ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Математика и информатика»

Учебно-методическое пособие

по дисциплине

«Информационные технологии в отрасли»

Автор
Галабурдин А. В.

Ростов-на-Дону, 2020

Аннотация

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов очной формы обучения направления 29.04.05 «Конструирование изделий легкой промышленности».

Авторы

к.ф.-м.н., доцент кафедры «Математика и информатика»

Галабурдин А.В.

Оглавление

Виды информационных технологий

Информационная технология – процесс, использующий совокупность средств и методов обработки, сбора и передачи данных для получения информации нового качества о состоянии объекта, процесса или явления.

Новая информационная технология – информационная технология, использующая компьютеры и коммуникационные средства.

Существуют несколько видов информационных технологий.

1. Информационная технология обработки данных предназначенная для решения хорошо структурированных задач, для которых имеются необходимые исходные данные и известны алгоритмы и другие стандартные процедуры их обработки. Этот вид технологий применяется на уровне исполнительской деятельности персонала невысокой квалификации в целях автоматизации некоторых рутинных, постоянно повторяющихся операций управленческого труда. Использование этих технологий повышает производительность труда персонала, освобождает его от рутинных операций.

2. Информационная технология управления предназначена для удовлетворения потребностей всех сотрудников предприятия, имеющих дело с принятием решений, что может быть полезным на любом уровне управления. Данная технология ориентирована на работу в среде информационной системы управления и используется при худшей структурированности решаемых задач, чем предыдущая.

3. Информационная технология автоматизации офиса изначально была ориентирована на автоматизацию рутинной секретарской работы, но затем была успешно использована специалистами и управленцами. Она призвана существенно дополнить традиционную систему коммуникаций персонала

(совещания, телефонные звонки, приказы, …). Автоматизированный офис позволяет поддерживать внутреннюю связь персонала, представляет ему новые средства коммуникации с внешним окружением. К программным продуктам, обеспечивающим данную технологию относятся текстовые процессоры, табличные процессоры, базы данных, электронная почта, компьютерные конференции и т. д..

4. Информационная технология поддержки принятия решений - качественно новый метод организации взаимодействия человека и компьютера. Основная цель этой технологии – выработка решений. Она достигается в результате итерационного процесса, в котором участвует система поддержки принятия решений в роли вычислительного звена и объекта управления и человек, как управляющее звено, задающее входные данные и оценивающее полученный результат вычислений на компьютере. Завершение итерационного процесса происходит по воле человека.

5. Информационная технология экспертных систем основана на использовании искусственного интеллекта. Под искусственным интеллектом понимают способности компьютерных систем к действиям, которые назывались бы интеллектуальными, если бы они исходили

от человека. Чаще всего имеются ввиду способности, связанные с человеческим мышлением. Работы в области искусственного интеллекта включают в себя также создание роботов, моделирование деятельности нервной системы человека, развитие способности к обучению и т. д..

Экспертные системы одно из самых перспективных направлений в области искусственного интеллекта. Цель этого направления- разработка методов и программ, позволяющих получать результаты, не уступающие по качеству и эффективности результатам, которые мог бы получить эксперт-человек при решении особенно трудных для экспертизы, так называемых неформализованных задач.

Неформализованными считаются задачи, обладающие хотя бы одной из приведенных ниже характеристик:

-невозможность задания в числовой форме;

-нет четко определенной целевой функции;

-задача алгоритмически не разрешима ил решение невозможно из-за ограниченности ресурсов компьютера.

Экспертные системы применимы для интерпретации, предсказания, диагностики, планирования, конструирования, контроля, и управления в таких областях, как медицина, космос, связь, образование и т. д..

Системы компьютерной математики (СКМ)

Под СКМ понимают программное обеспечение, которое позволяет не только выполнять числовые расчеты на компьютере, но и производить аналитические (символьные) преобразования различных математических и графических объектов.

Эти системы имеют дружественный интерфейс, реализуют множество стандартных и специальных математических операций, снабжены мощными графическими средствами и обладают собственными языками программирования.

Главная задача СКМ – обработка математических выражений в символьной форме. Символьные операции обычно включают в себя вычисление символьных или числовых значений для выражений, преобразование (изменение) формы выражений, нахождение производной, решение линейных и нелинейных уравнений, решение дифференциальных уравнений численно и аналитически, вычисление пределов, неопределенных и определенных интегралов, выполнение различных операций с матрицами, построение графиков на плоскости и в пространстве, работа с числовыми и функциональными рядами, выполнение различных операций полиномами, дробно-рациональными и тригонометрическими выражениями, работа с множествами.

Matlab

Основой для реализации различных типов данных в Matlab являются матрицы. Значительная часть функциональных возможностей Matlab реализована через пакеты инструментов (toolbox). Это собрание функций и других утилит, предназначенных для решения узкопрофессиональных задач.

Matlab в первую очередь предназначен для выполнения числовых расчетов и визуализации получаемых результатов. Однако Matlab способен выполнять и многочисленные символьные операции.

Простые вычисления выполняются в командном окне (Command Window), которое располагается в центре рабочего окна. Для ввода команды курсор устанавливается после индикатора строки ввода >>, далее вводится соответствующая команда, которая запускается нажатием клавиши **Enter.** Результат выполнения команды отображается внизу под выполняемой командой. По умолчанию результат заносится в переменную **ans.** Для выполнения более сложных расчетов вводятся переменные, которым и присваиваются результаты выполнения операций.

Переменная – это область памяти, к которой можно обратиться по имени для получения значения, записанного в этой области для его использования или изменения.

Переменной можно присваивать значения, используя знак «=». Значение, присвоенное переменной может бытоь число или выражение, содержаще другие переменные .

Все переменные в Matlab рассматриваются как матрицы. Для задания матрицы список ее элементов заключается в квадратные скобки. Список значений элементов строки разделяются пробелами или запятыми, а список значений разных столбцов разделяются точкой с запятой.

$A = [1,2,3]$ - вектор-строка (1, 2,3)

$B = [1;2;3]$ - вектор-столбец $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$C = [1,2,3;4,5,6]$ - матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

К элементам матрицы можно обращаться, указав два индекса -номер строки и номер столбца

C(1,2)=2

Основные арифметические операции выполняются со скалярными величинами *(+, -, *,/)* и с матрицами *(+., -., *.,/.)*

Деление для матриц $A/B=A*B^{-1}$ или $A\backslash B=A^{-1}*B$,

.*- оператор поэлементного умножения матриц,

./ - оператор поэлементного деления матриц,

== - оператор проверки на равенство

~= - оператор проверки на неравенство

>,< - оператор проверки на больше-меньше

>=,<= - оператор проверки на больше равно и меньше равно

&- логическая операция «и» (конъюнкция)

| - логическая операция «или» (дизъюнкция)

~ - логическая операция «отрицание»

Встроенные математические функции

abs(x)- модуль x, acos(x) – арккосинус x , acot(x) – арккотангенс x,

asin(x) – арксинус x, atan(x)- арктангенс x, cos(x) – косинус x,

cot(x) – котангенс x, exp(x)- экспонента x, log(x)- натуральный логарифм x,

sign(x)- знак x, sin(x)- синус x, tan(x)- тангенс x, sqrt(x)- корень квадратный из x.

Графики в Matlab

Для вывода графика функции одной переменной надо предварительно задать массив значений аргумента и массив значений функции в этих точках, а затем воспользоваться командой **plot()**

x=0:0.005:40;

y=sin(x);

plot(x,y)

В результате создается графическое поле в окне, на котором изображается график функции, График можно отформатировать нужным образом, используя команды в рабочем графическом окне или задав соответствующие команды в рабочем документе.

Можно в одном окне вывести несколько графиков. В этом случае каждый график строится командой **plot()** и между заданиями этих команд задается команда **hold on.**

Для создания графика в полярной системк координат используется команда

polar()

phi=0:0.01:2*pi;

r=sin(3*phi);

polar(phi?r)

Трехмерные поверхности создаются с помощью команды **mesh(): mesh(x,y,z)**, где **z=z(x,y).** При этом в массивах x и y задаются значения переменных x и y, а в массиве z задаются соответствующие значения

Символьные вычисления

Для проведения символьных вычислений в рабочем документе вводятся символьные переменные, значениями которых являются их названия, численные значения им не присваиваются: syms a b c.

Для вычисления производных используется команда diff()

syms x y

f=sin(x)/x

diff(f)

Вторую производную можно вычислить командой diff(f,2). Команда diff(f,x,2) вычисмляет вторую производную по переменной x, если функция зависит от нескольких переменных.

Для вычисления неопределенных интегралов используется команда int():

F=syms(‘log(x)’)

Int(f)

Эта жен команда может быть использована и при вычислении определенных интегралов: int(‘tan(x)’,0,pi/4).

Для вычисления определенных интегралов также можно использовать команду quad(): quad(@tan,0,pi/4).

Функции, определенные пользователем

Функция задаваемая пользователем имеет вид

Function [name1,name2,…]=fun(var1,var2,…),

где name1,name2,… - список выходных параметров, которым присваивается конечный результат, var1,var2,…- список входных параметров, fun – название функции.

Все имена переменных, а также имена из списка входных и выходных параметров воспринимаются как локальные, то есть эти переменные считаются определенными только внутри функции Обращение к функцииосуществляется так же как и к любой встроенной функции.

Пакет Simulink

Пакет расширения Simulink системы Matlab является ядром интерактивного программного комплекса, предназначенного для математического моделирования линейных и нелинейных динамических систем и устройств, представленных своей функциональной блок-схемой (S-моделью). При этом возможны различные варианты моделирования : во временной области, в частотной области, с событийным управлением, с использованием метода Монте-Карло и т. д..

Для построения функциональной блок-схемы моделируемых устройств Simulink имеет обширную библиотеку блочных компонентов и удобный редактор блок-схем. Он основан на графическом интерфейсе пользователя и является типичным средством визуально-ориентированного программирования. Используя палитры компонентов (наборы блоков), пользователь с помощью мыши переносит нужные блоки с палитр на рабочий стол и соединяет линиями входы и выходы блоков. Таким образом создается диаграмма (блок-схема) рассматриваемой системы , то есть модель.

S-модель является программой, которую можно просматривать с помощью текстового редактора или с помощью редактора файлов системы Matlab.

Эти файлы громоздки. В связи с этим обычно работа моделей рассматривается только на уровне диаграмм и блоков, без рассмотрения программных кодов моделей.

Simulink автоматизирует наиболее трудоемкий этап моделирования: он составляет и решает сложные системы алгебраических и дифференциальных уравнений, описывающих заданную функциональную схему, обеспечивая удобный и наглядный визуальный контроль за поведением созданного пользователем виртуального устройства. Пользователю достаточно уточнить вид анализа и запустить Simulink в режиме симуляции созданной модели устройства.

Simulink практически мгновенно меняет математическое описание модели, по мере ввода ее новых блоков, даже в том случае, когда этот процесс сопровождается сменой порядка системы уравнений и ведет к существенному изменению поведения системы.

Ценность Simulink заключается и в обширной, открытой для изучения и модификации, библиотеке блоков. Она включает источники воздействий (сигналов) с практически любами временными зависимостями, масштабирующие, линейные и нелинейные преобразователи с разнообразными формами передаточных характеристик, квантирующее устройство, интегрирующие и дифференцирующие блоки и т. д..

В библиотеке имеется набор виртуальных регистрирующих устройств – от простых измерителей типа вольтметра или амперметра до универсальных осциллографов, позволяющих просматривать временные зависимости выходных параметров моделируемых систем. Имеется графопостроитель для создания фигур Лиссажу и фазовых портретов колебаний. Simulink имеет средства анимации и звукового сопровождения.

Средства графической анимации Simulink позволяет строить виртуальные физические лаборатории с наглядным представлением результатов моделирования.

Важным достоинством Simulink является возможность задания в блоках произвольных математических выражений, что позволяет решать типовые задачи, пользуясь примерами пакета Simulink или же просто задавая новые выражения, описывающие работу моделируемых систем и устройств.

Важным свойством пакета является возможность задания системных функций (S-функций) с включением их в состав библиотек.

S-функция – относительно самостоятельная программа, написанная на языке MATLAB или C, с помощью которой:

1) создаются новые блоки, дополняющие библиотеку пакета SIMULINK;

2) моделируемая система описывается в виде системы математических уравнений;

3) ранее созданные на языке MATLAB или C программы включаются в S-модели.

Еще одним важным достоинством Simulink является возможность интеграции не только с системой Matlab, но и с рядом других пакетов расширения, что обеспечивает огромные возможности его применения для решения практически любых задач имитационного и событийного моделирования.

Таким образом, расширение Simulink реализует визуально-ориентированное программирование задач автоматического составления графической модели системы, составления и решения ее уравнений состояния и наглядного представления результатов моделирования..

Библиотека Simulink

Библиотека Simulink содержит следующие разделы.

1.Commonly Uzed Blocs – общеполезные блоки (повторяются в специализированных разделах)

2. Continuous – непрерывные блоки. Содержит блок дифференцирования, блок интегрирования, блок задержки сигнала, блок State-Space-линейная аналоговая система, заданная в виде уравнений состояния, блок Transfer Fcn - реализующий передаточную функцию, заданную в виде отношения полиномов, блок Variable Transport Delay – блок памяти с переменной задержкой, блок Zero-Pole – линейная аналоговая система, заданная своими нулями и полюсами

3.Math Operations – раздел математических блоков. Этот раздел содержит

Abs - блок абсолютного значения выходного сигнала

Add – блок скалярного, векторного или матричного сложения

Divide – блок скалярного, векторного или матричного деления

Dot Product – блок умножения скаляров или векторов

Gain – блок усиления

Math Function – блок выбирающий одну из математических функций в поле настроек

Sing – блок-реле, реагирующий на знак входного сигнала

Sine Wave Function – блок генерирующий синусоидальный сигнал в зависимости от входного сигнала времени

Substract – блок вычитания

Sum – блок суммирования сигналов

Trigonomttric Function – блок формирования тригонометрических функций от входнлго сигнала

4.Discontinuities – раздел нелинейных блоков. Раздел содержит

Saturation – блок ограничения

Quantizer - блок квартования входного сигнала

Wrap to Zero – блок выдающий 0, если входной сигнал меньше заданного уровня

5.Sourcer – блоки источников сигналов. Раздел включает

Band limited White Noice - генератор белого шума

Chrip Signal – генератор сигнала с нарастающей частотой

Constant – источник постоянного действия, константа

Ramp – источник нарастающего воздействия

Sine Wave –источник синусоидального воздействия

Step – источник перепада сигнала

Clock – источник времени моделирования

6.Sinks – блоки приема сигналов. Данный раздел содержит

Display – блок, отображающий цифровую информацию

Scope – виртуальный осциллограф

Stop Simulink – остановка симуляции

XY Graph – виртуальный графопостроитель

7.Discrete – дискретные блоки. Содержат в частности несколько блоков со специальными передаточными функциями, которые по известному входному сигналу $x(k)$ возвращают решение $y(k)$ разностного уравнения этой передаточной функции.

8.Logic and Bit Operations- Содержит в частности различные логические операции

Logical Operator - блок используется для моделирования логических устройств, реализующих логические формулы. Первый параметр блока **Operator** реализует логические операции AND (конъюнкция), OR (дизъюнкция), NAND (И-НЕ, шрих Шеффера), NOR (ИЛИ-НЕ, стрелка Пирса), XOR (сложение по модулю 2), NOT (НЕ). Второй параметр **Number of input ports** задает количество входных портов (по числу булевых переменных в логической формуле). Входные сигналы допускаются скалярного, векторного и матричного типов.

9. User-Defined Functions – функции, определяемые пользователем.

Блок Fcn генерирует выходной сигнал по аналитической формуле, набранной в диалоговом окне блока

Mathcad

Интерфейс Mathcad аналогичен интерфейсу других Windows программ. При открытии Mathcad на экране появляется рабочее окно с главным меню и 5-ю панелями: Стандартная, Форматирование, Математическая, Контроль, Документация.

Главное меню занимает верхнюю строчку окна. Все основные операции можно выполнить, используя пункты главного меню. Щелчок мышью на любом пункте меню открывает подменю с перечнем команд. Главное меню содержит следующие пункты:

Файл – содержит команды работы с файлами

Правка – содержит команды редактирования

Вид – включает команды задания внешнего вида документа

Вставка – содержит команды вставки в документ различных объектов

Формат – включает команды форматирования

Инструменты (Tools) – содержит команды управления вычислительным процессом

Символьные вычисления – содержит команды символьных вычислений

Окно – содержит команды работы с окном

Помощь

Панели инструментов служат для быстрого выполнения наиболее востребованных команд:

Стандартная – содержит команды выполнения действий с файлами, редактирования документа, вставки в документ различных объектов.

Форматирование – содержит команды форматирования формул и текста.

Математика – вставка математических символов и операторов

Контроль – содержит кнопки для дополнительного контроля работы Mathcad-документа

Отладка (Dedug) – для отладки программ.

Работа с документами

Пероед началом работы курсор на экране имеет вид крестика. В момент ввода выражения курсор принимает вид синего уголка, обрамляющего вводимое выражение. Имена переменных и функций должны начинаться с буквы.

Для присвоения переменной какого-либо значения используется оператор присваивания «:=» на математической панели Калькулятор.

Редактирование в Mathcad

Уголок курсора перемещается по экрану клавишами со стрелками или щелчком левой клавиши мыши в нужном месте экрана. Операции по выделению, копированию, перемещению, удалению выражений или символов выполняется по правилам, принятым в ОС Windows.

Стандартные функции

Mathcad содержит много встроенных функций, которыеможно задействовать нажатием кнопки ***f(x),*** расположенной на стандартной панели. Открывшееся после нажатия кнопки ***f(x)*** окно содержит список встроенных функций, разбитый на группы. Выбрав щелчком группу, в появившемся списке функций этой группы, можно выбрать нужную функцию.

Числовые константы

Введенная с клавиатуры латинское ***e*** внутри любого математического выражения означает основание натурального логарифма ***e=2.718.*** Это значение можно отменить, присвоив ***e*** другое значение, например ***e:=5.***

Знак ∞ можно выбрать с математической панели Calculs. Число ***π*** можно выбрать с математической панели Calculator. Мнимую единицу можно получить присвоением $i := \sqrt{-1}$. Для ввода греческих букв используется панель греческих букв.

Ввод текста

Для ввода текста в главном меню выбирается команда Insert→Text Region

(Вставить →Текстовая область) или ввести с клавиатуры символ « (кавычка). При этом на экране появляется текстовая область, в которой можно ввести текст. В текстовую область можно вставить математическую область. Для этого в главном меню выбирают команду Insert→Math Region (Вставить → Математическая область). Вставленная математическая область участвует в вычислениях наравне с другими математическими выражениями.

Текстовой области присвоен стиль Normal. Xnj,изменить его, надо в главном меню выбрать команду Style→Normal→Modify→Font (Стиль→Обычный →Изменить→Шрифт).

Функции пользователя

Пользователь может создавать свои функции. Вид функции пользователя

Имяфункции(переменные):=вычисляемое выражение

Все переменные величины, входящие в вычисляемое выражение должны быть записаны в переменные, после имени функции. Все величины в вычисляемом выражении, не являющиеся переменными, должны быть заданы численно. Операторы, присваивающие им числовые значения должны располагаться левее и выше того места, где располагается задание функции пользователя.

Для вычисления функции пользователя надо задать числовое значение всех параметров в имени функции, набрать имя и нажать клавишу = или щелкнуть мышью по кнопке = на стандартной панели либо в математическом меню на панели Calculator Toolbar (Калькулятор)

Построение плоского графика

Для построения плоского графика функции следует:

1.установить курсор в соответствующее место

2.на математической панели щелкнуть мышью на кнопке Graph Toolbar→

X-Y Plot (Плоский график).

3.в появившемся шаблоне ввести на оси абсцисс имя аргумента, а на оси ординат – имя функции и щелкнуть мышью вне шаблона.

Чтобы отформатировать график надо сделать двойной щелчок мышью в поле графика и в открывшемся окне сделать соответствующие установки.

Построение трехмерного графика

Вначале следует создать функцию двух переменных. Установить курсор в соответствующее место. В математической панели щелкнуть мышью на кнопке Graph Toolbar (Панель графиков), а затем на Surface Plot (Трехмерный график). На месте курсора появится шаблон трехмерного графика. В поле ввода шаблона графика ввести имя функции и щелкнуть мышью вне области шаблона.

Символьные вычисления

Символьные вычисления можно выполнять с помощью меню Symbolics (Символические вычисления) из главного меню и с использованием панели Symbolic на математической панели.

Для символьного решения уравнения нужно:

- набрать решаемое уравнение и синим уголком курсора выделить переменную, относительно которой нужно решить уравнение

- в главном меню выбрать команду Symbolics→Variable→Solve (Символьные вычисления→Переменная→Решить)

Для численного решения уравнения ***f(x)=0*** используется функция ***root(f(x),x).***

Чтобы решить систему алгебраических уравнений надо:

-задать начальные приближения для всех неизвестных, входящих в систему

-ввести ключевое слово **Given (**Дано)

-ввести уравнения входящие в систему, правее и ниже ключевого слова **Given.**

- обратиться к функции find: find(x,y,z,…), где x,y,z,… -

неизвестные, число которых должно равняться числу уравнений решаемой системы.

Между левой и правой частями уравнений должен стоять знак равенства. Это не знак присвоения значения, а знак логического равенства. Для его ввода используется клавиши Ctrl+= или выбирается знак на панели Boolean (Булевы операторы).

Работа с матрицами

Для создания матрицы надо ввести ее имя, а затем оператор присваивания :=, в математическом меню выбрать кнопку с изображением матрицы. В открывшейся панели Matrix надо вновь выбрать кнопку с изображением матрицы, в открывшемся окне ввести число строк и число столбцов матрицы и нажать ОК. В появившемся шаблоне ввести значения элементов матрицы.

Mathcad позволяет выполнять с матрицами операции сложения (+), вычитания (-), умножения (.), обращения ($^{-1}$), транспонирования (^{T}), вычисление определителя (| |).

Символьные вычисления

При выполнении символьных вычислений можно пользоваться меню символьных вычислений Simbolics или символьную панель инструментов .

В первом случае в главном меню выбирается пункт Simbolics. После этого открывается подменю, содержащее ряд команд. Для выполнения любой из них надо сначала выделить объект вычислений, выполнив следующие действия:

-щелкнуть мышью на выражении, если надо произвести символьную операцию над всем выражением

-если надо произвести действия над частью выражения, следует выделить эту часть черным цветом (подвести указатель мыши к началу данной части выражения, нажать левую клавишу мыши и переместить курсор до конца этой части при нажатой левой клавиши.

-щелкнуть мышью на переменной, относительно которой надо произвести символьные действия.

Символьная панель инструментов вызывается из математической панели щелчком на значке Symbolic Keyword Toolbar (значок с изображением шапочки академика). На символьной панели инструментов находится 26 кнопок с названиями символьных операций. При нажатии на кнопки на экране появляется шаблон символьной операции с указанием ключевого слова. В шаблоне надо заполнить места ввода, а если остаются или появляются лишние места ввода, то их надо удалить (выделить место ввода курсором и нажать клавишу **Delete**).

При работе с символьным процессором надо помнить следующее:

-многие вычисления могут быть выполнены только численно

-очень часто символьные вычисления дают такие длинные ответы, что их неудобно использовать, поэтому удобнее их выролнить численно.

Для упрощения алгебраических и тригонометрических выражений служит команда Simplify (Упростить).

Для выполнения операции символьного разложения используется команда Expand.

Команда Factor (разложить на множители позволяет разложить полиномы на произведение более простых полиномов, а числа на простые множители.

Команда Collect (Привести подобные слагаемые) выполняет операцию приведение подобных.

Команда Substitute (Подстановке) заменяет выделенным и скопированным в буфер выражением заданную переменную. Чтобы использовать эту команду, нужно:

-выделить выражение, которое будет заменять переменную

-скопировать его в буфер обмена

-выделить переменную, которую надо заменить

-в главном меню выбрать Symbolics→Variable→Substitute (Символьные вычисления→Переменная→Подстановка).

Для вычисления пределов следует выполнить следующие действия:

-на математической панели выбрать кнопку со знаком интеграла и после того как откроется панель Calculus (Исчисление), на которой внизу есть три оператора вычисления пределов, выбрать один из них

-ввести выражение в поле ввода справа от lim

-в поле ввода под символом lim ввести имя переменной, по котрой вычисляется предел, и ее предельное значение

-выделить уголком или черным цветом все выражение целиком

-в главном меню Mathcad выбрать Symbolics→Evaluate →Symbolically

(Символьные вычисления →Вычислить→Символьно).

С помощью меню Symbolics можно вычислить производную или интеграл двумя способами:

1.В нужном выражении выделить переменную, по которой надо вычислить производную или интеграл. В главном меню выбрать команду Symbolics→Variable→Differentiate (Символьные вычисния→Переменная →Вычислить производную) или Symbolics→Variable→Integrate (Символьные вычисния→ Переменная→Вычислить интеграл).

2.Напанели Calculus (Вычисления) выбрать знак интеграла или производной и записать с его помощью нужное выражение. В главном меню выбрать команду Symbolics→Evaluate →Symbolically (Символьные вычисления → →Вычислить →Символьно).

Чтобы решить уравнение символьно следует:

-набрать уравнение, используя жирный знак равенства (знак логического равенства, а не знак присвоения значения). Если в выражении отсутствует знак равенства, Mathcad полагает, что выражение равно нулю.

-выделить переменную, относительно которой надо решить уравнение

-в главном меню выбрать команду Symbolics→Variable→Solve (Символьные вычисния→ Переменная→Решить).

Если решений несколько, Mathcad выводит вектор решений.

Mathcad позволяет выполнять символьные преобразования с матрицами. Для этого следует:

-создать матрицу с цыфравыми или буквенными элементами

-выднлить ее любым способом

-в главном меню выбрать пункт Symbolics→Matrix (Символьные вычисления→Матрица)

При этом откроется подменю из трех пунктов : Transpose (Транспонировать), Invert (Найти обратную) и Determinant (Вычислить определитель). Выбирая один из этих пунктов можно найти результат вычисления.

Чтобы выполнить арифметические действия над несколькими (чащевсего двумя) матрицами, надо выделить целиком все матричное выражение и в главном меню выбрать команду Symbolics→Evaluate →Symbolically (Символьные вычисления →

→Вычислить →Символьно).

При использовании символьной панели инструментов символьные вычисления начинают с ввода исходного выражения, подлежащего преобразованию.

Далее следует:

- для выполнения команды simplify и для вычисления интегралов, производных, сумм и произведений выбрать на символьной панели инструментов одноместный знак символьного равенства (или ввести его сочетанием клавиш

Ctrl+.

-для выполнения других операций после ввода выражения надо нажать на символьной панели инструментов кнопку с названием необходимой операции и в появившемся шаблоне заполнить нужные места ввода и удалить ненужные

-для одновременного выполнения нескольких операций надо выбрать на панели двуместный знак символьного равенства и в появившемся шаблоне заполнить нужные места ввода и удалить ненужные
-для выводов результатов символьных вычислений вывести курсор за пределы выражения и нажать левую кнопку мыши.

Задачи исследования операций

Исследование операций – это прикладное направление кибернетики, изучающее способы совершенствования и повышения эффективности организации, планирования и управления в различных системах на основе количественных методов.

Широкое распространение получили задачи оптимизации. Задачи оптимизации в общем случае включают три составляющие: целевую функцию (критерий оптимизации), ограничения, граничные условия.

Критерий оптимизации показывает влияние искомых переменных на его величину, которая должна быть минимизирована или максимизирована, в зависимости от критерия.

Ограничения определяют существующие связи между искомыми переменными. По своему происхождению связи могут быть детерминированными или статистическими.

Граничные условия показывают предельно допустимые значения искомых переменных.

Значения искомых переменных, удовлетворяющих граничным условиям и ограничениям, называют допустимыми решениями задачи.

В оптимизационных задачах находятся такие значения искомых величин, которые, во-первых, удовлетворяют всем ограничениям и граничным условиям, а во-вторых, придают целевой функции оптимальное (максимальное или минимальное) значение.

Распределительные задачи

Это задачи, в которых ограниченное количество ресурсов, недостаточное для выполнения всех работ наилучшим образом. Необходимо распределить их так, чтобы достичь наибольшего эффекта.

