qquad P_0(0) = 1, P_1(0) = 0, P_2(0) = 0$$

Учитывая, что неизвестные функции этой системы связаны соотношением

$P_0 + P_1 + P_2 = 1$, можно выразим одну из них через две другие и исключить из системы, получив систему дифференциальных уравнений второго порядка. Если, например, исключить неизвестное P_2, то получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0}{dt} = -3P_0 + 2P_1 \\ \dfrac{dP_1}{dt} = -P_0 - 9P_1 + 4 \end{cases} \quad P_0(0) = 1, P_1(0) = 0$$

, при этом

$$P_2 = 1 - P_0 - P_1$$

Численные методы решения дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots x_m) \\ \dot{x}_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots x_m) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots x_m) \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots. \\ x_3(0) = x_{30} \end{matrix}$$

Пусть исходная задача, представленная в виде приведенной выше системы ОДУ, решается на временном отрезке [0,T] . Введем на указанном отрезке равномерную сетку с шагом Δt>0, то есть множество узлов $t_k = \Delta t \cdot k$, $k = 0,1,2,\ldots, N$. Тогда $\Delta t = T/N$.

Численным решением приведенной задачи называют таблицу $\{t_k, \bar{x}_k : k = 0,1,2,\ldots, N\}$, полученную с помощью численного метода.

Пусть $\bar{v}(t)$ есть точное решение данной системы, а $\bar{x}_k = \bar{x}(t_k)$ ее приближенное решение, которое является сеточной функцией, то есть функцией определенной в узлах сетки.

Говорят, что численный метод сходится в точке $t = t_k$, если $\left\| \bar{x}_k - \bar{v}(t_k) \right\| \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

То есть при $\Delta t \to 0$ значения полученного решения должны стремиться к значениям точного решения, вычисленного в узлах сетки.

Рассмотрим некоторые методы численного решения дифференциальных уравнений

Явный метод Эйлера

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$dx/dt = \varphi(t, x), \quad x(0) = x_0 .$$

В данном уравнении производная неизвестной функции dx/dt приближенно заменяется разностным отношением $\dfrac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t}$, а уравнение заменяется разностным уравнением

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} = \varphi(t_k, x_k) .$$

После этого легко получить расчетную формулу метода Эйлера

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t \cdot \varphi(t_k, x_k), \quad k = 0,1,2,..., N .$$

Методы Рунге- Кутта

Получившие широкое распространение методы Рунге-Кутта отличаются от разностных методов тем, что в них приходиться вычислять значения правых частей дифференциальных уравнений не только в узловых точках, но и в некоторых промежуточных. Приведем некоторые расчетные формулы, используемые при реализации этих методов

1. Формулы метода Рунге-Кутта третьего порядка. Рассмотрим то же уравнение.

$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{6}K_1 + \frac{2}{3}K_2 + \frac{1}{6}K_3, \quad K_1 = \Delta t \cdot \varphi(t_k, x_k),$$

$$K_2 = \Delta t \cdot \varphi(t_k + {}^{\Delta t}\!/_{2}, x_k + {}^{K_1}\!/_{2}),$$

$$K_3 = \Delta t \cdot \varphi(t_k + \Delta t, x_k - K_1 + {}^{K_2}\!/_{2}).$$

2.Формулы Рунге-Кутта четвертого порядка для решения системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z) \\ z' = g(x_1, y, z) \end{cases} \qquad \begin{matrix} y(0) = y_0 \\ z(0) = z_0 \end{matrix}$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}K_1 + \frac{1}{3}K_2 + \frac{1}{3}K_3 + \frac{1}{6}K_4,$$

$$z_{k+1} = z_k + \frac{1}{6}M_1 + \frac{1}{3}M_2 + \frac{1}{3}M_3 + \frac{1}{6}M_4,$$

$$K_1 = \Delta x \cdot f(x_k, y_k, z_k), \quad M_1 = \Delta x \cdot g(x_k, y_k, z_k),$$

$$K_2 = \Delta x \cdot f(x_k + {}^{\Delta x}\!/_{2}, y_k + {}^{K_1}\!/_{2}, z_k + {}^{M_1}\!/_{2}),$$

$$M_2 = \Delta x \cdot g(x_k + \Delta x/2, y_k + K_1/2, z_k + M_1/2),$$

$$K_3 = \Delta x \cdot f(x_k + \Delta x/2, y_k + K_2/2, z_k + M_2/2),$$

$$M_3 = \Delta x \cdot g(x_k + \Delta x/2, y_k + K_2/2, z_k + M_2/2),$$

$$K_4 = \Delta x \cdot f(x_k + \Delta x, y_k + K_3, z_k + M_3),$$

$$M_4 = \Delta x \cdot g(x_k + \Delta x, y_k + K_3, z_k + M_3).$$

Последнюю формулу используем для решения рассматриваемой системы дифференциальных уравнений

В нашем случае $x = t$, $y = P_0$, $z = P_1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$, $f(x, y, z) = -3y + 2z$, $g(x, y, z) = -y - 9z + 4$.

Кроме того, обозначим *w=P2*

Программа решения приведенной выше системы дифференциальных уравнений имеет вид:

Sub CMO()

Вначале программы описываются переменные, которые в ней используются

Dim t(1 To 55)
Dim y(1 To 55)
Dim z(1 To 55)
Dim w(1 To 55)
Dim rk(1 To 55)
Dim vo(1 To 55)

Вводится значения шага

dt = 0.05

Вводятся начальные значения независимой переменной t и неизвестных функций

```
t(1) = 0
y(1) = 1
z(1) = 0
w(1) = 0
rk(1) = 0
vo(1) = 1
```

Вычисляются значения неизвестных функций в соответствии с формулой метода Рунге-Кутта

```
For i = 1 To 54
t(i + 1) = t(i) + dt
K1 = Fd(y(i), z(i)) * dt
M1 = Gd(y(i), z(i)) * dt
K2 = Fd(y(i) + K1 / 2, z(i) + M1 / 2) * dt
M2 = Gd(y(i) + K1 / 2, z(i) + M1 / 2) * dt
K3 = Fd(y(i) + K2 / 2, z(i) + M2 / 2) * dt
M3 = Gd(y(i) + K2 / 2, z(i) + M2 / 2) * dt
K4 = Fd(y(i) + K3, z(i) + M3) * dt
M4 = Gd(y(i) + K3, z(i) + M3) * dt
y(i + 1) = y(i) + (K1 + K2 + K3 + K4) / 6
z(i + 1) = z(i) + (M1 + M2 + M3 + M4) / 6
w(i + 1) = 1 - y(i + 1) - z(i + 1)
```

Вычисляются значения среднего числа занятых каналов rk и вероятность обслуживания vo

```
rk(i + 1) = z(i + 1) + 2 * w(i + 1)
vo(i + 1) = 1 - w(i + 1)
```

Полученные результаты выводятся в таблицу Excel

```
Cells(1, i) = t(i)
Cells(2, i) = y(i)
Cells(3, i) = z(i)
Cells(4, i) = w(i)
Cells(5, i + 1) = rk(i)
Cells(6, i + 1) = vo(i)
Next
End Sub
```

Подпрограмма вычисления функции

```
Function Fd(y, z)
```

```
Fd = -3 * y + 2 * z
End Function
```

Подпрограмма вычисления функции

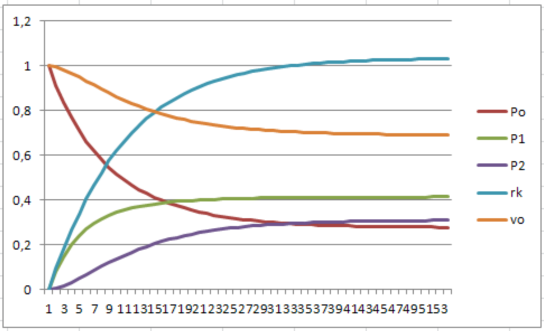
```
Function Gd(y, z)
Gd = -y - 9 * z + 4
End Function
```

```
Sub CMO()
Dim t(1 To 55)
Dim y(1 To 55)
Dim z(1 To 55)
Dim w(1 To 55)
Dim rk(1 To 55)
Dim vo(1 To 55)
dt = 0.05
t(1) = 0
y(1) = 1
z(1) = 0
w(1) = 0
rk(1) = 0
vo(1) = 1
For i = 1 To 54
t(i + 1) = t(i) + dt
K1 = Fd(y(i), z(i)) * dt
M1 = Gd(y(i), z(i)) * dt
K2 = Fd(y(i) + K1 / 2, z(i) + M1 / 2) * dt
M2 = Gd(y(i) + K1 / 2, z(i) + M1 / 2) * dt
K3 = Fd(y(i) + K2 / 2, z(i) + M2 / 2) * dt
M3 = Gd(y(i) + K2 / 2, z(i) + M2 / 2) * dt
K4 = Fd(y(i) + K3, z(i) + M3) * dt
M4 = Gd(y(i) + K3, z(i) + M3) * dt
y(i + 1) = y(i) + (K1 + K2 + K3 + K4) / 6
z(i + 1) = z(i) + (M1 + M2 + M3 + M4) / 6
w(i + 1) = 1 - y(i + 1) - z(i + 1)
rk(i + 1) = z(i + 1) + 2 * w(i + 1)
vo(i + 1) = 1 - w(i + 1)
Cells(1, i + 1) = t(i)
Cells(2, i + 1) = y(i)
Cells(3, i + 1) = z(i)
Cells(4, i + 1) = w(i)
Cells(5, i + 1) = rk(i)
Cells(6, i + 1) = vo(i)
Next
End Sub
```

```
Next
End Sub

Function Fd(y, z)
Fd = -3 * y + 2 * z
End Function

Function Gd(y, z)
Gd = -y - 9 * z + 4
End Function
```

Результаты вычислений

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	t	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6
2	Po	1	0,911224	0,834921	0,769026	0,711868	0,66209	0,618582	0,580429	0,546876	0,517291	0,491146	0,467994	0,447456
3	P1	0	0,082694	0,147471	0,198382	0,238541	0,270349	0,295654	0,315883	0,332137	0,345271	0,355943	0,364669	0,371847
4	P2	0	0,006082	0,017608	0,032593	0,049591	0,067561	0,085764	0,103688	0,120986	0,137438	0,152911	0,167338	0,180698
5	rk	0	0,094858	0,182686	0,263567	0,337723	0,405471	0,467183	0,523258	0,57411	0,620147	0,661765	0,699344	0,733242
6	vo	1	0,993918	0,982392	0,967407	0,950409	0,932439	0,914236	0,896312	0,879014	0,862562	0,847089	0,832662	0,819302



Задание на лабораторную работу

Рассчитать изменение во времени среднего числа занятых каналов rk и вероятность обслуживания заявки vo СМО с отказами, состоящей из двух каналов обслуживания, работа которой описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Все исходные данные приведены в таблице ниже.

