



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Математика и информатика»

Учебно-методическое пособие
по дисциплине
**«Информационные технологии
в приборостроении»**

Автор: Галабурдин А.В.



Ростов-на-Дону, 2022



Аннотация

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов заочной формы обучения направления 12.04.01 Приборостроение.

Автор

доцент,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры
«Математика и информатика»
Галабурдин А.В.





Оглавление

Тема №1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ	4
Тема №2. СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ	6
Тема №3 АНАЛИТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ.....	11
Тема №4 ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ.....	15
Тема №5 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ БИФУРКАЦИЙ.....	31
Тема №6 НЕЙРОННЫЕ СЕТИ.....	37
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА.....	47
ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ	50
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	59

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Тема №1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Моделирование – это замещение одного объекта (оригинала) другим (моделью) с целью получения информации о важнейших свойствах объекта-оригинала с помощью объекта модели.

Процесс моделирования включает три этапа:

1. построение модели;
2. изучение (оценка) модели;
3. анализ объекта-оригинала на основании построенной модели.

Любая модель обладает определенным набором свойств, среди которых можно выделить следующие:

1. конечность – модель отображает оригинал лишь в конечном числе его отношений;
2. упрощенность – модель отражает только существенные стороны объекта;
3. приближенность – действительность отображается моделью с определенной степенью точности, то есть приближенно;
4. адекватность - модель успешно описывает моделируемый объект;
5. информативность - модель должна содержать достаточный объем информации об оригинале в рамках гипотез, принятых при построении модели.

Классификация моделей

Все модели делятся на две группы- физические и абстрактные (математические).

Физическими моделями (ФМ) называют систему, эквивалентную или подобную оригиналу, но имеющую другую физическую природу.

ФМ делятся на натуральные, квазинатуральные, масштабные и аналоговые.

Натуральные модели – это реальные исследуемые системы (макеты, опытные образцы)

Квазинатуральные модели –это совокупность натуральных и математических моделей (если часть моделируемой системы не может быть смоделирована с помощью математических методов в силу ее сложности).

Масштабная модель - это объект той же физической природы, что и оригинал, но отличается от оригинала размерами.

Аналоговыми моделями называют объекты, имеющие физическую природу, отличную от оригинала, но сходные с оригиналом процессы функционирования.

Математические модели (ММ) представляют собой формализованные представления объекта с помощью абстрактного языка, математических соотношений, отражающих процесс функционирования моделируемого объекта.

Для построения ММ используются различные математические средства – алгебраические методы, дифференциальное и интегральное исчисление, дифференциальные и интегральные уравнения, теорию вероятностей и так далее.

ММ разделяются на детерминированные, вероятностные, аналитические, численные и имитационные.

Детерминированные модели отображают процессы, в которых предполагается отсутствие всяких случайных факторов.

Вероятностные (стохастические) модели отображают вероятностные процессы. В этом случае анализируется ряд реализаций случайного процесса и оцениваются средние характеристики.

Аналитические модели являются такими формализованными описаниями объекта, которые позволяют получить решение поставленной в результате

моделирования задачи в явном виде, используя соответствующий математический аппарат.

Численные модели характеризуются зависимостью такого вида, который допускает только частные решения поставленной в результате моделирования задачи для конкретных начальных и граничных условий и количественных значений параметров модели.

Имитационные модели представляют собой совокупность описания объекта и внешних воздействий, алгоритмов функционирования объекта или правил изменения его состояния под влиянием внешних и внутренних воздействий. Эти алгоритмы и правила не дают возможности использования математических методов аналитического или численного решения, но позволяют имитировать процесс функционирования объекта и производить вычисления представляющих интерес характеристик.

При построении моделей используются различные подходы. Рассмотрим наиболее распространенные из них.

Непрерывно-детерминированный подход. В этом случае чаще всего модели представляются в виде уравнений или систем уравнений (алгебраических, дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных). Очень распространены модели, имеющие вид обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{f}(\bar{y}, t),$$

$$\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0.$$

Дискретно-детерминированный подход является предметом рассмотрения теории автоматов. Теория автоматов – раздел теоретической кибернетики, изучающей устройства, перерабатывающие дискретную информацию и меняющие свое состояние в допустимые моменты времени.

Конечным автоматом называется система

$$A = \{X; Q; Y; \varphi; \phi\},$$

где X – есть непустое множество

$$X = (a_1, a_2, \dots, a_m), \text{ элементы которого являются входными сигналами;}$$

$Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ – множество состояний автомата, его элементы определяют состояние автомата;

$Y = (b_1, b_2, \dots, b_p)$ – множество выходных сигналов, его элементы представляют собой выходные сигналы автомата; функция

$\varphi: X \times Q \rightarrow Q$ называется функцией переходов; функция

$\phi: X \times Q \rightarrow Y$ называется функцией выходов.

В определенные моменты времени автомат воспринимает сигнал (один из элементов множества X). В зависимости от этого сигнала a_i и состояния q_j , в

котором находится автомат, он переходит в другое состояние $q_{j+1} = \varphi(a_i, q_j)$
и выдает сигнал $b_k = \phi(a_i, q_j)$.

Дискретно стохастический подход является предметом рассмотрения вероятностных теории автоматов. Вероятностный автомат можно определить как дискретный потактный преобразователь информации с памятью, функционирование которого в каждом такте зависит только от состояния памяти и может быть описано стохастически.

Непрерывно стохастический подход. К нему относятся системы массового обслуживания (СМО). Под СМО понимают динамическую систему предназначенную для эффективного обслуживания случайного потока заявок, при ограниченных ресурсах обслуживающей системы. В качестве процесса обслуживания могут быть представлены различные по своей природе процессы функционирования экономических, производственных, технических и других систем (потоки поставок продукции предприятию, потоки деталей на сборочный конвейер цеха, заявки на обработку информации компьютером от удаленных терминалов и так далее).

Обобщенные модели. Этот подход позволяет описывать поведение непрерывных и дискретных, детерминированных и стохастических систем. При этом дается формальное определение объекта моделирования агрегатной системы. Далее объект разбивается на конечное число подсистем. При этом сохраняются связи, обеспечивающие его работу. В результате сложная система представляется в виде многоуровневой конструкции из взаимосвязанных элементов, объединенных в подсистемы различных уровней.

ТЕМА №2. СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

В теории массового обслуживания предполагается, что обслуживание чего-либо возможно на основе заявки (требования) на обслуживание. Обслуживание выполняется каналом (линией) обслуживания. Считается, что имеется поток заявок, требующих обслуживания. Этот поток попадает в обслуживающую систему, состоящую из конечного числа однородных единиц, называемых каналами (линиями) обслуживания.

Задача ставится следующим образом:

1. изучить поток заявок попадающий в систему
2. рассмотреть основные характеристики обслуживания, определяемые параметрами потока заявок и параметрами обслуживающей системы
3. по требуемым характеристикам качества обслуживания определить параметры системы обслуживания или параметры потока заявок.

Простейший поток заявок

Простейший поток заявок – это поток обладающий свойствами стационарности, отсутствия последействия и ординарности.

Стационарность потока означает, что вероятность $P_k(t)$ поступления k заявок за промежуток времени $(a, a+t)$ не зависит от места расположения данного интервала на временной оси, а зависит от числа заявок k и длины интервала a .

Отсутствие последействия означает, что вероятность $P_k(t)$ поступления k заявок за промежуток времени $(a, a+t)$ не зависит от того, когда и сколько заявок поступило до момента a .

Ординарность потока означает, что вероятность поступления за малый интервал времени Δt двух или более заявок пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью поступления одной заявки.

Можно доказать, что простейший поток заявок описывается пуассоновским законом распределения

$$P_k(t) = \frac{(at)^k}{k!} e^{-at}$$

Можно показать, что есть a интенсивность потока, то есть математическое ожидание (среднее число) заявок в единицу времени.

Закон распределения времени обслуживания

Важным показателем процесса обслуживания является время обслуживания, то есть интервал между моментом поступления заявки в канал обслуживания и моментом выхода из канала. Время обслуживания рассматривается как случайная величина. Во многих процессах считается, что время обслуживания распределено по показательному закону $f(t) = be^{-bt}$, где b – среднее число заявок, обслуженных в единицу времени. Очевидно, что

$$t_{об} = M(f(t)) = \int_0^{\infty} tbe^{-bt} dt = 1/b.$$

В основе вывода основных соотношений СМО лежит понятие Марковского процесса.

Марковским называют случайный процесс, состояние которого в очередной момент времени зависит только от текущего состояния и не зависит от предыстории развития процесса.

Марковские процессы с дискретными состояниями называют марковскими цепями.

Когда множество состояний процесса $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ конечно, марковская цепь называется конечной.

Конечная марковская цепь может быть определена в непрерывном и в дискретном времени. В первом случае переходы процесса из одного состояния в другое связываются с произвольными моментами времени и цепь называют непрерывной. Во втором случае переходы идут в фиксированные моменты времени и цепь называют дискретной.

Переходные вероятности и вероятности состояния

Число занятых линий СМО $N(t)$ в момент времени t есть случайная величина.

Если известно $N(t)$ и заявок простейший, а закон распределения времени обслуживания показательный, то течение процесса не зависит от того, как он протекал до настоящего момента, то есть это марковский процесс.

Пусть СМО в момент времени t находится в состоянии k , то есть $N(t)=k$.

Как было сказано ранее вероятность такого состояния $P_k(t)$.

Вероятность того, что система, находящаяся в некоторый момент времени в состоянии i , через промежуток времени t будет находиться в состоянии k , называется переходной вероятностью и обозначается $P_{ik}(t)$.

Процесс Маркова называется транзитивным, если существует возможность перехода системы из любого $i^{\text{го}}$ состояния в состояние k .

Для транзитивных процессов при достаточно долгом обслуживании потока заявок работа СМО стабилизируется и вероятности $P_k(t)$ и $P_{ik}(t)$ стремятся к некоторым постоянным значениям p_k и p_{ik} .

СМО с потерями

Рассмотрим СМО, состоящую из n равноправных каналов обслуживания, причем каждый канал в данный момент времени может обслуживать только одну заявку. Обслуженная заявка покидает систему. Если все каналы заняты, то заявка покидает систему (теряется) и не влияет на поток заявок и на обслуживание других заявок. На систему поступает простейший поток заявок с интенсивностью

a. Длительность обслуживания заявки одним каналом подчинена показательному закону с интенсивностью обслуживания b . Введем величину $\lambda = a/b$, которую назовем интенсивностью нагрузки.

Используя приведенные выше свойства марковских процессов, можно получить следующие формулы для расчета основных характеристик работы системы.

$$1. \text{Вероятность простоя системы } p_0 = \frac{1}{1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda^n}{n!}};$$

2. Вероятность отказа в обслуживании поступившей заявки $p_n = \lambda^n \cdot p_0 / n!$;

3. Пропускная способность системы (вероятность того, что заявка поступившая в систему не будет потеряна, то есть в системе занято обслуживанием меньше, чем n каналов) $\Pi = 1 - p_n$;

4. Среднее число каналов, занятых обслуживанием (математическое ожидание числа занятых каналов) $\bar{k} = M(k) = \lambda \cdot \Pi$;

5. Коэффициент загрузки системы $\alpha = \bar{k} / n = \lambda / n \cdot \Pi$;

6. Среднее число свободных каналов $k_o = n - \bar{k}$;

7. Коэффициент простоя системы $\beta = k_o / n = 1 - \alpha$;

СМО с ожиданием

В СМО с ожиданием при поступлении заявки в систему, в которой все каналы заняты обслуживанием, заявка не теряется, а становится в очередь за ранее поступившими заявками. Освободившийся канал приступает к обслуживанию очередной заявки из очереди. При этом нет ни каких ограничений на длину очереди.

В этом случае для СМО с ожиданием можно получить следующие соотношения для расчета характеристик ее работы.

1. Вероятность простоя системы

$$p_0 = \frac{1}{\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda^n}{n!} + \frac{\lambda^{n+1}}{(n!(n-\lambda))}\right)}$$

Это соотношение справедливо при условии $\lambda / n < 1$, которое называется условием стационарности системы. При нарушении этого условия СМО не справляется с обслуживанием и длина очереди неограниченно возрастает. В этом случае следует изменить параметры СМО или параметры потока заявок. Величина $\lambda / n = \chi$ называется уровнем загрузки системы.

2. Вероятность отказа в обслуживании поступившей заявки равна 0;

3. Пропускная способность системы $\Pi = a$;

4. Среднее число каналов, занятых обслуживанием $\bar{k} = \lambda$;

5. Коэффициент загрузки системы $\alpha = \bar{k}/n = \lambda/n$;
6. Вероятность образования очереди $P_{оч} = \lambda^n \cdot p_0 / ((n-1)!(n-\lambda))$;
7. Среднее число заявок в очереди $r = \frac{\lambda^{n+1} \cdot p_0}{(n-\lambda) \cdot (n-1)!}$;
8. Среднее время ожидания заявок в очереди $t_{оч} = \lambda^n / (b \cdot (n-1)!(n-\lambda)^2)$;
9. Среднее число свободных каналов $k_o = n - \lambda$;
10. Коэффициент простоя системы $\beta = 1 - \alpha$;

СМО с ограничением на длину очереди

Данная СМО отличается от предыдущей тем, что каждая вновь поступившая в систему, все каналы которой заняты обслуживанием, заявка становится в очередь только в том случае, если в очереди уже находится не более m заявок. Таким образом, число мест в очереди ограничено. Если в очереди уже находится m заявок, то поступившая заявка покидает систему.

Для СМО с ограничением на длину очереди можно получить следующие соотношения для расчета характеристик ее работы.

1. Вероятность простоя системы

$$p_0 = \frac{1}{\left(\sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{\lambda^n}{n!} \cdot \frac{\lambda/n - (\lambda/n)^{m+1}}{1 - \lambda/n} \right)}$$

2. Вероятность отказа в обслуживании поступившей заявки

$$P_{ом} = \lambda^n \cdot p_0 / (n! \cdot n^m)$$

3. Относительная пропускная способность $P_{обс} = 1 - P_{ом} = q$;

4. Абсолютная пропускная способность системы $\Pi = a \cdot q$;

5. Среднее число занятых каналов $\bar{k} = \lambda q$;

6. Среднее число заявок в очереди $r = \frac{\lambda^{n+1} \cdot p_0}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - (\lambda/n)^m \cdot (m + 1 - m \cdot \lambda/n)}{(1 - \lambda/n)^2}$

7. Среднее число заявок связанных с системой $\bar{N} = \bar{k} + r$;

8. Среднее время ожидания заявки в очереди

$$t_{оч} = \frac{\lambda^n \cdot p_0}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - (\lambda/n)^m \cdot (m + 1 - m \cdot \lambda/n)}{(1 - \lambda/n)^2};$$

9. Среднее время пребывания заявки в системе $t_{сис} = \bar{N}/a$;

10. Среднее число свободных линий $k_o = n - \bar{k} = n - \lambda q$;

11. Коэффициент простоя системы $\beta = 1 - \lambda q/n$.