Распределительные задачи можно разделить :

1.По виду целевой функции = на линейные и нелинейные

2. По наличии в наличии потребным ресурсам – на сбалансированные (закрытые) и несбалансированные (открытые). Если общий объем ресурсов равен общей потребности в них, то задача является сбалансированной, иначе - несбалансированной.

3. По характеру изменения переменных

-с непрерывным изменением переменных

- с целочисленными переменными

-дискретная задача, если областью допустимых изменений всех переменных является некоторое заданное конечное множество.

4. По количеству экстремумов целевой функции – на одноэкстремальные и многоэкстремальные

5. По характеру распределения ресурсов во времени - на статические и динамические. Если задача не связана со временем или каждое последующее распределение не зависит от всех остальных, то задача называется статической, в противном случае – динамической.

Задача о назначении

Постановка задачи.

Пусть на предприятии имеется n типов универсального оборудования и требуется изготовить n видов изделий. Известно время изготовления каждого изделия на всех видах оборудования. Требуется определить какое изделие и на каком оборудовании необходимо изготавливать, чтобы суммарное время изготовления всех изделий было минимально.

Математическая постановка задачи

Введем переменные x_{ij} ($0 \le i,j \le n$), которые принимают значение 1, если на i-ом оборудовании будет изготавливаться j-е изделие, и значение 0 в противном случае. Так как каждое изделие может изготавливаться только на одном оборудовании, то должно выполняться условие $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$, а в силу того, что на каждом оборудовании будет изготавливаться одно изделия то

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$$

Обозначим через y_{ij} - время изготовления на i-ом оборудовании j-го изде- лия.

Тогда суммарное время изготовления всех n изделий T выразится формулой

$$T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_{ij} x_{ij}$$

Совокупность целевой функции и ограничений составляют оптимизационную задачу

$$T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_{ij} x_{ij}$$ - целевая функция

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$$ - система ограничений.

Эта задача относится к задачам линейного программирования (транспортная задача), для решения которых разработаны соответствующие алгоритмы. Мы будем рассматривать методы связанные с использованием вычислительной техники, которые обычно применяются при решении подобных задач в тех случаях, когда величина n достаточно велика.

Оптимальное распределение однородных ресурсов

Постановка задачи

Пусть имеется m источников финансирования A_1,

$A_2,\ldots,A_m$ и n периодов финансирования $B_1, B_2,\ldots,B_n$. Известны затраты, связанные с выделением единицы денежных ренсурсов c_{ij} из i-го источника в j-ом периоде, а также объемы финансирования из каждого i-го источника в течение всего времени a_i . Известны суммарные объемы финансирования из всех источников в каждый j-ый период времени b_j . Требуется определить объемы финансирования x_{ij} из i-го источника в j-ом периоде таким образом, чтобы:

1.Ресурсы всех источников были реализованы

2.Обеспечить финансирование в полном объеме в каждом периоде

3.Достигнуть экстремума выбранного критерия оптимизации.

Эта задача известна в иной, боле распространенной постановке. Пусть имеется m пунктов отправления некоторого ресурса $A_1, A_2,\ldots,A_m$ и n пунктов назначения ресурса $B_1, B_2,\ldots,B_n$. Количество ресурсов в i-ом пункте отправления равно a_i $(1\le i\le m)$, а потребность каждого j-го пункта потребления этого ресурса равна b_j $(1\le j\le n)$. Известны затраты на перевозку одной единицы ресурса из i-го пункта отправления в каждый j-й пункт назначения c_{ij}.

Требуется определить, какое количество ресурсов $x_{ij} \geq 0$ необходимо перевести из каждого i-го пункта отправления в каждый j-й пункт назначения, чтобы:

1.Вывести все ресурсы всех поставщиков

2.Обеспечить всех потребителей данным ресурсом

3.Все перевозки выполнить с минимальными затратами.

Математическая постановка задачи

Предположим, что общий объем поставляемых ресурсов (или общий объем финансирования из всех источников) равен объему потребления ресурсов всеми потребителями (или объему потребляемых финансовых ресурсов во всех периодах), то есть

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

В такой постановке задача называется сбалансированной.

Введем ограничения в задаче.

1.Все ресурсы должны быть вывезены из пунктов отправления (ресурсы всех источников должны быть реализованы), следовательно

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = a_i \text{, } 1\leq i\leq m.$$

2.Всен потребители должны получить соответствующее количество ресурсов (объем финансирования должен быть выполнен в каждом периоде), значит

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = b_j \text{, } 1\leq j\leq n.$$

Граничные условия будут иметь вполне очевидный вид $x_{ij} \geq 0$

Суммарные затраты, связанные с перевозками ресурсов от поставщиков к потребителям x_{ij} (или связанные с распределением объемов финансирования x_{ij} из каждого i-го источника в каждом j-ом периоде) примут вид

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

- целевая функция.

Совокупность целевой функции Z, ограничений и граничных условий составляют задачу линейного программирования, называемую транспортной задачей

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = a_i$$ 1≤i≤m,

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = b_j$$ 1≤j≤n,

$$x_{ij} \geq 0$$.

Разработаны достаточно эффективные методы ее решения (например метод потенциалов). Но при больших значениях m и n решить данную задачу без привлечения компьютерной техники как правило не удается.

Оптимальное распределение неоднородных ресурсов

Постановка задачи

В процессе производства часто возникают задачи определения оптимального плана производства продукции при наличии определенных ресурсов (сырья, финансов, рабочей силы и т. д.).

Пусть для изготовления n видов изделий $И_1, И_2, \ldots, И_n$ необходимы ресурсы m видов. Известно необходимое количество отдельного i-го ресурса для изготовления каждого j-го изделия – норма расхода c_{ij}. Допустим известно количество каждого вида ресурса, которым располагает предприятие - a_i, а также известна прибыль p_j, получаемая предприятием от изготовления каждого j-го изделия. Требуется определить, какие изделия и в каком количестве должно производить предприятие, чтобы обеспечить получения максимальной прибыли.

Математическая постановка задачи

Обозначим через x_j количество изделий j-го наименования, которое может производить предприятие. Зная количество каждого вида i-го ресурса для изготовления отдельно j-го изделия c_{ij} и количество каждого i-го ресурса a_i, можно получить систему неравенств ограничений, которая будет иметь следующий вид

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots c_{1n}x_n \le a_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots c_{2n}x_n \le a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \ldots c_{mn}x_m \le a_m \end{cases}$$

К этим неравенствам следует добавить естественные граничные условия $x_j \ge 0$ $1 \le j \le n$

Суммарная величина прибыли, которую при этом получит предприятие в этом случае будет определяться выражением

$$z = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n$$

Совокупность целевой функции Z, ограничений и граничных условий составляют задачу линейного программирования

$$z = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots c_{1n}x_n \le a_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots c_{2n}x_n \le a_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \dots c_{mn}x_m \le a_m \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad {}_{1 \le j \le n}$$

Данная задача является типичной задачей линейного программирования.

В общей постановке задачи линейного программирования ее целевая функция может исследоваться не только на наличие максимума но и минимума (например, задача о составлении рациона, задача о диете). Кроме того в систему ограничений, кроме неравенств могут входить и равенства.

С учетом вышеизложенного в самом общем случае задача линейного программирования имеет вид

$$z = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots c_{1n}x_n \le a_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots c_{2n}x_n \le a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \ldots c_{mn}x_m \le a_m \\ d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \ldots d_{1n}x_n = b_1 \\ d_{21}x_1 + d_{22}x_2 + \ldots d_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{k1}x_1 + d_{k2}x_2 + \ldots d_{kn}x_n = b_k \end{cases},$$

где $p_j, c_{ij}, d_{sj}, a_i, b_s$ $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n,\ 1 \le s \le k)$ – заданные коэффициенты.

Обычно (но не всегда) на некоторые переменные накладываются ограничения неотрицательности. Кроме того, ограничением может служить условие целочисленности некоторых переменных.

Для решения подобных задач разработаны достаточно эффективные методы решения, которые при большом значении переменных могут быть реализованы только при использовании вычислительной техники.

Рассмотренные выше линейные оптимизационные задачи являются частным случаем задач математического программирования. В общем случае постановка таких задач имеет вид

$$z = F(x_1, x_2, \dots x_n) \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \le a_i \\ g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \le b_j \end{cases}$$

где i=1,2,…N, j=1,2,…M,

Задачи управления запасами

Под запасом понимается все то, на что имеется спрос и что выключено временно из потребления. Запасы бывают материальные, трудовых ресурсов, финансовые и т. д..

Главной объективной причиной образования запасов является все более углубляющееся разделения труда, обусловившее специализацию и концентрацию производства. Специализация и кооперирование приводят к расчленению в пространстве и времени процесса производства конечного готового продукта. Чем глубже специализация, тем больше продукции находится в сфере обращения и тем острее встает проблема создания материальных запасов. На пути от поставщика к потребителю образуются совокупные запасы

Совокупные запасы можно разделить на товарные и производственные.

Товарные запасы – это часть совокупных запасов, которые находятся в обращении.

Производственные запасы – это запасы, которые создаются для уменьшения зависимости производственного процесса от неопределенного характера материальных поставок. Таким образом, производственные запасы служат для того, чтобы сглаживать непосредственную зависимость между динамикой производства и динамикой потребления продукции. Они позволяют наладить производство продукции оптимальными партиями, а также определить оптимальные партии поставок по каждому виду продукции и по всем маршрутам. Запасы продукции уменьшают зависимость потребителя от колебаний выпуска, а также производственного процесса – от неравномерности потребления.

В задаче управления запасами фигурируют два вида затрат, находящихся в прямой и обратной зависимостях от величины отдельных параметров системы. Затраты по завозу продукции увеличиваются по мере уменьшения интервала между поставками и снижения размера партии, а затраты на хранение запасов возрастают по мере увеличения этих параметров.

Модель оптимального размера партии поставки Уилсона

Данная модель основана на выборе такого фиксированного размера заказываемой партии , который минимизирует расходы на организацию заказа и содержание ресурса. При этом принимаются следующие допущения:

1.уровень запасов снижается равномерно в соответствии с равномерно поступающими требованиями **ν** (спрос). В момент, когда все запасы исчерпаны, подается заявка на поставку новой партии размера **q**;

2.выполнение заказа осуществляется мгновенно, то есть время доставки равно нулю и уровень запасов восстанавливается до значения, равного **q**;

3.накладные расходы, связанные с размещением заказа и поставкой партии, не зависят от объема партии и равны постоянной величине **K;**

4.издержки содержания единицы продукции в единицу времени равны **s.**

Издержки управления запасами в течение одного цикла $L_ц$ складываются из издержек организации и содержания запасов.

Пусть **τ** – длина цикла возобновления поставок. Тогда $\tau = q/\nu$. С заказыванием каждой партии связаны издержки **K.** Найдем издержки содержания запасов в течение цикла. Они пропорциональны средней величине текущего запаса и времени содержания

$s\bar{I}\tau = s\dfrac{q}{2}\dfrac{q}{\nu}$, где $\bar{I} = \dfrac{q}{2}$.

Издержки одного цикла $L_ц = K + s\dfrac{q}{2}\dfrac{q}{\nu}$

Разделив это выражение на длину цикла **τ,** получим издержки в единицу времени $L = \frac{Kv}{q} + s\frac{q}{2}$.

Для определения оптимального размера партии поставки найдем значение **q** , доставляющее минимум функции **L**

$$\frac{dL}{dq} = -\frac{Kv}{q^2} + \frac{s}{2} = 0,$$

$$q = \sqrt{2Kv/s}.$$

Вторая производная $\frac{d^2L}{dq^2} = 2\frac{Kv}{q^3} > 0$ при $q > 0$ и, следовательно, найденное значение **q** доставляет минимум функции **L.**

Полученная формула $q_o = \sqrt{2Kv/s}$ называется формулой размера партии. Зная размер оптимальной партии поставки, можно определить другие параметры системы.

Оптимальный интервал между поставками

$$\tau_o = q_o / v = \sqrt{2K/vs}.$$

Оптимальный средний уровень текущего запаса

$$\overline{I_o} = \frac{q_o}{2} = \sqrt{K\nu / 2s}$$

Оптимальное число поставок

$$n_o = \left[\nu T / q_o\right] = \left\lfloor\sqrt{sQT / 2K}\right\rfloor$$ или

$$n_o = \left[\nu T / q_o\right] + 1 = \left\lfloor\sqrt{sQT / 2K}\right\rfloor + 1,$$

, где Q – потребление за плановый период ***T*.**

Суммарные затраты по формированию поставок и содержанию запасов в единицу времени

$$L_o = \sqrt{2Ks\nu} = sq_o.$$

Из формулы Уилсона следует, что $K = s\frac{q}{2}\frac{q}{\nu}$,

то есть в случае стационарного детерминированного спроса оптимальный размер партии поставки достигается при условии равенства издержек формирования запасов и издержек их содержания.

Другой практически важный вывод состоит в том, что величина партии поставки пропорциональна корню квадратному из интенсивности потребления, то есть

$$q_o = \sqrt{2K\nu / s} = \sqrt{2K / sT}\sqrt{\nu T}.$$

Обозначив $\sqrt{2K / sT} = H$, получим

$$q_o = H\sqrt{Q}.$$

Эта формула применяется для приближенного расчета величины партии поставки. Вместо вычисления издержек **K** и **s,** что является очень сложной задачей , находят **H .** При этом **H** определяется из статистической отчетности. Для вычисления коэффициента пропорциональности **H** можно воспользоваться методами корреляционно-регрессионного анализа

Модель Уилсона широко применяется при определении оптимального размера партии продукции, запускаемой в производство. В этом случае **K** – издержки, вызванные переналадкой оборудования, **q** – величина, запускаемой в производство партии, **ν** – интенсивность потребления (то есть средняя величина потребления в единицу времени) , **s** – издержки содержания единицы продукции в единицу времени, включающие потери от иммобилизации материальных ценностей в запасах. Издержки содержания единицы продукции удобно исчислять как долю **p** стоимости **α** единицы продукции, то есть **s=pα.**

Тогда объем партии выпускаемой продукции

$$q_o = \sqrt{2K\nu / p\alpha},$$

Периодичность запуска $\tau_o = \sqrt{2K / \nu p\alpha}$.

Издержки работы в единицу времени, связанные с переналадкой оборудованиния и содержания запасов

$$L_o = \sqrt{2Kp\alpha\nu} = p\alpha q_o.$$

Кроме рассмотренной достаточно простой модели управления запасами существуют и другие более сложные модели, учитывающие потери от неудовлетворенных требований, модели с учетом дискретности спроса, модели управления запасами при случайном спросе, многопродуктовые модели при снабжении из разных источников и т. д.

Задачи массового обслуживания

В теории массового обслуживания предполагается, что обслуживание чего-либо возможно на основе заявки (требования) на обслуживание. Обслуживание выполняется каналом (линией) обслуживания. Считается, что имеется поток заявок, требующих обслуживания. Этот поток попадает в обслуживающую систему, состоящую из конечного числа однородных единиц, называемых каналами (линиями) обслуживания.

Задача ставится следующим образом:

1.изучить поток заявок попадающий в систему

2.рассмотреть основные характеристики обслуживания, определяемые параметрами потока заявок и параметрами обслуживающей системы

3. по требуемым характеристикам качества обслуживания определить параметры системы обслуживания или параметры потока заявок.

Простейший поток заявок

Простейший поток заявок – это поток обладающий свойствами стационарности, отсутствия последействия и ординарности.

Стационарность потока означает, что вероятность $P_k(t)$ поступления k заявок за промежуток времени $(a,a+t)$ не зависит от места расположения данного интервала на временной оси, а зависит от числа заявок k и длины интервала a.

Отсутствие последействия означает, что вероятность $P_k(t)$ поступления k заявок за промежуток времени $(a,a+t)$ не зависит от того, когда и сколько заявок поступило до момента a.

Ординарность потока означает, что вероятность поступления за малый интервал времени Δt двух или более заявок пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью поступления одной заявки.

Можно доказать, что простейший поток заявок описывается пуассоновским законом распределения

$$P_k(t) = \frac{(at)^k}{k!} e^{-at}$$

Можно показать, что есть *a* интенсивность потока, то есть математическое ожидание (среднее число) заявок в единицу времени

Закон распределения времени обслуживания

Важным показателем процесса обслуживания является время обслуживания, то есть интервал между моментом поступления заявки в канал обслуживания и моментом выхода из канала. Время обслуживания рассматривается как случайная величина. Во многих процессах считается, что время обслуживания распределено по показательному закону $f(t) = be^{-bt}$, где *b* – среднее число заявок, обслуженных в единицу времени. Очевидно, что

$$t_{об} = M(f(t) = \int_0^\infty tbe^{-bt} dt = 1/b.$$

Вероятности состояния

Число занятых линий СМО *N(t)* в момент времени *t* есть случайная величина.

Пусть СМО в момент времени *t* находится в состоянии *k*, то есть *N(t)=k.*

Как было сказано ранее вероятность такого состояния обозначаются $P_k(t)$.

При достаточно долгом обслуживании потока заявок работа СМО стабилизируется и вероятность $P_k(t)$ стремятся к некоторому постоянному значению p_k .

СМО с потерями

Рассмотрим СМО, состоящую из *n* равноправных каналов обслуживания, причем каждый канал в данный момент времени может обслуживать только одну заявку. Обслуженная заявка покидает систему. Если все каналы заняты, то заявка покидает систему (теряется) и не влияет на поток заявок и на обслуживание других заявок. На систему поступает простейший поток заявок с интенсивностью *a*. Длительность обслуживания заявки одним каналом подчинена показательному закону с интенсивностью обслуживания *b*. Введем величину $\lambda = a/b$, которую назовем интенсивностью нагрузки.

Можно показать, что работа такой системы описывается системой диффе

ренциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dP_o(t)}{dt} = -aP_0(t) + bP_1(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dP_k(t)}{dt} = aP_{k-1}(t) - (a+kb)P_k(t) + (k+1)bP_{k+1}(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dP_n(t)}{dt} = aP_{n-1}(t) - nbP_n(t) \end{cases}$$

где k=1,2,…n , с начальными условиями

$$P_0(0) = 1, P_1(0) = 0, \dots, P_n(0) = 0$$

Решив данную систему уравнений и определив соответствующие вероятности состояния, можно определить изменение во времени интересующих характеристик работы СМО

Так как спустя некоторое время после начала работы СМО переходит на стационарный (установившийся) режим, то вероятности состояния в этом случае не будут зависеть от времени, то есть $\dfrac{dP_k(t)}{dt} = 0$ и кроме того $\lim\limits_{t\to\infty} P_k(t) = p_k$.

Тогда для определения величин p_k из приведенной выше системы дифференциальных уравнений можно получить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} -ap_0 + bp_1 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ ap_{k-1} - (a+kb)p_k + (k+1)bp_{k+1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ ap_{n-1} - nbp_n = 0 \end{cases}$$

где k=1,2,…n.

Решив данную систему уравнений, можно получить следующие формулы для расчета основных характеристик работы системы:

1.Вероятность простоя системы

$$p_0 = 1 \Big/ \left(1 + \lambda + \lambda^2 / 2! + \ldots + \lambda^n / n!\right);$$

2.Вероятность отказа в обслуживании поступившей заявки $p_n = \lambda^n \cdot p_0 / n!$;

3.Пропусктая способность системы (вероятность того, что заявка поступившая в систему не будет потеряна, то есть в системе занято обслуживанием меньше, чем n каналов) $\Pi = 1 - p_n$;

4.Среднее число каналов, занятых обслуживанием (математическое ожидание числа занятых каналов)

$$\bar{k} = M(k) = \lambda \cdot \Pi;$$

5.Коэффициент загруженности системы $\alpha = \bar{k}/n = \lambda/n \cdot \Pi$;

6.Среднее число свободных каналов $k_o = n - \bar{k}$;

7.Коэффициент простоя системы $\beta = k_o/n = 1 - \alpha$;

Очевидно, что увеличение интенсивности нагрузки системы ведет к увеличению отказа в обслуживании поступившей очередной заявки, действительно

$$\lim_{\lambda\to\infty} p_n = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^n / n! \left(1 + \lambda + \lambda^2/2! + \ldots + \lambda^n/n!\right) = 1$$

.

На практике пытаются добиться того, чтобы вероятность отказа была как можно меньшей. Этого можно добиться за счет увеличения каналов обслуживания. Но это влечет за собой дополнительные затраты на париобретение и эксплуатацию нового оборудования. Кроме того увеличение числа каналов увеличивает вероятность их простоя, а простой оборудования неизбежно приводит к убыткам. Среднее число свободных от работы каналов

$$k_o = n - \bar{k} = n - \lambda(1 - p_n)$$

Значит, при большом увеличении числа каналов обслуживания n величина $k_o \to n - \lambda$, так как при этом $p_n \to 0$, как вероятность занятости обслуживанием всех каналов системы и ,следовательно, в этом случае k_o увеличивается. Значит существует некоторое оптимальное число каналов СМО, которое обеспечивает минимальные убытки, как от необслуженных заявок, так и от простаивающих каналов обслуживания.

Если через C_1 обозначить потери, обусловленные отказом в обслуживании одной заявки, а через C_2 - стоимость простоя одного канала за единицу времени, то целевую функцию в этом случае можно представить в виде

$$Y(n) = C_1 a p_n + C_2 \overline{k_o}$$ или

$$Y(n) = C_1 a \frac{\lambda^n}{n! \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}} + C_2 (n - \lambda \left(1 - \frac{\lambda^n}{n! \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}} \right).$$

Легко убедиться, что функция $Y(n)$ имеет минимум при некотором $n = n_o$.

СМО с ожиданием

В СМО с ожиданием при поступлении заявки в систему, в которой все каналы заняты обслуживанием, заявка не теряется, а становится в очередь за ранее поступившими заявками. Освободившийся канал приступает к обслуживанию очередной заявки из очереди. При этом нет ни каких ограничений на длину очереди.

Работа такой системы описывается следующей системой дифференциальных уравнений относительно вероятностей состояний СМО, решив которую можно вычислить изменение любой интересующей характеристики системы.

$$\begin{cases} \dfrac{dP_o(t)}{dt} = -aP_0(t) + bP_1(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dP_k(t)}{dt} = aP_{k-1}(t) - (a + kb)P_k(t) + (k+1)bP_{k+1}(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dP_m(t)}{dt} = aP_{m-1}(t) - (a + nb)P_m(t) + nbP_{m+1}(t) \end{cases}$$

где $0 < k < n$, $m \geq n$

Установившийся режим работы СМО с ожиданием описывается системой линейных уравнений

$$\begin{cases} -ap_0 + bp_1 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ ap_{k-1} - (a+kb)\,p_k + (k+1)bp_{k+1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ ap_{m-1} - (a+nb)\,p_m + nbp_{m+1} = 0 \end{cases}$$

где $0 < k < n$, $m \geq n$.

Решив данную систему уравнений, можно получить следующие формулы для расчета основных характеристик работы системы:

1.Вероятность простоя системы

$$p_0 = 1 \Big/ \left(1 + \lambda + \lambda^2 / 2! + \ldots + \lambda^n / n! + \lambda^{n+1} \big/ (n! \cdot (n - \lambda))\right)$$

;

Это соотношение справедливо при условии $\lambda / n < 1$, которое называется условием стационарности системы. При нарушении этого условия СМО не справляется с обслуживанием и длина очереди неограниченно возрастает.

В этом случае следует изменить параметры СМО или параметры потока заявок. Величина $\lambda/n = \chi$ называется уровнем загрузки системы.

2.Вероятность отказа в обслуживании поступившей заявки равна 0;

3.Пропускная способность системы $\Pi = a$;

4. Среднее число каналов, занятых обслуживанием $\bar{k} = \lambda$;

5.Коэффициент загруженности системы $\alpha = \bar{k}/n = \lambda/n$;

6.Вероятность образования очереди

$$p_{оч} = \lambda^n \cdot p_0 / \left((n-1)!(n-\lambda)\right);$$

7. Среднее число заявок в очереди

$$r = \frac{\lambda^{n+1} \cdot p_0}{(n-\lambda)\cdot(n-1)!};$$

8.Среднее время ожидания заявок в очереди

$$t_{оч} = \lambda^n / \left(b \cdot (n-1)!(n-\lambda)^2\right);$$

9.Среднее число свободных каналов $k_o = n - \lambda$;

10. Коэффициент простоя системы $\beta = 1 - \chi$;

Численные методы решения дифференциальных уравнений

Для решения приведенных выше дифференциальных уравнений можно использовать численные методы. Рассмотрим некоторые из них.

При решении ОДУ необходимо задать значения неизвестных величин в начальный момент времени (начальные условия) . В этом случае постановка задачи будет иметь вид

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{\varphi}(\bar{x}, t), \quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0$$

или в развернутой форме

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots x_m) & x_1(0) = x_{10} \\ \dot{x}_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots x_m) & x_2(0) = x_{20} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots x_m) & x_3(0) = x_{30} \end{cases} .$$

Задача называется корректно поставленной, если ее решение 1)существует; 2)единственно; 3)непрерывно зависит от начальных условий.

Пусть исходная задача, представленная в виде приведенной выше системы ОДУ, решается на временном отрезке *[0,T]* . Введем на указанном отрезке равномерную сетку с шагом $\Delta t>0$, то есть множество узлов

$t_k = \Delta t \cdot k$, $k = 0,1,2,\ldots,N$. Тогда

$\Delta t = T/N$.

Пусть $\bar{v}(t)$ есть точное решение данной системы, а $\bar{x}_k = \bar{x}(t_k)$ ее приближенное решение, которое является сеточной функцией, то есть функцией определенной в узлах сетки.

Численным решением приведенной задачи называют таблицу $\{t_k, \bar{x}_k : k = 0,1,2,\ldots, N\}$, полученную с помощью численного метода.

Говорят, что численный метод сходится в точке $t = t_k$, если $\left\|\bar{x}_k - \bar{v}(t_k)\right\| \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

Численный метод сходится на интервале *(t₀,tₖ]*, если он сходится в каждой точке этого интервала.

Погрешность метода определяется величиной $\bar{\Delta}_k = \bar{x}_k - \bar{v}(t_k)$ или величиной $\left\|\bar{\Delta}_k\right\|$, которые являются мерой удаленности приближенного решения от точного.

Явный метод Эйлера

Рассмотрим ОДУ $dx/dt = \varphi(t, x)$, $x(0) = x_0$.

Данное уравнение заменяется разностным уравнением

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} = \varphi(t_k, x_k).$$

После этого легко получить расчетную формулу метода Эйлера

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t \cdot \varphi(t_k, x_k),\ k = 0,1,2,\ldots, N.$$

Величина $\varepsilon_k = \varphi(t_k, v_k) - \dfrac{v_{k+1} - v_k}{\Delta t}$, называется невязкой или погрешностью аппроксимации уравнения на решении исходного уравнения ($v_k = v(t_k)$ – точное решение исходного дифференциального уравнения).

Разностный метод аппроксимирует исходное ОДУ если $\varepsilon_k \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

Разностный метод имеет $p^{й}$ порядок аппроксимации, если $\varepsilon_k = O\left(\Delta t^p\right)$ при $\Delta t \to 0$.

Метод имеет $p^{й}$ порядок точности, если существует такое целое $p>0$, что

$$\left|x_k - v(t_k)\right| = O\left(\Delta t^p\right).$$

Рассмотренный метод Эйлера имеет первый порядок точности.

Неявный метод Эйлера

В неявном методе Эйлера исходное ОДУ заменяется разностным уравнением

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(\varphi(t_{k+1}, x_{k+1}) + \varphi(t_k, x_k)\right).$$

Тогда расчетная формула метода будет иметь вид

$$x_{k+1} = x_k + \frac{\Delta t}{2}\left(\varphi(t_{k+1}, x_{k+1}) + \varphi(t_k, x_k)\right).$$

В соответствии с этим методом на каждом шаге для определения x_{k+1} необходимо решать уравнение. Этот метод имеет второй порядок аппроксимации.

Методы Рунге- Кутта

Получившие широкое распространение методы Рунге-Кутта отличаются от разностных методов тем, что в них приходиться вычислять значения правых частей дифференциальных уравнений $\varphi(t, x)$ не только в узловых точках, но и в некоторых промежуточных. Приведем некоторые расчетные формулы, используемые при реализации этих методов.