Вариант	Система ОДУ	Значения параметров
1	$\begin{cases} P_0' = -(a+b)P_0 - bP_2 + b \\ P_2' = -aP_0 - (a+2b)P_2 + a \end{cases}$ $P_1 = 1 - P_0 - P_2, P_0(0) = 1, P_2(0) = 0$	$a = 3, b = 3$
2	$\begin{cases} P_0' = -(a+b)P_0 - bP_2 + b \\ P_2' = -aP_0 - (a+2b)P_2 + a \end{cases}$ $P_1 = 1 - P_0 - P_2, P_0(0) = 1, P_2(0) = 0$	$a = 4, b = 5$
3	$\begin{cases} P_1' = -(2a+b)P_1 + (2b-a)P_2 + a \\ P_2' = aP_1 - 2bP_2 \end{cases}$ $P_0 = 1 - P_1 - P_2, P_1(0) = 0, P_2(0) = 0$	$a = 3, b = 3$
4	$\begin{cases} P_1' = -(2a+b)P_1 + (2b-a)P_2 + a \\ P_2' = aP_1 - 2bP_2 \end{cases}$ $P_0 = 1 - P_1 - P_2, P_1(0) = 0, P_2(0) = 0$	$a = 5, b = 4$
5	$\begin{cases} P_1' = -(2a+b)P_1 + (2b-a)P_2 + a \\ P_2' = aP_1 - 2bP_2 \end{cases}$ $P_0 = 1 - P_1 - P_2, P_1(0) = 0, P_2(0) = 0$	$a = 3, b = 4$

6	$\begin{cases} P_1' = -(2a+b)P_1 + (2b-a)P_2 + a \\ P_2' = aP_1 - 2bP_2 \end{cases}$ $P_0 = 1 - P_1 - P_2, P_1(0) = 0, P_2(0) = 0$	$a = 4, b = 5$
7	$\begin{cases} P_1' = -(2a+b)P_1 + (2b-a)P_2 + a \\ P_2' = aP_1 - 2bP_2 \end{cases}$ $P_0 = 1 - P_1 - P_2, P_1(0) = 0, P_2(0) = 0$	$a = 5, b = 5$
8	$\begin{cases} P_0' = -(a+b)P_0 - bP_2 + b \\ P_2' = -aP_0 - (a+2b)P_2 + a \end{cases}$ $P_1 = 1 - P_0 - P_2, P_0(0) = 1, P_2(0) = 0$	$a = 5, b = 3$
9	$\begin{cases} P_0' = -(a+b)P_0 - bP_2 + b \\ P_2' = -aP_0 - (a+2b)P_2 + a \end{cases}$ $P_1 = 1 - P_0 - P_2, P_0(0) = 1, P_2(0) = 0$	$a = 5, b = 4$
10	$\begin{cases} P_0' = -(a+b)P_0 - bP_2 + b \\ P_2' = -aP_0 - (a+2b)P_2 + a \end{cases}$ $P_1 = 1 - P_0 - P_2, P_0(0) = 1, P_2(0) = 0$	$a = 3, b = 2$

Содержание отчета

1.Постановка задачи для самостоятельной работы

2. Экранные формы, показывающие порядок выполнения индивидуального задания с соответствующими пояснениями, и результаты, полученные в ходе её выполнения.

Контрольные вопросы

1. Что означает сходимость численного метода?

2. Напишите разностную формулу для вычисления производной функции
3. Напишите формулу явного метода Эйлера
4. Напишите соотношение, связывающее величины P_0, P_1, P_2.
5. Каковы начальные значения величин P_0, P_1, P_2?

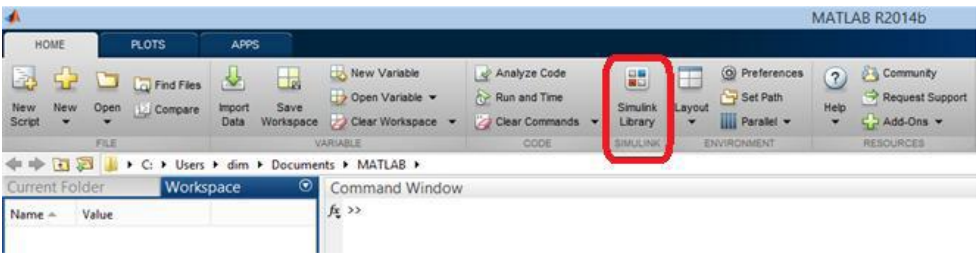
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4

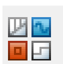
Решение дифференциальных уравнений при помощи пакета Simulink

Цель работы: приобретение навыков решения дифференциальных уравнений при помощи пакета Simulink

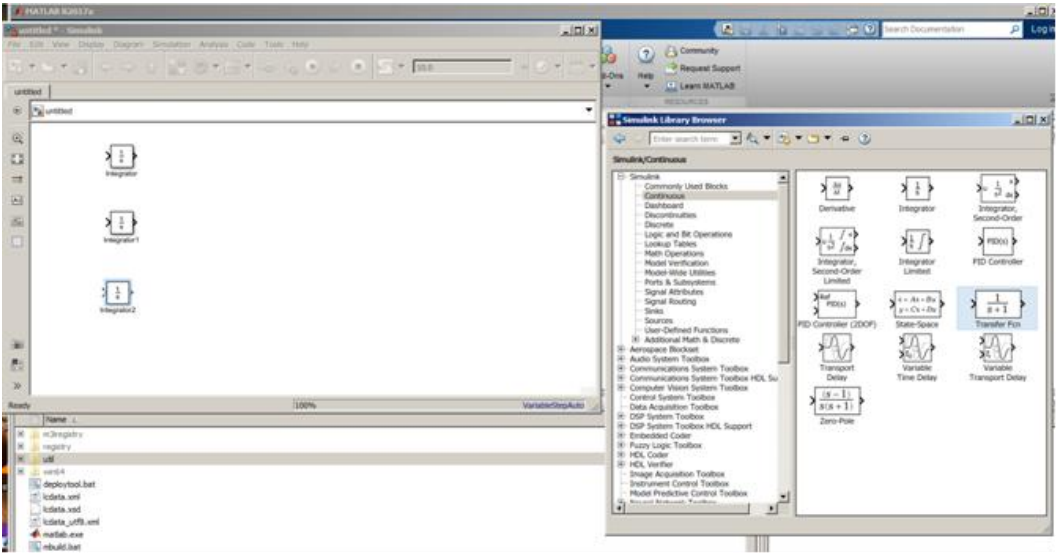
Работа с пакетом SIMULINK,

Запуск пакета SIMULINK, интегрированного в среду MATLAB, осуществляется нажатием кнопки Simulink в панели инструментов (рисунок) либо командой >> Simulink в командной строке MATLAB.



Далее при помощи кнопки  открывается окно браузера библиотек Simulink В окне браузера содержится дерево компонентов библиотек Simulink. Для просмотра того или иного раздела библиотеки достаточно выделить его мышью – в правой части окна

«Simulink Browser Library» появится набор пиктограмм компонентов активного раздела библиотеки.

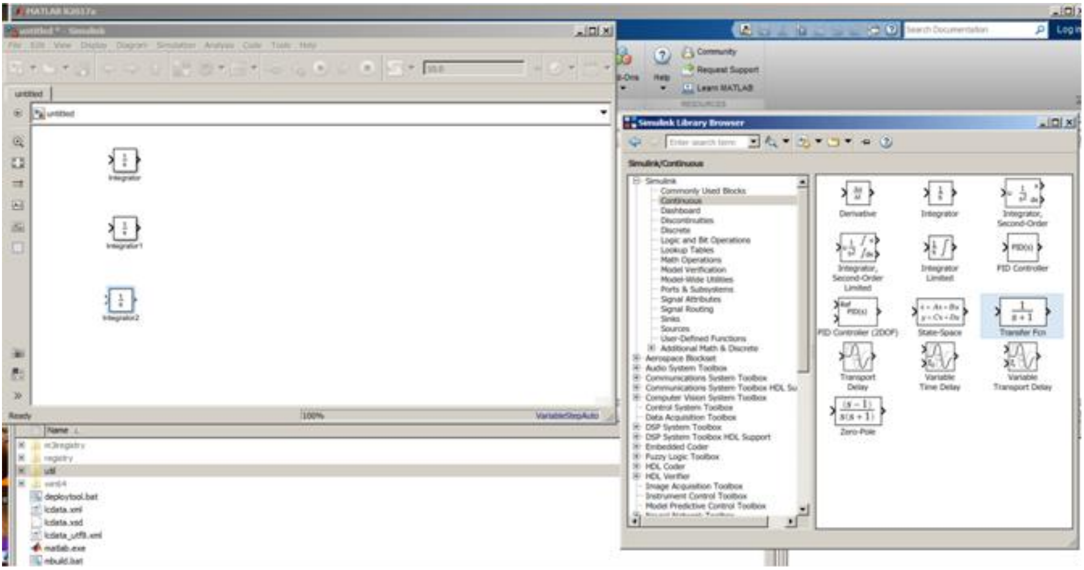


Слева располагается окно, в котором производится построение соответствующей модели.

Рассмотрим процесс построения модели решения системы дифференциальных уравнений, соответствующей СМО с отказами

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0}{dt} = -3P_0 + 2P_1 \\ \dfrac{dP_1}{dt} = 3P_0 + 5P_1 + 4P_1 \\ \dfrac{dP_2}{dt} = 3P_1 - 4P_2 \end{cases} \qquad P_0(0) = 1, P_1(0) = 0, P_2(0) = 0$$

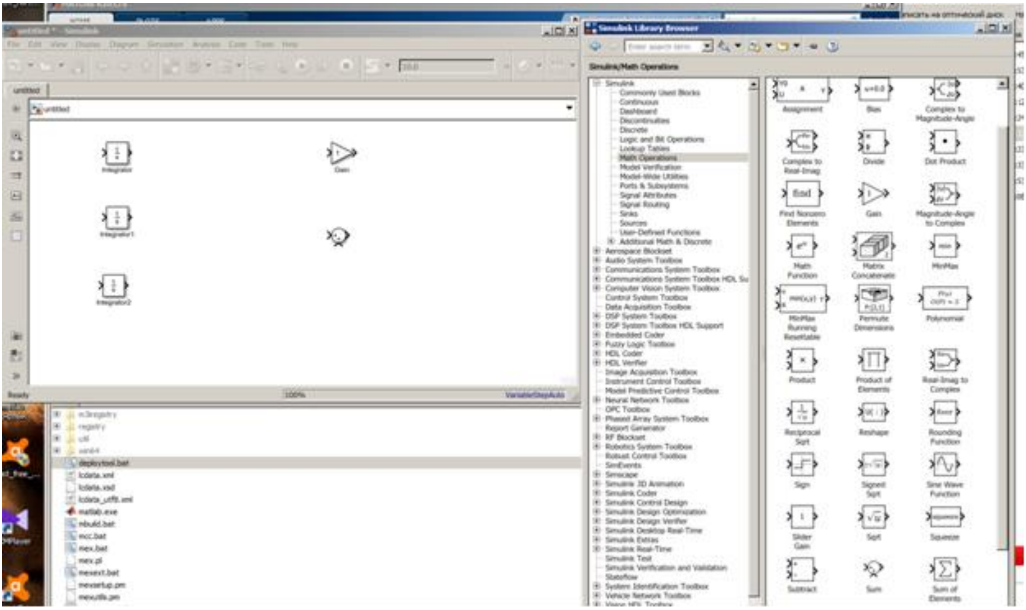
Чтобы получить значения для $P_0(t), P_1(t), P_2(t)$ надо проинтегрировать каждое уравнение системы, поэтому необходимы три блока интегрирования integrator, integrator1, integrator2, которые можно перетащить мышью в рабочее окно из раздела библиотеки Continuous



Из этих блоков будет выходить сигнал, соответствующий величинам $P_0(t), P_1(t), P_2(t)$.

В соответствии с видом правой части первого уравнения сигнал, исходящий из блока integrator должен быть усилен в 3 раза и взят с обратным знаком.