ТЕМА №3 АНАЛИТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Построение аналитических моделей обычно основывается на использовании фундаментальных законов природы, вариационных принципов, принципов аналогий. К числу законов природы, которые часто применяются при создании моделей, следует отнести прежде всего законы сохранения (энергии, массы, заряда,...). Также при разработке аналитических моделей достаточно часто применяются вариационные принципы, согласно которым моделируемый объект связывается с некоторой величиной, достигающей своего экстремального значения при тех возможных состояниях объекта, которые реализуются в действительности.

При изучении различных объектов часто приходится сталкиваться с различными колебательными процессами. Колебания различной природы широко распространены в окружающем нас мире. Несмотря на большое разнообразие колебательных процессов, все они математически описываются похожими дифференциальными уравнениями, которые можно получить различными способами.

Модели регулярных колебаний

Рассмотрим некоторые модели колебательных процессов и проанализируем результаты, полученные при их реализации.

Свободными называются колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе после того, как она была выведена из положения равновесия.

Свободные колебания линейной системы с одной степенью свободы описываются обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) $a\ddot{y} + cy = 0$.

Его решение имеет вид $y = A \sin(kt + \alpha)$, где $k^2 = c/a$

Если в начальный момент времени $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$, то

$$A = \sqrt{y_0^2 + \dot{y}_0^2 / k^2}, \text{ а } \alpha = \arctg\left(\frac{k y_0}{\dot{y}_0}\right).$$

Таким образом, амплитуда A и начальная фаза α определяются начальными условиями, а частота колебаний $k = \sqrt{c/a}$ и период $T = 2\pi/k$ от начальных условий не зависят.

Если на систему действуют силы сопротивления, пропорциональные скорости $-\varepsilon\dot{y}$ ($\varepsilon > 0$), то ОДУ примет вид $a\ddot{y} + cy = -\varepsilon\dot{y}$ или $\ddot{y} + 2b\dot{y} + k^2 y = 0$, где $b = \varepsilon/2a$, $k^2 = c/a$.

Решение в этом случае будет зависеть от соотношения величин b и k .

Если $b < k$, то решением будет

$$y = A e^{-bt} \sin(k_1 t + \beta), \text{ где } k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}$$

$$A = \sqrt{y_0^2 + (\dot{y}_0 + b y_0) / k_1^2}, \beta = \arctg\left(\frac{k_1 y_0}{\dot{y}_0 + b y_0}\right)$$

В этом случае мы имеем затухающие колебания. Периодом при затухающих колебаниях называют промежуток времени между двумя последовательными прохождениями системы через положение равновесия с одинаковым направлением

скорости. Очевидно, $T_3 = \frac{2\pi}{k \sqrt{1 - b^2/k^2}} = \frac{T}{\sqrt{1 - b^2/k^2}}$.

Наличие сил сопротивления увеличивают период колебаний. Кроме того с каждым колебанием амплитуда уменьшается. По-прежнему амплитуда и начальная фаза определяются начальными условиями, а частота колебаний и период от начальных условий не зависят.

Если $b > k$, решение имеет вид

$$y = e^{-bt} \left(\frac{y_0(k_2 + b) + \dot{y}_0}{2k_2} \cdot e^{k_2 t} + \frac{y_0(k_2 + b) + \dot{y}_0}{2k_2} e^{-k_2 t} \right).$$

Здесь, очевидно, при любых начальных условиях система монотонно будет стремиться к положению равновесия, а ее движение не будет колебательным.

При $b = k$ получаем решение вида $y = e^{-bt} ((\dot{y}_0 + by_0)t + y_0)$.

В этом случае также при любых начальных условиях система будет монотонно стремиться к положению равновесия, не совершая колебаний.

Вынужденные колебания возникают в результате наличия внешних воздействий на систему. Рассмотрим случай, когда на систему действуют внешние факторы, подчиняющиеся гармоническому закону $Q \sin pt$. В этом случае колебательный процесс описывается ОДУ $a\ddot{y} + cy = Q \sin pt$ или $\ddot{y} + k^2 y = q \sin pt$, где

$q = \frac{Q}{a}$. Тогда с учетом начальных условий

$y(0) = y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0$ решение будет иметь вид

$$y = y_0 \cos kt + \frac{\dot{y}_0}{k} \sin kt - \frac{qp}{k(k^2 - p^2)} \sin kt + \frac{q}{k^2 - p^2} \sin pt.$$

Первые два слагаемых представленного решения соответствуют свободным колебаниям системы. Третье слагаемое представляет собой гармоническое колебание с собственной частотой k , но с амплитудой, зависящей от амплитуды внешнего воздействия. Оно всегда сопровождает вынужденные колебания при любых начальных условиях, его называют свободное сопровождающее колебание. Четвертое слагаемое описывает чисто вынужденные колебания системы, которые происходят с частотой внешнего воздействия и не зависят от начальных условий. При приближении p к k его амплитуда неограниченно увеличивается.

Представленное решение имеет смысл только при $k \neq p$. Если $k = p$, то решение дифференциального уравнения принимает иной вид

$$y = y_0 \cos kt + \frac{\dot{y}_0}{k} \sin kt + \frac{q}{2k^2} \sin kt - \frac{qt}{2r} \cos kt.$$

В этом решении последнее слагаемое описывает колебание с амплитудой, возрастающей пропорционально времени. Это явление резонанса,

возникающее при совпадении частоты внешнего воздействия с собственной частотой системы.

При наличии сил сопротивления колебательный процесс описывается дифференциальным уравнением $a\ddot{y} + \varepsilon\dot{y} + cy = Q \sin pt$ или

$\ddot{y} + 2b\dot{y} + k^2 y = q \sin pt$, которое имеет решение

$$y = e^{-bt} \left(y_0 \cos k_1 t + \frac{\dot{y}_0 + by_0}{k_1} \sin k_1 t \right) + A e^{-bt} \left(\sin \delta \cdot \cos k_1 t + \frac{b \sin \delta - p \cos \delta}{k_1} \sin k_1 t \right) + A \sin(pt - \delta),$$

где $A = \frac{q}{\sqrt{(k^2 - p^2) + 4b^2 p^2}}$, $\delta = \arctg\left(\frac{2bp}{k^2 - p^2}\right)$,

$$k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}.$$

Первые два слагаемых решения достаточно быстро затухают с течением времени и соответствуют свободным и свободным сопровождающим колебаниям. Ими можно пренебречь и считать, что система совершает только вынужденные колебания, которые описываются последним слагаемым.

Закономерности, выявленные при анализе полученных в результате моделирования колебания, проявляются практически во всех колебательных процессах.

Нелинейные колебания

Нелинейные колебания описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. В большинстве случаев линейные дифференциальные уравнения получают в результате линеаризации, то есть упрощения реальных нелинейных систем. Линеаризация ограничивает возможность полного и всестороннего изучения всех колебательных свойств системы и часто приводит к неправильным заключениям о поведении системы. В качестве примера моделирования нелинейных колебаний, рассмотрим дифференциальное уравнение, описывающее

свободные колебание математического маятника $\ddot{y} + \frac{g}{l} \sin y = 0$ с начальными условиями $y(0) = y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0$.

Решение этого уравнения может быть представлено в следующем виде

$$t = \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{\dot{y}_0^2 + 2 \frac{g}{l} (\cos y - \cos y_0)}}.$$

При $\dot{y}(0) = 0$ решение представимо в виде $t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{(\sin^2 \frac{y_0}{2} - \sin^2 \frac{y}{2})}}$, а

для периода колебаний можно получить соотношение

$$T = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{(\sin^2 \frac{y_0}{2} - \sin^2 \frac{y}{2})}}.$$

Значит период колебаний, а следовательно и частота в этом случае зависят от начальных условий.

ТЕМА №4 ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Под численным моделированием понимается такое представление математической модели, которое доступно для реализации на компьютере.

Если математическая модель представлена в форме дифференциального уравнения, то численным методом является аппроксимирующее его разностное уравнение совместно с алгоритмом, позволяющим найти решение этого разностного уравнения. Алгоритмы, реализующие численные методы, должны обладать свойствами сходимости и устойчивости.

Алгоритм считается сходящимся, если при последовательном уменьшении шага в разностном уравнении получается все более точный ответ.

Алгоритм считается устойчивым, если небольшая ошибка на любой стадии решения приводит к небольшой ошибке в решении.

Статические режимы

Практическая задача расчета статических режимов (определение равновесных состояний систем) часто связана с определением статических характеристик модели системы, которые могут быть в виде системы уравнений

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ y_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \dots\dots\dots \text{или } \bar{y} = \bar{\varphi}(\bar{x}). \\ y_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{cases}$$

Итерационные методы

Метод, в котором производится последовательное шаг за шагом уточнение первоначального приближения, называется итерационным методом, а каждый шаг в этом методе называется итерацией.

Рассмотрим модель в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ \dots\dots\dots \text{или } \bar{\varphi}(\bar{x}) = \bar{0}. \\ \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \end{cases}$$

Зададим некоторое начальное приближение \bar{x}_0 , начиная с которого будем осуществлять последовательное приближение к точному решению с помощью итерационного процесса вида $\bar{x}_{k+1} = S(\bar{x}_k)$, $k=1,2,3,\dots$, где k – номер итерации, $S(\bar{x}_k)$ – итерационный оператор.

Полученная при этом последовательность векторов $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$ должна

сходиться к вектору \bar{x}^* , удовлетворяющему соотношению $\bar{x}^* = S(\bar{x}^*)$.

Вектор \bar{x}^* называется неподвижной точкой в R^m , отвечающая равновесному состоянию системы.

Оператор $S(\bar{x}_k)$ определяется так, чтобы вектор \bar{x}^* совпадал с решением системы.

Итерационный процесс завершается при выполнении условия $\|\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1}\| < \delta$, где $\|\cdot\|$ – норма вектора, δ – заданная погрешность.

В зависимости от решаемой задачи, можно выбрать ту норму, которая обеспечит наилучший результат.

Примеры норм: $\|\bar{x}\| = \sum_{k=1}^m |x_k|$, $\|\bar{x}\| = \left(\sum_{k=1}^m x_k^2 \right)^{1/2}$, $\|\bar{x}\| = \max_k |x_k|$.

Все нормы обладают следующими свойствами :

$$1. \|\bar{x}\| \geq 0, \text{ если } \|\bar{x}\| = 0, \text{ то } \bar{x} = \bar{0};$$

$$2. \|\alpha \cdot \bar{x}\| = |\alpha| \cdot \|\bar{x}\|;$$

$$3. \|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|.$$

Норма разности двух векторов $\|\bar{x} - \bar{y}\|$ определяет их близость.

Иногда для завершения итерационного процесса используется условие

$$\|\bar{\varphi}(\bar{x})\| \leq \varepsilon \text{ или } \max \left\{ \|\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1}\|, \|\bar{\varphi}(\bar{x})\| \right\} \leq \varepsilon, \text{ где } \varepsilon - \text{ задаваемая}$$

точность.

Примеры итерационных процессов

1.Метод простой итерации. В этом случае решаемую систему уравнений следует представить в виде $\bar{x} = \bar{g}(\bar{x})$. Тогда итерационный процесс реализуется в соответствии с формулой $\bar{x}_k = \bar{g}(\bar{x}_{k-1})$. Следует отметить, что метод простой итерации не всегда сходится к точному решению. Для его сходимости вектор-функция $\bar{g}(\bar{x})$ должна удовлетворять соответствующим условиям.

2.Метод Ньютона. Для системы уравнений $\bar{\varphi}(\bar{x}) = \bar{0}$ данный метод реализуется по формуле $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - F^{-1} \bar{\varphi}(\bar{x}_k)$, где F - матрица

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

при $\Delta t \rightarrow 0$.

Численный метод сходится на интервале $(t_0, t_k]$, если он сходится в каждой точке этого интервала.

Погрешность метода определяется величиной $\bar{\Delta}_k = \bar{x}_k - \bar{v}(t_k)$ или величиной $\|\bar{\Delta}_k\|$, которые являются мерой удаленности приближенного решения от точного.

Явный метод Эйлера

Рассмотрим ОДУ $\frac{dx}{dt} = \varphi(t, x)$, $x(0) = x_0$.

Данное уравнение заменяется разностным уравнением

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} = \varphi(t_k, x_k).$$

После этого легко получить расчетную формулу метода Эйлера

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t \cdot \varphi(t_k, x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Величина $\varepsilon_k = \varphi(t_k, v_k) - \frac{v_{k+1} - v_k}{\Delta t}$, называется невязкой или погрешностью аппроксимации уравнения на решении исходного уравнения ($v_k = v(t_k)$ – точное решение исходного дифференциального уравнения).

Разностный метод аппроксимирует исходное ОДУ если $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$.

Разностный метод имеет $p^{\text{й}}$ порядок аппроксимации, если $\varepsilon_k = O(\Delta t^p)$ при $\Delta t \rightarrow 0$.

Метод имеет $p^{\text{й}}$ порядок точности, если существует такое целое $p > 0$, что

$$|x_k - v(t_k)| = O(\Delta t^p).$$

Рассмотренный метод Эйлера имеет первый порядок точности.

Неявный метод Эйлера

В неявном методе Эйлера исходное ОДУ заменяется разностным уравнением

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} = \frac{1}{2} (\varphi(t_{k+1}, x_{k+1}) + \varphi(t_k, x_k)).$$

Тогда расчетная формула метода будет иметь вид

$$x_{k+1} = x_k + \frac{\Delta t}{2} (\varphi(t_{k+1}, x_{k+1}) + \varphi(t_k, x_k)).$$

В соответствии с этим методом на каждом шаге для определения x_{k+1} необходимо решать уравнение. Этот метод имеет второй порядок аппроксимации.

Методы Рунге- Кутга

Получившие широкое распространение методы Рунге-Кутга отличаются от разностных методов тем, что в них приходится вычислять значения правых частей дифференциальных уравнений $\varphi(t, x)$ не только в узловых точках, но и в некоторых промежуточных. Приведем некоторые расчетные формулы, используемые при реализации этих методов.