1. Формулы метода Рунге-Кутта третьего порядка

$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{6}K_1 + \frac{2}{3}K_2 + \frac{1}{6}K_3,$$

$$K_1 = \Delta t \cdot \varphi(t_k, x_k),$$

$$K_2 = \Delta t \cdot \varphi(t_k + {\Delta t}/{2}, x_k + {K_1}/{2}),$$

$$K_3 = \Delta t \cdot \varphi(t_k + \Delta t, x_k - K_1 + {K_2}/{2}).$$

2. Формулы метода Рунге-Кутта четвертого порядка

$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{6}K_1 + \frac{1}{3}K_2 + \frac{1}{3}K_3 + \frac{1}{6}K_4,$$

$$K_1 = \Delta t \cdot \varphi(t_k, x_k),$$

$$K_2 = \Delta t \cdot \varphi(t_k + {\Delta t}/{2}, x_k + {K_1}/{2}),$$

$$K_3 = \Delta t \cdot \varphi(t_k + {\Delta t}/{2}, x_k + {K_2}/{2}),$$

$$K_4 = \Delta t \cdot \varphi(t_k + \Delta t, x_k + K_3).$$

3.Формулы Рунге-Кутта четвертого порядка для решения системы ОДУ

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z) & y(0) = y_0 \\ z' = g(x_1, y, z) & z(0) = z_0 \end{cases}.$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}K_1 + \frac{1}{3}K_2 + \frac{1}{3}K_3 + \frac{1}{6}K_4,$$

$$z_{k+1} = z_k + \frac{1}{6}L_1 + \frac{1}{3}L_2 + \frac{1}{3}L_3 + \frac{1}{6}L_4,$$

$$K_1 = \Delta x \cdot f(x_k, y_k, z_k),$$

$$L_1 = \Delta x \cdot g(x_k, y_k, z_k),$$

$$K_2 = \Delta x \cdot f(x_k + \Delta x/2, y_k + K_1/2, z_k + L_1/2),$$

$$L_2 = \Delta x \cdot g(x_k + \Delta x/2, y_k + K_1/2, z_k + L_1/2),$$

$$K_3 = \Delta x \cdot f(x_k + \Delta x/2, y_k + K_2/2, z_k + L_2/2),$$

$$L_3 = \Delta x \cdot g(x_k + \Delta x/2, y_k + K_2/2, z_k + L_2/2),$$

$$K_4 = \Delta x \cdot f(x_k + \Delta x, y_k + K_3, z_k + L_3),$$

$$L_4 = \Delta x \cdot g(x_k + \Delta x, y_k + K_3, z_k + L_3).$$

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ИНДИВИДУАЛЬНЫМ ЗАДАНИЯМ

Перед тем, как приступить к выполнению индивидуальных заданий, необходимо ознакомиться с теоретическим материалом, изложенным в начале данного пособия. После этого следует приступить к выполнению лабораторных работ.

В начале каждой лабораторной работы излагается соответствующий теоретический материал, который необходимо усвоить. Далее следует практическая часть, выполняя которую студент приобретает навыки, необходимые ему для выполнения индивидуального задания. Каждая лабораторная работа завершается индивидуальным заданием, вариант которого студент выбирает в соответствии с последней цифрой номера своей зачетной книжки. Выполненные индивидуальные задания представляются преподавателю на проверку. Оформлять выполнения каждого индивидуального задания необходимо так же, как оно представлено в лабораторной работе.

Лабораторная работа №1 «Решение задач линейного программирования средствами Excel»

1. Пример реализации задачи об использования ресурсов

Постановка задачи

Хозяйство производит три вида продукции: X1, X2, X3 стоимость 950,

3500 и 9500 руб. На изготовление одного вида продукции X1 расходуются 2м

кабеля стандартного сечения, 0,5 м2 стального листа и 2,5 чел.-час. рабочего времени. Для изготовление второго вида продукции X2 используются 3м

кабеля и 2,5 чел.-час. рабочего времени. Аналогичные данные для X3

составляют: 4 м кабеля, 0,8 м2 стального листа и 4 чел.-час. рабочего времени.

В распоряжении фабрики имеется 2000м кабеля стандартного сечения, 90м2

стального листа и 650 чел.- час рабочего времени. Найти план выпуска

продукции, при котором прибыль от их реализации будет максимальной, при

условии, что X1 должно быть не менее 10 шт..

Составление экономико-математической модели

1 этап. Целевая функция. При условии, что их реализационная цена

составляет, соответственно, 250, 900 и 2500 руб., имеем следующую целевую

функцию:

$Z = 250X1+\square\ 900X2\ \square\ +2500X3 \quad \rightarrow\ \max$

2 этап. Система ограничений. Имеются три ресурса для изготовления

продукции и ограничение на выпуск стульев:

кабель $2X1 +3X2 +2{,}5X3 \leq 900$

стальной лист $0{,}5X1 +2{,}5X3 \leq 60$

рабочее время $4X1 +0{,}8X2 + 4X3 \leq 350$

дополнительное ограничение $X1 \leq 10$

3 этап. Условия неотрицательности переменных:

$X1 \leq 0$, $X2 \leq 0$, $X3 \leq 0$.

Средство реализации задач линейного программирования в MS Excel

В MS Excel существует множество унифицированных средств

(встроенных программ), дающих возможность получать определенную

совокупность характеристик данного ряда случайных чисел. Все эти средства

являются надстроечными программами электронной таблицы MS Excel. На

практике, именно Надстройки делают программу удобной для использования в научно-технической работе. Доступ к ним осуществляется через меню

Настройка панели быстрого доступа\Другие команды (рисунок 1).

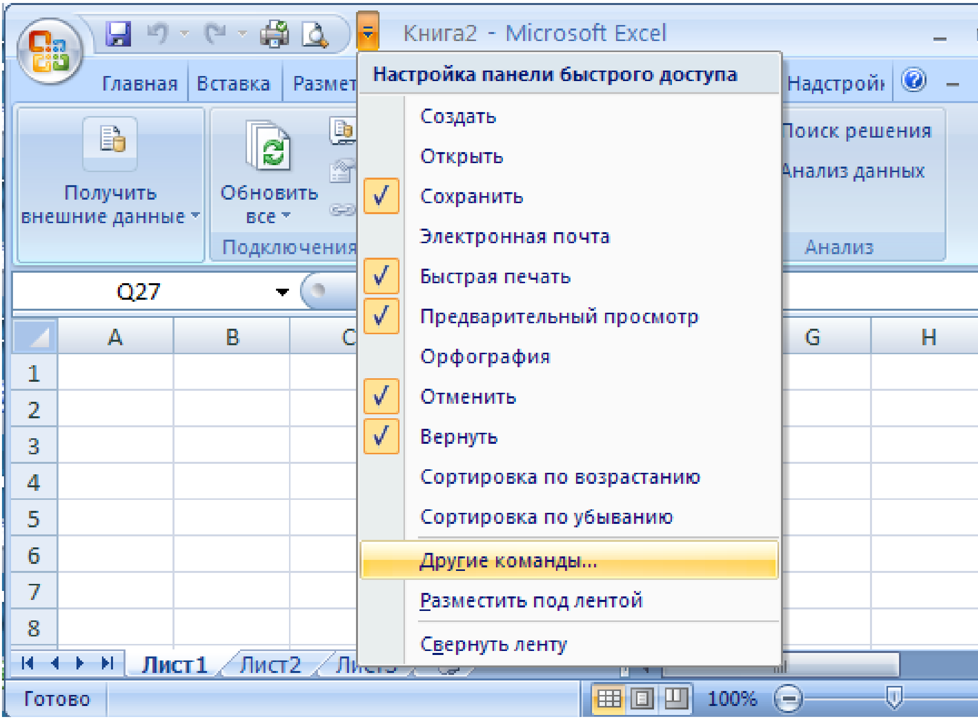


Рисунок 1

В окне Другие команды щелкнув по кнопке Перейти откроется окно

Надстройки, где установкой соответствующих флажков подключаются

нужные программы, которые поставляются вместе с MS Excel (рисунок 2).

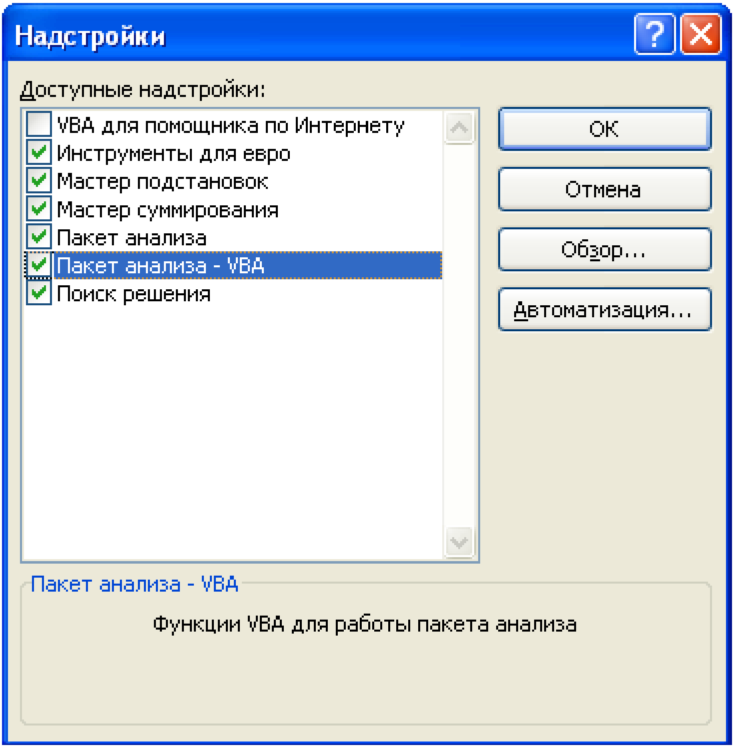


Рисунок 2

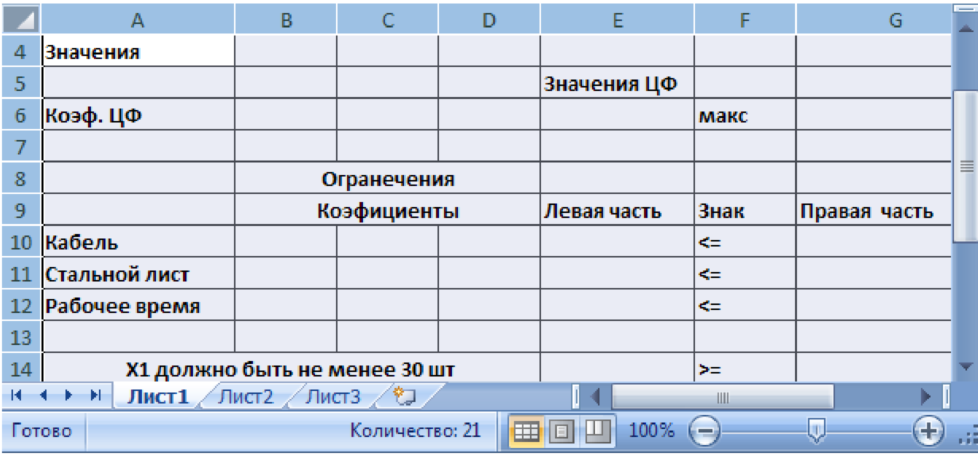
При этом в меню Данные появляется команда Поиск решения. Поиск

решения позволяет реализовывать методы решения задач линейного

программирования, численные методы решения уравнений и т д.

Реализация экономико-математической модели в MS Excel

1. Сделать форму для ввода условий задачи



	A	B	C	D	E	F	G
4	Значения						
5					Значения ЦФ		
6	Коэф. ЦФ					макс	
7							
8			Огранечения				
9			Коэфициенты		Левая часть	Знак	Правая часть
10	Кабель					<=	
11	Стальной лист					<=	
12	Рабочее время					<=	
13							
14		X1 должно быть не менее 30 шт				>=	

2. Ввод исходных данных в форму из условия задачи

	A	B	C	D	E	F	G
2		Переменные					
3		X1	X2	X3			
4	Значения	0	0	0			
5					Значения ЦФ		
6	Коэф. ЦФ	900	3000	9000	0	макс	
7							
8		Огранечения					
9		Коэфициенты			Левая часть	Знак	Правая часть
10	Кабель	1,60	2,2	3,5	0	<=	700
11	Стальной лист	0,5	0	1,5	0	<=	90
12	Рабочее время	1,8	2	4	0	<=	550
13							
14	X1 должно быть не менее 30 шт				0	>=	30

Лист1 Лист2 Лист3

Готово 100%

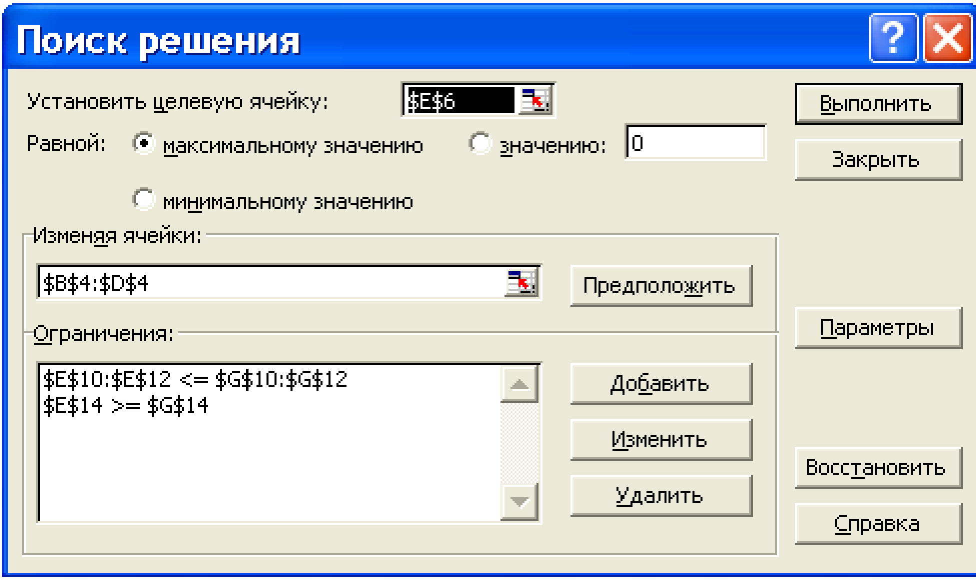
3. Ввод данных в режиме представления формул

E6 =СУММПРОИЗВ(B4:D4;B6:D6)

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Переменные					
3		X1	X2	X3			
4	Значение	0	0	0			
5					Значение ЦФ		
6	Коэф. ЦФ	900	3000	9000	=СУММПРОИЗВ(B4:D4;B6:D6)	макс	
7							
8		Ограничения					
9		Коэффициенты			Левая часть	Знак	Правая часть
10	Кабель	1,6	2,2	3,5	=СУММПРОИЗВ($B$4:$D$4;B10:D10)	<=	700
11	Стальной лист	0,5	0	1,5	=СУММПРОИЗВ($B$4:$D$4;B11:D11)	<=	90
12	Рабочее время	1,8	2	4	=СУММПРОИЗВ($B$4:$D$4;B12:D12)	<=	550
13							
14	ульев должно быть не менее 30				=B4	>=	30

Поиск решения

1. На панели **Данные** выполните команду **Поиск решения** (рисунок 3)



2. Назначить целевую функцию. Для этого установить в опцию

Установить целевую ячейку, щелкнуть кнопкой по ячейке **E6**.

3. Выбрать направление целевой функции: **Максимальному значению**.

4. Ввести адреса искомых переменных путем установки курсора в список

Изменяя ячейки и выделения адресов ячеек: **B4:D4**.

5. Для ввода ограничений щелкнуть по кнопке **Добавить** (рисунок 4)

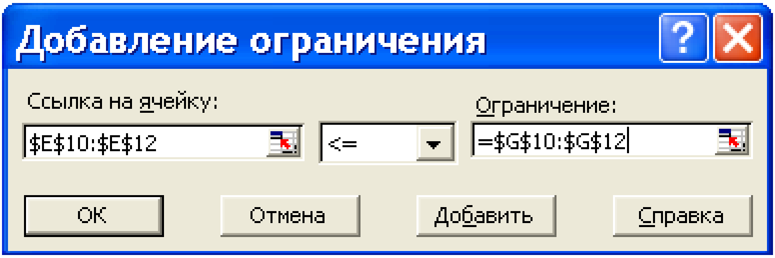


Рисунок 4

6. Ввести ограничения по трем ресурсам: **E10:E12<=G10:G12**. Для этого:

в списке **Ссылка на ячейку** выделить ячейки **E10:E12**; выбрать знак

<=, затем установить курсор в списке **Ограничение** и выделить ячейки

G10:G12. Щелкнуть по кнопке **Добавить.**

7. Аналогично ввести ограничения по стульям. После ввода последнего

ограничения вместо **Добавить** щелкнуть по кнопке **ОК**.

8. В окне **Поиск** решения щелкнуть **Параметры** и установить флажки

Линейная модель и **Неотрицательные значения** (условия

неотрицательности переменных X1, X2 и X3) (рисунок 5).

9. Щелкнуть по кнопке **ОК**, затем **Выполнить**.

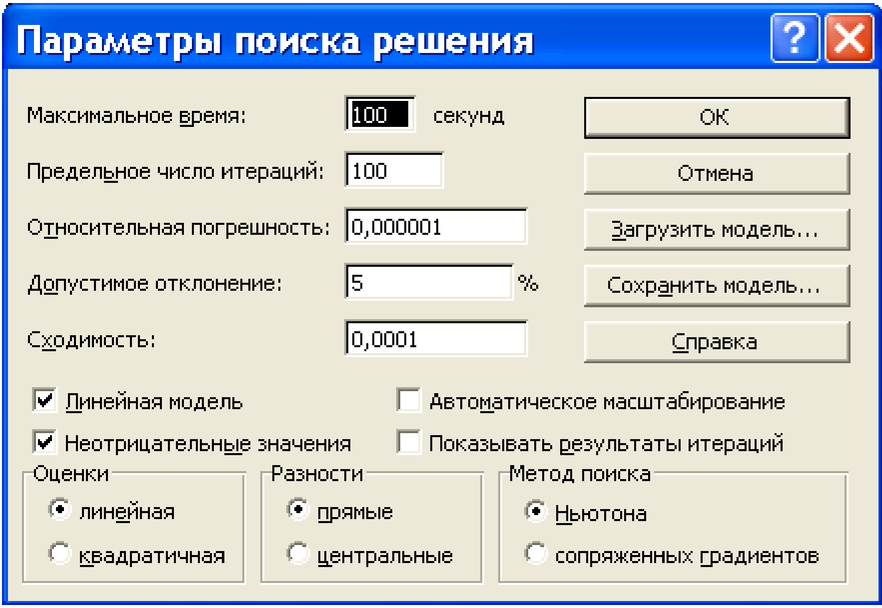
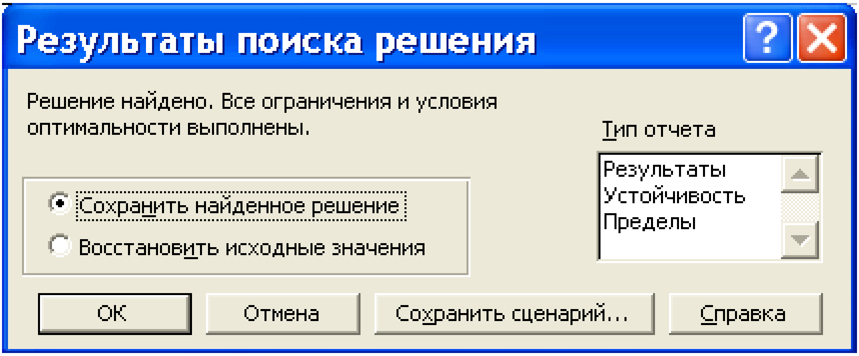


Рисунок 5

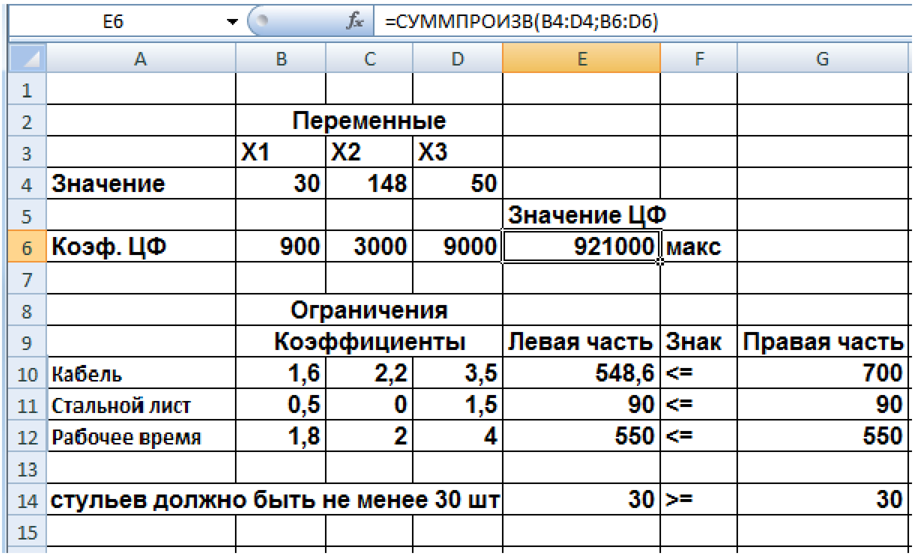
Признаком решения задачи является появления диалогового окна

Результаты поиска решения, в котором должно быть указано, что **Решение**

найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены



Найденное оптимальное решение задачи приведено на рисунке 6.



E6 =СУММПРОИЗВ(B4:D4;B6:D6)

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Переменные					
3		X1	X2	X3			
4	Значение	30	148	50			
5					Значение ЦФ		
6	Коэф. ЦФ	900	3000	9000	921000	макс	
7							
8		Ограничения					
9		Коэффициенты			Левая часть	Знак	Правая часть
10	Кабель	1,6	2,2	3,5	548,6	<=	700
11	Стальной лист	0,5	0	1,5	90	<=	90
12	Рабочее время	1,8	2	4	550	<=	550
13							
14	стульев должно быть не менее 30 шт				30	>=	30
15							

Рисунок 6

2. Решение транспортной задачи

Постановка транспортной задачи.

Товары с 5 баз поставляются в 4 магазинов. Потребность магазинов в

товарах, соответственно, составляют 20, 14, 10, и 6 тыс. ед. Запасы товаров на базах, соответственно, составляют 14, 11, 14, 9 и 4 тыс. ед.. Затраты на

перевозку 1 тыс. ед. товара в ден. ед. представлены матрицей C. Запланировать перевозку с минимальными затратами.

$$C = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 8 & 1 \\ 6 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

Представим условие задачи в виде таблицы

Поставщики	Потребители				Объемы поставок, тыс. ед.
	Магазин №1	Магазин №2	Магазин №3	Магазин №4	
База №1	X_{11} 4	X_{12} 5	X_{13} 8	X_{14} 1	14
База №2	X_{21} 6	X_{22} 3	X_{23} 5	X_{24} 3	11
База №3	X_{31} 2	X_{32} 2	X_{33} 3	X_{34} 5	14
База №4	X_{41} 5	X_{42} 1	X_{43} 6	X_{44} 7	9
База №5	X_{51} 3	X_{52} 4	X_{53} 6	X_{54} 4	4
Объемы потребления, тыс. ед.	20	14	10	6	

Определим объемы поставок и потребления товаров:

- с 5 баз: 14+11+14+9+4=52

- на 4 магазина: 20+14+10+6=50

Условия материального баланса не соблюдается, причем объемы поставок

с баз превышает объемы потребления в магазины на 2 тыс. ед.

Так как объемы поставок превышают объемы потребления, вводится

фиктивный потребитель (магазин №5 (фикт)) с объемом 2 тыс. ед. Причем,

затраты на перевозку 1 тыс. ед. товара принимается равным нулю.

Тогда имеем новую таблицу

Поставщики	Потребители					Объемы поставок, тыс. ед.
	Магазин №1	Магазин №2	Магазин №3	Магазин №4	Магазин №5 (фикт)	
База №1	X_{11} 4	X_{12} 5	X_{13} 8	X_{14} 1	X_{15} 0	14
База №2	X_{21} 6	X_{22} 3	X_{23} 5	X_{24} 3	X_{25} 0	11
База №3	X_{31} 2	X_{32} 2	X_{33} 3	X_{34} 5	X_{35} 0	14
База №4	X_{41} 5	X_{42} 1	X_{43} 6	X_{44} 7	X_{45} 0	9
База №5	X_{51} 3	X_{52} 4	X_{53} 6	X_{54} 4	X_{55} 0	4
Объемы потребления, тыс. ед.	20	14	10	6	2	52

Если учитывать, что объемы поставок от каждой базы к каждому

магазину являются переменными в виде матрицы X5,5 , то имеем 25

переменных.

Составление экономико-математической модели.

Тогда можно составить экономико-математическую модель открытой

транспортной задачи:

1. Целевая функция

$$Z = 4\cdot X_{11} + 5\cdot X_{12} + 8\cdot X_{13} + 1\cdot X_{14} + 0\cdot X_{15}$$
$$+ 6\cdot X_{21} + 3\cdot X_{22} + 5\cdot X_{23} + 3\cdot X_{24} + 0\cdot X_{25} +$$
$$+ 2\cdot X_{31} + 2\cdot X_{32} + 3\cdot X_{33} + 5\cdot X_{34} + 0\cdot X_{35} +$$
$$+ 5\cdot X_{41} + 1\cdot X_{42} + 6\cdot X_{43} + 7\cdot X_{44} + 0\cdot X_{45} +$$
$$+ 3\cdot X_{51} + 4\cdot X_{52} + 6\cdot X_{53} + 4\cdot X_{54} + 0\cdot X_{55} -$$

2. Система ограничений

Объемы поставок с 5 баз

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} = 14$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} = 11$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} = 14$$
$$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} + X_{45} = 9$$
$$X_{51} + X_{52} + X_{53} + X_{54} + X_{55} = 4$$

Объемы потребления по 5 магазинам

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} + X_{51} = 20$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} + X_{52} = 14$$
$$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} + X_{53} = 10$$
$$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} + X_{54} = 6$$
$$X_{15} + X_{25} + X_{35} + X_{45} + X_{55} = 2$$

3. Условия не отрицательности переменных $X_{ij} \geq 0$

Реализация экономико-математической модели

Существуют современные прикладные программы (например, MS Excel), где, с помощью настроечной программы реализуется представленная модель.

Такой настроечной программой в MS Excel является Поиск решения (см. меню Данные).

Алгоритм реализации модели в MS Excel:

1. Осуществляем ввод данных моделей на лист MS Excel, учитывая, что

левая часть равенств системы ограничений требуют вычисления.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Поставщ	Потребители					Левая		Правая
2	ики	Магаз. №1	Магаз. №2	Магаз. №3	Магаз. №4	Магаз. №5	часть	Знак	часть
3	База №1	0	0	0	0	0	0	=	14
4	База №2	0	0	0	0	0	0	=	11
5	База №3	0	0	0	0	0	0	=	14
6	База №4	0	0	0	0	0	0	=	9
7	База №5	0	0	0	0	0	0	=	4
8	Левая часть	0	0	0	0	0			52
9	Знак	=	=	=	=	=			
10	Правая часть	20	14	10	6	2	52		
11									
12		Матрица затрат							
13	Поставщ	Потребители							
14	ики	Магаз. №1	Магаз. №2	Магаз. №3	Магаз. №4	Магаз. №5			
15	База №1	4	5	8	1	0			
16	База №2	6	3	5	3	0			
17	База №3	2	0	0	0	0			
18	База №4	5	1	6	7	0			
19	База №5	3	4	6	4	0			
20									
21		Целевая функция							
22	Значение	0		минимум					

Рисунок 8

2. Ввод данных в режиме отображения формул представлен

на рисунке 9.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Поставщ			Потребители					Правая
2	ики	Магаз. №1	Магаз. №2	Магаз. №3	Магаз. №4	Магаз. №5	Левая часть	Знак	часть
3	База №1	0	0	0	0	0	=СУММ(B3:F3)	=	14
4	База №2	0	0	0	0	0	=СУММ(B4:F4)	=	11
5	База №3	0	0	0	0	0	=СУММ(B5:F5)	=	14
6	База №4	0	0	0	0	0	=СУММ(B6:F6)	=	9
7	База №5	0	0	0	0	0	=СУММ(B7:F7)	=	4
8	Левая часть	=СУММ(B7:C9)	=СУММ(C3:C7)	=СУММ(D3:D7)	=СУММ(E3:E7)	=СУММ(F3:F7)			=СУММ(I3:I7)
9	Знак	=	=	=	=	=			
10	Правая часть	20	14	10	6	2	=СУММ(B10:F10)		
11									
12				Матрица затрат					
13	Поставщ			Потребители					
14	ики	Магаз. №1	Магаз. №2	Магаз. №3	Магаз. №4	Магаз. №5			
15	База №1	4	5	8	1	0			
16	База №2	6	3	5	3	0			
17	База №3	2	0	0	0	0			
18	База №4	5	1	6	7	0			
19	База №5	3	4	6	4	0			
20									
21		Целевая функция							
22	Значение	=СУММПРОИЗВ(B3:F7;B15:F19)		минимум					
23									

Рисунок 9

3.После ввода модели на лист Excel, командой меню **Сервис/Поиск**

решения, открываем одноименное окно и производим ввод исходных

данных и выбираем соответствующие установки (рисунок 10).