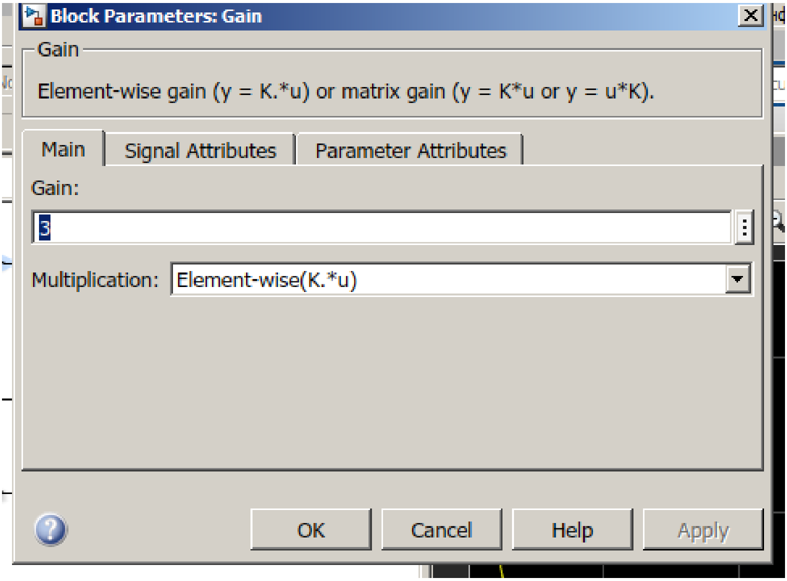
Для его усиления из раздела библиотеки Math Operator перетащим мышкой блок усиления Gain и блок суммирования Sum, для прибавления к полученному сигналу удвоенный сигнал, выходящий из блока integrator1, соответствующий величине $P_1(t)$ (в соответствии с правой частью 1 уравнения)



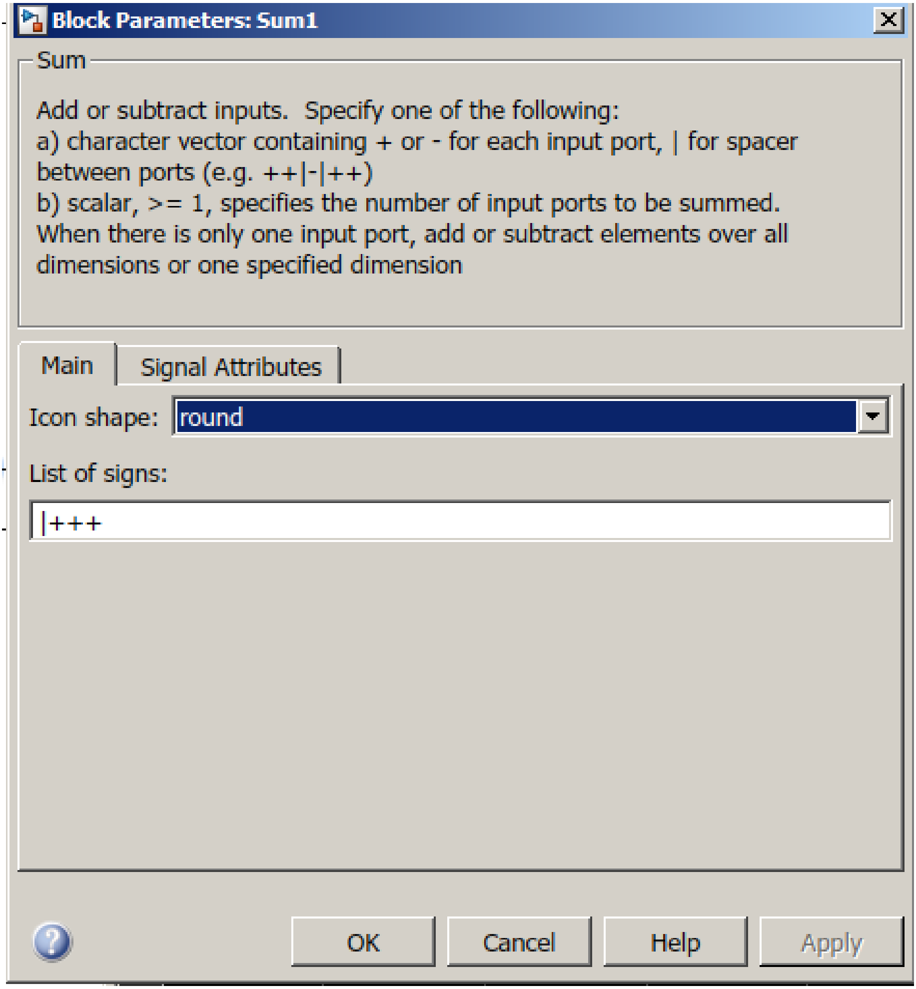
Сигнал, выходящий из блока integrator1, должен быть усилен в 2 раза, поэтому в рабочее окно переместим еще и блок Gain1, через который сигнал от integrator1 должен пройти к блоку Sum

Соединим эти блоки integrator , Sum и Gain с помощью мыши. Соединим блок integrator1 и Sum через Gain1. Блоки имеют входы и (или) выходы. Для соединения блоков курсор мыши устанавливается на выходе блока, от которого должно исходить соединение. Держа нажатой левую кнопку мыши, надо плавно переместить курсор к входу следующего блока. Ответвление от уже созданных линий производится при помощи зажатой правой клавиши мыши в точке необходимого отвода.

Для определения коэффициента усиления блока Gain надо щелкнуть мышью на соответствующем блоке и в открывшемся окне ввести число, которое укажет, во сколько раз будет усилен сигнал.

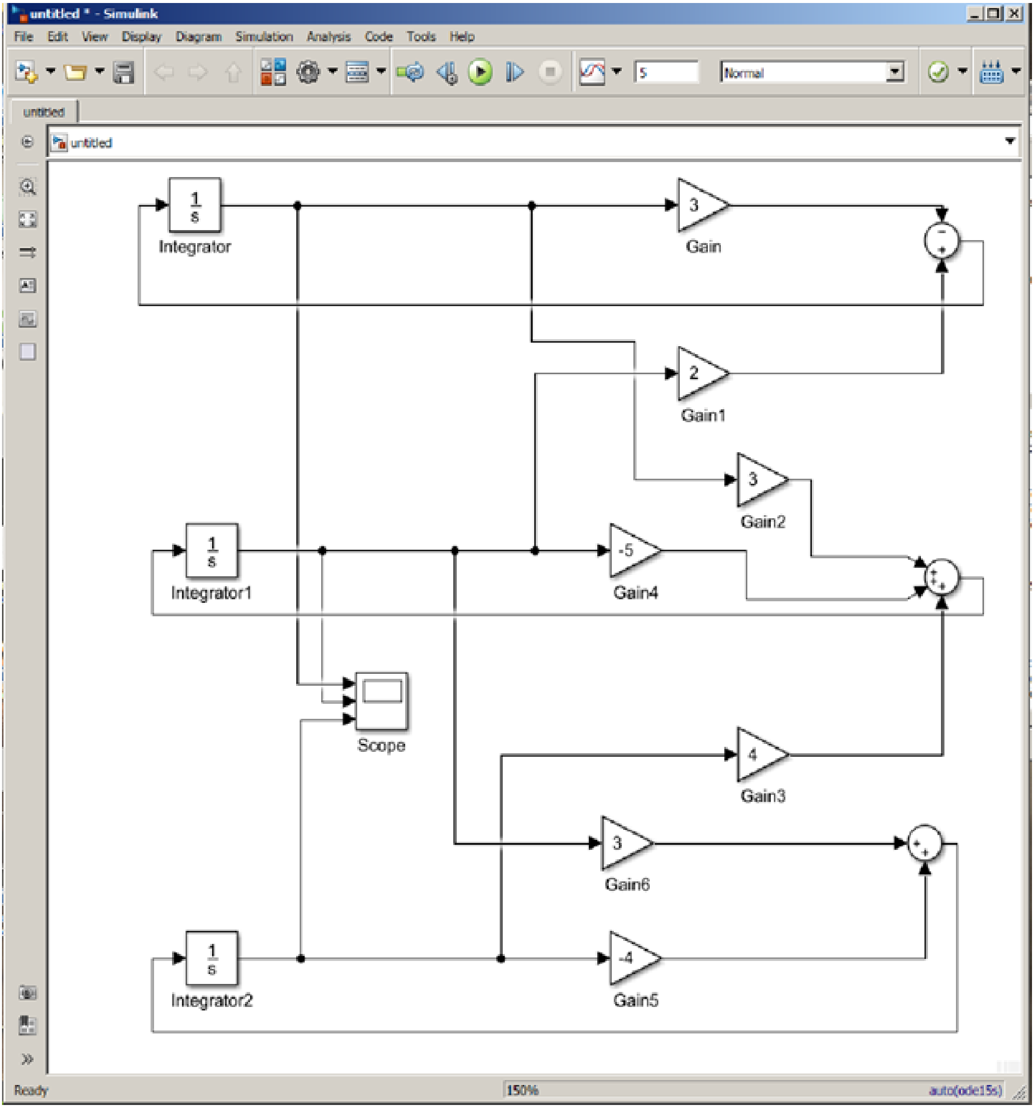


Аналогичным образом можно определить какое количество сигналов будет просуммировано в блоке Sum и, с каким знаком будет суммироваться каждый сигнал.



Установим коэффициенты усиления в Gain -3, и в Gain1-2 в соответствии с уравнением 1 системы.

Выход блока Sum соединяется с входом блока integrator и тем завершается моделирование 1-го уравнения системы



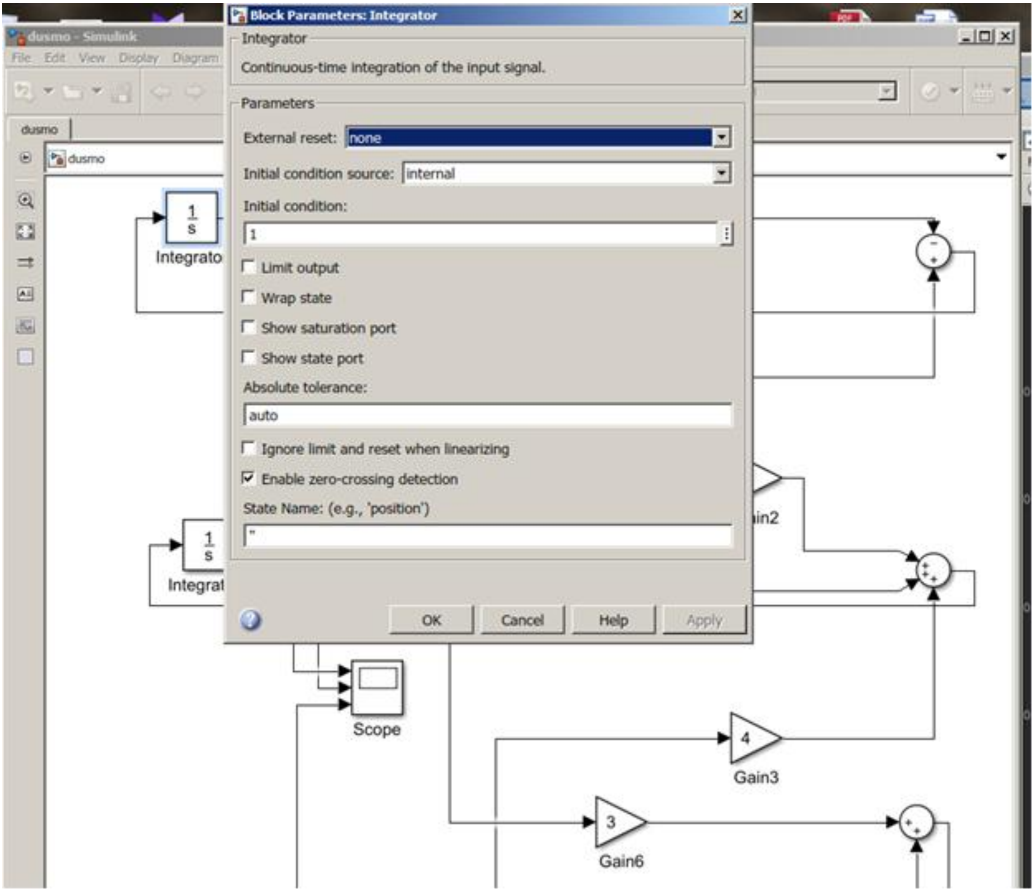
Для моделирования второго уравнения соединим блока integrator1через Gain4 с блоком Sum, имеющим 3 входа. С этим же блоком Sum соединим integrator через блок Gain2 и integrator2 через блок Gain3. Установим коэффициенты усиления в блоке Gain2 – 3, в блоке Gain3 – 4, в блоке Gain4 – -5, что соответствует уравнению 2.

Выход блока Sum соединяется с входом блока integrator1 и тем завершается моделирование 2-го уравнения системы.