1. Формулы метода Рунге-Кутга третьего порядка

$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{6} K_1 + \frac{2}{3} K_2 + \frac{1}{6} K_3, \quad K_1 = \Delta t \cdot \varphi(t_k, x_k),$$

$$K_2 = \Delta t \cdot \varphi(t_k + \Delta t/2, x_k + K_1/2),$$

$$K_3 = \Delta t \cdot \varphi(t_k + \Delta t, x_k - K_1 + K_2/2).$$

2. Формулы метода Рунге-Кутга четвертого порядка

$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{6} K_1 + \frac{1}{3} K_2 + \frac{1}{3} K_3 + \frac{1}{6} K_4, \quad K_1 = \Delta t \cdot \varphi(t_k, x_k),$$

$$K_2 = \Delta t \cdot \varphi(t_k + \Delta t/2, x_k + K_1/2), \quad K_3 = \Delta t \cdot \varphi(t_k + \Delta t/2, x_k + K_2/2),$$

$$K_4 = \Delta t \cdot \varphi(t_k + \Delta t, x_k + K_3).$$

3. Формулы Рунге-Кутга четвертого порядка для решения системы ОДУ

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z) & y(0) = y_0 \\ z' = g(x, y, z) & z(0) = z_0 \end{cases}.$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6} K_1 + \frac{1}{3} K_2 + \frac{1}{3} K_3 + \frac{1}{6} K_4,$$

$$z_{k+1} = z_k + \frac{1}{6}L_1 + \frac{1}{3}L_2 + \frac{1}{3}L_3 + \frac{1}{6}L_4,$$

$$K_1 = \Delta x \cdot f(x_k, y_k, z_k), \quad L_1 = \Delta x \cdot g(x_k, y_k, z_k),$$

$$K_2 = \Delta x \cdot f\left(x_k + \frac{\Delta x}{2}, y_k + \frac{K_1}{2}, z_k + \frac{L_1}{2}\right),$$

$$L_2 = \Delta x \cdot g\left(x_k + \frac{\Delta x}{2}, y_k + \frac{K_1}{2}, z_k + \frac{L_1}{2}\right),$$

$$K_3 = \Delta x \cdot f\left(x_k + \frac{\Delta x}{2}, y_k + \frac{K_2}{2}, z_k + \frac{L_2}{2}\right),$$

$$L_3 = \Delta x \cdot g\left(x_k + \frac{\Delta x}{2}, y_k + \frac{K_2}{2}, z_k + \frac{L_2}{2}\right),$$

$$K_4 = \Delta x \cdot f(x_k + \Delta x, y_k + K_3, z_k + L_3),$$

$$L_4 = \Delta x \cdot g(x_k + \Delta x, y_k + K_3, z_k + L_3).$$

Многошаговые разностные методы

Многошаговыми методами называются методы, аппроксимирующие ОДУ

$\frac{dx}{dt} = \varphi(t, x)$ разностными уравнениями вида

$$\frac{a_0 x_k + a_1 x_{k-1} + \dots + a_m x_{k-m}}{\Delta t} = b_0 \varphi_k + b_1 \varphi_{k-1} + \dots + b_m \varphi_{k-m},$$

где $k = m, m+1, m+2, \dots$, a_n и b_n - числовые коэффициенты, не зависящие от n , $a_0 \neq 0$, $x_{k-m} = x(t_{k-m})$, $\varphi_{k-m} = \varphi(t_{k-m}, x_{k-m})$.

Коэффициенты b_n должны удовлетворять соотношению $\sum_{n=0}^m b_k = 1$.

Эти уравнения являются рекуррентными соотношениями, которые выражают

x_k через найденные ранее x_{k-1} , x_{k-2} , ..., x_{k-m} .

Расчеты начинаются при $k = m$ и для начала вычислений необходимо знать x_0 , x_1, \dots, x_{m-1} . Величина x_0 задается из начальных условий, а для

определения значений x_1, x_2, \dots, x_{m-1} следует использовать какой-либо другой метод (метод Эйлера, метод Рунге Кутты).

Многошаговые методы будут явными при $b_0 = 0$, когда величина x_k непосредственно вычисляется через уже известные величины $x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_{k-m}$. В противном случае метод будет неявным и для нахождения x_k надо будет решать уравнение.

В качестве примера многошаговых методов рассмотрим некоторые методы Адамса. В них производная dx/dt аппроксимируется разностным отношением

$\frac{x_k - x_{k-1}}{\Delta t}$ и расчетные формулы этих методов имеют вид

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} = \sum_{n=0}^m b_n \varphi_{k-n}$$

При $b_0 = 0$ методы Адамса являются явными, в противном случае они будут неявными.

Формула явного метода Адамса-Бэшфорда

$$\frac{x_k - x_{k-1}}{\Delta t} = \frac{1}{2} (3 \cdot \varphi(t_{k-1}, x_{k-1}) - \varphi(t_{k-2}, x_{k-2})) \text{ или}$$

$$x_k = x_{k-1} + \frac{\Delta t}{2} (3 \cdot \varphi(t_{k-1}, x_{k-1}) - \varphi(t_{k-2}, x_{k-2}))$$

Формула явного метода Адамса-Мултона

$$\frac{x_k - x_{k-1}}{\Delta t} = \frac{1}{12} (5 \cdot \varphi(t_k, x_k) + 8 \cdot \varphi(t_{k-1}, x_{k-1}) - \varphi(t_{k-2}, x_{k-2})) \text{ или}$$

$$x_k = x_{k-1} + \frac{\Delta t}{12} (5 \cdot \varphi(t_{k-1}, x_{k-1}) + 8 \cdot \varphi(t_{k-1}, x_{k-1}) - \varphi(t_{k-2}, x_{k-2})).$$

Устойчивость численных методов

Применение численных методов может приводить к неустойчивости решения и отсутствию сходимости. Неустойчивость численных методов может быть обусловлена ошибками в исходных данных, а также погрешностями вычислений. Численные методы, приводящие к неустойчивым решениям называются плохо обусловленными или некорректными.

Разностный метод является устойчивым по исходным данным, если существует такое постоянное число M , не зависящее от k , что при любых исходных данных

для решения (сеточной функции x_k) выполнялось неравенство

$$\|x_k\| \leq M \|x_0\|, \text{ где } \|x_0\| \text{ норма исходных данных.}$$

Разностный метод называется абсолютно устойчивым, если он устойчив при любых $\Delta t > 0$, и условно устойчивым, если он устойчив при некоторых ограничениях на шаг Δt .

Так, например, неявный метод Эйлера является абсолютно устойчивым, а явный - условно устойчивым.

Как правило, для получения устойчивого решения при использовании условно устойчивых методов, ограничения накладываемые на шаг требуют, чтобы он был достаточно мелким.

Жесткие модели

Часто при реализации численных методов на компьютере шаг Δt выбирается программой автоматически. Если в процессе вычислений решение \bar{x} изменяется медленно, то шаг выбирается достаточно большим и численные расчеты довольно быстро «перемещаются» по интервалу, на котором определяется решение. При быстром изменении решения шаг значительно уменьшается, что позволяет сохранить необходимую точность проводимых расчетов. Однако, очень часто в этом случае приходится сталкиваться с очень неприятным явлением. В начале расчетов, когда решение изменяется достаточно быстро шаг избирался очень малым. Затем, через некоторое число шагов решение становилось медленно меняющимся. Но программа этого «не замечала» и шаг не увеличивала. Это приводило к значительному увеличению количества необходимых шагов для получения решения задачи, а значит к увеличению необходимого машинного времени. Попытки принудительно «заставить» программу увеличить шаг приводили к быстро расходящемуся процессу. Такие модели получили название

жестких.

Попытаемся определить причины этого явления и рассмотрим систему ОДУ

$$\begin{cases} \dot{x}_1 + a_1 x_1 = 0 & x_1(0) = b_1 \\ \dot{x}_2 + a_2 x_2 = 0 & x_2(0) = b_2 \end{cases},$$

где $a_1 > 0$, $a_2 > 0$

Точное решение этой системы имеет вид

$$\bar{x}(t) = \{b_1 e^{-a_1 t}, b_2 e^{-a_2 t}\}.$$

Если $a_1 \gg a_2 \approx 1$, то первая компонента вектора-решения убывает намного быстрее второй, и для достаточно больших t решение с хорошей степенью точности может быть представлено в виде $\bar{x}(t) = \{0, b_2 e^{-a_2 t}\}$. Причем вторая компонента решения в силу небольшого a_2 будет изменяться сравнительно медленно.

Используя для решения этой системы явный метод Эйлера, получим расчетную формулу

$$\begin{cases} \frac{x_{1,k} - x_{1,k-1}}{\Delta t} + a_1 x_{1,k} = 0 \\ \frac{x_{2,k} - x_{2,k-1}}{\Delta t} + a_2 x_{2,k} = 0 \end{cases}.$$

Можно показать, что устойчивость этого условно устойчивого метода будет обеспечена при выполнении неравенств $\Delta t \leq 2/a_1$ и $\Delta t \leq 2/a_2$.

При реализации этой схемы в начале расчетов решение изменяется быстро из-за большого a_1 и в силу этого программа выбирает достаточно малый шаг Δt .

Через некоторое число шагов первая компонента решения из-за быстрого убывания практически обращается в ноль, и решение начинает изменяться медленно. Но перейти к более крупному шагу программа не может, так как ничтожно малая первая компонента тем не менее по-прежнему изменяется быстро. Принудительное увеличение шага ведет к нарушению условия устойчивости

первого уравнения системы $\Delta t \leq 2/a_1$ и к расходимости процесса.

Аналогичные трудности возникают и при решении многих линейных систем ОДУ, имеющих вид

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x},$$

если матрица A имеет большой разброс собственных чисел.

Определение. Линейная система ОДУ с постоянной матрицей A размера $n \times n$ называется жесткой, если

1) $\text{Re } \lambda_k < 0, k = 1, 2, 3, \dots, n$, λ_k - собственные числа A ;

2) отношение $S = \frac{\max_{1 \leq k \leq n} |\text{Re } \lambda_k|}{\min_{1 \leq k \leq n} |\text{Re } \lambda_k|}$ велико (больше 10).

Отношение S называется числом жесткости ОДУ.

Если элементы матрицы A являются функциями t $a_{ij}(t)$, то тогда и собственные числа тоже будут функциями $\lambda_k(t)$. В этом случае для каждого t можно определять отношение $S(t)$.

Тогда свойства жесткости будут зависеть от длины отрезка $[0, T]$, на котором находится решение системы.

Определение. Система $d\bar{x}/dt = A(t)\bar{x}$ называется жесткой на отрезке $[0, T]$, если 1) $\text{Re } \lambda_k < 0, k = 1, 2, 3, \dots, n$, для любого $t \in [0, T]$;

2) число $\sup_{t \in [0, T]} S(t)$ велико.

sup - точная верхняя граница множества, то есть элемент множества, который равен или больше всех остальных.

Процессы в жестких моделях содержат как быстро убывающие, так и медленно убывающие составляющие. Начиная с некоторого $t > 0$, поведение системы почти полностью определяется медленно убывающими составляющими. При использовании явных разностных методов быстро убывающие составляющие отрицательно влияют на устойчивость, что вынуждает выбирать очень малый шаг

\bar{x}^* , если

1) $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$, для любого $t \in [0, T]$;

2) число $\sup_{t \in [0, T]} S(t)$ велико.

Дифференциальные уравнения в частных производных

Если функции, входящие в дифференциальное уравнение, зависят от одной переменной, то уравнение называется обыкновенным дифференциальным уравнением. Если в дифференциальное уравнение входят функции, зависящие от нескольких переменных вместе со своими частными производными, то дифференциальное уравнение называется уравнением в частных производных. Дифференциальные уравнения в частных производных, как и обыкновенные дифференциальные уравнения имеют бесконечное множество решений. Но дифференциальные уравнения, как правило, описывают поведение некоторого объекта или процесса. Поэтому для получения однозначного описания поведения объекта, который моделируется соответствующим дифференциальным уравнением, к дифференциальным уравнениям в частных производных следует добавить некоторые дополнительные условия. Эти дополнительные условия состоят из начальных условий и граничных условий. Начальные условия описывают состояние моделируемого объекта в начальный момент времени. Граничные описывают состояния граничных точек моделируемого объекта или состояния граничных точек той области, в пределах которой разворачивается моделируемый объект. В некоторых случаях интерес представляет состояние объекта или процесса в некоторый фиксированный момент времени, и изменение состояния моделируемого объекта во времени не представляет интереса. В такой ситуации входящие в уравнение неизвестные функции не будут зависеть от времени. В этом случае начальные условия опускают, и к дифференциальным уравнениям в частных производных добавляют только граничные условия.

Определение точного решения дифференциальных уравнений в частных производных представляет собой достаточно сложную задачу. Поэтому широкое распространение получили различные приближенные методы. Одним из эффективных методов решения дифференциальных уравнений является метод конечных разностей.

В качестве примера рассмотрим задачу о распространении тепла в однородном стержне, нагреваемом за счет внутренних источников.

Рассмотрим однородный стержень длины l , теплоизолированный с боков и достаточно тонкий, чтобы в любой момент времени температуру во всех точках

поперечного сечения можно было считать одинаковой. Будем считать, что на концах стержня поддерживается определенная температура.

Данная задача сводится к решению нижеследующего дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad x \in [0, l], \quad t \in [0, T]$$

с начальными условиями $u(x, 0) = g(x)$

и с граничными условиями на концах $u(0, t) = a(t)$, $u(l, t) = b(t)$.

Здесь $u(x, t)$ - неизвестная функция, описывающая изменение температуры стержня вдоль его длины и во времени, $f(x, t)$ - заданная функция, описывающая действие внутренних источников тепла, c - задаваемая константа, зависящая от свойств материала стержня, $g(x)$ - заданная функция, описывающая распределение температуры в стержне в начальный момент времени, $a(t)$, $b(t)$ - заданные функции, описывающие изменение температуры во времени, соответственно, на левом и правом концах стержня.

Интервал $[0, l]$ разобьем точками x_k на отрезки одинаковой длины h :

$$x_k = h \cdot k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N, \quad \text{где } h = l/N.$$

Интервал $[0, T]$ разобьем точками t_i на отрезки одинаковой длины Δt :

$$t_i = \Delta t \cdot i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, M, \quad \text{где } \Delta t = T/M.$$

Производные функции $u(x, t)$ по x и по t аппроксимируем конечными

разностями $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{k-1}^i - 2u_k^i + u_{k+1}^i}{\Delta^2}$ и

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_k^{i+1} - u_k^i}{\Delta t}.$$

В этих формулах использовано обозначение $u(x_k, t_i) = u_k^i$.

Тогда исходное дифференциальное уравнение аппроксимируется разностным

уравнением

$$\frac{1}{c^2} \frac{u_k^{i+1} - u_k^i}{\Delta t} = \frac{u_{k-1}^i - 2u_k^i + u_{k+1}^i}{h^2} + f_k^i.$$

Это явная схема треугольника. Ее можно преобразовать к виду

$$u_k^{i+1} = u_k^i + \frac{c^2 \Delta t}{h^2} (u_{k-1}^i - 2u_k^i + u_{k+1}^i) + c^2 \Delta t \cdot f_k^i.$$

К данному соотношению следует добавить начальные и граничные условия, которые, соответственно, примут вид $u_k^0 = g_k$, $u_0^i = a^i$, $u_N^i = b^i$

Тогда вычисление неизвестной функции можно провести по следующей схеме.