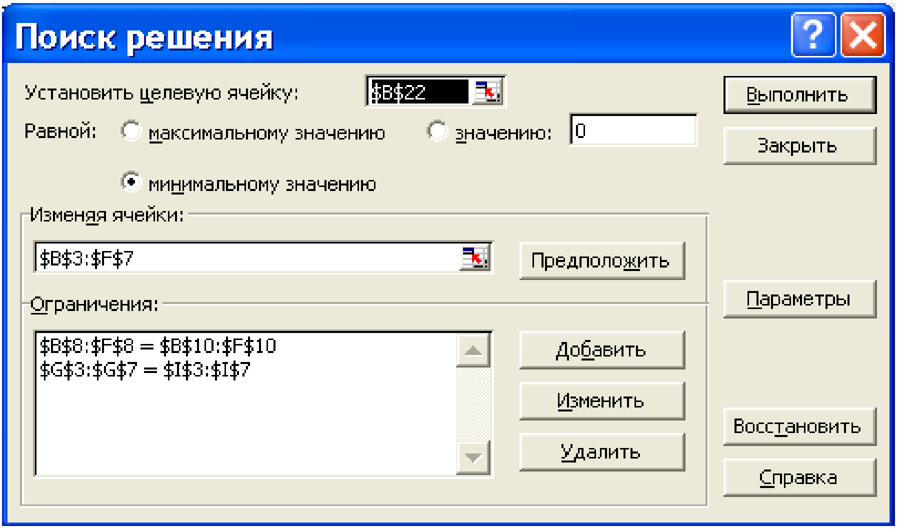
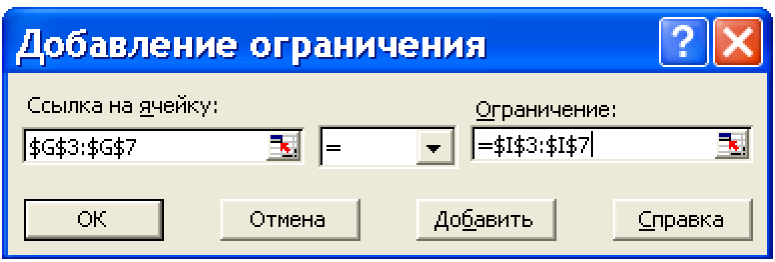


Рисунок 10. Окно Поиск решения

4.Добавление ограничений осуществляется с помощью кнопки **Добавить**

после чего появляется одноименное окно



5.В окне Поиск решения, нажав кнопку Параметры, устанавливаем

флажки Линейная модель и Неотрицательные значения (рисунок 11).

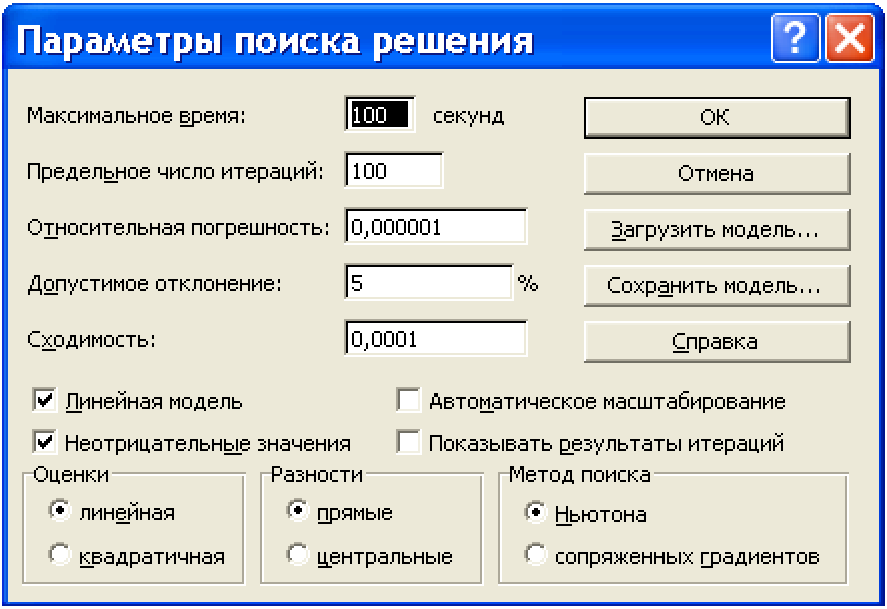


Рисунок 11. Окно **Параметры поиска решения**

6.В окне **Поиск решения** нажав кнопку **Выполнить** (см. рисунок 10)

получим результаты поиска решений (рисунок 12), правильность которых

определяется соответствующим сообщением (рисунок 13):

B22 = =СУММПРОИЗВ(B3:F7;B15:F19)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
2	ки	Магаз. №1	Магаз. №2	Магаз. №3	Магаз. №4	Магаз. №5	часть	Знак	часть
3	База №1	8	0	0	6	0	14	=	14
4	База №2	4	5	0	0	2	11	=	11
5	База №3	4	0	10	0	0	14	=	14
6	База №4	0	9	0	0	0	9	=	9
7	База №5	4	0	0	0	0	4	=	4
8	Левая часть	20	14	10	6	2			52
9	Знак	=	=	=	=	=			
10	Правая часть	20	14	10	6	2	52		
11									
12		Матрица затрат							
13	Поставщи	Потребители							
14	ки	Магаз. №1	Магаз. №2	Магаз. №3	Магаз. №4	Магаз. №5			
15	База №1	4	5	8	1	0			
16	База №2	6	3	5	3	0			
17	База №3	2	0	0	0	0			
18	База №4	5	1	6	7	0			
19	База №5	3	4	6	4	0			
20									
21		Целевая функция							
22	Значение	106		минимум					

Рисунок 12. Результаты решения модели

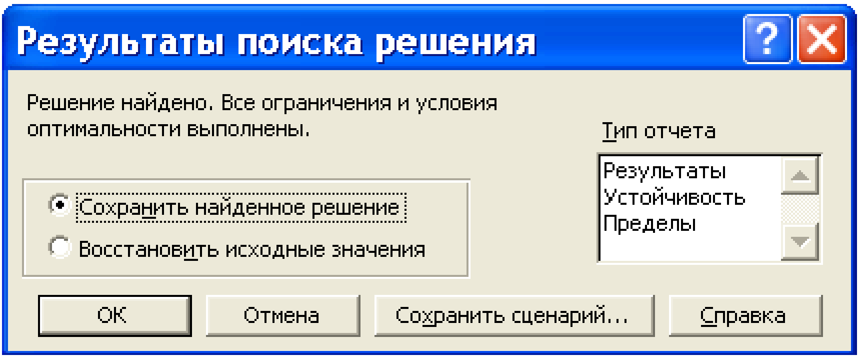


Рисунок 13. Результаты поиска решения

Таким образом, при полученном оптимальном плане перевозок товаров минимальные затраты на их перевозку с баз на магазины составили 106 тыс. ден. ед.

Индивидуальные задания (номер варианта выбирается по последней цифре номера зачетной книжки):

1. Составить математическую модель и протокол решения ее, используя Excel.

Вариант 1

Предприятие консервирует томаты, перец и огурцы, закупаемые у

производителей по 28, 25 и 20 рублей за килограмм соответственно. Готовую

продукцию реализуют по 35, 38 и 30 рублей за килограмм. Для закупа овощей предприятие располагает суммой в размере 14000 рублей. На производство готовой продукции тратится рабочее время соответственно 10, 8 и 6 часов. Общий объем времени составляет 6500 часов. Торговля требует предоставить перца в два раза меньше томата, а огурца в три раза меньше томата. Составить оптимальный план закупа овощей для обеспечения максимально возможной прибыли, при условии, что планируемая сумма денег на покупку продукций используется полностью.

Вариант 2

Торговое предприятие планирует организовать продажу четырех видов товара (A, B, C и D), используя при этом только два вида ресурсов:

рабочее время продавцов в количестве 1200 ч и площадь торгового зала 360 м2. При этом известны плановые нормативы затрат этих ресурсов в расчете на единицу товара A, B, C и D и прибыль от их продажи, которые приведены в таблице:

Показатели	Товар A	Товар B	Товар C	Товар D	Общее количество ресурсов
Расход рабочего времени на единицу товара (ч)	0,6	0,8	0,6	0,4	1200
Использование площади торгового зала на единицу товара ($м^2$)	0,1	0,2	0,4	0,1	360
Прибыль от продажи единицы товара (руб.)	5	8	7	9	
минимальная продажа	90	50	-	-	

Требуется определить оптимальную структуру товарооборота,

обеспечивающую торговому предприятию максимум прибыли при условии, что рабочее время и торговые площади используются полностью и минимальная продажа товара вида A и B не менее 90 и 50.

Вариант 3

Для производства трех видов продукции предприятие использует два типа

технологического оборудования и два вида сырья. Нормы затрат сырья и

времени на изготовление одного изделия каждого вида приведены в таблице. В ней же указаны общий фонд рабочего времени каждой из групп

технологического оборудования, объемы имеющегося сырья каждого вида, а

также цена одного изделия данного вида и ограничения на возможный выпуск каждого из изделий.

Ресурсы	Нормы затрат на одно изделие вида			Общее количество ресурсов
	1	2	3	
Производительность оборудования (нормо-ч): I типа	2	-	4	550
II типа	4	3	1	800
Сырье (кг): 1-го вида	10	15	20	4000
2-го вида	30	20	25	4500
Цена одного изделия (руб.)	10	15	20	-
Выпуск (шт.): минимальный	10		25	-
максимальный		80		-

Составить такой план производства продукции, согласно которому

необходимо использовать полностью производительность станка I типа и

изготовить необходимое количество изделий каждого вида, а общая стоимость всей изготовляемой продукции была бы максимальна.

Вариант 4

Под посевы ржи, пшеницы и кукурузы отведено три земельных

массива размерами в 5000, 6000 и 9000 га. Средняя урожайность по массивам

указана в таблице. Сколько гектаров и на каких массивах нужно отвести под каждую культуру, чтобы получить максимальную прибыль, если по плану необходимо сдать не менее 19000 ц ржи, 158000 ц пшеницы и 300000 ц кукурузы.

Культура	Урожайность по массивам, ц/га			Выручка от реализации, руб/ц
	1	2	3	
Рожь	12	14	15	2
Пшеница	14	15	22	2,5
Кукуруза	30	35	25	1,4

Вариант 5

Для изготовления четырех видов изделий A, B, C и D используется

токарное, фрезерное, сварочное и шлифовальное оборудование. Затраты

времени на обработку одного изделия для каждого из типов оборудования

указаны в таблице. В ней же указан общий фонд рабочего времени каждого из типов используемого оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия данного вида. Требуется полностью использовать рабочее время на токарную работу. Нужно определить, сколько изделий, и какого вида следует изготовить предприятию, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

Тип оборудования	Затраты времени (станко-ч) на обработку одного изделия вида				Общий фонд Рабочего времени (ч)
	A	B	C	D	
Фрезерное	0,2	0,4	0,3	-	132
Токарное	1	5	2	3	2900
Сварочное	3	4	-	4	4700
Шлифовальное	4	6	2,5	7	5500
Прибыль (ус. ед.)	130	110	120	115	-

Вариант 6

Предприятие изготовляет и реализует землю для выращивания цветов:

пальма, азалия и кактусы. Состав земляной смеси для пальмы: дерновая – 20%, листовая – 20%, перегной – 20%, торф – 30%, песок – 10%. Состав земляной смеси для азалии: дерновая – 20%, листовая – 10%, хвойная земля – 45%, торф – 25%. Состав земляной смеси для кактусов: дерновая – 30%, листовая – 10%, перегной – 15%, хвойная земля – 25%, песок – 20%. Запас компонентов: дерновая –3,5т, листовая – 4т, перегной – 3т, хвойная – 2,2т, торф – 2,6т, песок – 1,5т. Цена реализации за килограмм продукции: для пальмы – 213, для азалии 225. для кактусов – 230 рублей. Сформировать оптимальный план производства продукции для этого предприятия, при условии, что торф используется полностью, а азалии должно быть в два раза меньше, чем кактусов.

Вариант 7

При производстве четырех видов кабеля выполняется пять групп

технологических операций. Нормы затрат на 1км кабеля данного вида на

каждой из групп операций, цена реализации 1км каждого вида кабеля, а таже

общий фонд рабочего времени и планируемый выпуск, в течение которого

могут выполняться эти операции, указаны в таблице. Определить такой план выпуска кабеля, при котором затраты времени на испытание и контроль использовались бы полностью, а общая прибыль от реализации изготовляемой продукции была бы максимальной.

Технологическая операция	**Нормы затрат времени (ч) на обработку 1 км кабеля вида**				**Фонд рабочего времени (ч)**
	1	2	3	4	
Волочение	1,2	1,8	1,6	2,4	4120
Наложение изоляции	1,0	0,4	0,8	0,7	5600
Скручивание элементов в кабель	6,4	5,6	6,0	8,0	11176
Освинцование	3,0	-	1,8	2,4	3600
Испытание и контроль	2,1	1,5	0,8	3,0	4000
Цена реализации 1 км кабеля (руб.)	1,2	0,8	1,0	1,3	
Выпуск: - минимальный - максимальный	10	 20	5	 30	

Вариант 8

Найти оптимальное сочетание посевов продовольственных культур:

озимой пшеницы, сахарной свеклы и картофеля. Под посевы отведено 2500 га пашни, которая должна использоваться полностью. При этом общие ресурсы труда составляют 80 тыс.чел.-ч. Производство культур характеризуется показателями таблицы. По плану требуется произвести 25 тысяч ц. зерна и 33 тысячи ц. картофеля. Критерий оптимальности – минимум материально-денежных затрат на производство продукции.

Показатели	Озимая пшеница	Свекла	Картофель
Урожайность с 1 га, ц.	25	85	144
Затраты труда на 1 га, чел.-ч.	30	100	80
Материально-денежные затраты на 1 га, тыс. руб.	2,14	7	6,75

Вариант 9

Определить оптимальное сочетание трех культур: пшеницы, ячменя и

овса. Производство культур характеризуется показателями таблицы:

Показатели	Озимая пшеница	Яровой ячмень	Овес
Урожайность с 1 га, ц.	40	35	30
Затраты труда на 1 га, чел.-ч.	20	15	13
Затраты удобрений на 1 га, руб.	80	50	40

Производственные ресурсы: пашня – 1600 га, труд – 27000 чел.-ч.,

удобрений – 99000 руб. В структуре посевов площадь под озимой пшеницей

должна составлять не менее 50 %. Критерий оптимальности – максимум производства продукции.

Вариант 10

Составить суточный рацион кормления животных. На одну голову в

сутки требуется не менее 22 кг кормовых единиц и 2502 протеина. Рацион

составляется из 3-х видов кормов: комбикорма, сена и силоса. Содержание

питательных веществ в единице каждого вида корма и их себестоимость

показаны в таблице. Согласно физиологическим потребностям животных в рационе должно содержаться не менее 30% концентратов и более 25% грубых кормов от общей потребности в кормовых единицах. Критерий оптимальности – минимум себестоимости рациона.

Показатели	Комбикорм	Сено	Силос
Кормовые единицы, кг	1	0,5	0,2
Протеин, кг	160	60	30
Себестоимость 1 кг корма, руб.	14	10	11

2. Составить математическую модель транспортной задачи и

решить ее, используя Excel.

Вариант 1

В четырех хранилищах горючего ежедневно хранится 175, 125, 140 и

140 тонн бензина. Этот бензин ежедневно получают четыре заправочные

станции (АЗС) в количествах, равных соответственно 100, 110, 160 и 195 тонн. Тарифы перевозок одной тонны бензина с хранилищ к заправочным станциям задаются матрицей С. Причем с хранилище №2 в АЗС №2 и №4 должно быть перевезено бензина соответственно 50 т. и не менее 30 т., а из хранилище №4 в АЗС №3 в четыре раза меньше, чем в АЗС №4. Составить такой план перевозок бензина, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

$$C = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Вариант 2

На четырех железнодорожных станциях А1, А2, А3 и А4 скопилось 220,

250, 310 и 230 незагруженных вагонов. Эти вагоны необходимо перегнать на

железнодорожные станции В1, В2, В3, В4 и В5. На каждой из этих станций

потребность в вагонах соответственно равна 300, 270, 280, 100 и 55. Учитывая, что с железнодорожных станции А2 не представляется возможным пергнать вагоны на станции В2 и В4. Из станции А1 в В4 требуется перегнать 80 вагонов, а из станции А2 в В3 в два раза меньше, чем из А1 в В4. Зная, что тарифы перегонки одного вагона определяются матрицей С, составьте такой план перегонок вагонов, чтобы общая стоимость этих мероприятий была

минимальной (cij - тариф перегонки одного вагона с i –ой станции (i=1,2,3) до j-ой (j=1...5)).

$$C=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & 5 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 3 & 7 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Вариант 3

Для строительства четырех дорог используется гравий из пяти карьеров. Запасы гравия в каждом из карьеров соответственно равны 125, 280, 340, 200 и 165 усл. ед. Потребности в гравии для строительства каждой из дорог

соответственно равны 330, 220, 300 и 270 усл. ед. Тарифы перевозок одной

условной единицы гравия задаются матрицей С (cij - тариф перевозки одной

условной единицы гравия с i –го карьера (i=1,2,3) до j- ой дороги (j=1...4)).

Составить такой план перевозок гравия, при котором потребности в нем были удовлетворены при наименьшей общей стоимости перевозок, учитывая, что из карьера №2 на дорогу №4 требуется завести не менее 50 усл. ед. гравия.

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 14 & 17 \\ 8 & 15 & 7 & 13 \\ 14 & 10 & 9 & 11 \\ 16 & 9 & 11 & 12 \\ 15 & 12 & 13 & 10 \end{bmatrix}$$

Вариант 4

Три предприятия для производства продукции используют четыре

вида сырья. Потребности в сырье каждого из предприятий соответственно

равны 220, 190 и 255 ед. Сырье сосредоточено в четырех местах его получения, а запасы соответственно равны 180, 90, 110 и 190 ед. На каждое из предприятий сырье может завозиться из любого пункта его получения. Тарифы перевозок задаются матрицей:

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 5 & 9 \\ 8 & 5 & 4 & 7 \\ 7 & 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Составить такой план перевозок, при котором общая стоимость перевозок

была минимальной, при условии, что сырье из второго места в первое

предприятие должно быть завезено не менее 10 и не более 25 ед.

Вариант 5

Четыре предприятия данного экономического района для производства продукции используют три вида сырья. Потребности в сырье каждого из предприятий соответственно равны 170, 200, 130 и 200 ед. Сырье сосредоточено в трех местах его получения, а запасы соответственно равны 250, 320 и 105 ед. На каждое из предприятий сырье может завозиться из любого пункта его получения. Тарифы перевозок задаются матрицей:

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Составить такой план перевозок, при котором общая стоимость перевозок

была минимальной при условии, что сырье из второго места в первое

предприятие должно быть завезено в два раза больше, чем из первого места во второе предприятие.

Вариант 6

Песок завозится в четыре объекта из пяти карьеров. Запасы песка в

каждом из карьеров соответственно равны 125, 280, 340, 200 и 160 усл. ед.

Потребности в песке для строительства каждой из объектов соответственно

равны 330, 220, 300 и 270 усл. ед. Причем из карьера №3 на объект №4

требуется завести не менее 50 и не более 80 усл. ед. песка. Составить

оптимальный план грузоперевозок песка, если себестоимость 1 т/км равно 3

руб. Расстояния перевозки песка приведены в таблице:

Поставщик	Расстояние до объектов			
	Объект №1	Объект №2	Объект №3	Объект №4
Карьер №1	170	110	80	145
Карьер №2	160	95	115	125
Карьер №3	120	105	135	135
Карьер №4	118	96	112	98
Карьер №5	90	115	130	114

Вариант 7

С трех поставщиков нужно завести зерно на три элеватора. Поставщик

№1 имеет 120000 т зерна, поставщик №2 – 80000 т и поставщик №3 150000т.

Элеватор №1 может принять 100000 т зерна, №2 – 150000 и №3 – 90000 т.

Составить оптимальный план грузоперевозок, если себестоимость 1 т/км

равно 6 руб. Расстояния перевозки зерна приведены в таблице:

Поставщик	Расстояние до элеватор		
	№1	№2	№3
№1	170	110	80
№2	160	95	115
№3	120	105	135

Вариант 8

Однородный товар с четырех баз поставляется в четыре магазина. Потребности 1-го, 2-го, 3-го и 4-го магазинов в товаре соответственно равны 30, 80, 60 и 50 тыс. ед. Запасы товара на базах составляют 40, 60, 40 и 80 тыс. ед. Затраты на перевозку 1 тыс. ед. товара (в усл. ед.) представлены следующей матрицей затрат:

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 4{,}5 & 3 & 2 & 1{,}2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 3{,}5 & 2{,}6 & 1{,}3 & 1{,}4 \\ 3{,}2 & 4{,}1 & 2{,}5 & 5{,}8 \end{bmatrix}.$$

Необходимо запланировать перевозки таким образом, чтобы полностью удовлетворить потребности магазинов, а затраты свести к минимуму.

Вариант 9

Продукцию 3 заводов (а1 = 40 тыс. ед.; а2 = 50 тыс. ед.; а3 = = 30 тыс. ед.) необходимо доставить четырем потребителям, спрос которых распределяется следующим образом: в1 = 20 тыс. ед.; в2 = 50 тыс. ед.; в3 = 20 тыс. ед.; в4 = 30 тыс. ед. Известна матрица транс-портных расходов на доставку 1 тыс. ед. с i-го завода j-му потребителю:

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 6{,}5 & 4{,}3 & 5{,}1 & 4 \\ 3{,}0 & 7{,}4 & 3{,}5 & 6{,}3 \\ 4{,}3 & 5{,}7 & 6{,}5 & 3{,}8 \end{bmatrix}.$$

Определите оптимальный план прикрепления потребителей к заводам, минимизирующий транспортные расходы.

Вариант 10

Автопарки города с ежемесячной потребностью в бензине соответственно в 40, 30, 80, 60 и 50 т снабжаются бензохранилищами вместимостью 55, 70, 35 и 100 т. Доставка горючего из бензохранилищ осуществляется автотранспортом. Средние транспортные издержки в расчете на 1 т приведены в табл. 22. Требуется составить план перевозки горючего, обеспечивающий минимальные транспортные издержки.

Таблица 22. **Данные о стоимости перевозки 1 т груза, усл. ед.**

Бензохранилище	Стоимость перевозки 1 т груза потребителям автопарком				
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
№ 1	4	2	3	6	1
№ 2	5	3	4	2	6
№ 3	3	4	7	3	2
№ 4	2	6	5	4	3

Лабораторная работа №2 «Расчет параметров СМО в неустановившемся режиме средствами VBA»

1. Введение

В настоящее время Microsoft Office является наиболее используемым и полезным программным продуктом. Набор его приложений, включающий текстовый редактор Word, электронные таблицы Excel, систему управления базами данных Access, редактор Web-страниц Front Pages, пакет подготовки презентаций PowerPoint, электронный секретарь Outlook и другие, предназначен для решения очень широкого круга задач - от создания простых документов и отчетов до полной автоматизации документооборота организации с использованием систем управления базами данных и создания сайтов в сети Интернет.

При этом каждый пользователь имеет возможность настроить любое приложение MS Office для оптимального выполнения своих специфических задач, автоматизировать рутинную повторяющуюся работу, а также создать собственные нестандартные процедуры и функции и разработать довольно сложные программы, работающие в интегрированной среде MS Office.

Эти возможности реализуются, как правило, путем создания программ на встроенном объектно - ориентированном языке Visual Basic for Applications (VBA). Важнейшим достоинством VBA является возможность объединять любые приложения Office для решения, практически, любых задач по обработке информации. VBA позволяет работать с MS Office, как с некоторым конструктором: в распоряжении разработчика VBA-приложения большое количество объектов и коллекций.

Основной единицей программного кода на языке VBA является *макрос*, который представляет собой надлежащим образом оформленную последовательность команд, способных выполнить определенные действия или произвести определенные расчеты. Макросы могут писаться вручную в Редакторе VBA, как обычные процедуры на языке программирования Visual Basic (*процедуры пользователя*), или в автоматическом режиме с помощью макрорекордера (*про-*

цедуры макросов). Различают также *процедуры обработки событий* (подробнее в разделе 9).

Каждый макрос VBA начинается с ключевого слова Sub (от слова Subroutine – процедура), за которым следует имя макроса и пустые круглые скобки. Первую строку кода, содержащую эти данные, называют *строкой объявления* (declaration) макроса. Заканчивается макрос строкой End Sub.

Макросы VBA сохраняются в специальной части основного файла данных (документа Word, книги Excel и др.), называемой *модули* (Modules). Каждый модуль может содержать исходный код (source code) нескольких макросов, а документ Office может содержать несколько модулей, которые объединены общим названием *проект* (Project). В проекте VBA автоматически создает модули для каждого рабочего листа, для всей рабочей книги, а также для каждой *пользовательской формы* (User Form). По назначению модули бывают двух типов: *модули объектов и стандартные*. В окне Project отображается реестр модулей и форм.

В дальнейшем, не ограничивая общности, будем излагать основы VBA- программирования в среде MS Excel.

Отметим, что операционная система Windows воспринимает макросы как элементы управления ActiveX и при загрузке приложений MS Office предупреждает, что макросы могут быть вирусоопасными. Чтобы упростить работу с создаваемыми макросами, в учебных целях рекомендуется установить средний уровень безопасности макросов через меню Excel: **Сервис | Параметры | Безопасность | Безопасность макросов | Средняя.**

2. Основные операторы и функции VBA

Каждый оператор VBA начинается с новой строки. Если возникла необходимость разместить на одной строке несколько операторов (например, в целях лучшей обозримости кода макроса), то они отделяются друг от друга в этой строке двоеточием.

Перенос длинной строки можно осуществить, добавив в конце строки символы (пробел)+(знак подчеркивания _).

2.1. Оператор присваивания

<Переменная> = <Выражение>

Заданное или вычисляемое в правой части оператора выражение присваивается переменной левой части, «стирая» ее предыдущее значение. Каждое хранимое значение имеет в компьютере физический адрес памяти, которая в данный момент его содержит, и имя переменной, которая им обладает (ссылается на этот адрес).

2.2. Описание типов переменных

Dim <Имя переменной> As <Тип переменной>

Часто используемые типы данных: Integer – целый, Single – вещественный, String - символьный, Boolean – логический. В VBA имеется универсальный тип данных Variant, который подразумевается по умолчанию.

2.3. Условный оператор

If <Условие> Then <Действия1> Else <Действия2> End If

Если Условие истинно, то выполняются Действия1, иначе (если Условие ложно) выполняются Действия2.

Замечание. Условные операторы, как и операторы циклов, могут быть вложенными. Вместо вложенных условных операторов можно использовать оператор множественного ветвления Select Case …

2.4. Цикл с параметром

For <Переменная-счетчик> =<Нач. знач.> To <Кон. знач.> Step <Приращ.>
<Тело цикла>
Next

Эти циклы используются, когда число повторений известно или может быть вычислено заранее. По умолчанию Приращение=1.

2.5. Цикл с предусловием

While <Условие>   DoWhile <Условие>

<Тело цикла> или
<Тело цикла>
Wend Loop

Тело данного цикла выполняется, пока Условие истинно.

2.6. Цикл с постусловием

Do
<Тело цикла>
Loop Until <Условие>

Данный цикл работает до выполнения Условия, пока оно не верно, т.е. здесь истинность Условия означает выход из цикла. Оператор используется в задачах, когда необходимо, чтобы тело цикла хотя бы один раз отработало.