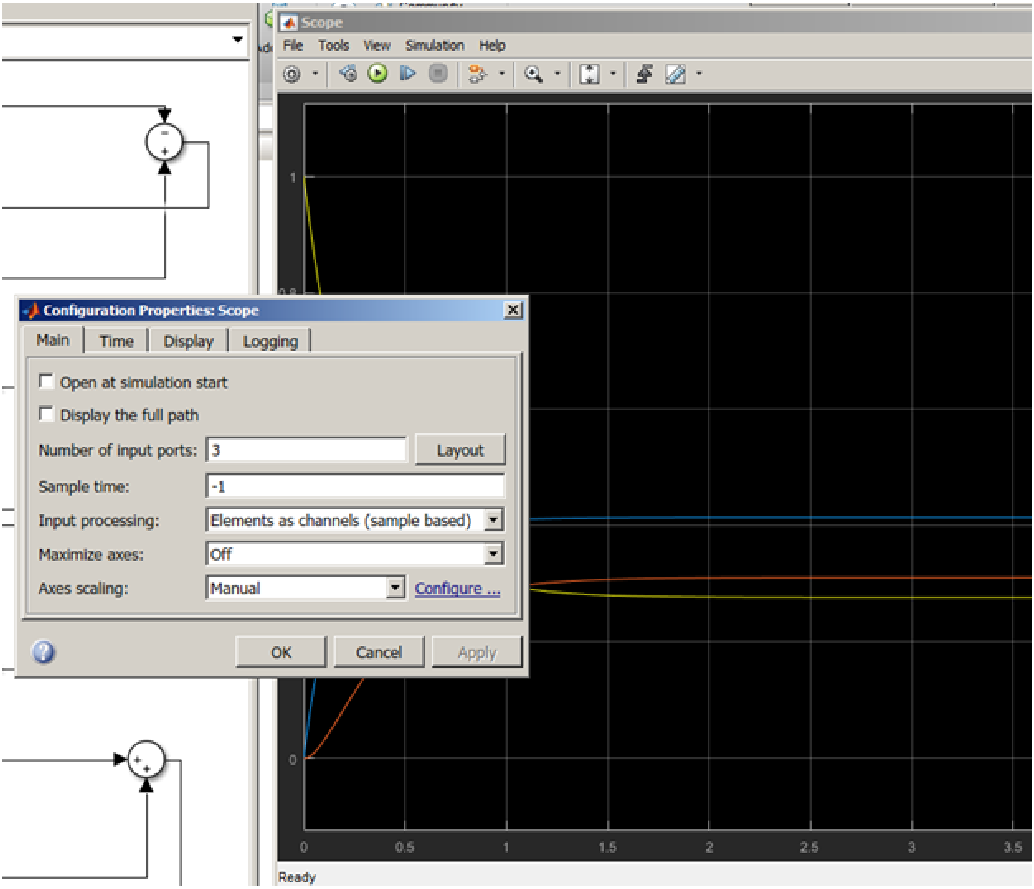
Для моделирования 3-го уравнения соединим блока integrator2 через Gain5 с блоком Sum, имеющим 2 входа. С этим же блоком Sum соединим integrator1 через блок Gain6 . Установим коэффициенты усиления в блоке Gain5 – -4, в блоке Gain6 – 3, в блоке Gain4 – -5, что соответствует уравнению 4.

Выход блока Sum соединяется с входом блока integrator1 и тем завершается моделирование 2-го уравнения системы.

Далее необходимо установить начальные условия для блоков integrator, integrator1, integrator2. Для этого надо поочередно дважды щелкнуть по каждому из этих блоков и в открывшемся окне в позиции Initial Condition ввести соответствующее начальным данным число (1 для integrator и 0 для integrator1 и integrator2).



Для того, чтобы можно было видеть результаты работы модели, переместим из раздела Sinks ,блок Scope в рабочее окно. Далее соеденим этот блок с выходом блоков integrator, integrator1, integrator2. Чтобы получить три входа в блоке Scope, надо дважды щелкнуть по этому блоку и в открывшемся окне



щелкнуть по кнопке, располагающейся ниже пункта меню File. После этого ввести 3 в поле Number of input ports.

Перед запуском модели необходимо настроить параметры моделирования.

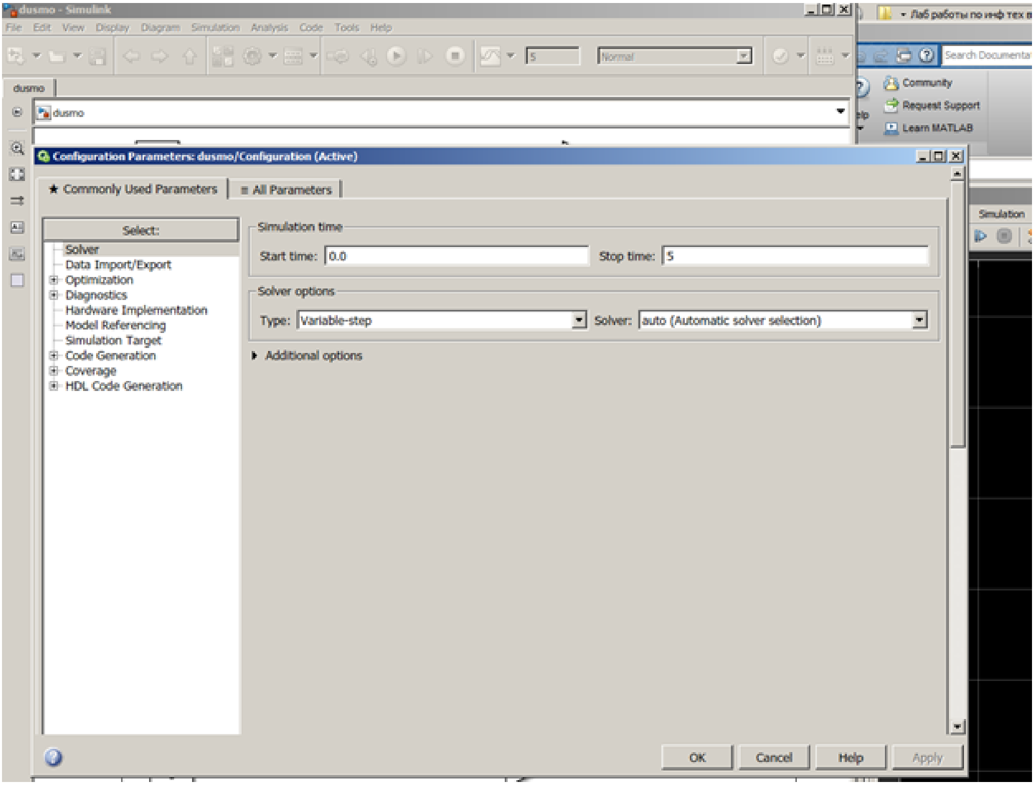
Для настройки параметров моделирования используется команда меню «Simulation ⇒ Model Configuration Parameters…(Ctrl+E)». После ее выполнения появляется окно установки параметров моделирования, имеющее ряд вкладок с довольно большим числом параметров

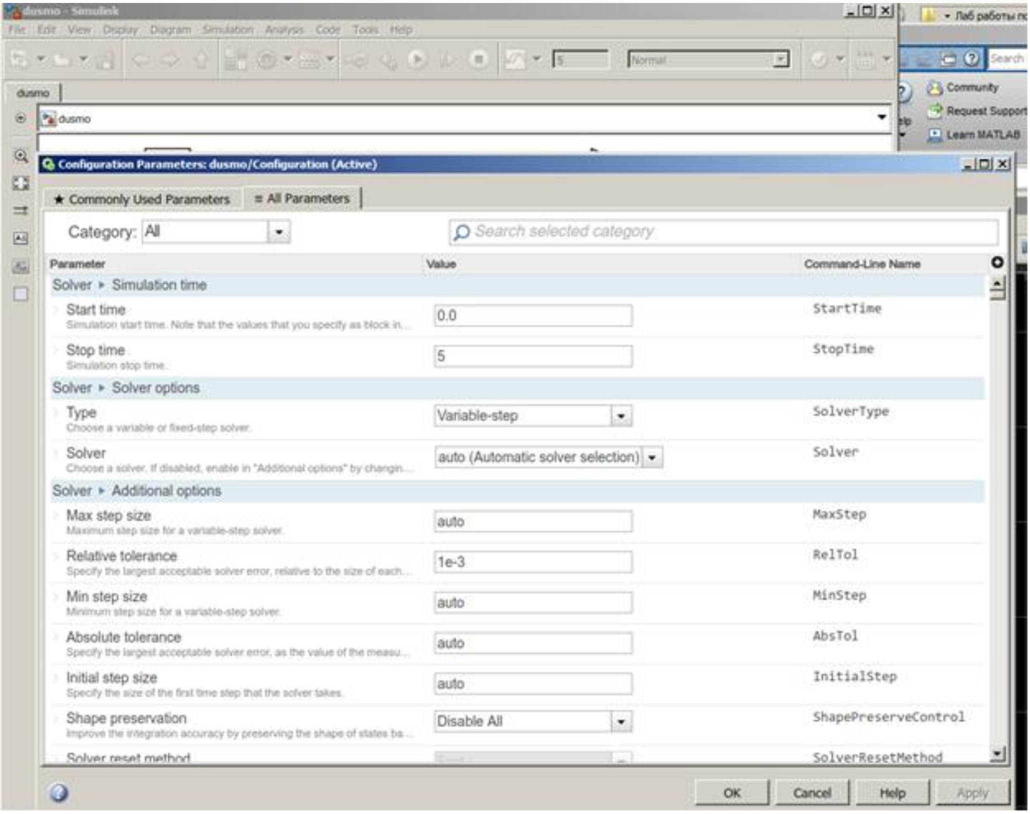
Наиболее важной является вкладка, открываемая по умолчанию, – «Solver» (Решатель). Эта вкладка позволяет установить параметры решающего устройства системы моделирования Simulink. К числу важнейших параметров решателя относится время моделирования — «Simulation time». Время моделирования определяет собственное время модели, в течение которого выполняется моделирование и не имеет отношения к реальному времени, затрачиваемому на моделирование. Оно задается начальным временем «Start time» (обычно 0) и конечным временем «Stop time» (по умолчанию 10). В качестве конечного времени может быть установлена бесконечность (inf). Равенство «Stop time» бесконечности означает, что моделирование будет происходить бесконечно долго, пока мы не прервем его. Однако в этом случае трудно получить различимые осциллограммы работы устройства, поэтому в большинстве случаев удобнее задавать конечные значения «Stop time».

Первостепенное значение имеют две опции решателя в поле «Solver options»: тип решения «Type» и метод решения «Solver». Возможны два типа решения:

- «Variable-step» — решение с переменным шагом;

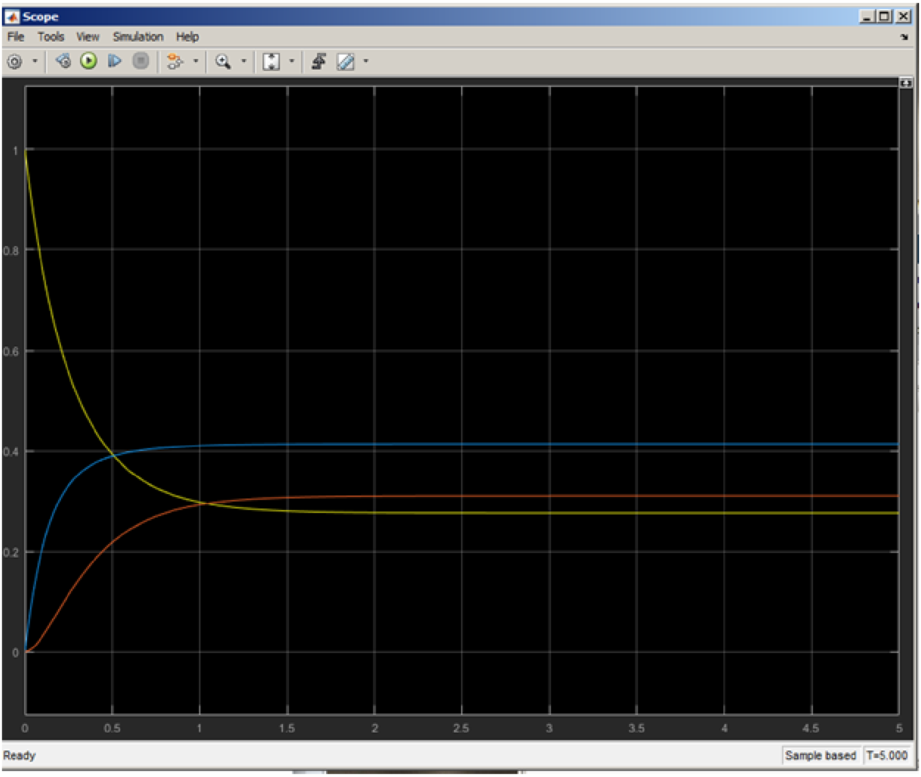
- «Fixed-step» — решение с фиксированным шагом.


dusmo - Simulink
File Edit View Display Diagram Simulation Analysis Code Tools Help
Community
Request Support
Learn MATLAB
Configuration Parameters: dusmo/Configuration (Active)
Commonly Used Parameters
All Parameters
Select:
Solver
Data Import/Export
Optimization
Diagnostics
Hardware Implementation
Model Referencing
Simulation Target
Code Generation
Coverage
HDL Code Generation
Simulation time
Start time: 0.0
Stop time: 5
Solver options
Type: Variable-step
Solver: auto (Automatic solver selection)
Additional options
OK
Cancel
Help
Apply



Для запуска симуляции следует выполнить команду «Simulation ⇒ Run»

Чтобы получить результаты работы модели в графическом виде следует дважды щелкнуть по соответствующему блоку Scope.