При $i = 1$ $u_0^1 = a^1$, $u_N^1 = b^1$, а для $k = 1, 2, \dots, N - 1$

$$u_k^1 = g_k + \frac{c^2 \Delta t}{h^2} (g_{k-1} - 2g_k + g_{k+1}) + c^2 \Delta t \cdot f_k^0$$

При $1 \leq i \leq M - 2$, $u_0^i = a^i$, $u_N^i = b^i$, а для $k = 1, 2, \dots, N - 1$

$$u_k^{i+1} = u_k^i + \frac{c^2 \Delta t}{h^2} (u_{k-1}^i - 2u_k^i + u_{k+1}^i) + c^2 \Delta t \cdot f_k^i.$$

При $i = M$ $u_0^M = a^M$, $u_N^M = b^M$, а для $k = 1, 2, \dots, N - 1$

$$u_k^M = u_k^{M-1} + \frac{c^2 \Delta t}{h^2} (u_{k-1}^{M-1} - 2u_k^{M-1} + u_{k+1}^{M-1}) + c^2 \Delta t \cdot f_k^{M-1}.$$

Производные, входящие в дифференциальное уравнение, можно аппроксимировать иначе

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{k-1}^{i+1} - 2u_k^{i+1} + u_{k+1}^{i+1}}{h^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_k^{i+1} - u_k^i}{\Delta t}.$$

В этом случае исходное дифференциальное уравнение аппроксимируется разностным уравнением

$$\frac{1}{c^2} \frac{u_k^{i+1} - u_k^i}{\Delta t} = \frac{u_{k-1}^{i+1} - 2u_k^{i+1} + u_{k+1}^{i+1}}{h^2} + f_k^{i+1}.$$

Это неявная схема треугольника. Добавив начальные и граничные условия, можно получить систему линейных уравнений относительно неизвестных u_k^i .

ТЕМА №5 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ БИФУРКАЦИЙ

Будем рассматривать динамические системы (ДС), поведение которых описывается системами ОДУ

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{\varphi}(\bar{x})$$

Такие системы ОДУ называют автономными системами (АС), так как $\bar{\varphi}(\bar{x})$ явно не зависит от t .

Пусть $\bar{x}(t)$ - решение указанной системы, определенное на некотором интервале $[0, T]$. Тогда множество точек $\bar{x} = \bar{x}(t)$ при $t \in [0, T]$ является кривой в пространстве R^n . Эту кривую называют траекторией системы.

Вектор $\bar{x}_0 = \text{const}$ называется положением равновесия АС, если $\bar{\varphi}(\bar{x}_0) = \bar{0}$.

Вектор \bar{x}_0 является решением АС, так как $\frac{d\bar{x}_0}{dt} = 0 = \bar{\varphi}(\bar{x}_0)$.

Рассмотрим АС состоящую из n уравнений $\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{\varphi}(\bar{x})$ и обозначим через

$\bar{x}(t, \bar{x}^o)$ решение этой системы, соответствующее начальному условию $\bar{x}(0) = \bar{x}^o$

Определение. Положение равновесия \bar{x}_0 называется устойчивым по Ляпунову, если:

1. Существует $\delta_o > 0$ такое, что если $|\bar{x}^o - \bar{x}_0| < \delta_o$, то решение $\bar{x}(t, \bar{x}^o)$

существует при $0 \leq t < \infty$;

2. для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если $|\bar{x}^o - \bar{x}_0| < \delta$, то $|\bar{x}(t, \bar{x}^o) - \bar{x}_0| \leq \varepsilon$ при всех $0 \leq t < \infty$.

Это означает, что если в начальный момент времени решение находится достаточно близко к положению равновесия (то есть $|\bar{x}^o - \bar{x}_0|$ мало), то и во все последующие моменты времени решение будет оставаться вблизи положения равновесия.

ДС это объект, состояние которого в текущий момент времени определяется некоторым набором величин, а состояние в последующие моменты времени задается законом их изменения (законом эволюции).

Пусть ДС описывается ОДУ, которая зависит от некоторых параметров $\bar{\alpha}$

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{\alpha}), \quad \bar{x} \in R^n, \quad \bar{\alpha} \in R^n.$$

Изменение параметров приводит к качественной перестройке решения ОДУ, изменению количества положений равновесия, характера их устойчивости. В окрестности определенных значений параметров перестройки происходят при сколь угодно малом изменении параметров и называются бифуркациями, а соответствующие значения параметров называются бифуркационными значениями.

Рассмотрим уравнение $\dot{x} = f(x, \alpha)$.

Точка $x = a$ называется положением равновесия данного уравнения, если $f(a, \alpha) = 0$. Очевидно $x = a$ есть решение этого уравнения.

Кривая $f(x, \alpha) = 0$ на плоскости (x, α) называется кривой равновесия.

Пример. Для уравнения $\dot{x} = x^2 - \alpha^2$ кривая $x^2 - \alpha^2 = 0$ является кривой равновесия. Она имеет две ветви $x = \pm \alpha$

Кривая $f(x, \alpha) = 0$ делит всю плоскость (x, α) на области, в которых функция $f(x, \alpha)$ сохраняет знак.

Линеаризация $f(x, \alpha)$ в окрестности точки x^* на кривой равновесия дает

$$\dot{\varepsilon} = f'_x \varepsilon, \text{ где } \varepsilon = x - x^*, f'_x = f'_x(x^*, \alpha).$$

Теорема Ляпунова об устойчивости по линейному приближению.

Пусть \bar{a} - положение равновесия АС $\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{\varphi}(\bar{x})$ и пусть вектор-функция $\bar{\varphi}(\bar{x})$ дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности положения равновесия \bar{a} . Если вещественные части всех собственных значений матрицы Якоби $\bar{\varphi}'(\bar{x})$ отрицательны, то положение равновесия \bar{a} асимптотически устойчиво.

Другими словами, если положение равновесия линеаризованной системы асимптотически устойчиво, то асимптотически устойчиво положение равновесия исходной нелинейной системы.

Характер устойчивости положения равновесия в соответствии с теоремой Ляпунова об устойчивости по линейному приближению, определяется знаком f'_x в точке x^* , если $f'_x \neq 0$.

Пусть при увеличении x точка на плоскости (x, α) переходит через кривую равновесия и знак $f(x, \alpha)$ меняется с «+» на «-». Тогда $f'_x < 0$ и положение равновесия x^* асимптотически устойчиво.

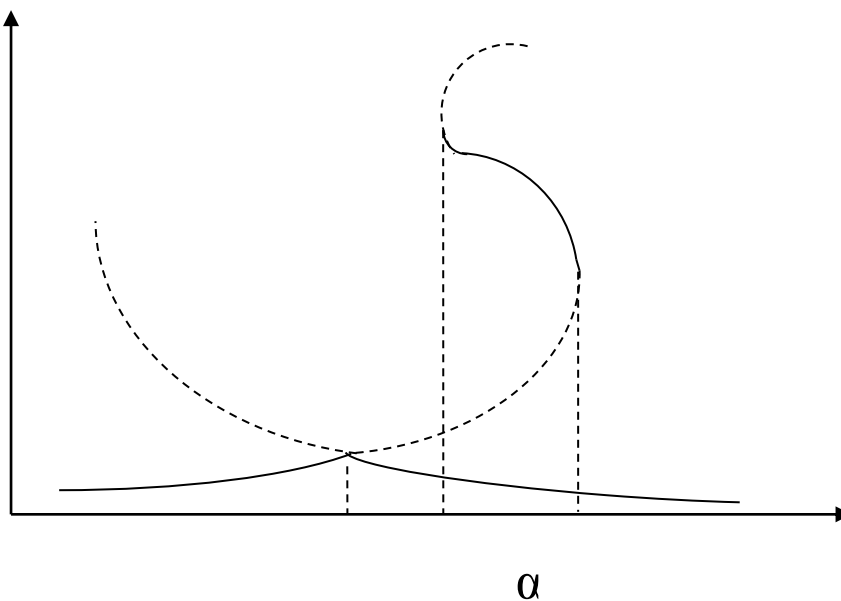
При смене знака $f(x, \alpha)$ с «-» на «+» $f'_x > 0$ и положение x^* неустойчиво по теореме Ляпунова.

Таким образом, ветви кривой равновесия состоит из устойчивых или неустойчивых положений равновесия и называются устойчивыми или неустойчивыми ветвями (соответственно сплошные и пунктирные линии на чертеже).

По теореме о неявной функции уравнение $f(x, \alpha) = 0$ при $f'_x \neq 0$ имеет единственное решение $x(\alpha)$. В точках, где это условие нарушается единственность решение тоже нарушается. Эта точки являются точками бифуркации. Таким образом, точки бифуркации находятся из уравнения $f'_x(x, \alpha) = 0$.

Графическое изображение кривой равновесия с отметкой характера

устойчивости ветвей при наличии бифуркации называется бифуркационной диаграммой.



Для кривой, изображенной на чертеже единственность нарушается в точке пересечения ветвей кривой равновесия α_1 и в точках ветвления α_2, α_3 .

Значения параметра $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и будут бифуркационными.

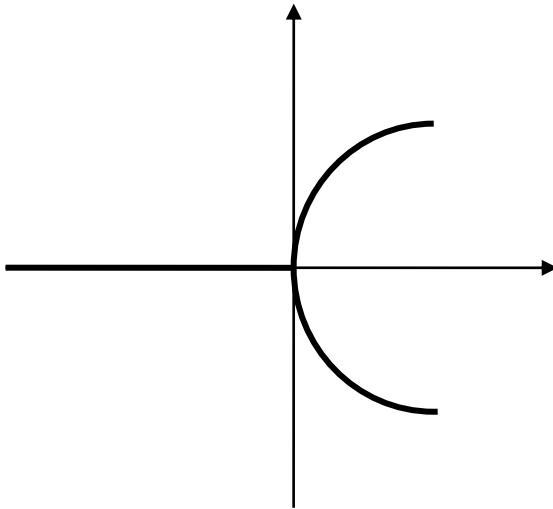
При переходе параметра α через α_1 , устойчивая ветвь теряет устойчивость, а неустойчивая ветвь ее обретает. Эта бифуркация называется сменой устойчивости.

При $\alpha = \alpha_{2,3}$ появляется положение равновесия, а при изменении параметра вблизи $\alpha = \alpha_{2,3}$ приводит к исчезновению или к разветвлению этого положения равновесия на два новых, одно из которых устойчиво, а второе - неустойчиво. Такая бифуркация называется складкой.

В системах, в которых в f входят четные функции фазовой переменной \mathcal{X} встречается еще один тип бифуркации – вилка. В точке бифуркации происходит смена характера устойчивости ветви кривой равновесий и ответвление от нее двух других ветвей с противоположным характером устойчивости.

Рассмотрим, например, случай, когда $f(x, \alpha) = x(\alpha - x^2)$. При переходе через бифуркационное значение $\alpha = 0$ появляются две устойчивые ветви

кривой $x = \pm\sqrt{\alpha}$, при этом ветвь $x = 0$ остается, но теряет устойчивость.



Рассмотрим ОДУ второго порядка $\ddot{x} = f(x, \dot{x}, \alpha)$. Сведем его к системе уравнений первого порядка
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x, y, \alpha) \end{cases}$$

Пусть $(x^*, 0)$ - положение равновесия и значит $f(x^*, 0, \alpha) = 0$

Линеаризация полученной системы в окрестности положения равновесия приведет к системе дифференциальных уравнений
$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = f'_x u + f'_y v \end{cases}$$
, где u и v – отклонения от положения равновесия, а f'_x и f'_y частные производные вычисленные в точке $(x^*, 0)$.

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ f'_x & f'_y - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - f'_y \lambda - f'_x = 0.$$

Его корни λ_1 и λ_2 . Для асимптотической устойчивости линеаризованной системе по критерию Рауса- Гурвица необходимо и достаточно, чтобы $f'_x < 0$ и $f'_y < 0$. В этом случае $\text{Re } \lambda_i < 0$ и положения равновесия асимптотически устойчиво в линеаризованной и исходной системах (по теореме Ляпунова об устойчивости по линейному приближению).

Если f'_x и f'_y имеют другие знаки (но не равны нулю), то положение равновесия неустойчиво в обеих системах, так как корни в этом случае

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(f'_y \pm \sqrt{f_y'^2 + 4f'_x} \right) \text{ и } \operatorname{Re} \lambda_i > 0.$$

Бифуркация рождения предельного цикла

Предельным циклом называется замкнутая траектория системы ОДУ, в окрестности которой нет других периодических решений. Все траектории в окрестности предельного цикла либо стремятся к циклу, либо покидают его окрестность. Если все траектории из некоторой окрестности цикла стремятся к циклу, то он называется асимптотически устойчивым.

В ДС с размерностью $\dim \bar{x} > 1$ встречается бифуркации рождения предельного цикла.

Рассмотрим ОДУ
$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \alpha y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

При любом α она имеет положение равновесия $x = 0, y = 0$.
Линеаризованная система в этом случае будет иметь вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y \\ \dot{y} = x + \alpha y \end{cases}$$

Построим характеристическое уравнение линеаризованной системы

$$\begin{vmatrix} \alpha - \lambda & -1 \\ 1 & \alpha - \lambda \end{vmatrix} = (\alpha - \lambda)^2 + 1.$$

Корни характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i$.

По теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости по линейному приближению получим: при $\alpha < 0$ положение равновесия асимптотически устойчиво, а при $\alpha > 0$ положение неустойчиво.

Перейдем в рассматриваемой системе ОДУ к полярным координатам для исследования системы при потере устойчивости, сделав замену $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. В результате система распадается на два независимых друг от друга дифференциальных уравнения.

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\alpha - r^2) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases}.$$

Первое уравнение при $\alpha > 0$ имеет два положения равновесия $r = 0$ и $r = \sqrt{\alpha}$.

Нулевое решение неустойчиво по линейному приближению. Второе положение равновесия устойчиво, так как линеаризация в его окрестности дает отрицательный коэффициент при линейном члене разложения

$$\frac{d}{dr}r(\alpha - r^2) = \alpha - 3r^2 \text{ и при } r = \sqrt{\alpha} \text{ имеет значение } -2\alpha < 0.$$

Таким образом в окрестности положения равновесия появляется устойчивый цикл в форму окружности $r = \sqrt{\alpha}$, к которому притягиваются все траектории.

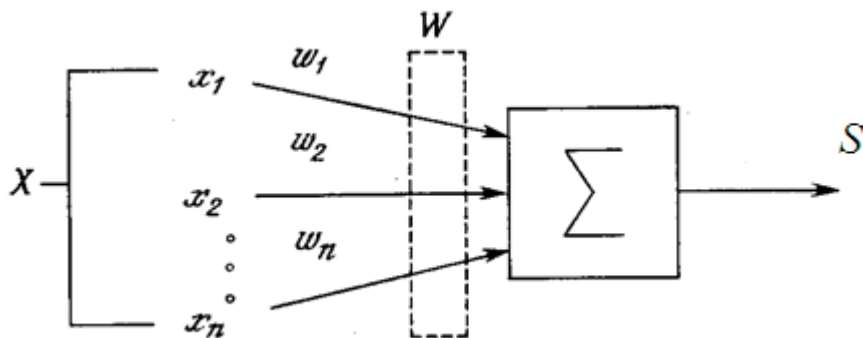
ТЕМА №6 НЕЙРОННЫЕ СЕТИ

Нейронные сети являются устройствами параллельных вычислений, состоящие из большого количества взаимодействующих простых элементов. Каждый элемент периодически принимает сигналы от других элементов, обрабатывает их и отправляет другим элементам. Объединенные в большую сеть с управляемыми взаимодействиями, такие элементы способны выполнять достаточно сложные расчеты.