2.7. Досрочный выход из цикла

Exit For – в циклах, начинающихся с For,
Exit Do – в циклах, начинающихся с Do.

2.8. Ввод с экрана

a = InputBox(“приглашение к вводу”)

2.9. Вывод в специальное окно экрана

MsgBox(x)

При склеивании строк используется знак & (амперсанд).

2.10. Обмен данными с ячейками Excel

Cells(i, j)

где i – номер строки Excel, j – номер столбца

В данном разделе приведены только основные операторы VBA и их синтаксис. Более подробную информацию можно получить в [1, 2] или по справке F1 в Редакторе VBA.

3. Возможности редактора VBA

Редактор запускается из меню MS Excel **Сервис | Макрос | Редактор Visual Basic** или при нажатии клавиш **Alt+F11** (к сожалению, в большинстве русифицированных версий MS Office Редактор Visual Basic не русифицирован). Текст макроса вводится и отображается в окне **Code**. Чтобы вывести на экран окно **Code** (если его нет), нужно выбрать **View | Code** или нажать клавишу **F7**.

Новый стандартный модуль для записи макросов можно добавить через меню **Insert | Module.**

Редактор VBA содержит ряд возможностей, помогающих в написании процедур:

- после ввода первой строки объявления автоматически добавляется последняя строка End Sub;

- при вводе имени встроенной процедуры или функции появляется подсказка Auto Quick Info – всплывающее окно с информацией об аргументах этой процедуры или функции, причем аргумент, значение которого вы должны ввести, выделяется полужирным шрифтом;

- при нажатии клавиши F1 на выделенном ключевом слове или имени оператора вызывается соответствующая справочная информация, включая примеры использования;
- редактор автоматически выделяет синим цветом все ключевые слова операторов VBA, зеленым – комментарии, а красным – синтаксические ошибки.

Возврат из Редактора VBA в Excel осуществляется либо через меню **File | Close and Return to Microsoft Excel**, либо при помощи комбинации клавиш **Alt+Q**.

4. Создание простейшего макроса

Создадим макрос, при выполнении которого, в зависимости от времени суток, на экран выводится приветствие «Доброе утро!» - с 6-00 до 10-00, «Добрый день!» - с 11-00 до 17-00, «Добрый вечер!» - с 18-00 до 21-00, «Спокойной ночи!» - в остальное время.

Для этого запустим MS Excel, выберем **Сервис | Макрос | Редактор Visual Basic** и в окне **Code** введем текст (исходный код) макроса, который назван нами как **GoodTime** (впрочем, имена процедур, функций и переменных могут быть и русские, как, например, в разделе 7):

Книга1.xls - Лист1 (Code)

(General) GoodTime

```
Sub GoodTime()
Dim N As Integer
N = Hour(Time())
Select Case Number
Case 6 To 10
    MsgBox ("        Доброе утро!")
Case 11 To 17
    MsgBox ("        Добрый день!")
Case 18 To 21
    MsgBox ("        Добрый вечер!")
Case Else
    MsgBox ("        Спокойной ночи!")
End Select
End Sub
```

Сделаем некоторые пояснения к коду:

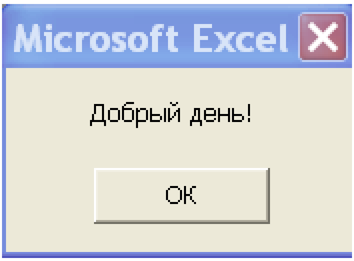
- функция **Time()** возвращает системное время компьютера, а функция **Hour()** – целое число, содержащее часы как часть времени. Это значение и присваивается переменной **N**, определенной оператором **Dim** как переменной целого типа (Integer);

- выбор соответствующего сообщения осуществляется с помощью оператора условного перехода **Select Case**, который используются с четырьмя операторами **Case**, проверяющими условие на текущее значение переменной **N** (напомним, что подробный синтаксис оператора и примеры его использования можно получить по справке, нажав клавишу F1);

- вывод строки сообщения в диалоговое окно на экране осуществляется процедурой **MsgBox(…)**;

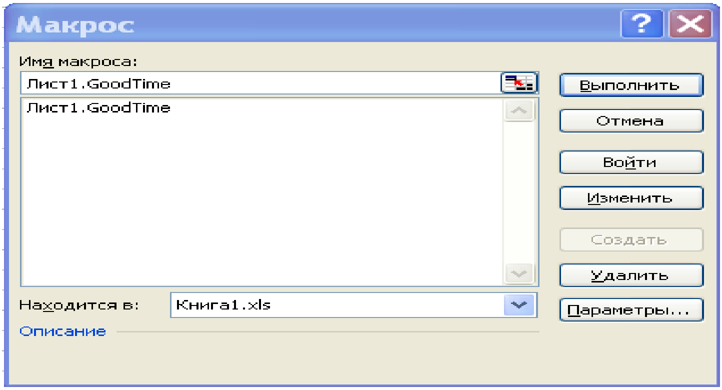
- код макроса записан в модуле **Лист1**.

Контрольный запуск макроса можно выполнить, не выходя из редактора – выберем **Run | Run Sub/UserForm**. Результатом работы макроса будет выдача на экран диалогового окна (запуск был осуществлен в 17:07)



Непосредственно из Excel макрос можно запускать из **Сервис | Макрос | Макросы.** В появившемся диалоговом окне выбираем макрос (его имя будет **Лист1.GoodTime**, где Лист1 – имя модуля) и нажимаем кнопку Выполнить.

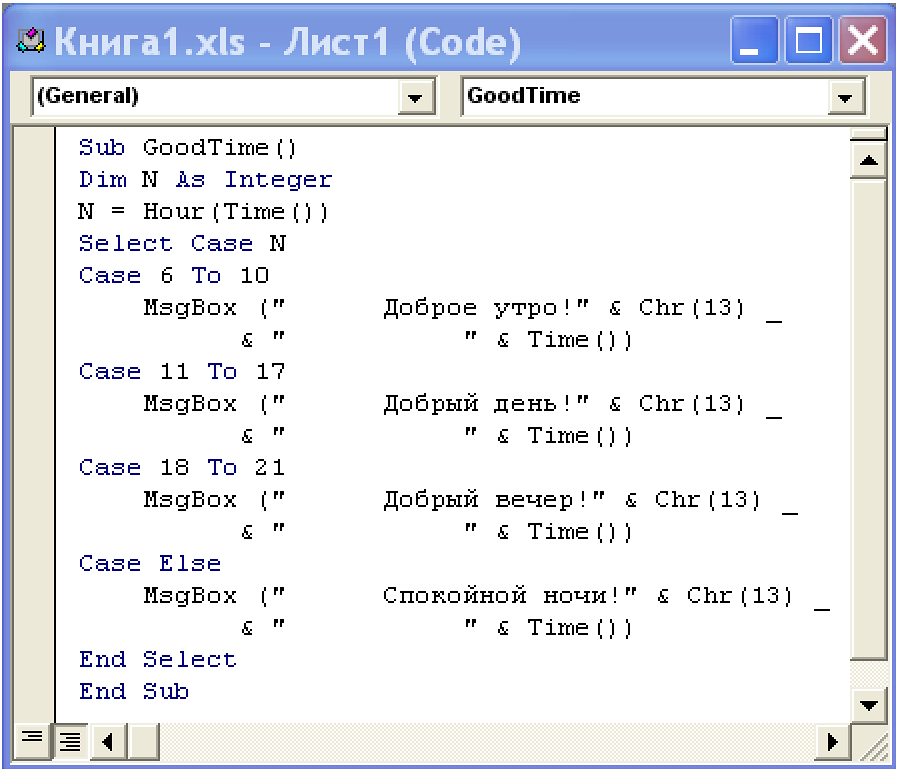
Замечание: Диалоговое окно Макрос перечисляет все макросы, сохраненные в любых рабочих книгах, открытых в данный момент.



5. Редактирование макроса

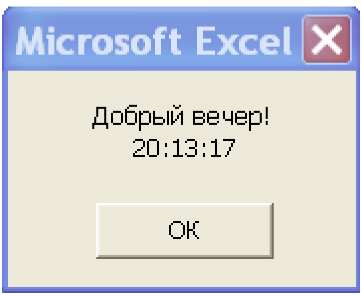
Требуется изменить код ранее созданного макроса **GoodTime**, таким образом, что наряду с приветствием в окне сообщения выводилось также системное время компьютера. Для этого загрузим Excel- файл Книга1.xls, выберем **Сервис | Макрос | Макросы** , в диалоговом окне выберем макрос **Лист1.GoodTime** и нажмем кнопку Изменить.

Расширим выводимые строки в вызовах процедуры вывода MsgBox, используя оператор **&** конкатенации («склеивания») строк, символ возврата каретки Chr(13) и системное время компьютера, отображаемое функцией Time() :



<u>Замечание</u>: как отмечалось в разделе 2, перенос текста оператора на другую строку осуществляется вводом символов (пробел)+(знак подчеркивания _).

Результатом работы измененного макроса будет выдача на экран окна с сообщением:



5.1. Упражнение

Создайте макрос, при выполнении которого компьютер выдает соответствующее сообщение в ответ на один из запросов пользователя с экрана: «Время ?», «Дата ?» или «День недели ?».

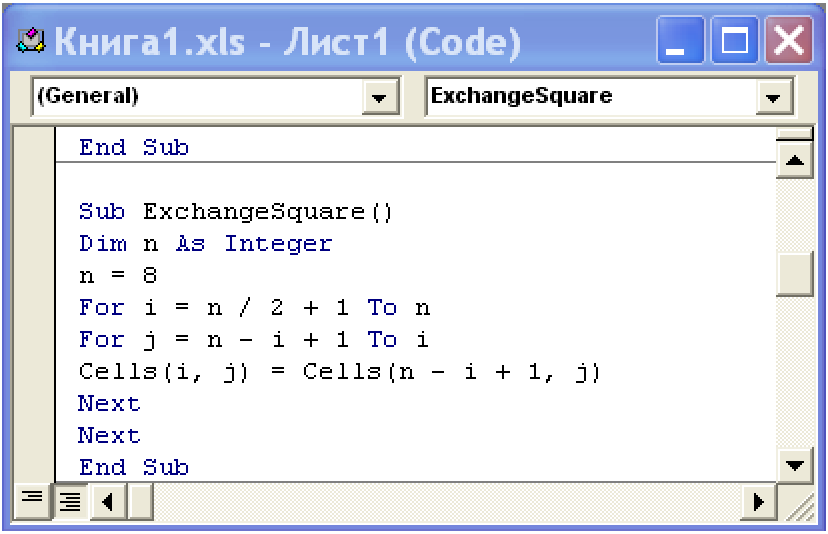
Указание: используйте функции Time, Date, Weekday, WeekdayName.

6. Пример макроса по обработке диапазона ячеек

На листе Excel в диапазоне A1:H8 ячейки верхнего треугольника заполнен некоторым символом так, как показано на рисунке. Требуется зеркально отобразить этот треугольник на нижние строки диапазона.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥
2		♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	
3			♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥		
4				♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥			
5								
6								
7								
8								

Текст подготовленного макроса, названного нами ExchangeSquare(), представлен ниже. Он записан в том же модуле **Лист1**, что и наш первый макрос GoodTime(). Разделительную черту между макросами редактор ставит сам – ее видно вверху окна.



В VBA ячейки активного листа Excel имеют имена Cells(i, j), где i – номер строки, j – номер столбца. С помощью вложенных циклов For и оператора присваивания осуществляется переписывания 4-ой строки в 5-ую, 3-ей в 6-ую и т.д. После выполнения макроса диапазон ячеек будет иметь вид:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥
2		♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	
3			♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥		
4				♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥			
5				♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥			
6			♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥		
7		♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	
8	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥	♥♥♥♥♥♥♥

Заметим, что при отображении ячеек при помощи макроса Exchange Square() фон ячеек нижних строк не изменился. Вернемся к этому вопросу позже (раздел 10).

6.1. Упражнение

На листе Excel подготовьте матрицу вещественных чисел размером 7x7. Создайте макрос, который бы менял местами два любых столбца матрицы.

Задание

Определить строку матрицы C, длина которой (корень квадратный из суммы квадратов ее элементов) минимальна,

если $C = A^2 - 3A$, где A - матрица размерности 5×5, элементы которой определяется по формуле

$$A_{ij} = \begin{cases} 5 - i - j, если\ \ i = j \\ i - j, если\ \ i \neq j \end{cases}.$$

Вывести на печать длину этой строки и ее номер.

Вначале программы описываются переменные, которые в ней используются

```
Dim A(1 To 5, 1 To 5) As Single
Dim B(1 To 5, 1 To 5) As Single
Dim C(1 To 5, 1 To 5) As Single
Dim d(1 To 5) As Single
Dim i As Integer, j As Integer, k As Integer
```

Далее, используя оператор цикло, определяются элементы матрицы A

```
For i = 1 To 5 Step 1
For j = 1 To 5 Step 1
If i = j Then A(i, j) = 5 - i - j Else A(i, j) = i - j
Next
Next
```

После этого, также используя оператор цикла, вычисляется матрица B, являющаяся квадратом матрицы A

```
For i = 1 To 5 Step 1
For j = 1 To 5 Step 1
For k = 1 To 5 Step 1
B(i, j) = B(i, j) + A(i, k) * A(k, j)
Next
Next
Next
```

Затем определяются элементы матрицы C

```
For i = 1 To 5 Step 1
For j = 1 To 5 Step 1
C(i, j) = 1 * B(i, j) - 3 * A(i, j)
Next
Next
```

После чего вычисляются квадраты длинны каждой строки, которые заносятся в соответствующие компоненты вектора d

```
For i = 1 To 5 Step 1
For j = 1 To 5 Step 1
d(i) = d(i) + C(i, j) ^ 2
Next
Next
```

Далее записываем значение длины первой строки в NE, а в

NN номер этой строки

```
NE = Sqr(d(1))
NN = 1
```

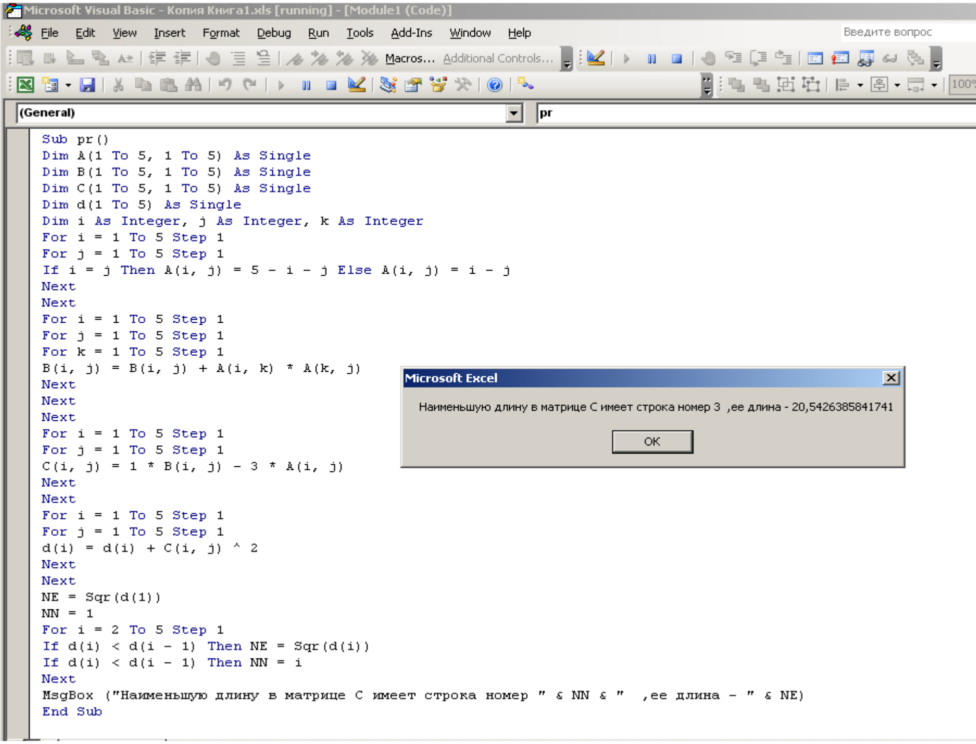
Затем поочередно сравниваются значения квадратов длин остальных строк , выбирается наименьший, его номер и длина заносятся в переменные NN и NE

```
For i = 2 To 5 Step 1
If d(i) < d(i - 1) Then NE = Sqr(d(i))
If d(i) < d(i - 1) Then NN = i
Next
```

В завершении результаты вычислений выводятся на экран

```
MsgBox ("Наименьшую длину в матрице C имеет строка номер " & NN & "
```

Окончательно программа принимает следующий вид




```
Sub pr()
Dim A(1 To 5, 1 To 5) As Single
Dim B(1 To 5, 1 To 5) As Single
Dim C(1 To 5, 1 To 5) As Single
Dim d(1 To 5) As Single
Dim i As Integer, j As Integer, k As Integer
For i = 1 To 5 Step 1
For j = 1 To 5 Step 1
If i = j Then A(i, j) = 5 - i - j Else A(i, j) = i - j
Next
Next
For i = 1 To 5 Step 1
For j = 1 To 5 Step 1
For k = 1 To 5 Step 1
B(i, j) = B(i, j) + A(i, k) * A(k, j)
Next
Next
Next
For i = 1 To 5 Step 1
For j = 1 To 5 Step 1
C(i, j) = 1 * B(i, j) - 3 * A(i, j)
Next
Next
For i = 1 To 5 Step 1
For j = 1 To 5 Step 1
d(i) = d(i) + C(i, j) ^ 2
Next
Next
NE = Sqr(d(1))
NN = 1
For i = 2 To 5 Step 1
If d(i) < d(i - 1) Then NE = Sqr(d(i))
If d(i) < d(i - 1) Then NN = i
Next
MsgBox ("Наименьшую длину в матрице С имеет строка номер " & NN & "  ,ее длина - " & NE)
End Sub
```

Расчет параметров СМО в неустановившемся режиме

Рассмотрим работу СМО с отказами, состоящую из 2 каналов обслуживания, которая обслуживает поток заявок с интенсивностью ***a*=3** при интенсивность обслуживания заявок ***b*=2.** Работа данной смо описывается системой дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0}{dt} = -3P_0 + 2P_1 \\ \dfrac{dP_1}{dt} = 3P_0 + 5P_1 + 4P_1 \\ \dfrac{dP_2}{dt} = 3P_1 - 4P_2 \end{cases}$$

$$P_0(0) = 1, P_1(0) = 0, P_2(0) = 0$$

.

Учитывая, что неизвестные функции этой системы связаны соотношением

$P_0 + P_1 + P_2 = 1$, можно выразим одну из них через две другие и исключить из системы, получив систему дифференциальных уравнений второго порядка. Если, например, исключить неизвестное P_2, то получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0}{dt} = -3P_0 + 2P_1 \\ \dfrac{dP_1}{dt} = -P_0 - 9P_1 + 4 \end{cases} \quad P_0(0) = 1, P_1(0) = 0$$

, при этом $P_2 = 1 - P_0 - P_1$

Численные методы решения дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots x_m) \\ \dot{x}_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots x_m) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots x_m) \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_3(0) = x_{30} \end{matrix}$$

Пусть исходная задача, представленная в виде приведенной выше системы ОДУ, решается на временном отрезке [0,T] . Введем на указанном отрезке равномерную сетку с шагом

Δt>0, то есть множество узлов $t_k = \Delta t \cdot k$,

$k = 0,1,2,\dots, N$. Тогда $\Delta t = T/N$.

Численным решением приведенной задачи называют таблицу $\{t_k, \bar{x}_k : k = 0,1,2,\dots, N\}$, полученную с помощью численного метода.

Пусть $\bar{v}(t)$ есть точное решение данной системы, а $\bar{x}_k = \bar{x}(t_k)$ ее при-ближенное решение, которое является сеточной функцией, то есть функцией определенной в узлах сетки.

Говорят, что численный метод сходится в точке $t = t_k$, если $\left\| \bar{x}_k - \bar{v}(t_k) \right\| \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

То есть при $\Delta t \to 0$ значения полученного решения должны стремиться к значениям точного решения, вычисленного в узлах сетки.

Рассмотрим некоторые методы численного решения дифференциальных уравнений

Явный метод Эйлера

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$dx/dt = \varphi(t, x) \;, \quad x(0) = x_0 \;.$$

В данном уравнении производная неизвестной функции dx/dt приближенно заменяется разностным отношением $\dfrac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t}$, а уравнение заменяется разностным уравнением

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} = \varphi(t_k, x_k) \;.$$

После этого легко получить расчетную формулу метода Эйлера

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t \cdot \varphi(t_k, x_k) \;,$$

$$k = 0,1,2,\ldots, N \;.$$

Методы Рунге- Кутта

Получившие широкое распространение методы Рунге-Кутта отличаются от разностных методов тем, что в них приходиться вычислять значения правых частей дифференциальных уравнений не только в узловых точках, но и в некоторых промежуточных. Приведем некоторые расчетные формулы, используемые при реализации этих методов

1. Формулы метода Рунге-Кутта третьего порядка. Рассмотрим то же уравнение.

$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{6}K_1 + \frac{2}{3}K_2 + \frac{1}{6}K_3 \;,$$

$$K_1 = \Delta t \cdot \varphi(t_k, x_k),$$

$$K_2 = \Delta t \cdot \varphi(t_k + \Delta t/2, x_k + K_1/2),$$

$$K_3 = \Delta t \cdot \varphi(t_k + \Delta t, x_k - K_1 + K_2/2).$$

2.Формулы Рунге-Кутта четвертого порядка для решения системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z) \\ z' = g(x_1, y, z) \end{cases} \qquad \begin{matrix} y(0) = y_0 \\ z(0) = z_0 \end{matrix}$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}K_1 + \frac{1}{3}K_2 + \frac{1}{3}K_3 + \frac{1}{6}K_4,$$

$$z_{k+1} = z_k + \frac{1}{6}M_1 + \frac{1}{3}M_2 + \frac{1}{3}M_3 + \frac{1}{6}M_4,$$

$$K_1 = \Delta x \cdot f(x_k, y_k, z_k),$$

$$M_1 = \Delta x \cdot g(x_k, y_k, z_k),$$

$$K_2 = \Delta x \cdot f(x_k + \Delta x/2, y_k + K_1/2, z_k + M_1/2),$$

$$M_2 = \Delta x \cdot g(x_k + \Delta x/2, y_k + K_1/2, z_k + M_1/2),$$

$$K_3 = \Delta x \cdot f(x_k + \Delta x/2, y_k + K_2/2, z_k + M_2/2),$$

$$M_3 = \Delta x \cdot g(x_k + \Delta x/2, y_k + K_2/2, z_k + M_2/2),$$

$$K_4 = \Delta x \cdot f(x_k + \Delta x, y_k + K_3, z_k + M_3),$$

$$M_4 = \Delta x \cdot g(x_k + \Delta x, y_k + K_3, z_k + M_3).$$

Последнюю формулу используем для решения рассматриваемой системы дифференциальных уравнений

В нашем случае $x = t$, $y = P_0$, $z = P_1$,

$y(0) = 1$, $z(0) = 0$,

$f(x, y, z) = -3y + 2z$, $g(x, y, z) = -y - 9z + 4$.

Кроме того, обозначим *w=P2*

Программа решения приведенной выше системы дифференциальных уравнений имеет вид:

Sub CMO()

Вначале программы описываются переменные, которые в ней используются

Dim t(1 To 55)
Dim y(1 To 55)
Dim z(1 To 55)
Dim w(1 To 55)
Dim rk(1 To 55)
Dim vo(1 To 55)

Вводится значения шага

dt = 0.05

Вводятся начальные значения независимой переменной t и неизвестных функций

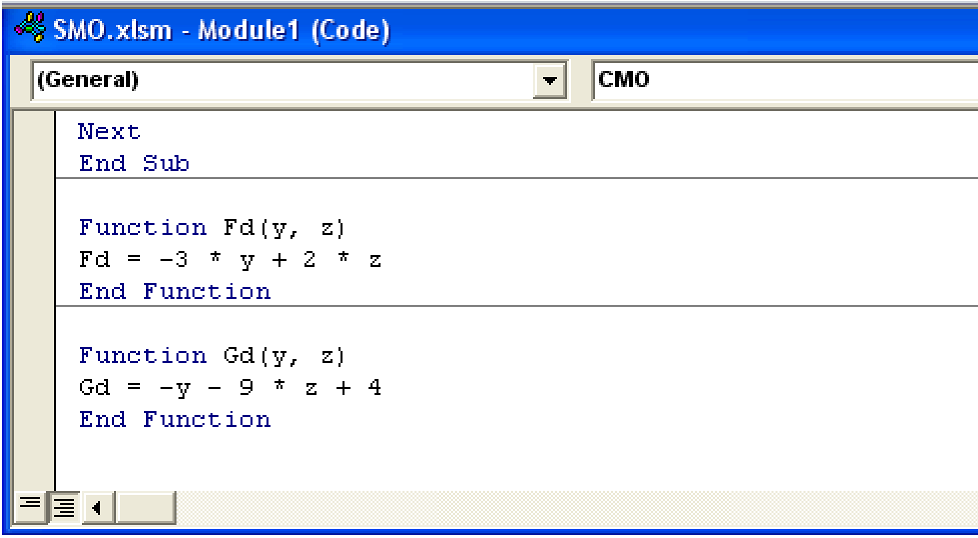
t(1) = 0

y(1) = 1
z(1) = 0
w(1) = 0
rk(1) = 0
vo(1) = 1
Вычисляются значения неизвестных функций в соответствии с формулой метода Рунге-Кутта
For i = 1 To 54
t(i + 1) = t(i) + dt
K1 = Fd(y(i), z(i)) * dt
M1 = Gd(y(i), z(i)) * dt
K2 = Fd(y(i) + K1 / 2, z(i) + M1 / 2) * dt
M2 = Gd(y(i) + K1 / 2, z(i) + M1 / 2) * dt
K3 = Fd(y(i) + K2 / 2, z(i) + M2 / 2) * dt
M3 = Gd(y(i) + K2 / 2, z(i) + M2 / 2) * dt
K4 = Fd(y(i) + K3, z(i) + M3) * dt
M4 = Gd(y(i) + K3, z(i) + M3) * dt
y(i + 1) = y(i) + (K1 + K2 + K3 + K4) / 6
z(i + 1) = z(i) + (M1 + M2 + M3 + M4) / 6
w(i + 1) = 1 - y(i + 1) - z(i + 1)
Вычисляются значения среднего числа занятых каналов rk и вероятность обслуживания vo
rk(i + 1) = z(i + 1) + 2 * w(i + 1)
vo(i + 1) = 1 - w(i + 1)
Полученные результаты выводятся в таблицу Excel
Cells(1, i) = t(i)
Cells(2, i) = y(i)
Cells(3, i) = z(i)
Cells(4, i) = w(i)
Cells(5, i + 1) = rk(i)
Cells(6, i + 1) = vo(i)
Next
End Sub
Подпрограмма вычисления функции
Function Fd(y, z)
Fd = -3 * y + 2 * z
End Function

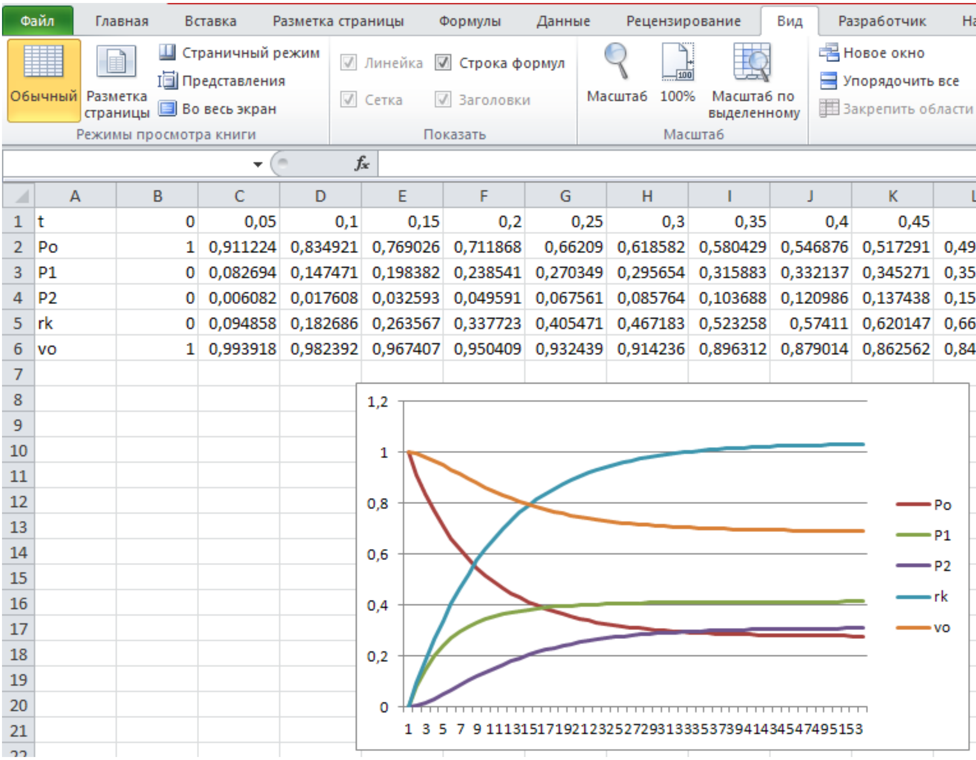
Подпрограмма вычисления функции

```
Function Gd(y, z)
Gd = -y - 9 * z + 4
End Function
```

```
Sub CMO()
Dim t(1 To 55)
Dim y(1 To 55)
Dim z(1 To 55)
Dim w(1 To 55)
Dim rk(1 To 55)
Dim vo(1 To 55)
dt = 0.05
t(1) = 0
y(1) = 1
z(1) = 0
w(1) = 0
rk(1) = 0
vo(1) = 1
For i = 1 To 54
t(i + 1) = t(i) + dt
K1 = Fd(y(i), z(i)) * dt
M1 = Gd(y(i), z(i)) * dt
K2 = Fd(y(i) + K1 / 2, z(i) + M1 / 2) * dt
M2 = Gd(y(i) + K1 / 2, z(i) + M1 / 2) * dt
K3 = Fd(y(i) + K2 / 2, z(i) + M2 / 2) * dt
M3 = Gd(y(i) + K2 / 2, z(i) + M2 / 2) * dt
K4 = Fd(y(i) + K3, z(i) + M3) * dt
M4 = Gd(y(i) + K3, z(i) + M3) * dt
y(i + 1) = y(i) + (K1 + K2 + K3 + K4) / 6
z(i + 1) = z(i) + (M1 + M2 + M3 + M4) / 6
w(i + 1) = 1 - y(i + 1) - z(i + 1)
rk(i + 1) = z(i + 1) + 2 * w(i + 1)
vo(i + 1) = 1 - w(i + 1)
Cells(1, i + 1) = t(i)
Cells(2, i + 1) = y(i)
Cells(3, i + 1) = z(i)
Cells(4, i + 1) = w(i)
Cells(5, i + 1) = rk(i)
Cells(6, i + 1) = vo(i)
Next
End Sub
```



Результаты вычислений



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	t	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	
2	Po	1	0,911224	0,834921	0,769026	0,711868	0,66209	0,618582	0,580429	0,546876	0,517291	0,49
3	P1	0	0,082694	0,147471	0,198382	0,238541	0,270349	0,295654	0,315883	0,332137	0,345271	0,35
4	P2	0	0,006082	0,017608	0,032593	0,049591	0,067561	0,085764	0,103688	0,120986	0,137438	0,15
5	rk	0	0,094858	0,182686	0,263567	0,337723	0,405471	0,467183	0,523258	0,57411	0,620147	0,66
6	vo	1	0,993918	0,982392	0,967407	0,950409	0,932439	0,914236	0,896312	0,879014	0,862562	0,84

Индивидуальные задания

Рассчитать изменение во времени среднего числа занятых каналов rk и веро-ятность обслуживания заявки vo СМО с отказами, состоящей из двух каналов обслуживания, работа которой описывается системой обыкновенных дифференци-альных уравнений (ОДУ). Все исходные данные приведены в таблице ниже.