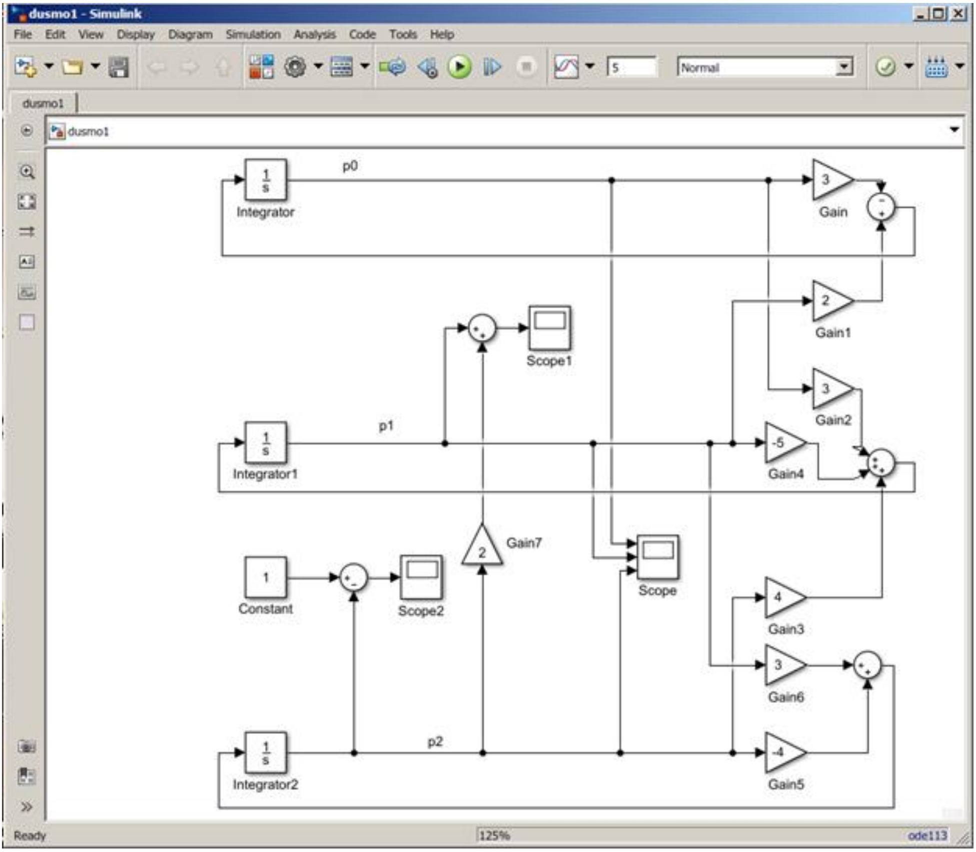
Используя построенную модель, определим изменение во времени некоторых характеристик СМО, например как в предыдущем пункте среднее число занятых каналов rk и вероятность обслуживания заявки vo, используя формулы

$$rk=1*P_1(t)+2*P_2(t),\ \ vo=1-P_2(*t).$$

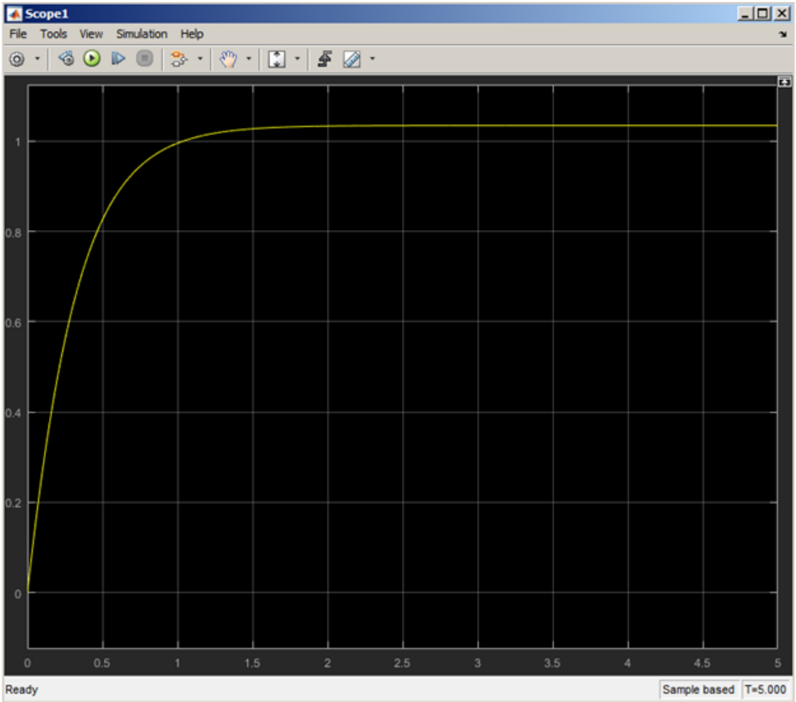
Для этого добавим в рабочее окно к уже имеющимся блокам два блока Scope, два блока Sum, блок Gain7 и блок Constant из раздела Sources, который является источником сигнала постоянной величины, не меняющейся во времени. В нашем случае он будет нужен для определения вероятности обслуживания заявки vo и будет выдавать постоянный сигнал единичной величины.

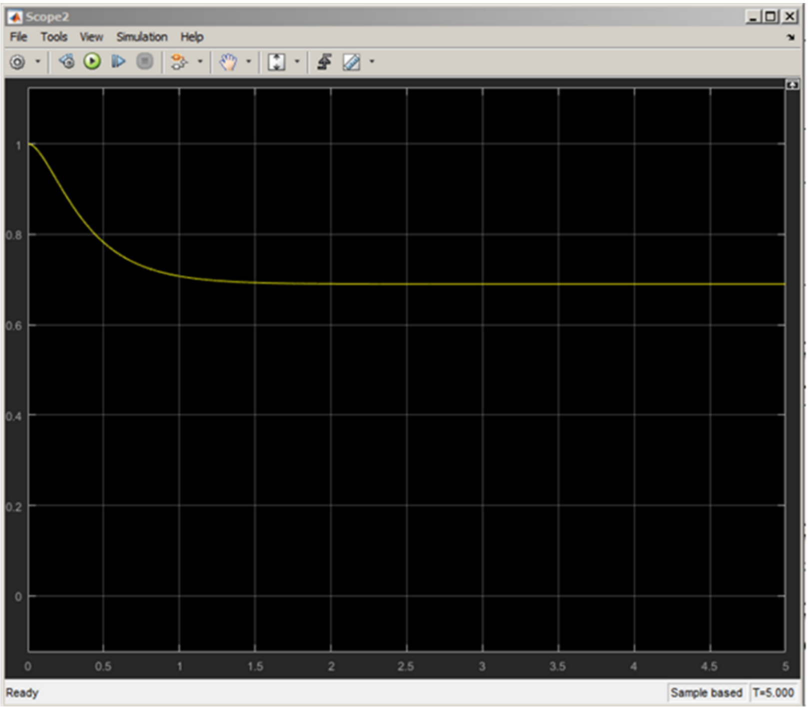
Соединим с двумя входами одного из блоков Sum сигнал, выходящий из блока integrator1 и сигнал выходящий из блока integrator2, через блок Gain7 с коэффициентом усиления 2 (в соответствии с формулой, определяющей величину rk). Для того чтобы можно было увидеть результаты симуляции, выход данного блока Sum соединим с блоком Scope1. Входы другого блока Sum соединим с блоком Constant, установив на нем величину испускаемого сигнала равную 1, и с блоком integrator2. Для того, чтобы установить единичный уровень сигнала, выходящего из блока Constant, следует щелкнуть по этому блоку и в открывшемся окне ввести 1. Так как в силу формулы для vo сигнал от блока integrator2 должен вычитаться из 1, то соответствующий вход блока

должен быть помечен знаком «-». Для этого надо щелкнуть по блоку Sum и в открывшемся окне ввести знак «-» в соответствующее поле. Для того чтобы можно было увидеть результаты симуляции, выход данного блока Sum соединим с блоком Scope2. В результате получим модель, изображенную на рисунке.



После запуска симуляции будут получены нижеследующие результаты работы модели.


Scope1
File Tools View Simulation Help
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5
Ready
Sample based
T=5.000



Задание для самостоятельной работы

Рассчитать изменение во времени среднего числа занятых каналов rk и вероятность обслуживания заявки vo СМО с отказами, состоящей из двух каналов обслуживания, работа, которой описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), возможности пакета SIMULINK. Результаты представить в графическом виде. Все исходные данные приведены в таблице ниже.

Вариант	Система ОДУ	Значения параметров
1	$\begin{cases} P_0' = -(a+b)P_0 - bP_2 + b \\ P_2' = -aP_0 - (a+2b)P_2 + a \end{cases}$ $P_1 = 1 - P_0 - P_2, P_0(0) = 1, P_2(0) = 0$	$a = 3, b = 3$

2	$\begin{cases} P_0' = -(a+b)P_0 - bP_2 + b \\ P_2' = -aP_0 - (a+2b)P_2 + a \end{cases}$ $P_1 = 1 - P_0 - P_2, P_0(0) = 1, P_2(0) = 0$	$a = 4, b = 5$
3	$\begin{cases} P_0' = -(a+b)P_0 - bP_2 + b \\ P_2' = -aP_0 - (a+2b)P_2 + a \end{cases}$ $P_1 = 1 - P_0 - P_2, P_0(0) = 1, P_2(0) = 0$	$a = 5, b = 3$
4	$\begin{cases} P_0' = -aP_0 - bP_1 \\ P_1' = (a-2b)P_0 - (a+3b)P_1 + 2b \end{cases}$ $P_2 = 1 - P_0 - P_1, P_0(0) = 1, P_2(0) = 0$	$a = 3, b = 3$
5	$\begin{cases} P_0' = -aP_0 - bP_1 \\ P_1' = (a-2b)P_0 - (a+3b)P_1 + 2b \end{cases}$ $P_2 = 1 - P_0 - P_1, P_0(0) = 1, P_2(0) = 0$	$a = 5, b = 3$
6	$\begin{cases} P_0' = -aP_0 - bP_1 \\ P_1' = (a-2b)P_0 - (a+3b)P_1 + 2b \end{cases}$ $P_2 = 1 - P_0 - P_1, P_0(0) = 1, P_2(0) = 0$	$a = 3, b = 4$
7	$\begin{cases} P_1' = -(2a+b)P_1 + (2b-a)P_2 + a \\ P_2' = aP_1 - 2bP_2 \end{cases}$ $P_0 = 1 - P_1 - P_2, P_1(0) = 0, P_2(0) = 0$	$a = 3, b = 3$
8	$\begin{cases} P_1' = -(2a+b)P_1 + (2b-a)P_2 + a \\ P_2' = aP_1 - 2bP_2 \end{cases}$ $P_0 = 1 - P_1 - P_2, P_1(0) = 0, P_2(0) = 0$	$a = 5, b = 4$

9	$\begin{cases} P_1' = -(2a+b)P_1 + (2b-a)P_2 + a \\ P_2' = aP_1 - 2bP_2 \end{cases}$ $P_0 = 1 - P_1 - P_2, P_1(0) = 0, P_2(0) = 0$	$a = 3, b = 4$
10	$\begin{cases} P_1' = -(2a+b)P_1 + (2b-a)P_2 + a \\ P_2' = aP_1 - 2bP_2 \end{cases}$ $P_0 = 1 - P_1 - P_2, P_1(0) = 0, P_2(0) = 0$	$a = 4, b = 5$

Содержание отчета

1.Номер и название лабораторной работы

2. Экранные формы, показывающие порядок выполнения лабора-
торной

работы, и результаты, полученные в ходе её выполнения.