Основные элементы нейронной сети

Нейронная сеть (НС) представляет собой соединение определенным образом нейронов, которое обеспечивает их взаимодействие.

Искусственный нейрон имитирует свойства и действия биологического нейрона. Искусственный нейрон получает некоторое множество сигналов, каждый из которых является выходом другого нейрона. Каждый вход умножается на соответствующий вес, и все произведения суммируются, определяя уровень активации нейрона.



На приведенной схеме изображен принцип работы нейрона. Совокупность

x_1, x_2, \dots, x_n сигналов, образующих вектор \overline{X} , поступают на вход нейрона.

Каждый поступающий сигнал умножается на соответствующий вес w_1, w_2, \dots, w_n (образуют вектор \overline{W}) и поступает в суммирующий блок Σ .

Веса определяют силу связи между соответствующими нейронами. Суммирующий блок алгебраически складывает взвешенные входные сигналы, образуя выход $S = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n = \overline{X} \cdot \overline{W}$.

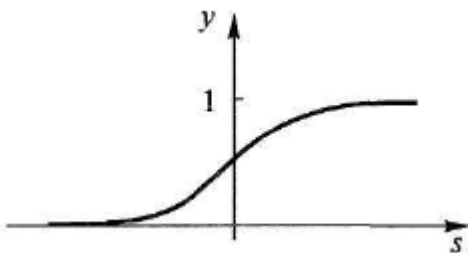
Полученный сигнал S преобразуется активационной функцией нейрона, которая формирует выходной сигнал Y . Активационная функция может быть

1) линейной $Y = kS$, где k - постоянная величина;

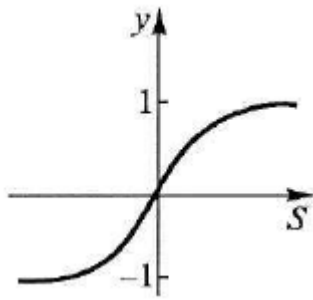
2) пороговой функцией $Y = \begin{cases} 1, S \geq P \\ 0, S < P \end{cases}$, P - некоторая постоянная

пороговая величина;

3) логистической сигмоидальной функцией $Y = \frac{1}{1 + e^{-S}}$



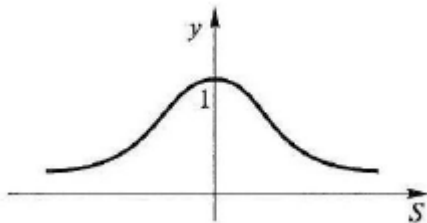
4) гиперболическим тангенсом $Y = th(S) = \frac{e^S - e^{-S}}{e^S + e^{-S}}$



5) функцией Гаусса $Y = \exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma^2}\right)$, здесь S – евклидово расстояние

между входным вектором \bar{X} и центром активационной функции \bar{C} , то есть

$$S = \|\bar{X} - \bar{C}\|$$



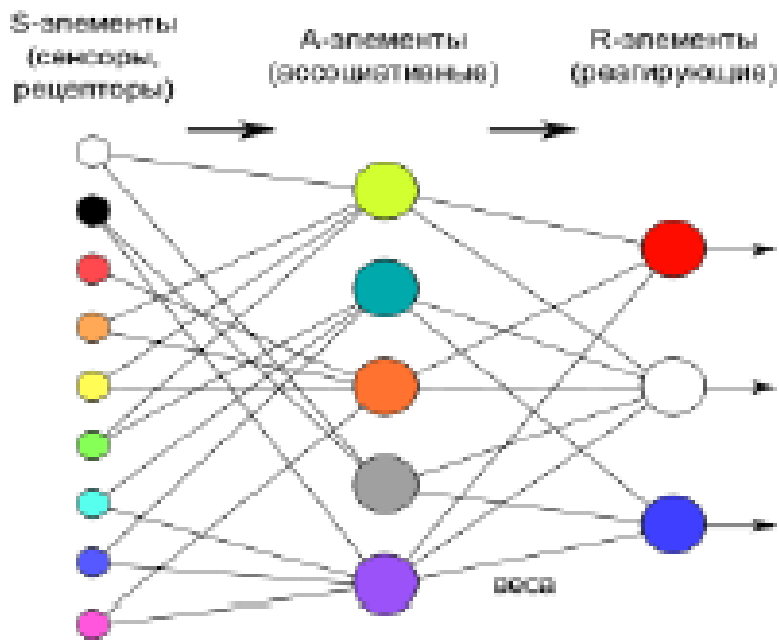
Кроме перечисленных выше функций в качестве активационных используются и другие функции.

Основные типы нейронных сетей.

Соединяя нейроны различными способами и реализуя разные способы их взаимосвязи, можно получить различные типы нейронных сетей.

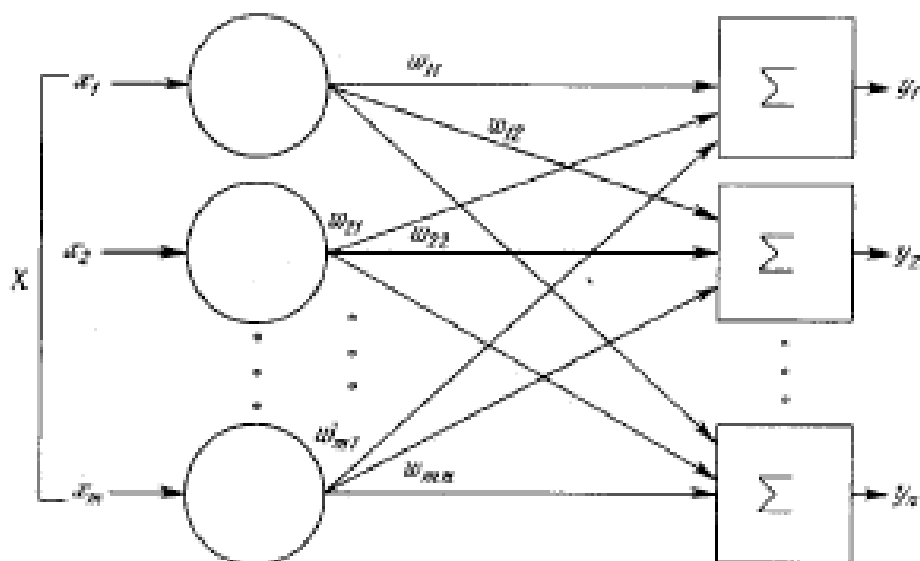
Однослойный персептрон

Персептрон состоит из трех типов элементов. Поступающие от сенсоров сигналы передаются ассоциативным элементам, а затем реагирующим элементам



Структура персептрона

Один нейрон способен выполнять простейшие операции. Сила нейронных сетей обусловлена соединением нейронов соответствующим образом в единую систему (сеть). Простейшая НС состоит из группы нейронов, образующих слой.



Вершины-круги служат для распределения входных сигналов. Они не выполняют вычислений и поэтому не считаются слоем. Каждый элемент из множества входов \overline{X} со своим весом соединен с каждым нейроном. Каждый нейрон выдает взвешенную сумму входов в сеть.

Удобно считать веса элементами матрицы W , имеющий n столбцов (нейронов) и

m строк (входов). Например, элемент данной матрицы W_{ij} - вес, связывающий $j^{\text{й}}$ вход с $i^{\text{м}}$ нейроном. Таким образом, вычисление выходного вектора-строки \bar{N} , компонентами которого являются выходы Y нейронов, сводится к произведению вектора-строки \bar{X} на матрицу W : $\bar{N} = \bar{X} \cdot W$. Однослойные сети ограничены по своим вычислительным возможностям.

Многослойные нейронные сети

Более сложные НС обладают большими вычислительными возможностями. Обычно используется послойная организация нейронов, которая копирует слоистые структуры организации нейронов головного мозга. Такие многослойные сети получили достаточно широкое распространение и имеют большие возможности и могут образовываться каскадами слоев: выход одного слоя является входом следующего слоя. При этом первый слой не выполняет вычислений, а лишь служит в качестве разветвлений для первого множества весов, поэтому при подсчете числа слоев не учитывается. Таким образом, слой состоит из множества весов со следующими за ними нейронами, суммирующими взвешенные сигналы.

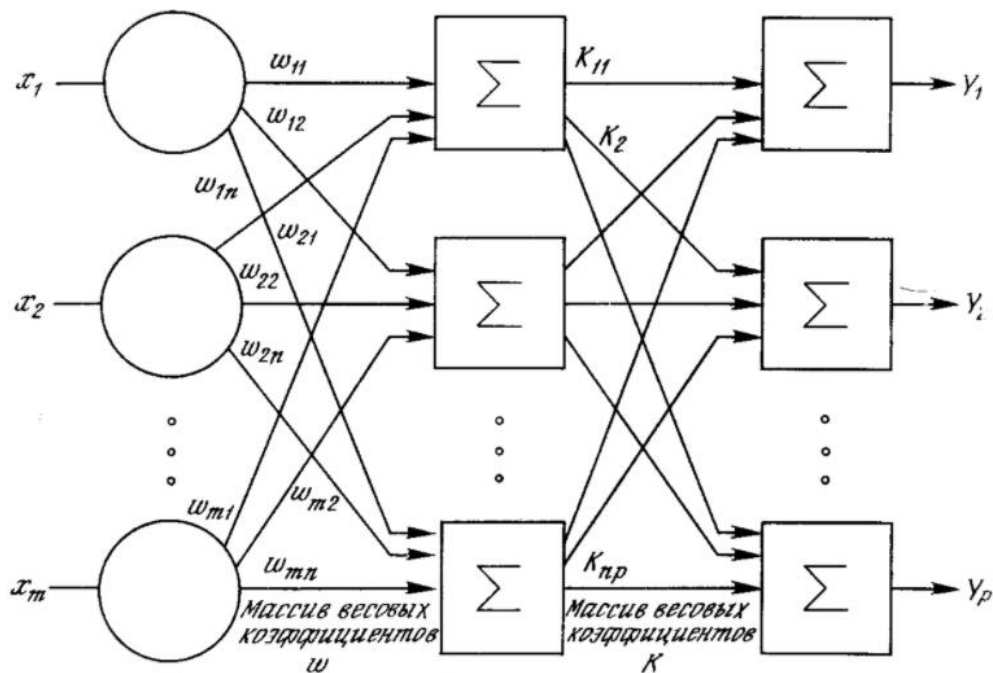
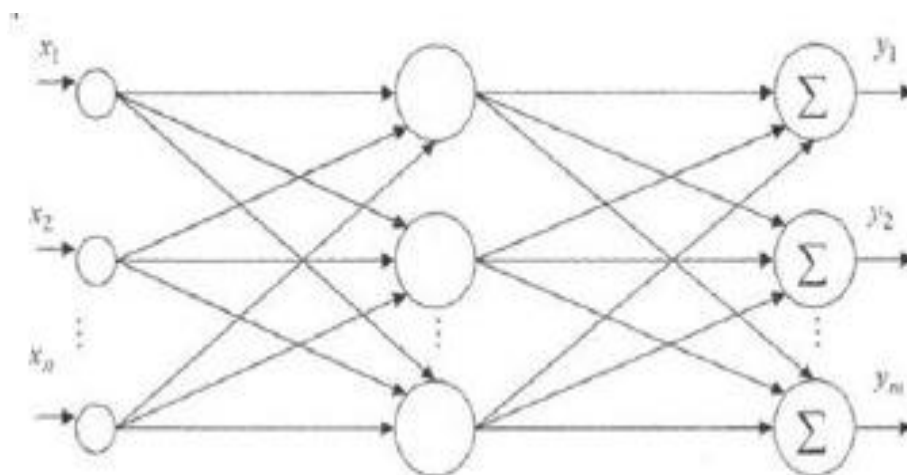


Схема двухслойной нейронной сети.

Сети с радиальными базисными функциями

НС с радиальными базисными функциями (РБФ) в наиболее простой форме содержит три слоя: входной слой, распределяющий данные для первого слоя весов, слой скрытых нейронов с радиальными базисными функциями и выходной слой.



Для построения сети РБФ необходимо выполнение следующих условий:

- 1) наличие эталонов, представленных в виде весовых векторов нейронов скрытого слоя;
- 2) наличие способа измерения расстояния входного вектора от эталона. Обычно это стандартное евклидово расстояние;
- 3) специальная функция активации нейронов скрытого слоя, задающая выбранный способ измерения расстояния.

Обычно используется функция Гаусса, которая существенно усиливает малую разницу между входным и эталонным векторами

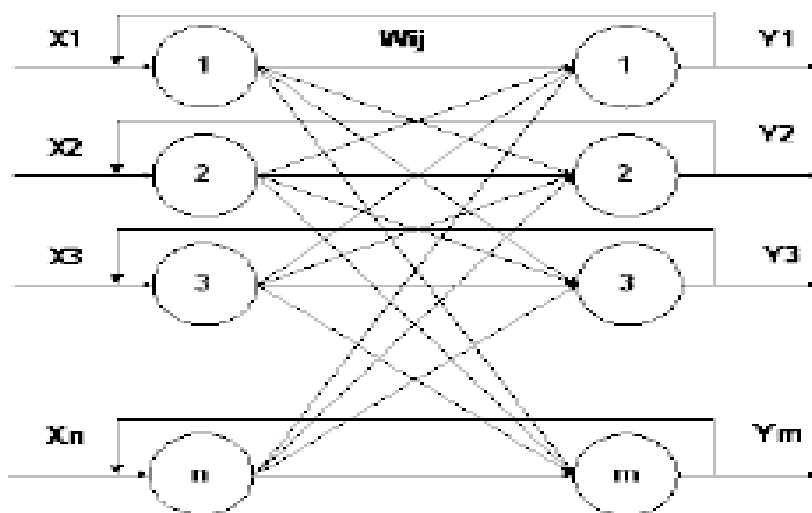
Эти НС моделируют произвольную нелинейную функцию с помощью всего одного промежуточного слоя, тем самым избавляя разработчика от необходимости решать вопрос о числе слоев. Кроме того, параметры линейной комбинации в выходном слое можно полностью оптимизировать с помощью известных методов линейной оптимизации, которые работают быстро и не испытывают трудностей с локальными минимумами, мешающими при обучении с использованием алгоритма обратного распространения ошибки.

Недостатки сетей РБФ: данные сети обладают плохими экстраполирующими свойствами.

Сети с обратными связями

У НС, рассмотренных до сих пор, не было обратных связей, т.е. соединений, идущих от выходов некоторого слоя к входам этого же слоя или предшествующих слоев. Этот специальный класс сетей, называемых сетями без обратных связей или сетями прямого распространения, представляет практический интерес и широко используется. Сети более общего вида, имеющие соединения от выходов к входам, называются *сетями с обратными связями*.

У сетей без обратных связей нет памяти, их выход полностью определяется текущими входами и значениями весов.