Вари-ант	Система ОДУ	Значения пара-метров

1	$\begin{cases} P_0' = -(a+b)P_0 - bP_2 + b \\ P_2' = -aP_0 - (a+2b)P_2 + a \end{cases}$ $P_1 = 1 - P_0 - P_2, P_0(0) = 1, P_2(0) = 0$	$a = 3, b = 3$
2	$\begin{cases} P_0' = -(a+b)P_0 - bP_2 + b \\ P_2' = -aP_0 - (a+2b)P_2 + a \end{cases}$ $P_1 = 1 - P_0 - P_2, P_0(0) = 1, P_2(0) = 0$	$a = 4, b = 5$
3	$\begin{cases} P_1' = -(2a+b)P_1 + (2b-a)P_2 + a \\ P_2' = aP_1 - 2bP_2 \end{cases}$ $P_0 = 1 - P_1 - P_2, P_1(0) = 0, P_2(0) = 0$	$a = 3, b = 3$
4	$\begin{cases} P_1' = -(2a+b)P_1 + (2b-a)P_2 + a \\ P_2' = aP_1 - 2bP_2 \end{cases}$ $P_0 = 1 - P_1 - P_2, P_1(0) = 0, P_2(0) = 0$	$a = 5, b = 4$
5	$\begin{cases} P_1' = -(2a+b)P_1 + (2b-a)P_2 + a \\ P_2' = aP_1 - 2bP_2 \end{cases}$ $P_0 = 1 - P_1 - P_2, P_1(0) = 0, P_2(0) = 0$	$a = 3, b = 4$
6	$\begin{cases} P_1' = -(2a+b)P_1 + (2b-a)P_2 + a \\ P_2' = aP_1 - 2bP_2 \end{cases}$ $P_0 = 1 - P_1 - P_2, P_1(0) = 0, P_2(0) = 0$	$a = 4, b = 5$
7	$\begin{cases} P_1' = -(2a+b)P_1 + (2b-a)P_2 + a \\ P_2' = aP_1 - 2bP_2 \end{cases}$ $P_0 = 1 - P_1 - P_2, P_1(0) = 0, P_2(0) = 0$	$a = 5, b = 5$

8	$\begin{cases} P_0' = -(a+b)P_0 - bP_2 + b \\ P_2' = -aP_0 - (a+2b)P_2 + a \end{cases}$ $P_1 = 1 - P_0 - P_2, P_0(0) = 1, P_2(0) = 0$	$a = 5, b = 3$
9	$\begin{cases} P_0' = -(a+b)P_0 - bP_2 + b \\ P_2' = -aP_0 - (a+2b)P_2 + a \end{cases}$ $P_1 = 1 - P_0 - P_2, P_0(0) = 1, P_2(0) = 0$	$a = 5, b = 4$
10	$\begin{cases} P_0' = -(a+b)P_0 - bP_2 + b \\ P_2' = -aP_0 - (a+2b)P_2 + a \end{cases}$ $P_1 = 1 - P_0 - P_2, P_0(0) = 1, P_2(0) = 0$	$a = 3, b = 2$

Лабораторная работа №3 «Управление запасами»

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Для обеспечения непрерывного и эффективного функционирования практически любой организации необходимо создание запасов, например, в производственном процессе, торговле, медицинском обслуживании и т.д. В зависимости от ситуации под запасами могут подразумеваться: готовая продукция, сырье, полуфабрикаты, станки, инструмент, транспортные средства, наличные деньги и др. Неверный расчет необходимых запасов может привести как к незначительному ущербу (потеря части дохода от дефицита товара), так и к катастрофическим последствиям (при ошибочной оценке запасов топлива на самолете).

К экономическому ущербу приводит как чрезмерное наличие запасов, так и их недостаточность. Так, если некоторая компания имеет товарные запасы, то капитал, овеществленный в этих товарах, замораживается. Этот капитал, который нельзя использовать, представляет для компании потерянную стоимость в форме невыплаченных процентов или неиспользуемых возможностей

инвестирования. Кроме того, запасы, особенно скоропортящиеся продукты, требуют создания специальных условий для хранения. Для этого необходимо выделить определенные площади, нанять персонал, застраховать запасы. Все это влечет определенные издержки. С другой стороны, чем меньше уровень запаса, тем больше вероятность возникновения дефицита, что может принести убытки вследствие потери клиентов, остановки производственного процесса и т.д. Кроме того, при малом уровне запасов приходится часто постав-

лять новые партии товара, что приводит к большим затратам на доставку заказов. Отсюда следует важность разработки и использования математических моделей, позволяющих найти оптимальный уровень запасов, минимизирующий сумму различных видов издержек.

Основные понятия и определения.

Любая модель управления запасами (УЗ) в конечном счете, должна давать ответ на два вопроса:

1) Какое количество продукции заказывать?

2) Когда заказывать?

Ответ на первый вопрос дается с помощью понятия размера заказа, т.е. количества ресурсов, которое необходимо поставлять для пополнения запасов.
Ответ на второй вопрос связан с понятием точки заказа, т.е. критический уровень запасов, при котором следует подавать заказ на поставку очередной партии ресурса.
Большое значение имеют различные виды затрат на УЗ. Затраты на приобретение ресурса являются важным фактором в тех случаях, когда действует система оптовых скидок, зависящих от размера заказа. Затраты на осуществление заказа включают в себя затраты на оформление заказа и затраты на доставку заказа. При частой подаче заказов на мелкие партии товара сумма этих затрат возрастает по сравнению со случаем более редкой подачи заказов на крупные партии. Если запас пополняется не готовым ресурсом со склада, а производится, то затраты на осуществление заказа идут на организацию производственного процесса по выпуску партии ресурса. В этом слу-
чае затраты на приобретение ресурса эквивалентны издержкам производства ресурса.
Затраты на хранение запаса представляют собой расходы на физическое содержание запаса на складе и возрастают с увеличением уровня запасов.
Потери от дефицита представляют собой расходы, обусловленные отсутствием запаса необходимой продукции. Они могут быть вызваны более высокой платой за срочную доставку товара, ухудшением репутации у потребителя, потенциальной потерей прибыли.
Модель УЗ не обязательно должна включать все перечисленные виды затрат, т.к. некоторые из них могут быть незначительными или отсутствовать.

Основная модель управления запасами

Существует множество моделей УЗ той или иной степени сложности.
Наиболее простой является так называемая основная модель управления запасами (модель Уилсона, система с фиксированным размером заказа). Эта модель несколько оторвана от действительности, но является полезной для понимания существа предмета, проблем, основных закономерностей и подходов в области УЗ.
1. Входные параметры:
1)ν– интенсивность потребления запаса, [ед. товара / ед. времени];
2) s – затраты на хранение запаса, [ден. ед. / ед. товара . ед. времени];
3) K – затраты на осуществление заказа, [ден. ед.].
103
2. Выходные параметры:
1) Q – размер заказа, [ед. тов.];τ
2) τ – период поставки, [ед. времени];
3) L – общие затраты на управление запасами в единицу времени, [ден.ед./ ед. времени].

Допущения модели Уилсона

1. Интенсивность потребления является априорно известной и постоянной величиной .
2. Время поставки заказа T является известной и постоянной величиной.
3. Каждый заказ поставляется в виде одной партии.
4. Затраты на осуществление заказа K не зависят от размера заказа.

5. Отсутствие запаса является недопустимым.

Эта модель наиболее близка к следующим реальным ситуациям:

1) потребление основных продуктов питания, например, хлеба, молока, в санатории (оно в течение смены остается постоянным);
2) использование осветительных ламп в здании;
3) использование канцелярских товаров (бумага, блокноты, карандаши) крупной фирмой;
4) использование в производственном процессе для сборки изделий покупных комплектующих, например, гаек и болтов.

Формулы модели Уилсона

$$Q_W^* = \sqrt{\frac{2Kv}{s}}$$

$$L = K \cdot \frac{v}{Q} + s \cdot \frac{Q}{2}$$

$$h_0 = vT_Д$$

$$\tau = \frac{Q}{v}$$

Пример использования модели Уилсона

Объем продажи некоторого магазина составляет в год 500 упаковок супа в пакетах. Величина спроса равномерно распределяется в течение года. Цена покупки одного пакета равна 2 руб. За доставку заказа владелец магазина должен заплатить 10 руб. Время доставки заказа от поставщика составляет 12 рабочих дней (при 6-дневной рабочей неделе). По оценкам специалистов, издержки хранения составляют 20% среднегодовой стоимости запасов. Необходимо определить:

1) сколько пакетов должен заказывать владелец магазина

для одной поставки;

2) частоту заказов; 3) точку заказа.

Известно, что магазин работает 300 дней в году.

Решение.

Плановым периодом является год, $\nu = 500$ пакетов в год, $K = 10$ рублей, затраты на хранение одной единицы продукции в год составляют 20% от стоимости запаса в одну упаковку, т.е. $s = 0{,}2 \cdot 2 = 0{,}4$ рубля. Тогда

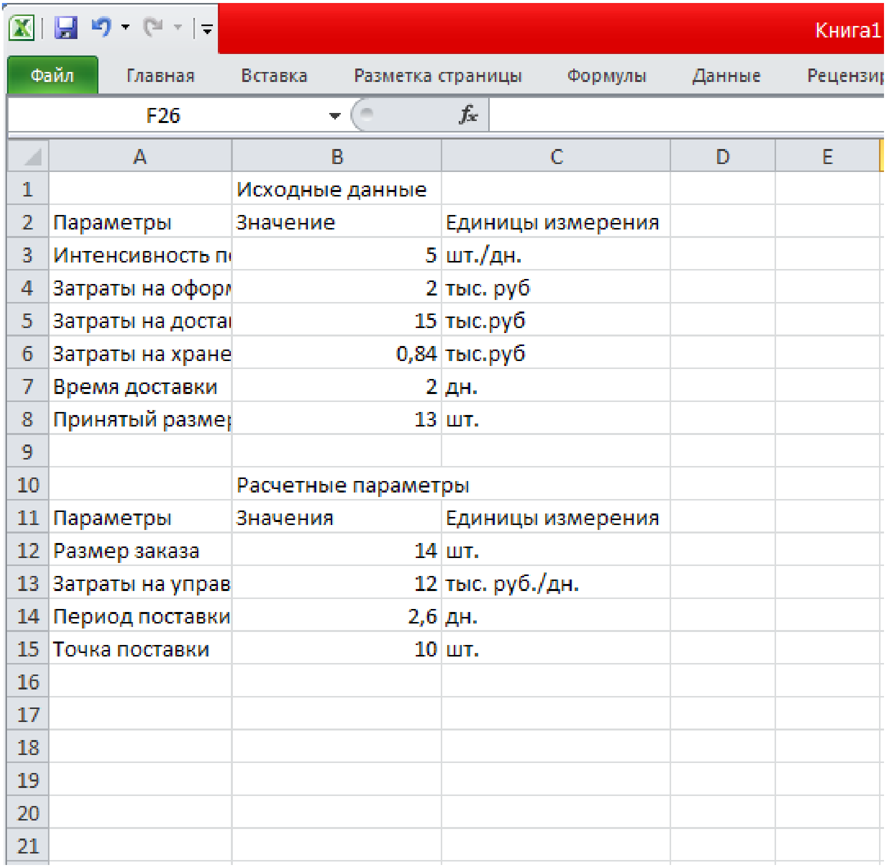
$$Q_W^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 500}{0{,}4}} = 158{,}11 \text{ пакетов.}$$

Поскольку число пакетов должно быть целым, то будем заказывать по 158 пакетов. При таком заказе годовые затраты равны

$$L = K \cdot \frac{\nu}{Q} + s \cdot \frac{Q}{2} = 10 \cdot \frac{500}{158} + 0{,}4 \cdot \frac{158}{2} = 63{,}25 \text{ рублей в год.}$$

Подачу каждого нового заказа владелец магазина должен осуществлять через $\tau = \frac{Q}{\nu} = \frac{158}{500} = 0{,}316$ года. Поскольку известно, что в данном случае год равен 300 рабочих дней, то $\tau = 0{,}316 \cdot 300 = 94{,}8 \approx 95$ рабочих дней. Заказ следует подавать при уровне запаса равном $h_0 = \nu T_Д = \frac{500}{300} \cdot 12 = 20$ пакетам, т.е. эти 20 пакетов будут проданы в течение 12 дней, пока будет доставляться заказ.

	A	B	C
1		Исходные данные	
2	Параметры	Значение	Единицы измерения
3	Интенсивность потребления	5	шт./дн.
4	Затраты на оформление заказа	2	тыс. руб
5	Затраты на доставку заказа	15	тыс.руб
6	Затраты на хранение заказа	0,84	тыс.руб
7	Время доставки	2	дн.
8	Принятый размер заказа	13	шт.
9			
10		Расчетные параметры	
11	Параметры	Значения	Единицы измерения
12	Размер заказа	=ОКРУГЛ(КОРЕНЬ(2*(B4+B5)*B3/B6);0)	шт.
13	Затраты на управление запасами	=ОКРУГЛ((B4+B5)*B3/B8+B6*B8/2;2)	тыс. руб./дн.
14	Период поставки	=ОКРУГЛ(B8/B3;1)	дн.
15	Точка поставки	=ОКРУГЛ(B3*B7;0)	шт.
16			
17			
18			
19			
20			
21			



	A	B	C	D	E
1		Исходные данные			
2	Параметры	Значение	Единицы измерения		
3	Интенсивность п	5	шт./дн.		
4	Затраты на офор	2	тыс. руб		
5	Затраты на доста	15	тыс.руб		
6	Затраты на хране	0,84	тыс.руб		
7	Время доставки	2	дн.		
8	Принятый разме	13	шт.		
9					
10		Расчетные параметры			
11	Параметры	Значения	Единицы измерения		
12	Размер заказа	14	шт.		
13	Затраты на управ	12	тыс. руб./дн.		
14	Период поставки	2,6	дн.		
15	Точка поставки	10	шт.		
16					
17					
18					
19					
20					
21					

Индивидуальное задание

Объем продажи некоторого магазина составляет в год N единиц товара. Величина спроса равномерно распределяется в течение года. Цена покупки одного пакета равна C руб. За доставку заказа владелец магазина должен заплатить D руб. Время доставки заказа от поставщика составляет t рабочих дней (при 6-дневной рабочей неделе). По оценкам специалистов, издержки хранения составляют 20% среднегодовой стоимости запасов. Необходимо определить:

1) сколько единиц товара должен заказывать владелец магазина

для одной поставки;

2) частоту заказов;

3) точку поставки.

Известно, что магазин работает 365 дней в году.

Вариант	N	C	D	t
1	1000	10	7	5
2	1500	15	8	6
3	2000	23	9	5
4	1100	32	5	4
5	2100	24	11	3
6	1700	17	4	5
7	2100	19	5	9
8	3000	26	11	8
9	2300	27	12	7
10	2200	15	15	8

Лабораторная работа №4 Решение задач линейного программирования средствами Mathcad

К задачам линейного программирования относятся задачи оптимального планирования, связанные с отысканием оптимума заданной целевой линейной функции при наличии ограничений в виде линейных уравнений или линейных неравенств.

Необходимым условием постановки задачи линейного программирования являются ограничения на наличие ресурсов, величину спроса, производственную мощность предприятия и другие производственные факторы.

Сущность линейного программирования состоит в нахождении точек наибольшего или наименьшего значения некоторой функции при определенном наборе ограничений, налагаемых на аргументы и образующих ***систему ограничений***, которая имеет, как правило, бесконечное множество решений. Каждая совокупность значений переменных (аргументов ***F***), которые удовлетворяют системе ограничений, называется ***допустимым планом*** задачи линейного программирования. Функция ***F***, максимум или минимум которой определяется, называется ***целевой функцией*** задачи. Допустимый план, на котором достигается максимум или минимум функции ***F***, называется ***оптимальным планом*** задачи.

Система ограничений, определяющая множество планов, диктуется экономическими условиями. Задачей линейного программирования (***ЗЛП***) является выбор из множества допустимых планов наиболее выгодного (оптимального).

В общей постановке задача линейного программирования выглядит следующим образом:

Имеются переменные $\boldsymbol{x = (x_1 , x_2 , \dots x_{n/sub>})}$ и функция этих переменных $\boldsymbol{f(x) = f\,(x_1 , x_2 , \dots x_n)}$, которая носит название ***целевой*** функции. Ставится задача: найти экстремум (максимум или минимум) целевой функции $\boldsymbol{f(x)}$ при условии, что переменные $\boldsymbol{x}$ принадлежат некоторой области $\boldsymbol{G}$.

В зависимости от вида функции $\boldsymbol{f(x)}$ и области $\boldsymbol{G}$ и различают разделы математического программирования: квадратичное программирование, выпуклое программирование, целочисленное программирование и т.д.

Линейное программирование характеризуется тем, что
а) функция $\boldsymbol{f(x)}$ является линейной функцией переменных $\boldsymbol{x_1 , x_2 , \dots x_n}$
б) область $\boldsymbol{G}$ определяется системой ***линейных*** равенств или неравенств.

Известно, что множество системы ограничений и множество решений задачи линейного программирования является выпуклым множеством. Геометрически выпуклость множества **G** означает, что вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и весь отрезок, их соединяющий.

Математическая модель любой задачи линейного программирования включает в себя:

- максимум или минимум целевой функции (критерий оптимальности);
- систему ограничений в форме линейных уравнений и неравенств;
- требование неотрицательности переменных.

Решения, удовлетворяющие системе ограничений и требованиям неотрицательности, называются **допустимыми**, а решения, удовлетворяющие одновременно и требованиям минимизации (максимализации) целевой функции, - **оптимальными**.

Основанием к решению задачи линейного программирования является следующее утверждение:

Если в задаче линейного программирования целевая функция ограничена в допустимой области G, то оптимальное решение задачи находится в угловой точке этой области.

Таким образом, при решении задачи ЛП необходимо вычислить целевую функцию во всех вершинах допустимой области решений и выбрать из них ту, в которой она принимает экстремальное значение.

Транспортная задача

Рассмотрим следующий пример. На предприятиях **A1, A2, A3**, производящих некоторую продукцию, хранится **a1 = 100, a2 = 240, a3 = 120** единиц продукции, соответственно. Имеются потребители **B1, B2** этой продукции. Требуется доставить ее этим потребителям, заказы которых составляют **b1 = 200, b2 = 110** единиц продукции, соответственно. Стоимость перевозки **Ci,j** единицы продукции от i–го поставщика j–ому потребителю указаны в транспортной таблице:

	b1 = 200	b2 = 110
a1 = 100	4	2
a2 = 240	7	5
a3 = 120	3	7

Требуется найти минимальную стоимость перевозок продукции от производителей к потребителям.

Для этого, сверх имеющихся пунктов назначения **B1, B2** введем один, фиктивный, пункт назначения **B3**, которому припишем фиктивную заявку, равную избытку запасов над заявками так чтобы суммы произведенной и потребляемой продукции были одинаковы. Стоимость перевозок из всех пунктов отправления в фиктивный пункт назначения **B3** будем считать равным нулю. В каждую клетку транспортной таблицы внесем переменную **xk**, которая соответствует количеству продукции перевозимой от **i**–го поставщика **j**–ому потребителю:

tr>

Сумма 460	b1 = 200	b2 = 110	b3 = 150
a1 = 100	4 x1	2 x2	0 x3
a2 = 240	7 x4	5 x5	0 x6
a3 = 120	3 x7	7 x8	0 x9

Дальнейшие расчеты выполним с помощью программы MathCAD.

Задаем начальные значения вектора **x** с помощью цикла, где индекс **i** пробегает значения от 1 до 9 (значок двоеточия набирается русской буквой **"Ж", индекс набирается с помощью символа "левая квадратная скобка"**):

$$i := 1..9$$

$$x_i := 10$$

Задаем целевую функцию общей стоимости перевозок:

$$F(x) := 4x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 7x_4 + 5x_5 + 0x_6 + 3x_7 + 7x_8 + 0x_9$$

Далее задаем условия. Знаки отношений (равно, больше или равно) берем на панели **Boolean** (логические).

Задаем условия суммы единиц продукции по строкам:

Given

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100$$

$$x_4 + x_5 + x_6 = 240$$

$$x_7 + x_8 + x_9 = 120$$

;

Задаем условия суммы единиц продукции по столбцам:

$$x_1 + x_4 + x_7 = 200$$

$$x_2 + x_5 + x_8 = 110$$

$$x_3 + x_6 + x_9 = 150$$

Задаем условия неотрицательности количества перевозимых единиц продукции:

$$x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0 \qquad x_3 \ge 0$$

$$x_4 \ge 0 \qquad x_5 \ge 0 \qquad x_6 \ge 0$$

$$x_7 \ge 0 \qquad x_8 \ge 0 \qquad x_9 \ge 0$$

Используя встроенную функцию **Mimimize**, находим минимальные значения **x1...x9**:

$t := \mathrm{Minimize}(F, x)$

$$t = \begin{array}{c|c} & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 100 \\ 3 & 0 \\ 4 & 80 \\ 5 & 10 \\ 6 & 150 \\ 7 & 120 \\ 8 & 0 \\ 9 & 0 \end{array}$$

Таким образом оптимальными являются набор **x1 = 0; x2 = 100; x4 = 80; x5 = 10; x7 = 120; x8 = 0.** Фиктивные **x3, x6, x9** не принимаем во внимание.

При этом минимальная (оптимальная) стоимость перевозок составит:

F(X) = 4*0+2*100+0*0+7*80+5*10+0*150+3*120+7*0+0*0 = 200+560+50+360 = 1170.

Результаты заносим в транспортную таблицу:

Сумма 460	b1 = 200	b2 = 110	b3 = 150
a1 = 100	4 x1 = 0	2 x2 = 100	0 x3 = 0
a2 = 240	7 x4 = 80	5 x5 = 10	0 x6 = 150
a3 = 120	3 x7 = 120	7 x8 = 0	0 x9 = 0

3.5. Решение транспортной задачи матричным методом

При больших размерах матрицы стоимости задачу удобно решить матричным методом. Решим предыдущую задачу таким методом.

Специальной переменной ORIGIN присваиваем значение 1. Значением ORIGIN является номер первого элемента строки или столбца в матрице. По умолчанию ORIGIN = 0. Введем исходные данные число поставщиков **n** и число потребителей **m**.

$$ORIGIN := 1 \quad n := 3 \qquad m := 3$$

Добавим матрицу стоимостей перевозок **c**. Для этого используем компоненты панели матриц. Введем также вектор **a** произведенной продукции поставщиками и вектор **b** потребляемой продукции. Кроме того добавим единичный вектор g, который будет играть вспомогательную роль. С помощью циклов по переменным i, j обнулим матрицу **x**.

$$c := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix} \quad a := \begin{pmatrix} 100 \\ 240 \\ 120 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 200 \\ 110 \\ 150 \end{pmatrix} \quad g := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} i := 1..n \\ j := 1..m \\ x_{i,j} := 0 \end{array}$$

Запишем целевую функцию:

$$f(x) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(c_{i,j} \cdot x_{i,j}\right)$$

Введем ограничения на неизвестные элементы матрицы **x**. Первое условие, где построчно складываются элементы этой матрицы, указывает, что объем вывозимой с предприятия продукции равен запасам этой продукции. Второе условие, где производится умножение транспонированной матрицы **x** на единичный вектор **g**, указывает на то, что сумма потребляемой продукции каждым потребителем равна потребностям этого потребителя. Последнее условие указывает на то, что объемы перевозимой продукции не могут быть отрицательными.

Given

$$x \cdot g = a \qquad x^{T} \cdot g = b \qquad x \geq 0$$

Далее проводим решение задачи с использованием функции Minimize:

$$x := \mathrm{Minimize}(f, x)$$

Получим следующее решение:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 0 \\ 80 & 10 & 150 \\ 120 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad f(x) = 1.17 \times 10^{3}$$

Это решение совпадает с решением, которое получено ранее.

3.6. Задача о назначениях

Имеются **n** рабочих и **n** видов работ. Стоимость **cij** выполнения **i**-ым работником **j**-й работы приведена в таблице, где рабочему соответствует строка, а работе – столбец. Необходимо распределить каждого рабочего на отдельный вид работ так, чтобы суммарная стоимость выполнения всех работ была минимальной.

Пусть **n = 4** и матрица стоимости имеет вид:

	Вид работ 1	Вид работ 2	Вид работ 3	Вид работ 4
Рабочий 1	14	21	14	22
Рабочий 2	12	12	23	31
Рабочий 3	13	17	45	33
Рабочий 4	14	15	75	34

Перейдем в **Mathcad** и введем начальные данные:

$$ORIGIN := 1 \qquad n := 4$$

В нашем случае число рабочих и число видов работ = 4.