3 Экранные формы, показывающие порядок выполнения задания для самостоятельной работы

Контрольные вопросы

1. Назначение блока integrator
2. Назначение блока Gain
3. Назначение блока Sum
4. Назначение параметров "Start time" и "Stop time"
5. Какой командой запускается симуляция?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

Аппроксимация функции двух переменных

Цель работы - научиться работать с радиальной базисной сетью, функции newrbe и newrb.

Краткие теоретические сведения

Радиальные базисные сети предназначены для аппроксимации функций. Возьмем произвольную непрерывную функцию и представим ее с помощью суммы колоколообразных функций. Аналитически это означает представление f(x) в виде разложения по стандартному набору пространственно локализованных функций:

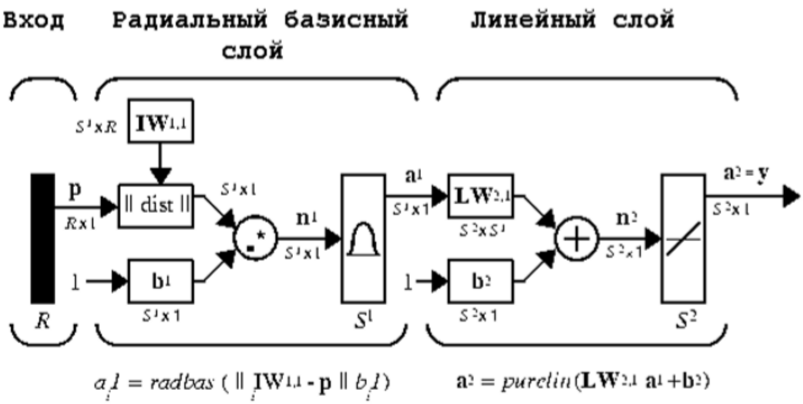
$$f(x) = \sum_i w_i \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|)$$

где w_i - веса суммирования отдельных откликов, c_i - центры базисных радиальных функций.

Это формула нейронной сети на основе радиальной базисной функции. Расстояние определяется как расстояние в евклидовом пространстве:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| = AB = \sqrt{(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 + \ldots}.$$

Функция newrbe формирует радиальную базисную сеть с нулевой ошибкой. Сеть с радиальными базисными функциями представляет собой, как правило, сеть с тремя слоями: обычным входным слоем, скрытым радиальным базисным слоем и выходным линейным слоем. Функция newrb формирует радиальную базисную сеть с ненулевой ошибкой в отличие от newrbe.

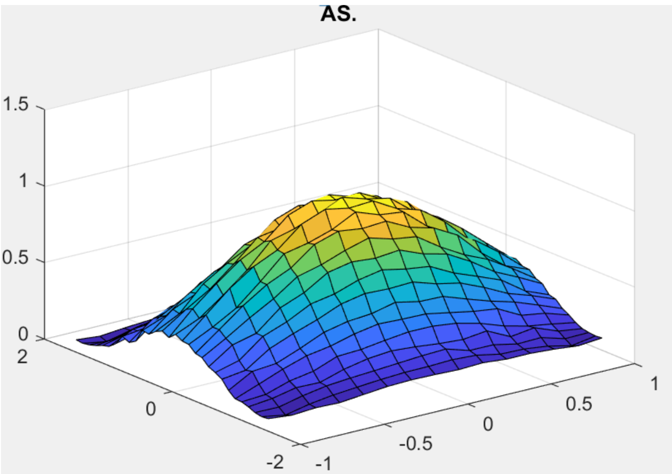


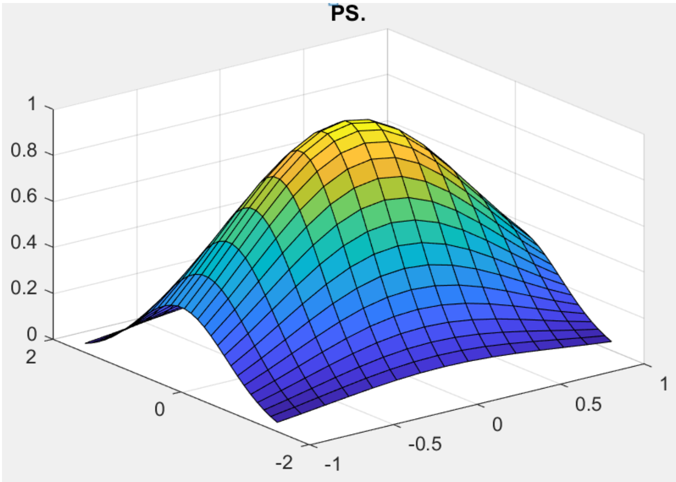
Пример решения типовой задачи

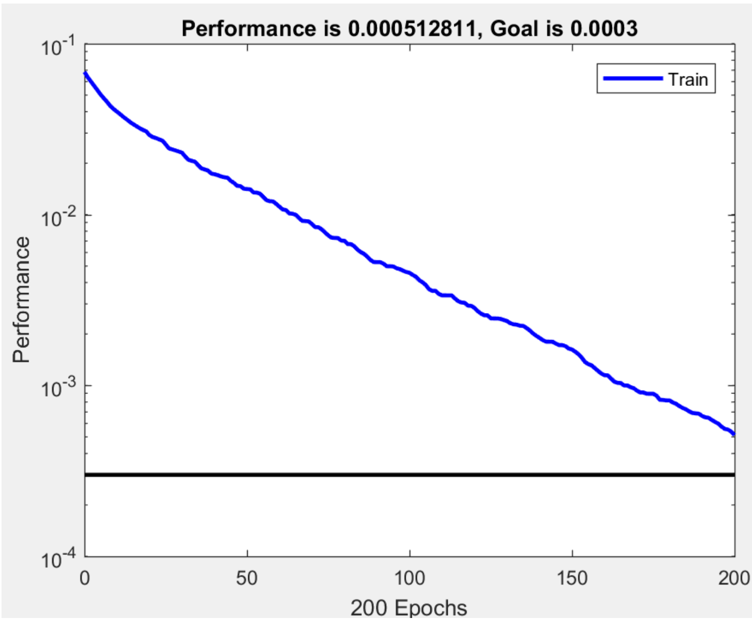
Пусть функция $z = e^{-x^2} \cdot e^{-y^2}$ задана на промежутках $x \in [-1,1]$, $y \in [-1.5,1.5]$; количество точек разбиений по x есть **nx**, а по y - **ny**. Тогда, используя следующий алгоритм построения радиальной базисной сети, можно построить график функции $z = f(x, y)$:

```
%Формирование исходной функции
%задание границ аргументов функции
x1=-1.0; x2=+1.0; y1=-1.5; y2=+1.5;
%задие числа  значений каждого аргумента
nx=15; ny=30;
%задание  дискретизации значений аргументов
step_x=(x2-x1)/(nx-1);
step_y=(y2-y1)/(ny-1);
step_min = min(step_x,step_y);
%формирование точек X Y Z исходного графика
[x,y]=meshgrid([x1:step_x:x2], [y1:step_y:y2]);
z=exp(-x.^2).*exp(-y.^2);
```

```
%Построение исходного графика
figure(1)
surf(x,y,z), title('PS.');
%формирование входной матрицы p  и целевого вектора t
xx=reshape(x,1,nx*ny);
yy=reshape(y,1,nx*ny);
zz=exp(-xx.^2).*exp(-yy.^2);
p=[xx; yy];
 t=zz;
%задание параметров сети
goal = 0.0003;%:ошибка
spread = 1.0*step_min; %параметр влияния
%ФОРМИРОВАНИЕ  НЕЙРОННОЙ МОДЕЛИ
net = newrb(p,t, goal,spread);
net.layers{1}.size;
%получение расчетных значений функции smit
smlt=sim(net,p);
%транспорирование и zz smit [zz' smlt'];
%ФОРМИРОВАНИЕ  МАТРИЦЫ АПРОКСИМРОВАННЫХ ЗНАЧЕНИЙ
ФУНКЦИИ smltr=reshape(smlt,ny,nx);
%ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА АПРОКСИМИРОВАННОЙ ФУНКЦИИ
figure(2)
surf(x,y,smltr), title('AS.');
```




PS.
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
2
0
-2
-1
-0.5
0
0.5
1


Performance is 0.000512811, Goal is 0.0003
Train
Performance
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
0
50
100
150
200
200 Epochs

Порядок выполнения индивидуальных заданий работы

1. Построить нейронную сеть для аппроксимации табличных значений функции, из представленных в индивидуальном задании, аналогичную рассмотренной в лабораторной работы.

3. Вывести на график табличные значения и аппроксимированную функцию 4. Найти численное значение погрешности результата аппроксимации, вывести на экран
d= norm(z-smltr,'fro')
5.Провести расчеты для разных значения параметров goal и spread. Проанализировать полученные результаты.

Индивидуальные задания

1) $z = \cos(x)\cos(y), x, y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
2) $z = \frac{\sin(x)}{x}\frac{\sin(y)}{y}, x, y \in [-1.5, +1.5]$
3) $z = x^2 y^2, x, y \in [-1.5, 1.5]$
4) $z = x^3 \sin(y) + 1, x \in [-1,1], y \in [-1.5, 1.5]$
5) $z = x^2 \sin(y) - 1, x \in [-1,1], y \in [-1.5, 1.5]$
6) $z = e^x + 3y, x \in [0,1], y \in [-2,1]$
7) $z = \sqrt{y^2 + x^3}, x \in [0,1], y \in [-2,2]$
8) $z = \sqrt{y^3 + x^2}, x \in [-1,1], y \in [0,2]$
9) $z = x^2 \cos(y) + 1, x \in [-1,1], y \in [-\pi/4, \pi/4]$
10) $z = x^3 \cos(y) + 1, x \in [-0.5, 0.5], y \in [-\pi/4, \pi/4]$

Содержание отчета

1.Номер и название лабораторной работы

2. Экранные формы, показывающие порядок выполнения лабораторной работы

работы, и результаты, полученные в ходе её выполнения.

3.Постановка задачи для самостоятельной работы

4. Экранные формы, показывающие порядок выполнения индивидуального задания с соответствующими пояснениями, и результаты, полученные в ходе её выполнения.

Контрольные вопросы

1.Что называется «эпохой» в процессе обучения нейронной сети?

2. Какие параметры многослойной нейронной сети настраиваются в процессе ее обучения?

3. В чем состоит и как реализуется процесс инициализации при обучении нейронной сети?

4, Почему разные реализации процесса обучения многослойной нейронной сети из разных начальных условий не приводят к одному и тому же финальному результату?

5, В чем состоит процедура тестирования обученной многослойной нейронной сетей.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6

Применение нейронной сети для аппроксимации функции

Введение в нейронные сети

Нейронные сети – это одно из направлений исследований в области искусственного интеллекта, основанное на попытках воспроизвести нервную систему человека. А именно: способность нервной системы обучаться и исправлять ошибки, что должно позволить смоделировать, хотя и достаточно грубо, работу человеческого мозга.

Преимущества нейронных сетей:

1. Универсальность. Нейронные сети не зависят от свойств входных данных, для них не существует требования к определенному типу распределения исходных данных, либо требования к линейности целевых функций.

2. Не существует проблемы «проклятия размерности». Они способны моделировать зависимости в случае большого числа переменных.

3. В отличие от статистических исследований не требуют большого объема данных.

4. Ускоряют процесс нахождения зависимости за счет одновременной обработки данных всеми нейронами.

Искусственная нейронная сеть - это набор нейронов, соединенных между собой. Как правило, передаточные функции всех нейронов в нейронной сети фиксированы, а веса являются параметрами нейронной сети и могут изменяться. Некоторые входы нейронов помечены как внешние входы нейронной сети, а некоторые выходы - как внешние выходы нейронной сети. Подавая любые числа на входы нейронной сети, мы получаем какой-то набор чисел на выходах нейронной сети. Таким образом, работа нейронной сети состоит в преобразовании входного вектора в выходной вектор, причем это преобразование задается весами нейронной сети.