Нейронные сети АРТ

Нейронная сеть адаптивной резонансной теории (АРТ) относит входное изображение к одному из известных классов, если оно в достаточной степени подобно или резонирует с прототипом этого класса. Если найденный прототип с определенной точностью, задаваемой специальным параметром сходства, соответствует входному изображению, то он модифицируется, чтобы стать более похожим на предъявленное изображение. Когда входное изображение недостаточно подобно ни одному из имеющихся прототипов, то на его основе создается новый класс. Это возможно благодаря тому, что сеть имеет большое число избыточных или нераспределенных элементов, которые не используются до тех пор, пока в этом нет необходимости (если нет нераспределенных нейронов, то входное изображение не вызывает реакции сети). Таким образом, новые образы могут создавать новые классы, но не могут исказить существующую память.

Методы и алгоритмы обучения нейронных сетей

Сеть обучается, чтобы для некоторого множества входов давать желаемое множество выходов. Каждое такое входное (или выходное) множество рассматривается как вектор. Обучение осуществляется путем последовательного предъявления входных векторов с одновременной подстройкой весов в соответствии с определенной процедурой. В процессе обучения веса сети постепенно становятся такими, чтобы каждый входной вектор вырабатывал выходной вектор. Разработаны алгоритмы обучения нейронных сетей с учителем и без учителя.

Обучение с учителем предполагает, что для каждого входного вектора существует целевой вектор, представляющий собой требуемый выход. Вместе они называются обучающей парой. Обычно сеть обучается на некотором множестве таких пар. Предъявляется входной вектор, вычисляется выход сети и сравнивается с соответствующим целевым вектором, разность (ошибка) с помощью обратной связи подается в сеть и веса изменяются в соответствии с алгоритмом, стремящимся минимизировать ошибку.

Векторы обучающего множества предъявляются на обработку последовательно, вычисляются ошибки и веса подстраиваются для каждого вектора до тех пор, пока ошибка по всему обучающему массиву не достигнет допустимого низкого уровня.

Существуют методы обучения НС, которые не нуждаются в целевом векторе для выходов и, следовательно, не требуют сравнения с predetermined идеальными ответами.

Обучающее множество в этом случае состоит лишь из входных векторов. Обучающий алгоритм подстраивает веса сети так, чтобы получались согласованные выходные векторы, то есть чтобы предъявление достаточно близких входных векторов давало одинаковые выходы. Процедура обучения, следовательно, выделяет статистические свойства обучающего множества и группирует сходные векторы в классы. Предъявление на вход вектора из данного класса даст определенный выходной вектор, но до обучения невозможно предсказать, какой выход будет производиться данным классом входных векторов. Следовательно, выходы подобной сети должны трансформироваться в некоторую понятную форму, обусловленную процессом обучения. Это не является серьезной проблемой. Обычно не сложно идентифицировать связь между входом и выходом, установленную сетью.

В настоящее время используется огромное разнообразие обучающих алгоритмов. При решении с помощью нейронных сетей прикладных задач необходимо собрать достаточный и представительный объем данных для того, чтобы обучить нейронную сеть решению таких задач. Обучающий набор данных – это набор наблюдений, содержащих признаки изучаемого объекта. Первый вопрос, какие признаки использовать и сколько и какие наблюдения надо провести.

Выбор признаков, по крайней мере первоначальный, осуществляется эвристически на основе имеющегося опыта, который может подсказать, какие признаки являются наиболее важными. Сначала следует включить все признаки, которые, по мнению аналитиков или экспертов, являются существенными, на последующих этапах это множество будет сокращено.

Вопрос о том, сколько нужно иметь наблюдений для обучения сети является наиболее важным. Для большинства реальных задач бывает достаточным нескольких сотен или тысяч наблюдений. Для сложных задач может потребоваться большее количество, однако очень редко встречаются задачи, где требуется менее 100 наблюдений.

Путем анализа имеющихся в распоряжении аналитика входных и выходных данных веса сети автоматически настраиваются так, чтобы минимизировать разность между желаемым сигналом и полученным на выходе в результате моделирования. Эта разность носит название ошибки обучения. Таким образом, процесс обучения – это процесс подгонки параметров той модели процесса или явления, которая реализуется нейронной сетью. Ошибка обучения для конкретной конфигурации нейронной сети определяется путем прогона через сеть всех имеющихся наблюдений и сравнения выходных значений с желаемыми, целевыми значениями. Эти разности позволяют сформировать так называемую функцию ошибок (критерий качества обучения). В качестве такой функции чаще всего берется сумма квадратов ошибок.

Ошибку сети можно изобразить точкой в N -мерном пространстве, а все такие точки образуют некоторую поверхность, называемую поверхностью функции ошибок. При таком подходе цель обучения нейронной сети состоит в том, чтобы найти на этой многомерной поверхности глобальный минимум.

Определить глобальный минимум многомерной функции аналитически невозможно, и поэтому обучение нейронной сети, по сути дела, является процедурой изучения поверхности функции ошибок. Отталкиваясь от случайно выбранной точки на поверхности функции ошибок, алгоритм обучения постепенно отыскивает глобальный минимум. Как правило, для этого вычисляется градиент (наклон) функции ошибок в данной точке, а затем эта информация используется для

продвижения вниз по склону. В конце концов алгоритм останавливается в некотором минимуме, который может оказаться лишь локальным минимумом, а если повезет, то и глобальным.

Алгоритм действует итеративно, и его шаги принято называть эпохами или циклами. На каждом цикле на вход сети последовательно подаются все обучающие наблюдения, выходные значения сравниваются с целевыми значениями и вычисляется функция ошибки. Значения функции ошибки, а также ее градиента используются для корректировки весов, после чего все действия повторяются. Начальные значения весов сети выбираются случайным образом, и процесс обучения прекращается либо когда реализовано определенное количество циклов, либо когда ошибка достигнет некоторого малого значения или перестанет уменьшаться.

Явление переобучения

Одна из наиболее серьезных трудностей при обучении сети заключается в том, что в ряде случаев минимизируется не та ошибка, которую на самом деле нужно минимизировать; сеть обучается минимизировать ошибку на некотором ограниченном обучающем множестве требуется минимизировать ошибку, которая появляется в сети, когда на нее подаются совершенно новые наблюдения. Важно, чтобы нейронная сеть обладала способностью приспосабливаться к этим новым наблюдениям. В действительности сеть обучается минимизировать ошибку на некотором ограниченном обучающем множестве. Это не отвечает требованиям теории о наличии идеального и бесконечно большого обучающего множества. И это не соответствует той реальной ситуации, когда надо минимизировать конкретную функцию ошибок для заранее неизвестной модели.

Эти причины порождают проблему, которая известна как явление переобучения.

Для того чтобы выявить эффект переобучения, используется механизм контрольной проверки. Часть обучающих наблюдений резервируется как контрольные наблюдения и не используется при обучении сети. Вместо этого по мере работы алгоритма эти наблюдения применяются для независимого контроля результата. Вначале ошибка сети на обучающем и контрольном множествах будет одинаковой; если они существенно отличаются, то, вероятно, это означает, что разбиение наблюдений на 2 множества не обеспечило их однородность. По мере обучения сети ошибка убывает, и, пока обучение уменьшает функцию ошибок, ошибка на контрольном множестве также будет убывать. Если же контрольная ошибка перестала убывать или стала расти, это указывает на то, что сеть начала слишком близко следовать исходным данным и обучение следует остановить. В этом случае следует уменьшить количество нейронов или слоев, ибо сеть является слишком мощной для решения данной задачи. Если же, наоборот, сеть имеет недостаточную мощность, чтобы воспроизвести имеющуюся зависимость, то явление переобучения скорее всего наблюдаться не будет и обе ошибки – обучения и проверки – не достигнут достаточно малого уровня.

Свойство обобщения

При описании процедуры обучения нейронных сетей неявно использовалось предположение, что обучающее, контрольное и тестовое множества являются *представительными* для решаемой задачи. Обычно в качестве обучающих берутся данные, испытанные на ряде примеров. Если обстоятельства изменились, то закономерности, имевшие место в прошлом, могут больше не действовать.

Кроме того, нейронная сеть может обучаться только на тех данных, которыми

она располагает. Предположим, что известно обучающее множество для системы стабилизации самолета при полете в спокойной атмосфере, а требуется спроектировать систему стабилизации на основе нейронной сети для условий полета при сильных возмущениях. Тогда едва ли можно ожидать от сети правильного решения в совершенно новой для нее ситуации.

Способность сети, обученной на некотором множестве данных, выдавать правильные результаты для достаточно широкого класса новых данных, в том числе и не представленных при обучении, называется *свойством обобщения* нейронной сети

Алгоритм обратного распространения

В данном алгоритме функция ошибки представляет собой сумму квадратов рассогласования (ошибки) желаемого выхода сети и реального. При вычислении элементов вектора градиента использован своеобразный вид производных функций активации сигмоидального типа. Алгоритм действует циклически (итеративно), и его циклы принято называть *эпохами*. На каждой эпохе на вход сети поочередно подаются все обучающие наблюдения, выходные значения сети сравниваются с целевыми значениями и вычисляется ошибка. Значения ошибки, а также градиента поверхности ошибок используются для корректировки весов, после чего все действия повторяются. Начальная конфигурация сети выбирается случайным образом, и процесс обучения прекращается либо когда пройдено определенное количество эпох, либо когда ошибка достигнет некоторого определенного уровня малости, либо когда ошибка перестанет уменьшаться (пользователь может сам выбрать нужное условие остановки).

Приведем словесное описание алгоритма.

Шаг 1. Весам сети присваиваются небольшие начальные значения.

Шаг 2. Выбирается очередная обучающая пара (X, Y) из обучающего множества; вектор X подается на вход сети.

Шаг 3. Вычисляется выход сети.

Шаг 4. Вычисляется разность между требуемым (целевым, Y) и реальным (вычисленным) выходом сети.

Шаг 5. Веса сети корректируются так, чтобы минимизировать ошибку (сначала веса выходного слоя, затем, с использованием правила дифференцирования сложной функции и отмеченного своеобразного вида производной сигмоидальной функции, – веса предыдущего слоя и т.п.).

Шаг 6. Шаги со 2-го по 5-й повторяются для каждой пары обучающего множества до тех пор, пока ошибка на всем множестве не достигнет приемлемой величины.

Шаги 2 и 3 подобны тем, которые выполняются в уже обученной сети.

Вычисления в сети выполняются послойно. На шаге 3 каждый из выходов сети вычитается из соответствующего компонента целевого вектора с целью получения ошибки. Эта ошибка используется на шаге 5 для коррекции весов сети.

Шаги 2 и 3 можно рассматривать как «проход вперед», так как сигнал распространяется по сети от входа к выходу. Шаги 4 и 5 составляют «обратный проход», поскольку здесь вычисляемый сигнал ошибки распространяется обратно по сети и используется для подстройки весов.

Контрольная работа

Номер варианта каждого из 4 заданий определяется по первым буквам фамилии имени и отчества студента в соответствии с приведенной ниже таблице

Первые буквы фамилии	Вариант задания 1 и 2	Первые буквы имени	Вариант задания 3	Первые буквы отчества	Вариант задания 4
А	1	А	10	А	7
Б	2	Б	9	Б	8
В,Г	3	В,Г	8	В,Г	9
Д,Е	4	Д,Е	7	Д,Е	10
Ж,З	5	Ж,З	6	Ж,З	1
И,К	6	И,К	5	И,К	2
Л,М	7	Л,М	4	Л,М	3
Н,С	8	Н,С	3	Н,С	4
П,Р	9	П,Р	2	П,Р	5
С,Т	10	С,Т	1	С,Т	6
У,Ф	1	У,Ф	10	У,Ф	7
Х,Ц	2	Х,Ц	9	Х,Ц	8
Ч,Ш	3	Ч,Ш	8	Ч,Ш	9
Щ,Э	4	Щ,Э	7	Щ,Э	10
Ю,Я	5	Ю,Я	6	Ю,Я	1

1.ЗАДАНИЕ

Разработать программу, используя возможности MATLAB, для решения приведенной ниже задачи.

ЗАДАЧА.

Система массового обслуживания – завод, выполняющий специальные заказы. Интенсивность поступления заказов равна λ , интенсивность их выполнения - μ . Если при поступлении нового заказа все производственные линии завода заняты, то заказ не принимается. Стоимость одного заказа равна C_1 ед.. Стоимость простоя одной производственной линии равна C_2 ед. Определить оптимальное количество производственных линий при котором убытки завода, обусловленные потерянными заказами и простаивающими производственными линиями, были минимальны.

Значения для указанных в условии величин выбрать в соответствии с вашим вариантом из таблицы

Варианты	λ	μ	C_1	C_2
1	3	2	7	5
2	2	1	5	3
3	4	3	3	1
4	5	3	4	2
5	4	2	6	5
6	7	5	5	4
7	3	1	7	5
8	5	4	6	4
9	6	3	4	2
10	5	4	5	2

2. ЗАДАНИЕ

Используя возможности MATLAB решить предложенное дифференциальное уравнение на указанном интервале с заданными начальными условиями численно и аналитически. Представить полученные решения графически. Найти аналитически общее решение дифференциального уравнения

Дифференциальное уравнение выбрать в соответствии с вашим вариантом из таблицы

Вариант	Дифференциальное уравнение	Интервал	Начальные условия
1	$y'' + 5y' + 6y = 3e^{-x}$	[0,5]	$y(0) = 0, y'(0) = 1$
2	$y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$	[0,1]	$y(0) = 1, y'(0) = 1$
3	$y'' + 3y' + 2y = 5x$	[0,3]	$y(0) = -1, y'(0) = 1$
4	$y'' + 4y' + 3y = 3\sin x$	[0,π]	$y(0) = 0, y'(0) = 3$
5	$y'' + 5y' + 4y = 7xe^{-x}$	[0,5]	$y(0) = 1, y'(0) = 0$
6	$y'' + 6y' + 8y = 3x + 5$	[0,7]	$y(0) = -1, y'(0) = 0$
7	$y'' + 7y' + 6y = 3\cos x$	[0,2π]	$y(0) = 0, y'(0) = -1$
8	$y'' + 7y' + 12y = x^3$	[0,3]	$y(0) = -3, y'(0) = 1$
9	$y'' + 7y' + 10y = 5xe^x$	[0,5]	$y(0) = -1, y'(0) = -1$
10	$y'' + 4y' + 3y = 5x - 3$	[0,3]	$y(0) = 0, y'(0) = -3$

3. ЗАДАНИЕ

Используя возможности Simulink решить систему дифференциальных уравнений с указанными начальными условиями на интервале [0, T]. Результаты представить в виде графиков

Дифференциальное уравнение выбрать в соответствии с вашим вариантом из таблицы

Вариант	Дифференциальное уравнение	Интервал	Начальные условия
1	$\begin{cases} x' = -x - y^2 + e^{-t} \\ y' = 5x - 2ty \end{cases}$	[0,5]	$x(0) = 0,$ $y(0) = 0$
2	$\begin{cases} x' = -2x - y^2 + e^{-t} \\ y' = 5tx - 2y \end{cases}$	[0,3]	$x(0) = 0,$ $y(0) = 0$
3	$\begin{cases} x' = -x^2 - y \\ y' = 5x - 2ty + e^{-t} \end{cases}$	[0,7]	$x(0) = 1,$ $y(0) = 1$
4	$\begin{cases} x' = -x^2 - y \\ y' = -xy - 2ty - t \end{cases}$	[0,10]	$x(0) = 0,$ $y(0) = 0$

Вариант	Дифференциальное уравнение	Интервал	Начальные условия
5	$\begin{cases} x' = -x^2 - y \\ y' = -5xy - 2y - t \end{cases}$	[0,5]	$x(0) = 0,$ $y(0) = 1$
6	$\begin{cases} x' = -3x - y - t \\ y' = -xy - y \end{cases}$	[0,3]	$x(0) = 1,$ $y(0) = 1$
7	$\begin{cases} x' = -5tx - y - t^2 \\ y' = -xy - 3y \end{cases}$	[0,10]	$x(0) = 0,$ $y(0) = 1$
8	$\begin{cases} x' = -5x - xy - t^2 \\ y' = -5txy - 3y \end{cases}$	[0,7]	$x(0) = 0,$ $y(0) = 1$
9	$\begin{cases} x' = -tx - 3xy + 2t^2 \\ y' = -7tx - 3y \end{cases}$	[0,5]	$x(0) = 1,$ $y(0) = 1$
10	$\begin{cases} x' = -tx - 3y^2 \\ y' = -3x - 5ty + 2t^2 \end{cases}$	[0,10]	$x(0) = 0,$ $y(0) = 0$

4 ЗАДАНИЕ.