С помощью цикла добавим на главную диагональ искомой матрицы **X** единицы. Кроме того введем два единичных вектора **t** и **a**:

$$i := 1..n \quad x_{i,i} := 1 \quad t_i := 1 \quad a_i := 1$$

Выведем матрицу и векторы для визуального контроля:

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Единичный элемент матрицы **X** показывает, что рабочий определенного номера строки назначен на вид работы определенного столбца. Как следует из вида матрицы, в первоначальном распределении рабочих по видам работ 1-й рабочий назначен на 1-й вид, 2-й на 2-й, 3-на 3-й. 4-й на 4-й.

Далее, используя компоненты панели матриц, введем матрицу стоимостей:

$$c := \begin{pmatrix} 14 & 21 & 14 & 22 \\ 12 & 12 & 23 & 31 \\ 13 & 17 & 45 & 33 \\ 14 & 15 & 75 & 34 \end{pmatrix}$$

Следующим шагом является ввод целевой функции суммарной стоимости работ:

$$f(x) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(c_{i,j} \cdot x_{i,j} \right)$$

Теперь введем ограничения:

$$\text{Given}$$

$$x \cdot t = a \qquad x^{T} \cdot t = a \qquad x \geq 0$$

Первое из них означает, что сумма элементов в каждой строке матрицы должна равняться 1. Это означает что один рабочий может быть назначен только на 1 вид работ. Второе ограничение означает, что один вид работы может быть выполнен только одним рабочим. Последнее условие указывает на неотрицательность решения.

Теперь обратимся к функции минимизации и поместим результат в матрицу **X**:

$$x := \text{Minimize}(f, x)$$

Получим следующий результат:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad f(x) = 73$$

Это означает, что наилучшим способом распределения является способ, когда 1-й рабочий будет назначен на 3-й вид работ, 2-й на 2-й, 3-й на 1-й, 4-й на 4-й (единичные элементы матрицы). При этом наименьшая стоимость работ составит 73 единицы.

3.7. Задача о составлении рациона (задача о диете, задача о смесях)

Задача. Имеется два вида продукции **$П_1$** и **$П_2$**, содержащие питательные вещества **S_1, S_2, S_3, S_4** (жиры, белки, углеводы, витамины). Содержание числа единиц питательных веществ в единице каждого вида продукции и необходимый минимум питательных веществ приведены в таблице:

Питательные вещества	Число единиц питательных веществ в единице продукции		Необходимый минимум питательных веществ
	$П_1$	**$П_2$**	
S_1	1	4	10
S_2	3	2	8
S_3	2	1	9
S_4	2	2	11

Стоимость единицы продукции
№b>$П_1$ и **$П_2$** соответственно равна **3** и **4** д. е.

Решение. Обозначим через **x_1** и **x_2** – количество продукции **$П_1$** и **$П_2$**, входящей в дневной рацион. Тогда общая стоимость рациона составит (д.е.)

$$F(x) = 3x_1 + 4x_2.$$

С учетом необходимого минимума питательных веществ составим систему ограничений. Рацион включает **$x_1 + 2x_2$** единиц питательного вещества **S_1**, **$3x_1 + 2x_2$** единиц питательного вещества **S2, (2x1 + x2)** единиц питательного вещества **S3** и **(2x1 + 2x2)** единиц питательного вещества **S4**. Так как содержание питательных веществ **S1, S2, S3, S4** в рационе должно быть не менее **10, 8, 9, 11** единиц, соответственно, то получим систему ограничений неравенств:

$$\begin{gathered} \mathbf{x_1 + 4x_2 \geq 10,} \\ \mathbf{3x_1 + 2x_2 \geq 8,} \\ \mathbf{2x_1 + x_2 \geq 9,} \\ \mathbf{2x_1 + 2x_2 \geq 11.} \end{gathered}$$

Необходимо найти такие $\mathbf{x_1, x_2}$, чтобы целевая функция стоимости приняла минимальное значение $\mathbf{F(x) = 3x_1 + 4x_2 -> min}$.

Решим задачу при помощи Mathcad:

$ORIGIN := 1$

$x_1 := 1 \qquad x_2 := 1 \qquad f(x) := 3x_1 + 4x_2$

Given

$x_1 + 4x_2 \geq 10$

$3x_1 + 2x_2 \geq 8$

$2x_1 + x_2 \geq 9$

$2x_1 + 2x_2 \geq 11$

$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0$

$x := \text{Minimize}(f, x)$

$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 1.5 \end{pmatrix} \qquad f(x) = 18$

Таким образом в дневной рацион должно входить $\mathbf{x_1}$ = **4** и $\mathbf{x_2}$ **= 1.5** единиц продукции. При этом стоимость рациона окажется минимальной и равной **18** д. е.

Ниже приведен матричный метод решения этой задачи:

$$ORIGIN := 1 \qquad N := 2 \qquad i := 1..N \quad x_1 := 1$$

$$v := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad f(x) := \sum_{i=1}^{N} \left(v_i \cdot x_i \right)$$

Given

$$w := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad q := \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} \qquad w \cdot x \geq q \qquad x \geq 0$$

$$x := Minimize(f, x)$$

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 1.5 \end{pmatrix} \qquad f(x) = 18$$

Разберите и этот способ решения задачи.

Индивидуальные задания для решения общей задачи линейного программирования

Ниже приведены задачи линейного программирования, которые необходимо решить с помощью **MathCAD**. .

Вариант 1. Предприятие располагает двумя видами сырья S1 и S2 в количествах 15 и 13 условных единиц и изготавливает из него изделия двух видов П1 и П2. Изготовление единицы изделия П1 требует расхода сырья S1 в 1 усл.ед., S2 в 3 усл.ед., а для производства единицы изделия П2 необходимо сырья S1 – 3 усл.ед., сырья S2 - 1 усл.ед. Известна прибыль от реализации одной единицы продукции каждого вида. Для вида П1 она составляет 2 ден.ед, для вида П2 – 3 ден.ед. Требуется найти оптимальный план производства продукции, реализация которого обеспечит предприятию максимальную прибыль.

Вариант 2. На заводе используется сталь трех марок: А, В, С, запасы которых равны соответственно 10, 16 и 12 ед. Завод выпускает два вида изделий. Для изделия 1 требуется по одной единице стали всех марок. Для изделия 2 требуется 2 единицы стали марки В, одна – марки С и не требуется сталь марки А. От реализации единицы изделия вида 1 завод получает 400 руб. прибыли, а вида 2 – 250 руб. Составить план выпуска продукции, дающий наибольшую прибыль.

Вариант 3. Производитель безалкогольных напитков располагает двумя разливочными машинами А и В по 4 шт. каждой. Машина А спроектирована для пол-литровых бутылок, а машина В – для литровых. Машина А может выпускать до 50 пол-литровых бутылок в 1 мин, а машина В – до 30 литровых бутылок в 1 мин. Каждая из машин работает ежедневно по 6 час, при пятидневной рабочей неделе. Прибыль от продажи одной пол-литровой бутылки составляет 4 цента, а одной литровой бутылки – 10 центов. Недельная продукция не может превосходить 259200 л; рынок за неделю принимает не более 288000 пол-литровых бутылок и не более 180000 литровых бутылок. Сколько бутылок пол-литровых и литровых должна выпускать каждая машина А и В за 1 мин., чтобы максимизировать недельную прибыль производителя от продажи безалкогольных напитков, при имеющихся средствах и условиях.

Вариант 4. На фабрике планируется выпустить продукцию двух артикулов: № 1 и № 2 из одинаковой пряжи на одинаковых станках. Планируемый суммарный выпуск 80000 тыс. м. Известно, что фабрика может выделить не более 8400 т основной пряжи и 4500 т дополнительной. Требуется составить такую производственную программу, при которой был бы перевыполнен запланированный выпуск ткани и суммарный выпуск ткани оказался бы максимальным (данные по расходам приведены в таблице).

Ассортимент продукции	расход пряжи на 1 тыс. м ткани, кг	
	основной	дополнительной
продукция № 1	60	45
продукция № 2	70	30

Вариант 5. На предприятии, выпускающем изделия двух типов, производственная мощность цеха сборки составляет 100 изделий первого и 300 изделий второго типа в сутки. Прибыль от продажи изделия первого типа составляет 2540 руб., а второго - 1804 руб. Отдел технического контроля в состоянии проверить не более 178 изделий любого типа в сутки. Складское помещение способно вмещать 260 мест изделий, при этом изделие первого типа занимает 2 места, а изделие второго типа одно место. Предприятию поставлен план выпустить продукцию на 350 тыс. руб. в сутки. Можно ли выполнить такой план? Можно ли превысить его и, если можно, то на сколько руб.? Сколько изделий при этом следует выпускать в сутки?

Вариант 6. Завод выпускает 2 вида мороженого: сливочное и шоколадное. Для их изготовления используются 2 исходных продукта: молоко и наполнители, расходы которых на 1 кг мороженого и суточные запасы исходных продуктов даны в таблице:

Исходный продукт	Расход исходных продуктов на 1 кг мороженого		Запас, кг
	Сливочное	Шоколадное	
Молоко	0.82	0.56	412
Наполнители	0.49	0.72	372

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на сливочное мороженое превышает спрос на шоколадное мороженое не более чем на 116 кг. Кроме того, установлено, что спрос на шоколадное мороженое не превышает 382 кг в сутки. Отпускная цена 1 кг сливочного мороженого 110 ден.ед., шоколадного – 145 ден.ед. Определить количество мороженого каждого вида, которое должна производить фирма, чтобы доход от реализации продукции был максимальным.

***Вариант** 7*. Чулочно-носочная фирма производит и продает два вида товаров: мужские носки и женские чулки. Фирма получает прибыль в размере 10 руб. от производства и продажи одной пары чулок и в размере 4 руб. от производства и продажи одной пары носков. Производство каждого изделия осуществляется на трех участках. Затраты труда (в часах) на производство одной пары указаны в следующей табл. 2 для каждого участка:

Участок производства	Чулки	Носки
1	0,023	0,012
2	0,036	0,014
3	0,032	0,026

Рассчитано, что в следующем месяце фирма ежедневно будет располагать следующими ресурсами рабочего времени на каждом из участков: 60 ч на участке 1; 70 ч на участке 2 и 100 ч на участке 3. Сколько пар носков и чулок следует производить ежедневно, если фирма имела максимальную прибыль?

Вариант 8. Фабрика производит два вида красок: первый – для наружных, а второй – для внутренних работ. Для производства красок используются два ингредиента: А и В. Максимально возможные суточные запасы этих ингредиентов составляют 6 и 8 т соответственно. Известны расходы А и В на 1 т соответствующих красок (см. табл.).

Ингредиенты	Расход ингредиентов, т		Запас, т
	Краска 1-го вида	Краска 2-го вида	
А	1,4	2,1	6,2
В	2,5	1,3	8,1

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску 2-го вида никогда не превышает спроса на краску 1-го вида более, чем на 1,5 т. Кроме того, установлено, что спрос на краску 2-го вида никогда не превышает 1,9 т в сутки. Цены одной тонны красок равны: 3500 руб. для краски 1-го вида; 2100 руб. для краски 2-го вида. Какое количество краски каждого вида надо производить, чтобы доход от реализации продукции был максимальным ? Какова будет выручка от продажи такой продукции?

Вариант 9. Цех выпускает два вида продукции, используя два вида полуфабрикатов. Продукция используется при комплектовании изделий, при этом на каждую единицу продукции второго вида требуется не более двух единиц продукции первого вида. Нормы расхода полуфабрикатов каждого вида на единицу выпускаемой продукции, общие объемы полуфабрикатов и прибыль от единицы каждой продукции предоставлены в таблице:

Полуфабрикаты	Нормы затрат на единицу продукции		Объем полуфабриката
	П1	П2	
1	1	2	800
2	6	2	2400
Прибыль, руб.	1070	1320	

Определить план производства, доставляющий максимум прибыли от реализации этой продукции. Определить оптимальные объемы продукции и прибыль от ее реализации.

Вариант 10. Фирма производит два безалкогольных широко популярных напитка "Колокольчик" и "Буратино". Для производства 1 л. "Колокольчика" требуется 0,02 ч. работы оборудования, а для "Буратино" – 0,04 ч., а расход специального ингредиента на них составляет 0,01 кг. и 0,04 кг. на 1 л. соответственно. Ежедневно в распоряжении фирмы 16 кг. специального ингредиента и 24 ч. работы оборудования. Доход от продажи 1 л. "Колокольчика" составляет 4 руб., а "Буратино" – 9 руб.

Определите ежедневный план производства напитков каждого вида, обеспечивающий максимальный доход от продажи.

.

Индивидуальные задания для для транспортной задачи

Ниже приведены варианты транспортной задачи. Для каждой задачи имеется 4 склада продукции и 5 ее потребителей. В левом столбце указаны имеющиеся запасы на соответствующем складе. В верхней строке указаны запросы потребителей. Желтым цветом отмечена матрица стоимости перевозок. Найти оптимальный план грузоперевозок, который отвечает минимальной суммарной стоимости перевозки продукции со складов к потребителям.

Вариант № 1

	18	4	19	10	16
25	3	3	3	15	9
8	23	7	19	12	17
12	14	9	23	17	19
22	22	3	17	5	17

Вариант № 2

	33	28	10	6	19
25	24	7	9	24	14
28	13	30	28	24	16
13	20	16	8	3	11
30	19	19	7	15	1

Вариант № 3

	22	3	9	9	18
24	26	14	11	4	21
4	8	30	1	16	16
3	5	5	28	7	28
30	11	17	12	4	17

Вариант № 4

	13	14	7	10	27
17	19	17	11	18	14
14	11	21	2	23	9
5	29	19	16	7	5
35	4	17	14	17	23

Вариант № 5

	11	22	5	4	36
27	28	8	7	17	26
15	20	12	28	25	10
6	11	7	19	20	7
30	25	17	19	1	24

Вариант № 6

	22	5	10	7	12
24	28	15	14	17	5
7	29	22	10	20	15
10	1	5	7	13	12
15	19	30	10	15	28

Вариант № 7

	33	21	11	5	10
19	5	27	14	12	12
17	20	17	5	20	26
16	10	30	21	15	16
28	15	23	16	23	8

Вариант № 8

	22	13	14	7	14
34	21	23	30	26	11
11	4	10	13	28	30
7	29	10	2	14	29
18	7	29	7	21	9

Вариант № 9

	39	15	9	9	12
16	12	3	10	19	18
8	24	17	7	6	15
23	18	7	28	14	27
37	17	7	26	18	29

Вариант № 10

	32	19	5	5	13
21	13	7	16	10	15
14	26	6	4	21	13
14	28	12	5	26	6
25	28	18	29	24	16

Лабораторная работа №5

Решение прикладных задач с использованием Matlab

1. Определить число взлетно-посадочных полос для самолетов с учетом требования того, что вероятность ожидания должна быть меньшей 0.05. Дана интенсивность потока самолетов *a*=54 самолетов/сутки и интенсивность линий обслуживания *b*=60 самолетов/сутки

Вначале составим подпрограмму, определяющую вероятность ожидания. Для СМО с ожиданием эта вероятность вычисляется по формуле

$$p_{оч} = \lambda^n \cdot p_0 \Big/ \left(n!\,(1-\lambda/n)\right),$$ где

$$p_0 = 1 \Big/ \left(1+\lambda+\lambda^2/2! + \ldots + \lambda^n/n! + \lambda^{n+1}\Big/\left(n!\cdot(n-\lambda)\right)\right)$$

$$\lambda = a/b\ .$$

Подпрограмма будет называться SMO и иметь вид

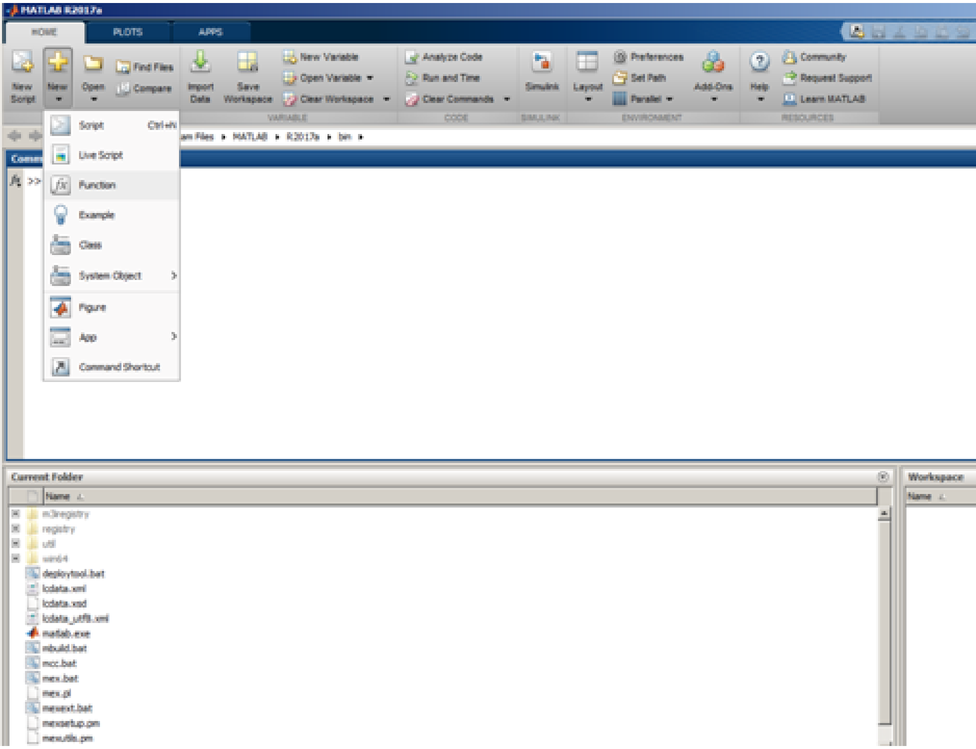
```
%подпрограмма определения вероятности ожидания в зависимости от количества полос

function[P]= SMO(L,M,N);

ps=L/M;

po=0;

for i=1:N+1
```

```
    po=po+ps^(i-1)/gamma(i);
end
    po=po+ps^(N+1)/(gamma(N+1)*(N-ps));
    po=1/po;
    P=po*ps^N/(gamma(N+1)*(1-ps/N));
end
```

Здесь N – число взлетно-посадочных полос, $L = a\,, M = b$

Для создания подпрограммы следует щелкнуть по значку

, в раскрывшемся меню выбрать пункт Function. В появившемся окне ввести текст подпрограммы



Созданную подпрограмму следует сохранить, используя команду Save.

Далее следует составить программу, определяющую число взлетно-посадочных полос

%программа определения числа взлетно-посадочных полос

L=54;

M=60;

PZ=0.05;

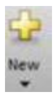
PP=1;

```
N=1;

while PP>PZ

PP=SMO(L,M,N);

N=N+1;

end

N0=N-1;

disp('необходимое число полос');

disp(N0);
```

В программе группа команд в цикле

```
while PP>PZ

PP=SMO(L,M,N);

N=N+1;

End
```

вычисляет вероятность ожидания для числа полос N=1,2,3,… до тех пор, пока она не станет меньше установленной величины PZ=0.05.

Для создания программы следует щелкнуть по значку 

, в раскрывшемся меню выбрать пункт Script. В появившемся окне ввести текст программы

Созданную подпрограмму следует сохранить, используя команду Save

Для запуска программы производится щелчок по знаку Run.

После этого на экране появится результат работы программы

Результаты расчета

необходимое число полос

4

2.Решить задачу линейного программирования

$$Y = 40x_1 + 50x_2 + 30x_3 + 20x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 7x_4 \le 15 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 \le 9 \\ 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 8x_4 \le 30 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_3 \ge 0; x_4 \ge 0$$

Для решения подобных задач в Matlab используется функция

$$[x, L, f] = linprog(c, A, b[, A1, b1, lx, rx])$$

С – вектор коэффициентов целевой функции

A,b-система ограничений вида $Ax \le b$

A1,b1-система ограничений вида $A1x = b1$

lx, rx - параметры ограничений вида $lx \le x \le rx$,

$$lx \le x\, ,\, x \le rx$$

L – минимум целевой функции

x- вектор решения

f- параметр, характеризующий вычислительный процесс

Программа, решающая указанную выше задачу имеет вид

```
C=[-40 -50 -30 -20];

A=[3 5 2 7;4 3 3 5;5 6 4 8];

b=[15 9 30];

Lx=[0 0 0 0];

[x,Y]=linprog(C,A,b,[],[],Lx);

Y=-Y;

%максимум функции

max=Y

%достигается при x

xe=x
```

Результат работы программы

```
Optimization terminated.

max =

  150.0000
```

xe =

0.0000

3.0000

0.0000

0.0000

Рассмотрим задачу со смешанными условиями ограничения

$$Y = 5x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 5 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \ge 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

Программа, решающая эту задачу имеет вид

```
C=[-5 2 1];

A=[2 1 1;-5 -3 4];

b=[5 1];

A1=[3 2 1];

b1=[6];

Lx=[0 0 0];

[x,Y]=linprog(C,A,b,A1,b1,Lx);

Y=-Y;
```

%максимум функции

max=Y

%достигается при x

xe=x

Результаты работы программы

Optimization terminated.

max =

  10.0000

xe =

   2.0000

   0.0000

   0.0000

3.Решение дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, описывающих работу СМО с отказами с двумя каналами обслуживания

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0}{dt} = -aP_0 + bP_1 \\ \dfrac{dP_1}{dt} = aP_0 + (a+b)P_1 + 2bP_1 \\ \dfrac{dP_2}{dt} = aP_1 - 2bP_2 \end{cases}$$

$$P_0(0) = 1, P_1(0) = 0, P_2(0) = 0$$

Для решения данной системы воспользуемся функцией ode23(f,interval,x0)

f-вектор-функция для вычисления правых частей системы уравнений

interval-массив их двух чисел, определяющий интервал интегрирования

x0- вектор начальных условий

Функция вычисляет :массив T- точки, в которых ищется решение

Матрицу X, i-ый столбец которой является значением соответствующей неизвестной функции

Будем обозначать $P_0 = y_1, P_1 = y_2, P_2 = y_3$

Тогда f-вектор-функция для вычисления правых частей системы уравнений при *a*=3и *b*=2будет иметь вид

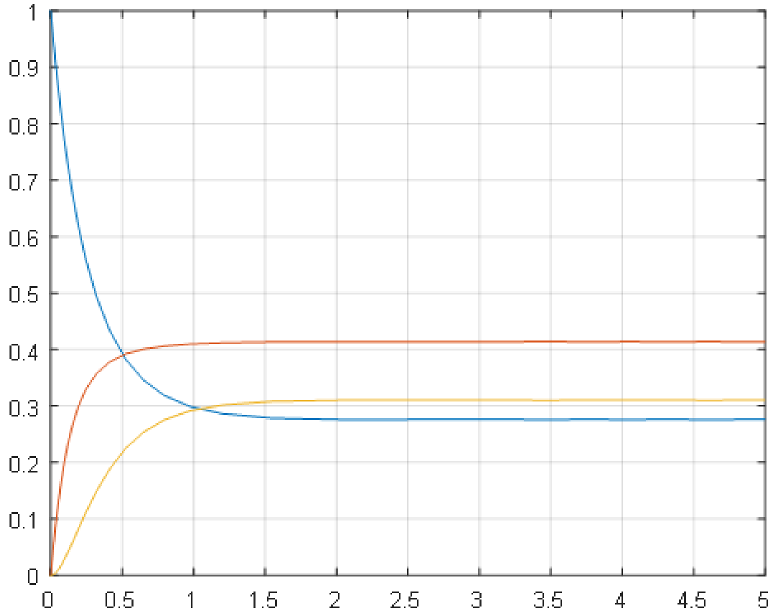
function [dy] = dusmo(t,y)

```
a=3;

b=2;

dy=zeros(3,1);

dy(1)=-a*y(1)+b*y(2);

dy(2)=a*y(1)-(a+b)*y(2)+2*b*y(3);

dy(3)=a*y(2)-2*b*y(3)

end
```

Программа решения системы на отрезке [0 5] может быть представлена в виде

```
t,Y]=ode23(@dusmo,[0 5],[1 0 0]);

figure;

plot(t,Y);

grid;
```

Результат будет представлен графически



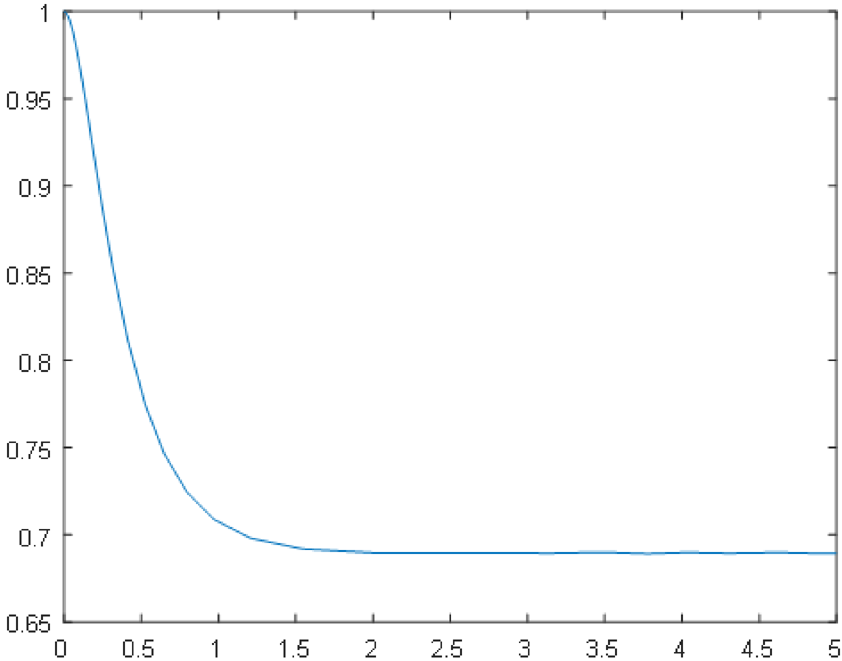
Можно рассчитать изменение во времени различных характеристик СМО, например среднее число занятых каналов rk или вероятность обслуживания заявки vo. В этом случае программа примет вид

```
[t,Y]=ode23(@dusm,[0 5],[1 0 0]);

vo=1-Y(:,3);

figure;

plot(t,vo);

rk=Y(:,2)+2*Y(:,3);
```

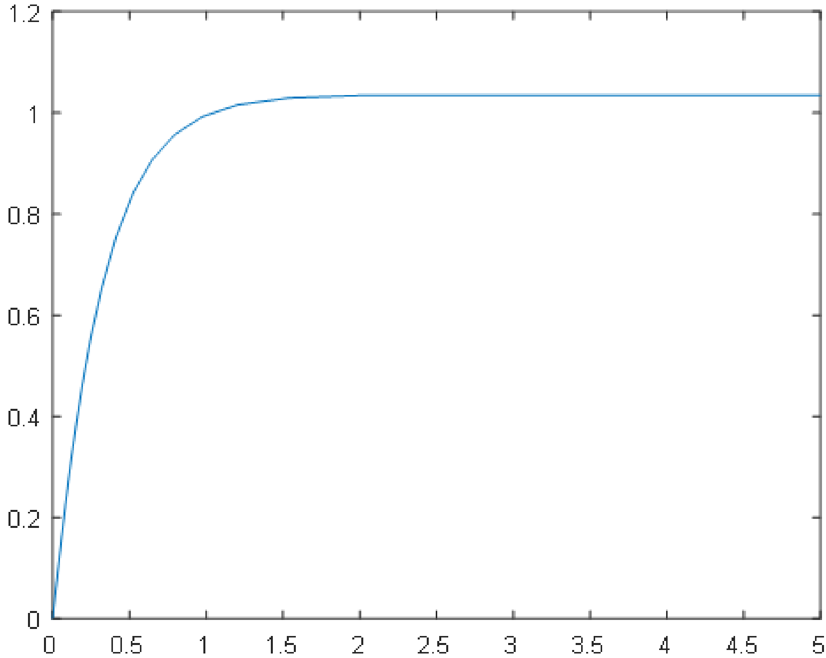
```
figure;

plot(t,rk);

figure;

plot(t,Y);

grid
```

А результаты будут иметь вид

Вероятность обслуживания vo

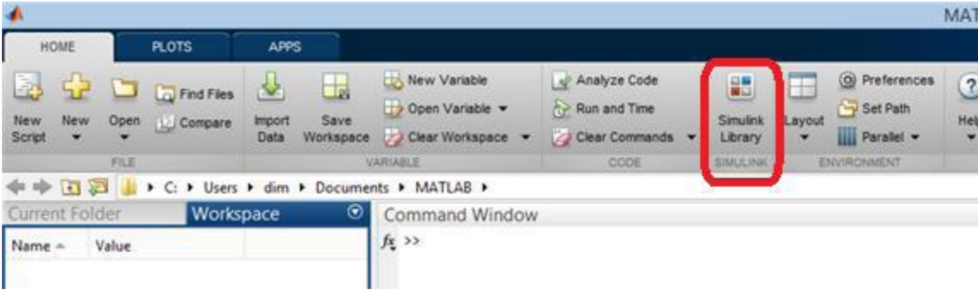


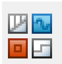
Среднее число занятых каналов rk

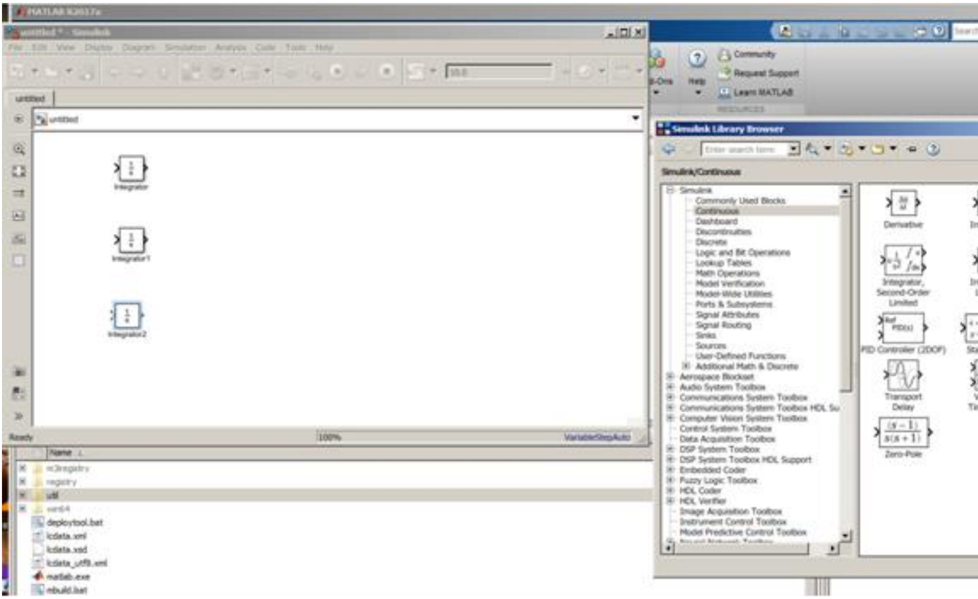


4.Решение дифференциальных уравнений при помощи пакета Simulink

Запуск пакета SIMULINK, интегрированного в среду MATLAB, осуществляется нажатием кнопки Simulink в панели инструментов (рисунок) либо командой >> Simulink в командной строке MATLAB.