Искусственный нейрон имитирует в первом приближении свойства биологического нейрона. На вход искусственного нейрона поступает некоторое множество сигналов, каждый из которых является выходом другого нейрона. Каждый вход умножается на соответствующий вес, и все произведения суммируются, определяя уровень активации нейрона. Хотя сетевые парадигмы весьма разнообразны, в основе почти всех их лежит эта конфигурация. Здесь множество входных сигналов, поступает на искусственный нейрон. Эти входные сигналы, в совокупности, обозначаемые вектором X, соответствуют сигналам, приходящим в синапсы биологического нейрона. Каждый сигнал умножается на соответствующий вес w1, w2,..., wn, и поступает на суммирующий блок. Каждый вес соответствует "силе" одной биологической синаптической связи.

Построим нейронную сеть для аппроксимации выбранной функции, используя функции пакета Neural Networks Toolbox

Создадим обобщенно-регрессионную НС (сеть типа GRNN) с именем а, реализующую функциональную зависимость между входом и выходом вида $y=x^2$ на отрезке [-1, 1], используя следующие экспериментальные данные:

x = [-1 -0.8 -0.5 -0.2 0 0.1 0.3 0.6 0.9 1],

y = [1 0.64 0.25 0.04 0 0.01 0.09 0.36 0.81 1].

Проверку качества восстановления приведенной зависимости осуществим, используя данные контрольной выборки xo=-0.95:0.1:0.95 – значения от -0.95 до 0.95 с шагом 0.1

Процедура создания и использования данной НС описывается следующим образом:

>> x= [-1 -0.8 -0.5 -0.2 0 0.1 0.3 0.6 0.9 1]; % Задание входных значений

>> y = [1 0.64 0.25 0.04 0 0.01 0.09 0.36 0.81 1]; % Задание целевых значений

>> a=newgrnn(x,y,0.01); % Создание нейронной сети с отклонением 0.01

Вычислим аппроксимированную функцию для указанных значений

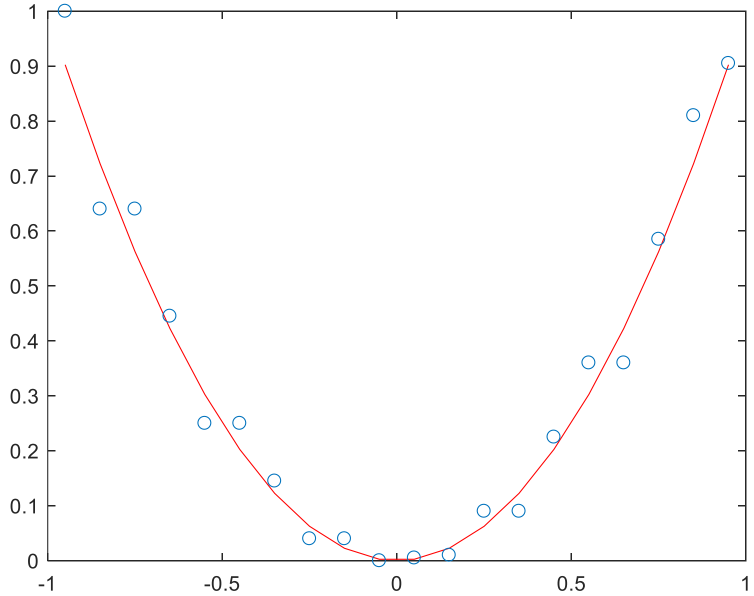
```
>> xo=-0.95:0.1:0.95
>> Y1 = sim(a,xo) %
```

Подсчитаем среднеквадратическую погрешность аппроксимации

```
>>eps=sqrt(sum(((Y1-yo).^2/length(yo))));
```

представим графически полученные результаты

```
>>figure
>>plot(xo,yo,'r',xo,Y1,'o')
```



На представленном графике сплошной линией изображен график аппроксимируемой функции, а кружками значения функции полечунные с помощью нейронной сети.

Самостоятельно аналогичным образом построить нейронную сеть с радиальными базисными элементами типа. В этом слечае следует использовать команду >> a=newrbe(x,y);

Сравнить с результатами, полученными ранее

Индивидуальные **задания на лабораторную работу**

Самостоятельно построить нейронные сети для аппроксимации функции, представленных ниже аналогично тому, как это было сделано ранее

Вариант	Функция	Вариант	Функция
1	x^3+3x	6	$x/(1+x^2)$
2	xcosx	7	thx
3	xe^{-x}	8	xsinx
4	$\sin x e^x$	9	$x^2/(1+x^2)$
5	$(1+x)e^x$	10	x^2-x^3

Содержание отчета

1.Экранные формы, показывающие порядок выполнения лабораторной работы

2 Экранные формы, показывающие порядок выполнения индивидуального задания с соответствующими пояснениями.

Контрольные вопросы

1. В чем универсальность нейронных сетей?
2. Чем определяется уровень активации нейрона?
3. Какие параметры нейронной сети изменяются при ее настройке?
4. Каковы преимущества нейронных сетей?

5. Какими способностями нервной системы человека обладает нейронная сеть?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №7

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

(МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЕВА)

Рассмотрим экономическую систему, которая состоит из трех отраслей. Ее матрица прямых затрат A и вектор конечного продукта Y известны:

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \quad ,Y= \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Коэффициенты прямых затрат, элементы матрицы A a_{ij} постоянны. Они показывают, сколько единиц продукции i-ой отрасли затрачивается на производство одной единицы продукции в отрасли j. Введя вектор валового выпуска X, модель Леонтьева, можно записать в матричном виде

$$X=AX+Y$$

Матрица полных материальных затрат B равна

$$B = (E – A)^{-1}.$$

Продуктивность матрицы A проверяется, по вычисленной матрице B. Если эта матрица существует и все ее элементы неотрицательны, то матрица A продуктивна. Вектор валового выпуска X рассчитывается по формуле X = BY.

Определить: 1) Матрицу коэффициентов полных материальных затрат B. 2) Проверить продуктивность матрицы A. 2) Вектор валового выпуска X.

Процесс решения задачи средствами Microsoft Excel

1. Задание Исходных данных задачи

Вызовите Microsoft Excel. Введите матрицу A в ячейки с адресами A2:C4 и вектор Y в ячейки с адресами E2:E4 (рисунок 1).

A17 fx {=МОБР(A12:C14)}

	A	B	C	D	E	F	G
1	*Матрица А*				*Вектор Y*		
2	0,3	0,1	0,4		200		
3	0,2	0,5	0		100		
4	0,3	0,1	0,2		300		
5							
6	*Матрица Е*				*Вектор X*		
7	1	0	0		775,510		
8	0	1	0		510,204		
9	0	0	1		729,592		
10							
11	*Матрица Е-А*				*Транспонированный вектор X*		
12	0,7	-0,1	-0,4		775,51	510,20	729,59
13	-0,2	0,5	0				
14	-0,3	-0,1	0,8				
15							
16	*Матрица В*						
17	2,0408	0,6122	1,0204				
18	0,8163	2,2449	0,4082				
19	0,8673	0,5102	1,6837				
20							
21	*Межотраслевые поставки*						
22	232,653	51,020	291,837				
23	155,102	255,102	0,000				
24	232,653	51,020	145,918				
25							

Рис. 1. Задание исходных данных и последовательное выполнение плановых расчетов

2. Вычисление матрицы коэффициентов полных материальных затрат В.

2.1. Введите единичную матрицу Е в ячейки с номерами А7:С9.

2.2. Вычислите матрицу Е – А. Матрица Е – А является разностью двух матриц Е и А. Для вычисления разности двух матриц необходимо проделать следующее: - установите курсор мыши в левый верхний угол (это ячейка с адресом А12) результирующей матрицы Е – А, которая будет расположена в ячейках с адресами А12:С14; - введите формулу =А7-А2 для вычисления первого элемента результирующей матрицы Е – А, предварительно установив английскую раскладку клавиатуры; - введенную формулу скопируйте во все остальные ячейки результирующей матрицы. Для этого, установите курсор мыши в ячейку А12; наведите указатель мыши на точку в правом нижнем углу ячейки, так чтобы указатель мыши принял вид крестика; при нажатой левой кнопке мыши протяните указатель до ячейки С12, а затем так же протяните указатель мыши до ячейки С14. В результате в ячейках А12:С14 появится искомая матрица, равная разности двух исходных матриц Е и А.

2.3. Вычислите матрицу $B = (E – A)^{-1}$, являющейся обратной по отношению к матрице Е – А. Матрица Е – А расположена в ячейках с адресами А12:С14. Для вычисления матрицы В необходимо проделать следующее: - выделите диапазон ячеек А17:С19 для размещения матрицы В; - нажмите на панели инструментов кнопку Вставка, а затем кнопку Функция. В появившемся окне в поле "Категория" выберите "Математические", а в поле Выберите функцию – имя функции МОБР. Щелкните на кнопке ОК; - появившееся диалоговое окно МОБР мышью отодвиньте в сторону от исходной матрицы Е – А и введите диапазон матрицы Е – А (диапазон ячеек А12:С14) в рабочее поле Массив (протащив указатель мыши при нажатой левой кнопке от ячейки А12 до ячейки С14); - нажмите комбинацию клавиш Ctrl+Shift+Enter. Обратите внимание, что нажимать надо не клавишу ОК(!), а именно комбинацию клавиш Ctrl+Shift+Enter. В диапазоне ячеек А17:С19 появится искомая обратная матрица $(E – A)^{-1}$, равная матрице В.

3. Проверка продуктивности матрицы А. Поскольку матрица В найдена, следовательно, она существует. Все элементы матрицы В неотрицательны, поэтому матрица В – продуктивна.

4. Вычисление вектора валового выпуска X. Вычисление вектора валового выпуска X находим по матричной формуле X = BY, в которой матрица В вычислена, а вектор Y задан. Вычисление вектора X = BY производится с помощью операции умножения матриц, а в данном случае – умножения матрицы В на вектор Y. Для этого необходимо: - выделить диапазон ячеек Е7:Е9, где будет расположен вектор X. Обратите внимание, что по правилам умножения матриц, размерность результирующей матрицы X должна быть равна количеству строк матрицы В на количество столбцов матрицы Y. В нашем случае, размерность вектора X равна: три строки на один столбец; - нажать на панели инструментов кнопку Вставка, а затем кнопку Функция. В появившемся окне в поле Категория выберите Математические, а в поле Выберите функцию – имя функции МУМНОЖ. Щелкните на кнопке ОК;

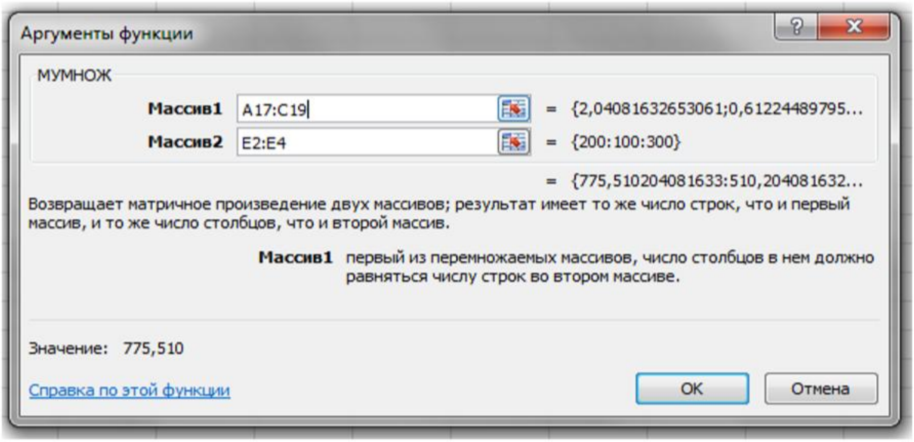


Рис. 2. Диалоговое окно умножения матриц МУМНОЖ

- появившееся диалоговое окно МУМНОЖ мышью отодвиньте в сторону от исходных матриц B и Y и введите диапазон матрицы B (диапазон ячеек A17:C19) в рабочее поле Массив 1 (протащив указатель мыши при нажатой левой кнопке от ячейки A17 до ячейки C19), а диапазон вектора Y (ячейки E2:E4) в рабочее поле Массив 2 (рисунок 2); - нажмите комбинацию клавиш Ctrl+Shift+Enter. Обратите внимание, что нажимать надо не клавишу ОК(!), а именно комбинацию клавиш Ctrl+Shift+Enter. В диапазоне ячеек E7:E9 появится искомый вектор X.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ НА ЛАБОРАТОРНУЮ РАБОТУ

1. Экономическая система состоит из трех отраслей, для которых матрица прямых затрат A и вектор конечного продукта Y известны. Определить: 1) Матрицу коэффициентов полных материальных затрат B. 2) Проверить продуктивность матрицы A. 3) Вектор валового выпуска X. Расчеты провести, используя возможности любого выбранного Вами языка программирования.