Провести исследование устойчивости неподвижных точек и их бифуркаций

Вариант	Дифференциальные уравнения
1	$\ddot{x} + (2a - x)\dot{x} + x + 5x^3 = 0$
2	$\ddot{x} + (a - 2x)\dot{x} + 3x + x^3 = 0$
3	$\ddot{x} + (a - 2x)\dot{x} + 2x + x^3 = 0$
4	$\ddot{x} + (3a - 2x)\dot{x} + x + x^3 = 0$
5	$\ddot{x} + (a - x)\dot{x} + 2x + x^3 = 0$
6	$2\ddot{x} + (a - 2x)\dot{x} + 2x + x^3 = 0$
7	$\ddot{x} + (a/2 - x)\dot{x} + x + x^3 = 0$
8	$\ddot{x} + (a - x)\dot{x} + 5x + x^3 = 0$
9	$\ddot{x} + 5(a - x)\dot{x} + 2x + 7x^3 = 0$
10	$\ddot{x} + (5a - 3x)\dot{x} + 2x + x^3 = 0$

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. ЗАДАНИЕ Разработать программу, используя возможности MATLAB, для решения приведенной ниже задачи.

Задача.

Определить число взлетно-посадочных полос для самолетов с учетом требования того, что вероятность ожидания должна быть меньше 0.05. Дана интенсивность потока самолетов $\lambda=54$ самолетов/сутки и интенсивность линий обслуживания $\mu=60$ самолетов/сутки

%подпрограмма определения вероятности ожидания в зависимости от количества полос

```
function[P]=SMO(L,M,N);  
ps=L/M;  
po=0;  
for i=1:N+1  
    po=po+ps^(i-1)/gamma(i);  
end  
po=po+ps^(N+1)/(gamma(N+1)*(N-ps));  
po=1/po;  
P=po*ps^N/(gamma(N+1)*(1-ps/N));  
end
```

%программа определения числа взлетно-посадочных полос

```
L=54;  
M=60;  
PZ=0.05;  
PP=1;  
N=1;  
while PP>PZ  
    PP=SMO(L,M,N);  
    N=N+1;  
end  
N0=N-1;  
disp('необходимое число полос');  
disp(N0);
```

Результаты расчета

необходимое число полос

4

2. ЗАДАНИЕ

Используя возможности MATLAB решить предложенное дифференциальное уравнение на указанном интервале с заданными начальными условиями численно и аналитически. Представить полученные решения графически. Найти аналитически общее решение дифференциального уравнения

%Функция описывающая систему дифференциальных уравнений, к которой
%сводится исходное уравнение

```
function dy=sdu(t,y)
dy=zeros(2,1);
dy(1)=-8*y(1)-7*y(2)+5*exp(-t);
dy(2)=y(1);
end
```

%Решение дифференциального уравнения

```
[t,Y]=ode45(@sdu,[0 5],[0,0]);
Y1=Y(:,2);
plot(t,Y1);
```

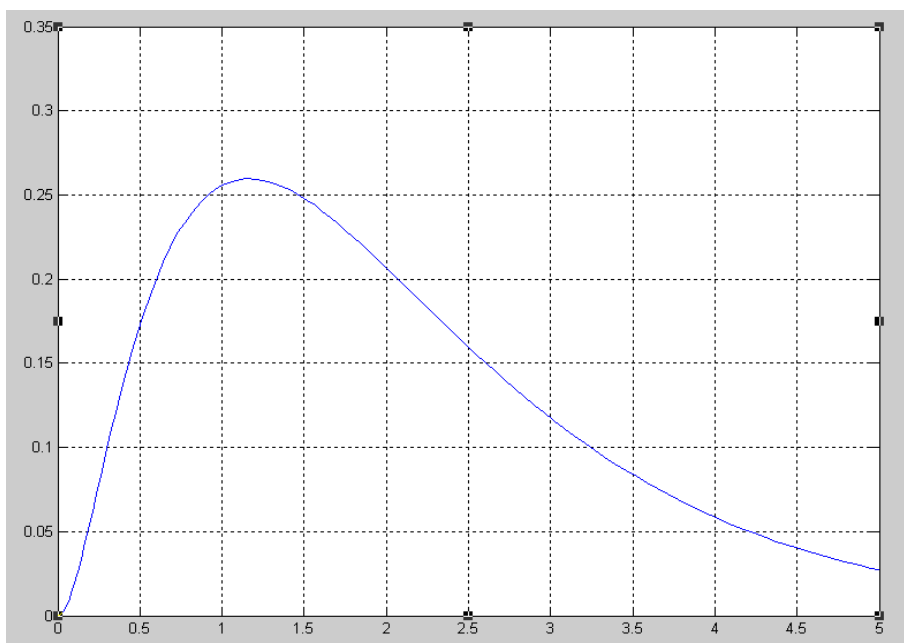


График полученного решения

Аналитическое решение дифференциального уравнения

```
>> y=dsolve('D2y+8*Dy+7*y=5*exp(-t)', 'y(0)=0', 'Dy(0)=0', 't')
```

y =

$$5/36 \cdot \exp(-7 \cdot t) - 5/36 \cdot \exp(-t) + 5/6 \cdot t \cdot \exp(-t)$$

Построение графика решения дифференциального уравнения, найденного аналитически

```
>> t=0:0.05:5;
>> for i=1:length(t)
YT(i)=5/36*exp(-7*t(i))-5/36*exp(-t(i))+5/6*t(i)*exp(-t(i));
end
>> plot(t,YT);
```

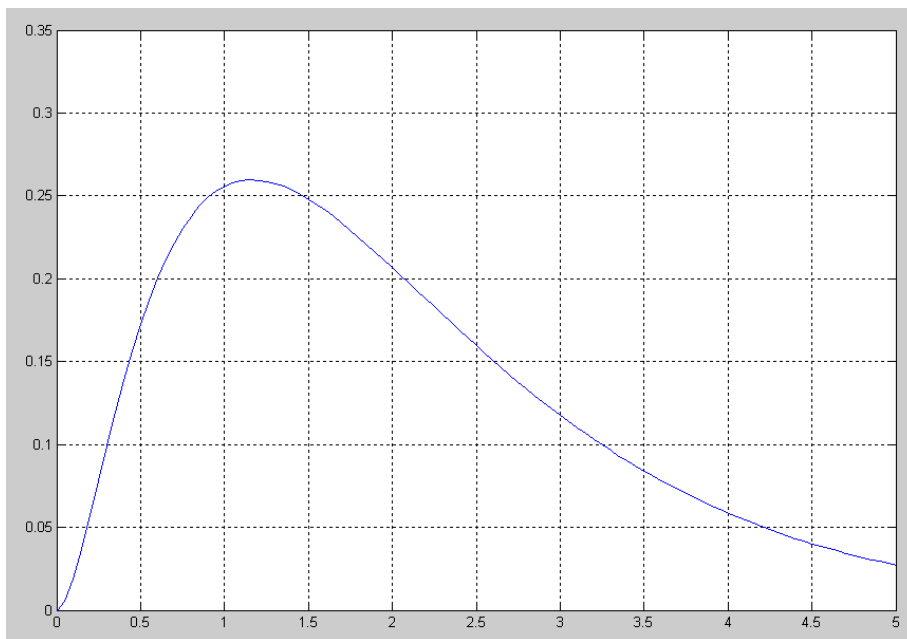


График решения полученного аналитически

Общее решение дифференциального уравнения

```
>> y0=dsolve('D2y+8*Dy+7*y=5*exp(-t)', 't')
```

y0 =

$\exp(-7*t)*C2+\exp(-t)*C1+5/6*t*\exp(-t)$

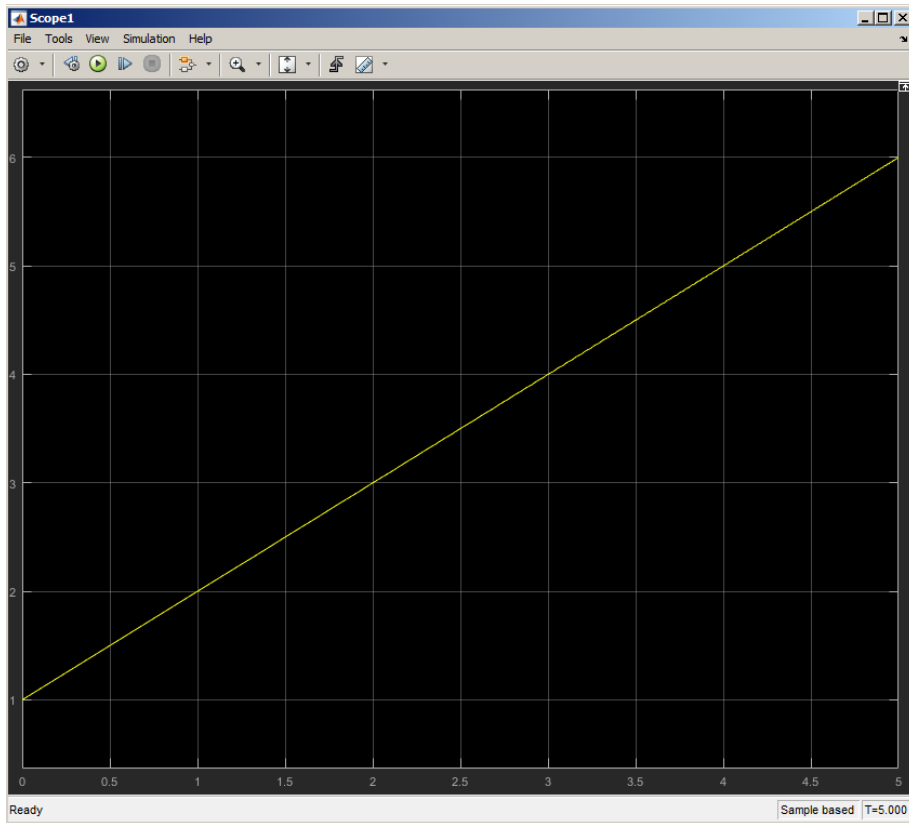
3. ЗАДАНИЕ

Используя возможности **Simulink** решить систему дифференциальных уравнений с указанными начальными условиями на интервале $[0, 5]$. Результаты представить в виде графиков

$$\begin{cases} x' = 2y - 1 \\ y' = (x + y)^2 - y^4 + 1 \end{cases}, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1$$

Решение

Модель для данной системы дифференциальных уравнений



Настройки параметров моделирования

Parameter	Value	Command-Line Name
Solver > Simulation time		
Start time <small>Simulation start time. Note that the values that you specify as block initial conditions...</small>	0.0	StartTime
Stop time <small>Simulation stop time.</small>	5	StopTime
Solver > Solver options		
Type <small>Choose a variable or fixed-step solver.</small>	Variable-step	SolverType
Solver <small>Choose a solver. If disabled, enable in "Additional options" by changing "Periodic sa..."</small>	auto (Automatic solver selection)	Solver
Solver > Additional options		
Max step size <small>Maximum step size for a variable-step solver.</small>	auto	MaxStep
Relative tolerance <small>Specify the largest acceptable solver error, relative to the size of each state during e...</small>	1e-3	RelTol
Min step size <small>Minimum step size for a variable-step solver.</small>	auto	MinStep
Absolute tolerance <small>Specify the largest acceptable solver error, as the value of the measured state appr...</small>	auto	AbsTol
Initial step size <small>Specify the size of the first time step that the solver takes.</small>	auto	InitialStep
Shape preservation <small>Improve the integration accuracy by preserving the shape of states based on deriva...</small>	Disable All	ShapePreserveControl
Solver reset method <small>Fast reset reduces the number of Jacobian evaluations whereas robust reset is mor...</small>	Fast	SolverResetMethod
Maximum order <small>Select the order of the numerical differentiation formulas (NDFs) used in the ode15s...</small>	5	MaxOrder
Fixed-step size (fundamental sample time) <small>Specify the step size used by the selected fixed-step solver.</small>	auto	FixedStep

4.ЗАДАНИЕ

Провести исследование устойчивости неподвижных точек и их бифуркаций

дифференциального уравнения $\ddot{x} + (a - x)\dot{x} + 3x + 5x^3 = 0$

Решение

Сведем данное уравнение к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = (x - a)y - 3x - 5x^3 \end{cases}$$

Приравнявая нулю производные по времени, получаем выражение для нахождения координат неподвижных точек:

$$\begin{cases} y = 0 \\ (x - a)y - 3x - 5x^3 = 0 \end{cases}$$

Решая данную систему получим

```
>> syms x y a
>> [x,y]=solve('y=0','(x-a)*y-3*x-5*x^3=0')
```

```
x =
0
1/5*i*15^(1/2)
-1/5*i*15^(1/2)
y =
0
0
0
```

Отбросив комплексные решения, получим одну неподвижную точку

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Найдем матрицу линеаризации

```
>> syms x y a
>> f1=y; f2=(x-a)*y-3*x-5*x^3; M=jacobian([f1,f2],[x y])
M =
[ 0, 1]
[ y-3-15*x^2, x-a]
```

Определим матрицу M в неподвижной точке

```
>> x=0; y=0;
>> M0=subs(M)
M0 =
[ 0, 1]
[ -3, -a]
```

Вычислим след и определитель матрицы M0

```
>> S=trace(M0)
S =
-a
>> J=det(M0)
J =
3
```

Таким образом $S = -a$ и $J = 3$. Значит при $a > 0$ точка будет устойчивой, а при $a < 0$ неустойчивой. При $J < \frac{S^2}{4}$, то есть при $a^2 > 12$ это узел, а при $J > \frac{S^2}{4}$ (при $a^2 < 12$) это фокус. При $S=0=a$ имеем центр. При переходе точки 0 характер неподвижной точки меняется