Вариант 1	$A=\begin{pmatrix}0.33 & 0.32 & 0.21\\ 0.22 & 0.31 & 0.0\\ 0.11 & 0.25 & 0.35\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}200\\ 150\\ 250\end{pmatrix}$
Вариант 2	$A=\begin{pmatrix}0.12 & 0.20 & 0.3\\ 0.25 & 0.35 & 0.15\\ 0.33 & 0.00 & 0.45\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}300\\ 150\\ 450\end{pmatrix}$
Вариант 3	$A=\begin{pmatrix}0.55 & 0.20 & 0.15\\ 0.15 & 0.35 & 0.25\\ 0.00 & 0.25 & 0.15\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}400\\ 150\\ 550\end{pmatrix}$
Вариант 4	$A=\begin{pmatrix}0.40 & 0.25 & 0.00\\ 0.14 & 0.52 & 0.15\\ 0.17 & 0.20 & 0.3\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}830\\ 620\\ 280\end{pmatrix}$
Вариант 5	$A=\begin{pmatrix}0.05 & 0.22 & 0.26\\ 0.58 & 0.11 & 0.0\\ 0.17 & 0.34 & 0.37\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}430\\ 650\\ 910\end{pmatrix}$
Вариант 6	$A=\begin{pmatrix}0.11 & 0.25 & 0.10\\ 0.12 & 0.16 & 0.40\\ 0.11 & 0.28 & 0.33\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}1200\\ 1150\\ 2350\end{pmatrix}$
Вариант 7	$A=\begin{pmatrix}0.17 & 0.23 & 0.31\\ 0.27 & 0.13 & 0.03\\ 0.17 & 0.23 & 0.53\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}2500\\ 1650\\ 2950\end{pmatrix}$
Вариант 8	$A=\begin{pmatrix}0.31 & 0.22 & 0.11\\ 0.23 & 0.31 & 0.10\\ 0.41 & 0.20 & 0.13\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}6600\\ 3150\\ 3950\end{pmatrix}$
Вариант 9	$A=\begin{pmatrix}0.00 & 0.52 & 0.00\\ 0.27 & 0.31 & 0.33\\ 0.63 & 0.12 & 0.00\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}9800\\ 450\\ 150\end{pmatrix}$
Вариант 10	$A=\begin{pmatrix}0.21 & 0.42 & 0.00\\ 0.32 & 0.31 & 0.20\\ 0.41 & 0.21 & 0.23\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}1200\\ 6150\\ 7250\end{pmatrix}$

2. Самостоятельно придумать пример экономической системы, состоящей из четырех отраслей, и проведите для нее аналогичные расчеты

Содержание отчета

1.Постановка задачи для самостоятельной работы

2. Экранные формы, показывающие порядок выполнения индивидуального задания с соответствующими пояснениями, и результаты, полученные в ходе её выполнения

Контрольные вопросы

1. В чем экономический смысл элементов матрицы прямых затрат?
2. Напишите формулу модели Леонтьева в матричном виде
3. Напишите формулу, определяющую матрицу полных материальных затрат
4. Какая матрица прямых затрат считается продуктивной?
5. Как определяется матрица полных материальных затрат?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №8

Решение прикладных задач оптимизации СМО

Рассмотрим следующую задачу

1. Определить число взлетно-посадочных полос для самолетов с учетом требования того, что вероятность ожидания должна быть меньшей 0.05. Дана интенсивность потока самолетов *a*=54 самолетов/сутки и интенсивность линий обслуживания *b*=60 самолетов/сутки

Рассмотрим решение данной задачи с использованием возможностей Матлаб

Вначале составим подпрограмму, определяющую вероятность ожидания. Для СМО с ожиданием эта вероятность вычисляется по формуле $p_{оч} = \lambda^n \cdot p_0 / \left(n!(1-\lambda/n)\right)$, где

$$p_0 = 1 / \left(1 + \lambda + \lambda^2/2! + \ldots + \lambda^n/n! + \lambda^{n+1}/\left(n!\cdot(n-\lambda)\right)\right) \quad \lambda = a/b\ .$$

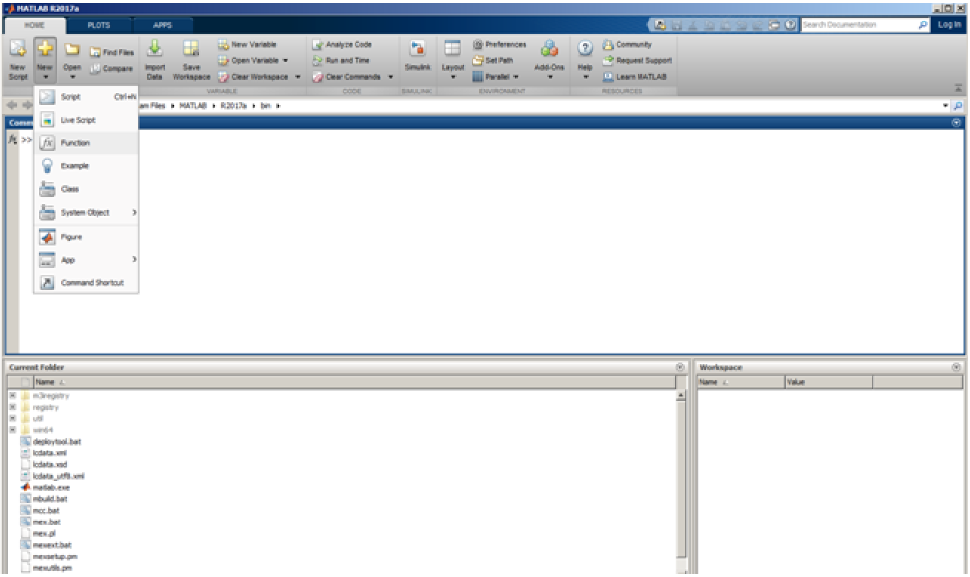
Подпрограмма будет называться SMO и иметь вид

```
%подпрограмма определения вероятности ожидания в зависимости от количества полос

function[P]= SMO(L,M,N);

ps=L/M;

po=0;

for i=1:N+1

   po=po+ps^(i-1)/gamma(i);

end

   po=po+ps^(N+1)/(gamma(N+1)*(N-ps));

   po=1/po;

   P=po*ps^N/(gamma(N+1)*(1-ps/N));

end
```

Здесь N – число взлетно-посадочных полос, $L = a\,, M = b$

Для создания подпрограммы следует щелкнуть по значку 

, в раскрывшемся меню выбрать пункт Function. В появившемся окне ввести текст подпрограммы



Созданную подпрограмму следует сохранить, используя команду Save.

Далее следует составить программу, определяющую число взлетно-посадочных полос

%программа определения числа взлетно-посадочных полос

L=54;

M=60;

```
PZ=0.05;

PP=1;

N=1;

while PP>PZ

PP=SMO(L,M,N);

N=N+1;

end

N0=N-1;

disp('необходимое число полос');

disp(N0);
```

В программе группа команд в цикле

```
while PP>PZ

PP=SMO(L,M,N);

N=N+1;

End
```

вычисляет вероятность ожидания для числа полос N=1,2,3,… до тех пор, пока она не станет меньше установленной величины PZ=0.05.

Для создания программы следует щелкнуть по значку  , в раскрывшемся меню выбрать пункт Script. В появившемся окне ввести текст программы

Созданную подпрограмму следует сохранить, используя команду Save

Для запуска программы производится щелчок по знаку Run.

После этого на экране появится результат работы программы

Результаты расчета

необходимое число полос

4

Рассмотрим СМО с отказами. Очевидно, что увеличение интенсивности нагрузки системы ведет к увеличению отказа в обслуживании поступившей очередной заявки, действительно

$$\lim_{\lambda\to\infty} p_n = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^n \cdot \big/ n! \left(1+\lambda+\lambda^2 \big/ 2! + \ldots + \lambda^n \big/ n!\right) = 1 .$$

На практике пытаются добиться того, чтобы вероятность отказа была как можно меньшей. Этого можно добиться за счет увеличения каналов обслуживания. Но это влечет за собой дополнительные затраты на приобретение и эксплуатацию нового оборудования. Кроме того, увеличение числа каналов увеличивает вероятность их простоя, а простой оборудования неизбежно приводит к убыткам. Среднее число свободных от работы каналов

$$k_o = n - \bar{k} = n - \lambda(1 - p_n)$$

Значит, при большом увеличении числа каналов обслуживания n величина $k_o \to n-\lambda$, так как при этом $p_n \to 0$, как вероятность занятости обслуживанием всех каналов системы и ,следовательно, в этом случае k_o увеличивается. Значит, существует некоторое оптимальное число каналов СМО, которое обеспечивает минимальные убытки, как от необслуженных заявок, так и от простаивающих каналов обслуживания.

Если через C_1 обозначить потери, обусловленные отказом в обслуживании одной заявки, а через C_2 - стоимость простоя одного канала за единицу времени, то целевую функцию в этом случае можно представить в виде

$$Y(n) = C_1 a p_n + C_2 \overline{k_o} \text{ или}$$

$$Y(n) = C_1 a \frac{\lambda^n}{n! \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}} + C_2 (n - \lambda \left(1 - \frac{\lambda^n}{n! \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}}\right).$$

Легко убедиться, что функция $Y(n)$ имеет минимум при некотором $n = n_o$.

Индивидуальные задания.

1. Разработать программу, используя возможности MATLAB, для решения приведенной ниже задачи.

Задача.

Система массового обслуживания – завод, выполняющий специальные заказы. Интенсивность поступления заказов равна λ, интенсивность их выполнения - μ. Если при поступлении нового заказа все производственные линии завода заняты, то заказ не принимается. Стоимость одного заказа равна C_1 ед.. Стоимость простоя одной производственной линии равна C_2 ед. Определить оптимальное количество производственных линий, при котором убытки завода, обусловленные потерянными заказами и простаивающими производственными линиями, были минимальны.

Значения для указанных в условии величин выбрать в соответствии с вашим вариантом из таблицы

Варианты	λ	μ	C_1	C_2
1	3	2	7	5
2	2	1	5	3
3	4	3	3	1
4	5	3	4	2
5	4	2	6	5
6	7	5	5	4
7	3	1	7	5
8	5	4	6	4
9	6	3	4	2
10	5	4	5	2

Для выполнения индивидуального задания можно использовать любой алгоритмический язык

Содержание отчета

1.Постановка задачи для самостоятельной работы

2. Экранные формы, показывающие порядок выполнения индивидуального задания с соответствующими пояснениями, и результаты, полученные в ходе её выполнения

Контрольные вопросы

1.Какая СМО относится к СМО с отказами?

2. Какая СМО относится к СМО с ожиданием?

3. К чему ведет увеличение интенсивности нагрузки СМО с отказами?

4.Напишите формулу вычисления среднего числа свободных от работы каналов.

5.К чему ведет увеличение каналов обслуживания?

ПЕРЕЧЕНЬ ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ

1. Садовникова, Н. П. Имитационное моделирование : учеб. пособие / Н. П. Садовникова, Д. С. Парыгин, Т.В. Ерещенко, Н. М. Рашевский ; ВолгГТУ. – Волгоград, 2021. – 132 с.
2. Использование Simulink и Toolbox в MatLab. Лабораторная работа для студентов направлений 12.03.01 «Приборостроение», 12.03.04 «Биотехнические системы и технологии» очной формы обучения: практикум / сост. С.А. Шевкун, Е.М. Титов; Инженерная школа ДВФУ. – Владивосток: Дальневост. федерал. ун-т, 2019. – 27 с. ISBN 978-5-7444-4560-7
3. Веселов, О. В. Нечеткая логика и нейронные сети в системах управления и диагностике : учеб. пособие / О. В. Веселов ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2023. – 288 с.