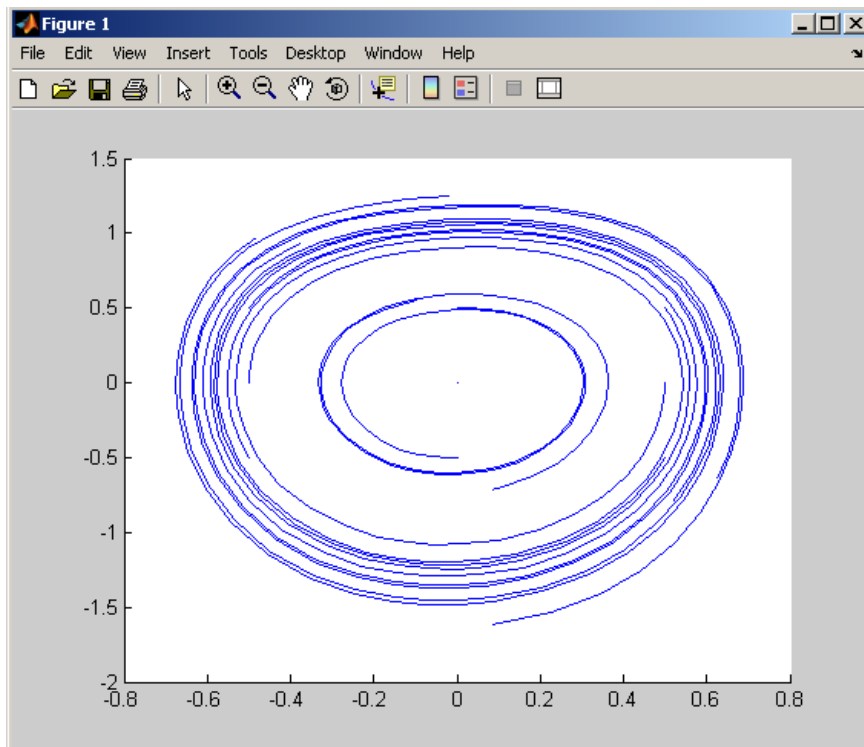
Проиллюстрируем полученные выводы на конкретных примерах. Положим $a=0.1$, найдем решения этого уравнения и фазовый портрет

```

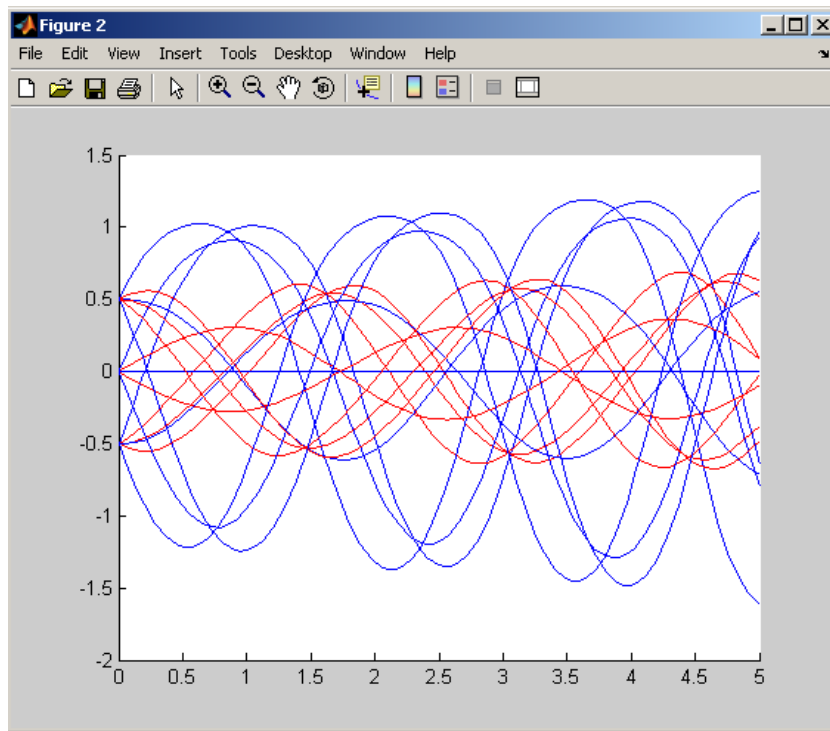
function dy=sisf1(t,y)
a=-0.1;
dy=zeros(2,1);
dy(1)=y(2);
dy(2)=-3*y(1)-5*y(1)^3+(y(1)-a)*y(2);
end
    
```

```

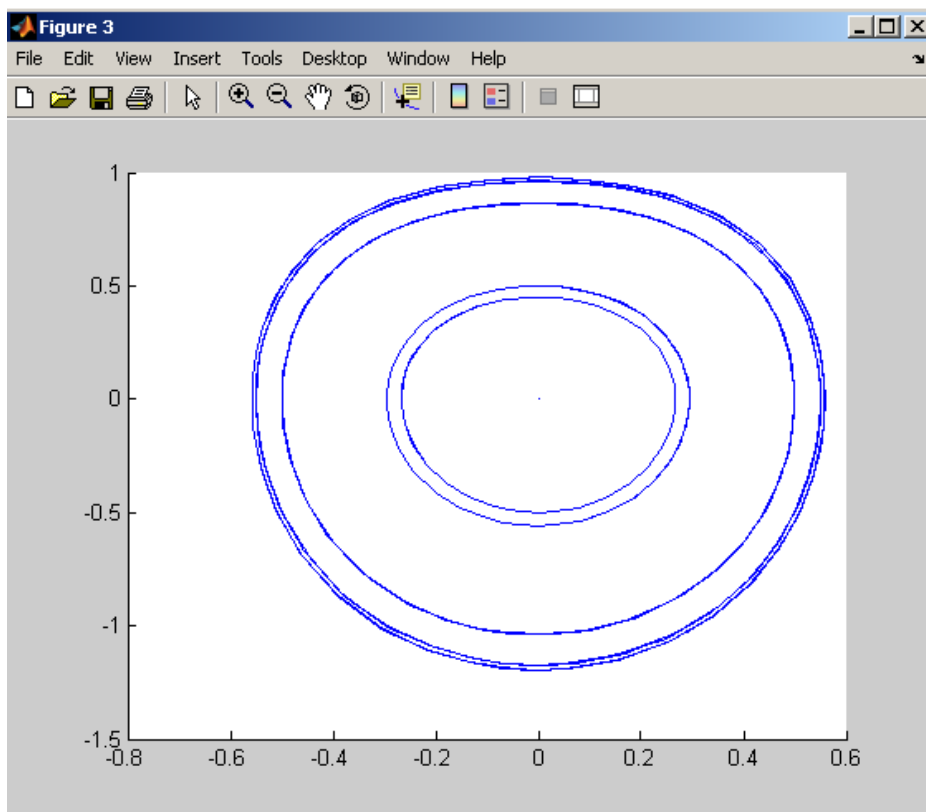
hfig1=figure;
hfig2=figure;
for x0=-0.5:0.5:0.5; for y0=-0.5:0.5:0.5;
[T,X]=ode23s(@sisf1,[0 5],[x0 y0]);
figure(hfig1);
hold on;
plot(X(:,1),X(:,2));
figure(hfig2);
hold on;
plot(T,X(:,1),'r',T,X(:,2),'b');
end
end
    
```



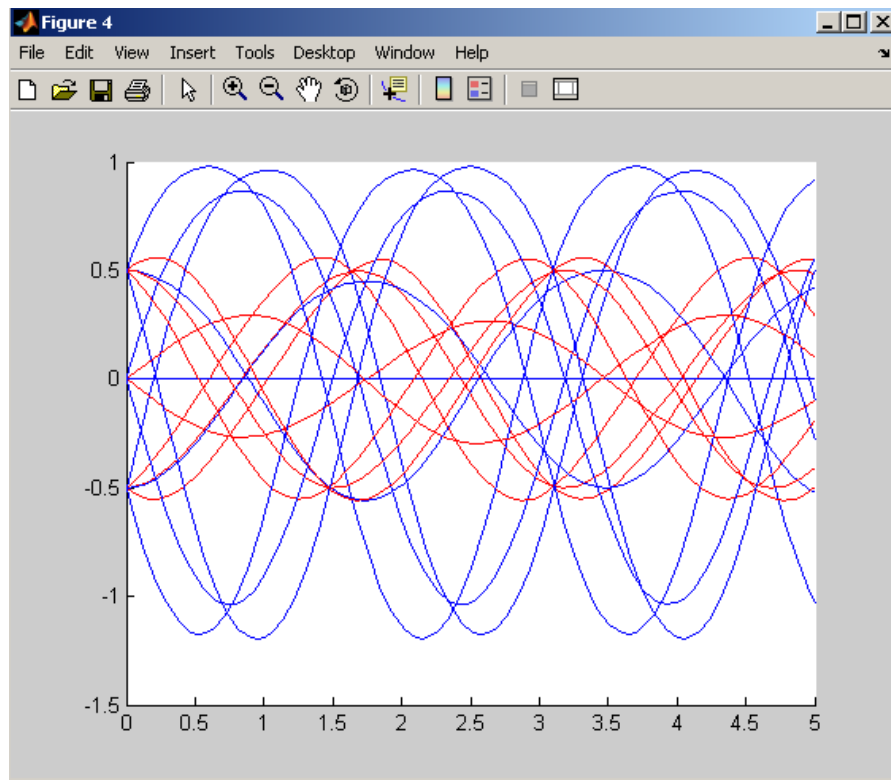
Фазовый портрет (неустойчивый фокус)



Решение системы: $x(t)$ (синий цвет), $y(t)$ (красный цвет)
 При $a=0$ получим следующие результаты

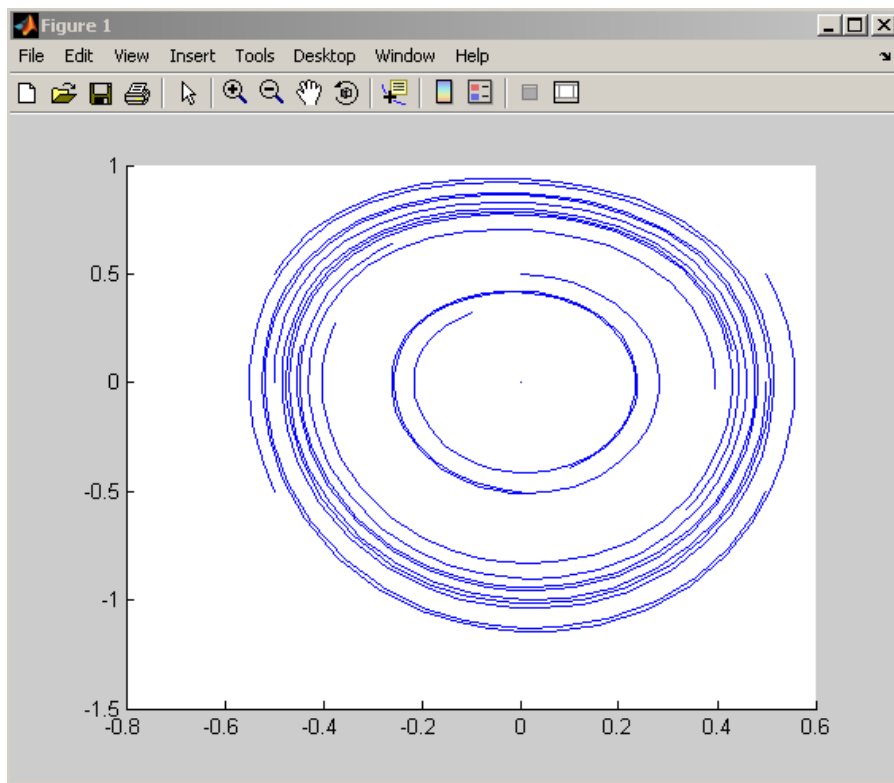


Фазовый портрет (центр)

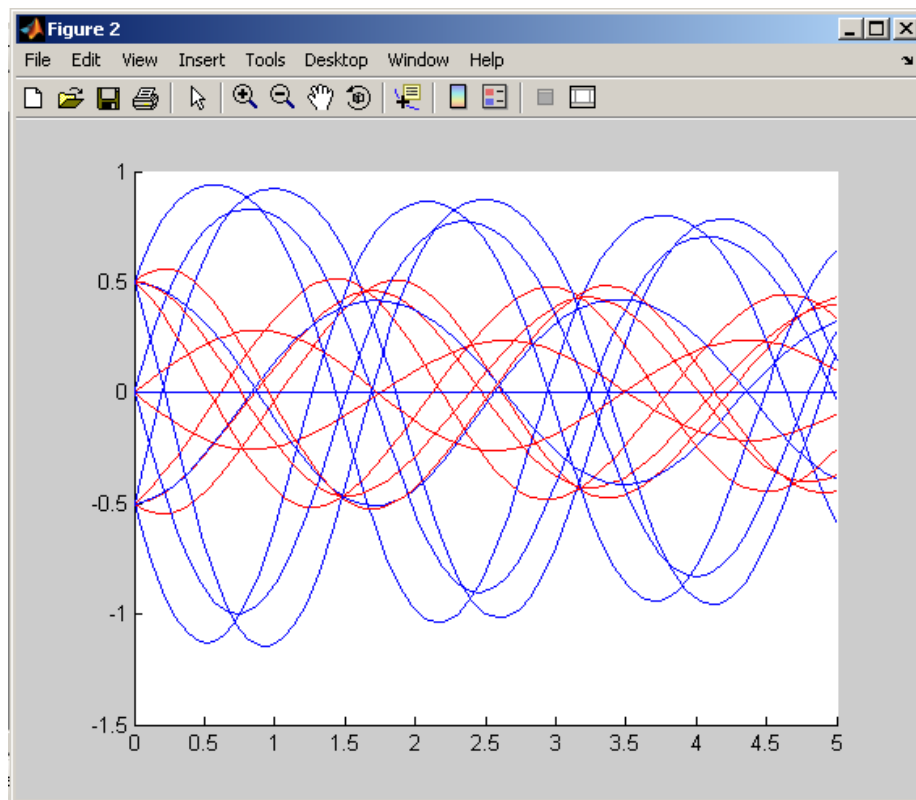


Решение системы: $x(t)$ (синий цвет), $y(t)$ (красный цвет)

Аналогичные расчеты проведем для $a=0.1$



Фазовый портрет (устойчивый фокус)



Решение системы: $x(t)$ (синий цвет), $y(t)$ (красный цвет)

При переходе параметра a через 0 качественно меняется характер решения уравнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С.Е. Душин, А.В. Красов, Ю.В. Литвинов Моделирование систем и комплексов– СПб: СПбГУ ИТМО, 2010. – 177 с.
2. Д.Э. Постнов, А.Н. Павлов, С.В. Астахов Методы нелинейной динамики: Учебное пособие для студентов физ. фак./ Саратов, 2008.- 120 с : ил.
3. С.Г. Николаева / Нейронные сети. Реализация в Matlab: учебное пособие. – Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2015. – 92 с.