Далее при помощи кнопки  открывается окно браузера библиотек SimulinkВ окне браузера содержится дерево компонентов библиотек Simulink. Для просмотра того или иного раздела библиотеки достаточно выделить его мышью – в правой части окна «Simulink Browser Library» появится набор пиктограмм компонентов активного раздела библиотеки.



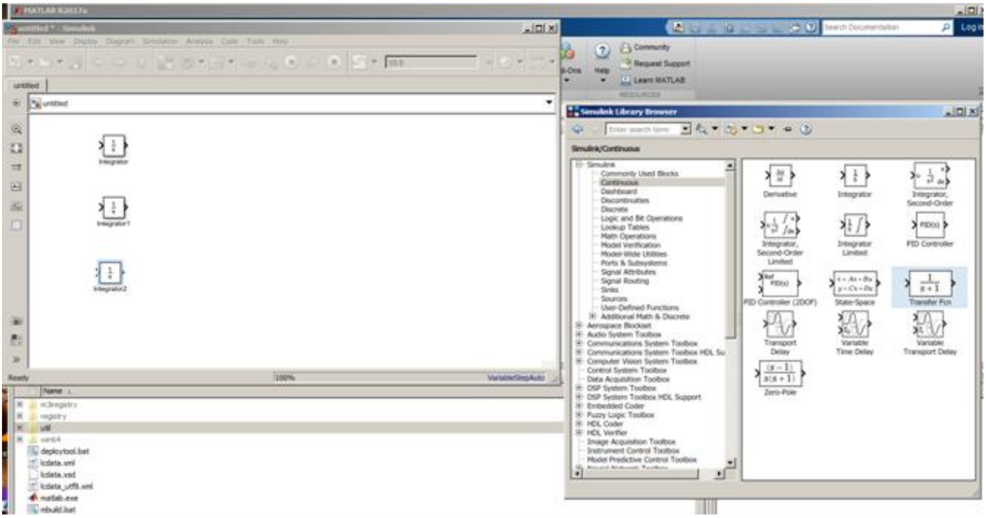
Слева располагается окно, в котором производится построение соответствующей модели.

Рассмотрим процесс построения модели решения системы дифференциальных уравнений, соответствующей СМО с отказами

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0}{dt} = -3P_0 + 2P_1 \\ \dfrac{dP_1}{dt} = 3P_0 + 5P_1 + 4P_1 \\ \dfrac{dP_2}{dt} = 3P_1 - 4P_2 \end{cases}$$

$$P_0(0) = 1, P_1(0) = 0, P_2(0) = 0$$

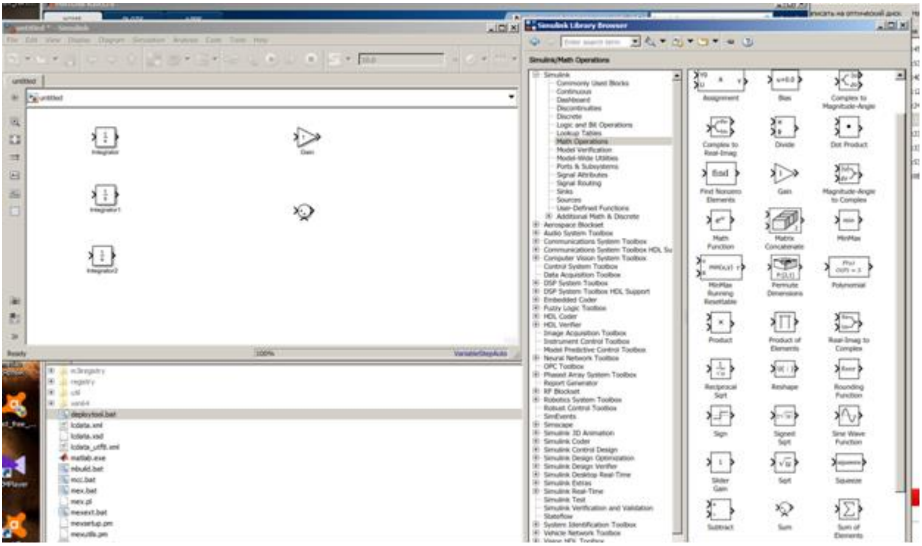
Чтобы получить значения для $P_0(t), P_1(t), P_2(t)$ надо проинтегрировать каждое уравнение системы, поэтому необходимы три блока интегрирования integrator, integrator1, integrator2, которые можно перетащить мышью в рабочее окно из раздела библиотеки Continuous



Из этих блоков будет выходить сигнал, соответствующий величинам $P_0(t), P_1(t), P_2(t)$.

В соответствии с видом правой части первого уравнения, сигнал исходящий из блока integrator должен быть усилен в 3 раза и взят с обратным знаком.

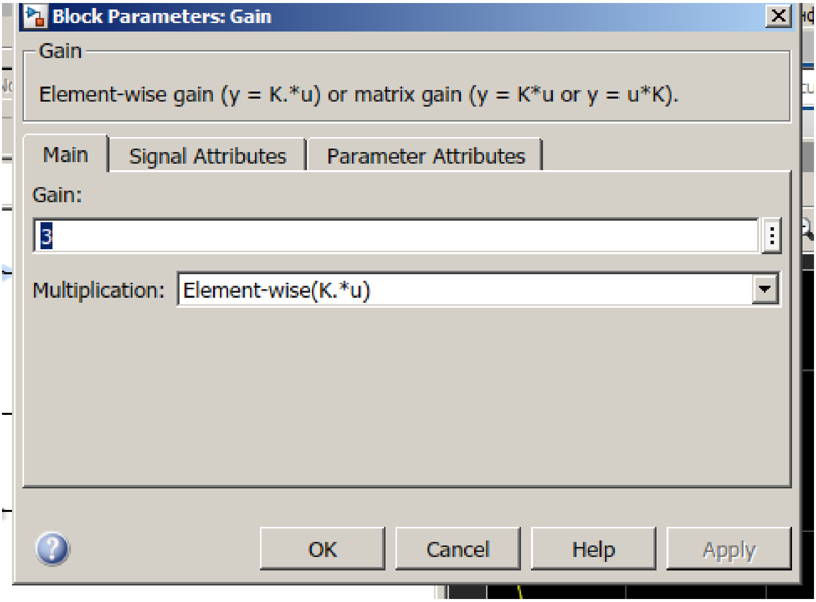
Для его усиления из раздела библиотеки Math Operator перетащим мышкой блок усиления Gain и блок суммирования Sum, для прибавления к полученному сигналу удвоенный сигнал, выходящий из блока integrator1, соответствующий величине $P_1(t)$ (в соответствии с правой частью 1 уравнения)



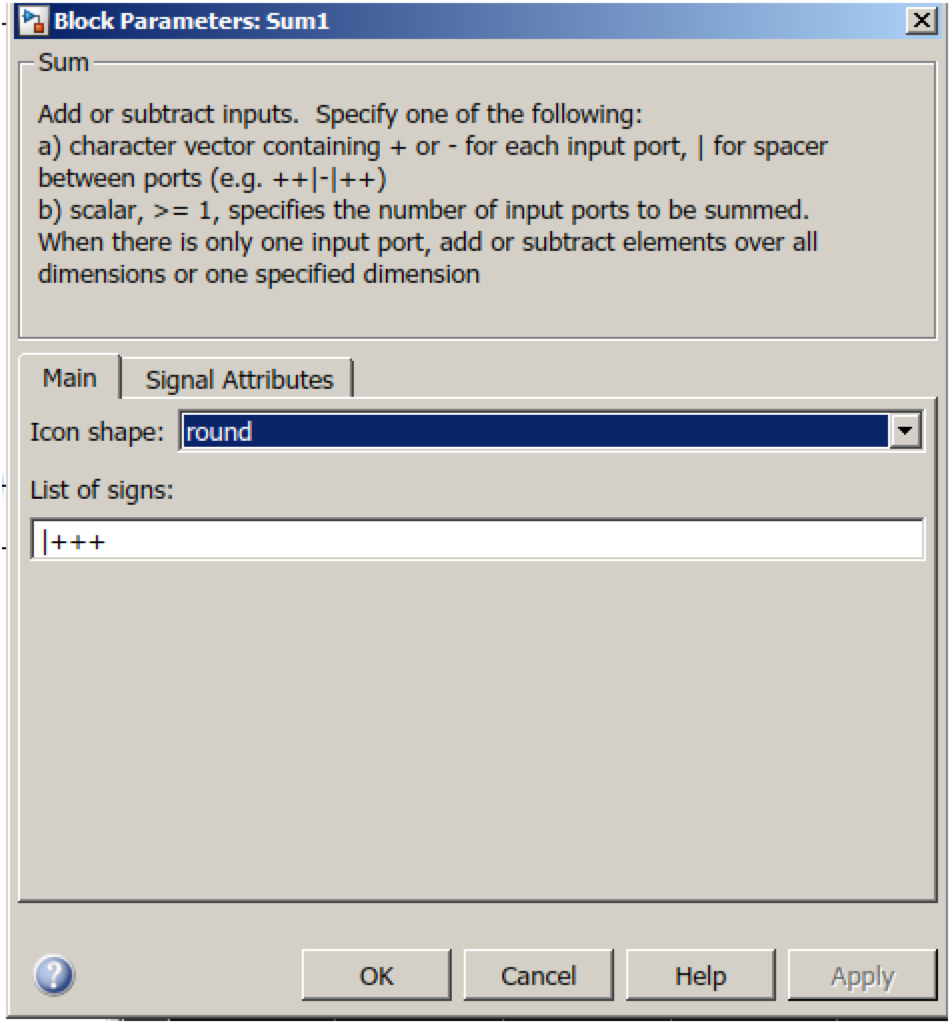
Сигнал, выходящий из блока integrator1 должен быть усилен в 2 раза, поэтому в рабочее окно переместим еще и блок Gain1, через который сигнал от integrator1 должен пройти к блоку Sum

Соединим эти блоки integrator , Sum и Gain с помощью мыши. Соединим блок integrator1 и Sum через Gain1. Блоки имеют входы и (или) выходы. Для соединения блоков курсор мыши устанавливается на выходе блока, от которого должно исходить соединение. Держа нажатой левую кнопку мыши, надо плавно переместить курсор к входу следующего блока. Ответвление от уже созданных линий производится при помощи зажатой правой клавиши мыши в точке необходимого отвода.

Для определения коэффициента усиления блока Gain надо щелкнуть мышью на соответствующем блоке и в открывшемся окне ввести число, которое укажет, во сколько раз будет усилен сигнал.

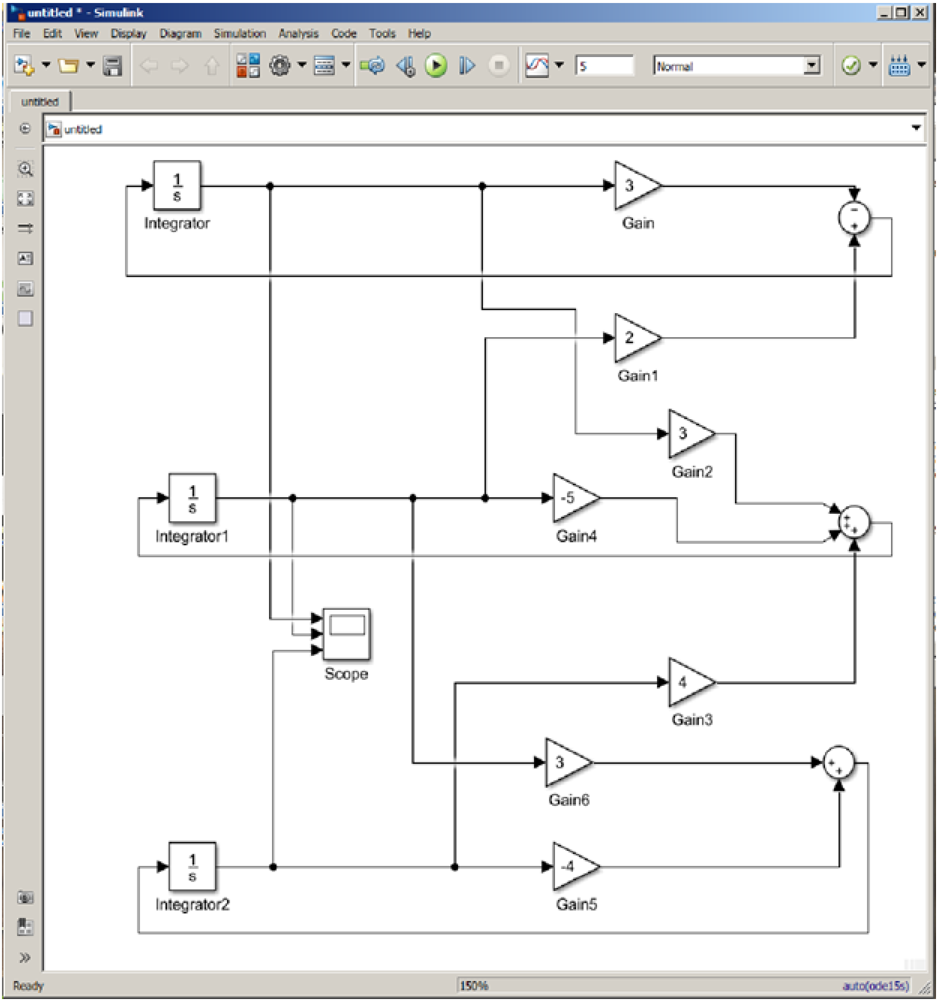


Аналогичным образом можно определить какое количество сигналов будет просуммировано в блоке Sum и, с каким знаком будет суммироваться каждый сигнал.



Установим коэффициенты усиления в Gain -3, и в Gain1-2 в соответствии с уравнением 1 системы.

Выход блока Sum соединяется с входом блока integrator и тем завершим моделирование 1-го уравнения системы.



Для моделирования второго уравнения соединим блока integrator1через Gain4 с блоком Sum, имеющим 3 входа. С этим же блоком Sum соединим integrator через блок Gain2 и integrator2 через блок Gain3. Установим коэффициенты усиления в блоке Gain2 – 3, в блоке Gain3 – 4, в блоке Gain4 – -

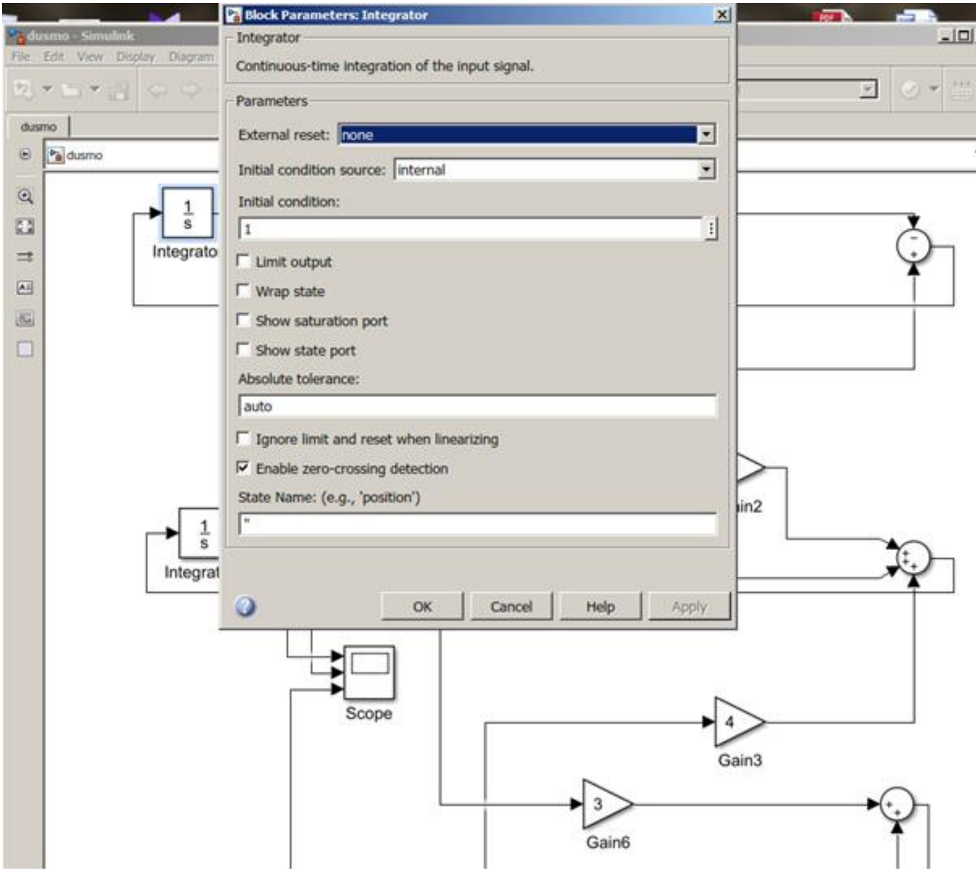
5, что соответствует уравнению 2.

Выход блока Sum соединяется с входом блока integrator1 и тем завершим моделирование 2-го уравнения системы.

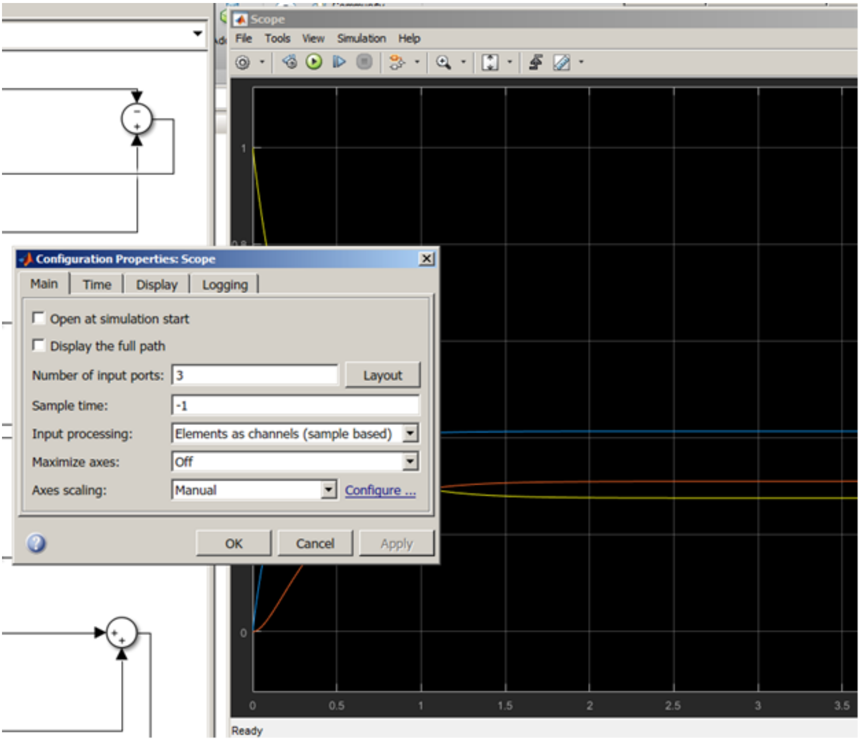
Для моделирования 3-го уравнения соединим блока integrator2 через Gain5 с блоком Sum, имеющим 2 входа. С этим же блоком Sum соединим integrator1 через блок Gain6 . Установим коэффициенты усиления в блоке Gain5 – -4, в блоке Gain6 – 3, в блоке Gain4 – -5, что соответствует уравнению 4.

Выход блока Sum соединяется с входом блока integrator1 и тем завершим моделирование 2-го уравнения системы.

Далее необходимо установить начальные условия для блоков integrator, integrator1, integrator2. Для этого надо поочередно дважды щелкнуть по каждому из этих блоков и в открывшемся окне в позиции Initial Condition ввести соответствующее начальным данным число (1 для integrator и 0 для integrator1 и integrator2).



Для того, чтобы можно было видеть результаты работы модели, переместим из раздела Sinks ,блок Scope в рабочее окно. Далее соеденим этот блок с выходом блоков integrator, integrator1, integrator2. Чтобы получить три входа в блоке Scope надо дважды щелкнуть по этому блоку и в открывшемся окне



щелкнуть по кнопке, располагающейся ниже пункта меню File. После этого ввести 3 в поле Number of input ports.

Перед запуском модели необходимо настроить параметры моделирования.

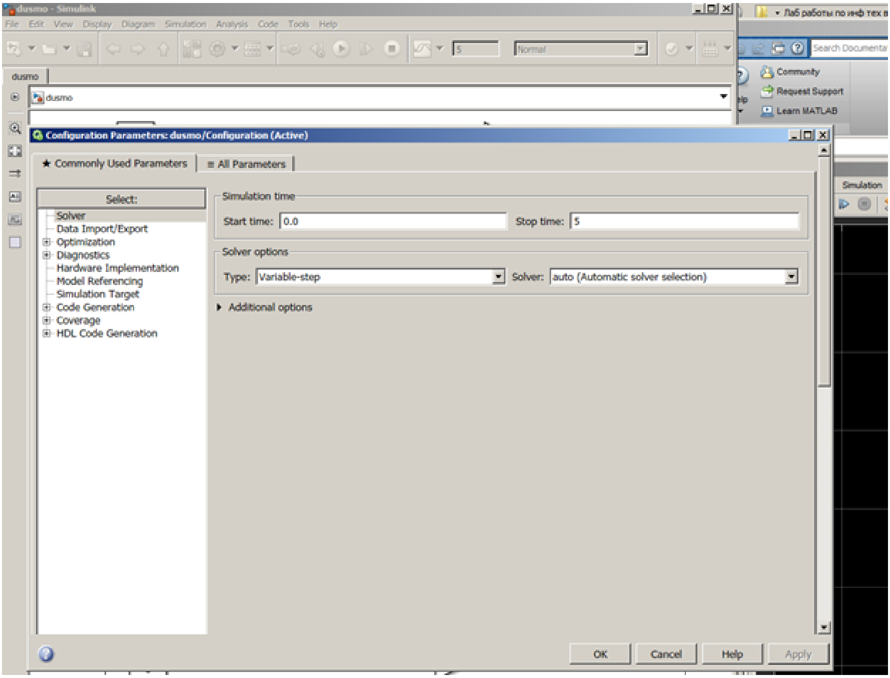
Для настройки параметров моделирования используется команда меню «Simulation ⇒ Model Configuration Parameters…(Ctrl+E)». После ее выполнения появляется окно установки параметров моделирования, имеющее ряд вкладок с довольно большим числом параметров

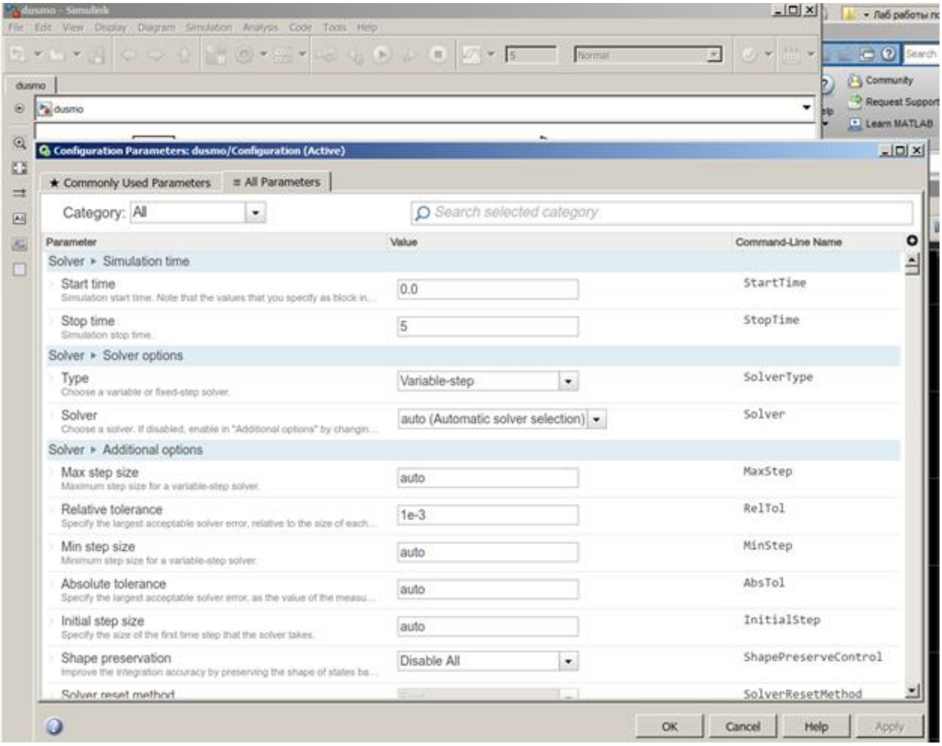
Наиболее важной является вкладка, открываемая по умолчанию, – «Solver» (Решатель). Эта вкладка позволяет установить параметры решающего устройства системы моделирования Simulink. К числу важнейших параметров решателя относится время моделирования — «Simulation time». Время моделирования определяет собственное время модели, в течение которого выполняется моделирование и не имеет отношения к реальному времени, затрачиваемому на моделирование. Оно задается начальным временем «Start time» (обычно 0) и конечным временем «Stop time» (по умолчанию 10). В качестве конечного времени может быть установлена бесконечность (inf). Равенство «Stop time» бесконечности означает, что моделирование будет происходить бесконечно долго, пока мы не прервем его. Однако в этом случае трудно получить различимые осциллограммы работы устройства, поэтому в большинстве случаев удобнее задавать конечные значения «Stop time».

Первостепенное значение имеют две опции решателя в поле «Solver options»: тип решения «Type» и метод решения «Solver». Возможны два типа решения:

- «Variable-step» — решение с переменным шагом;

- «Fixed-step» — решение с фиксированным шагом.

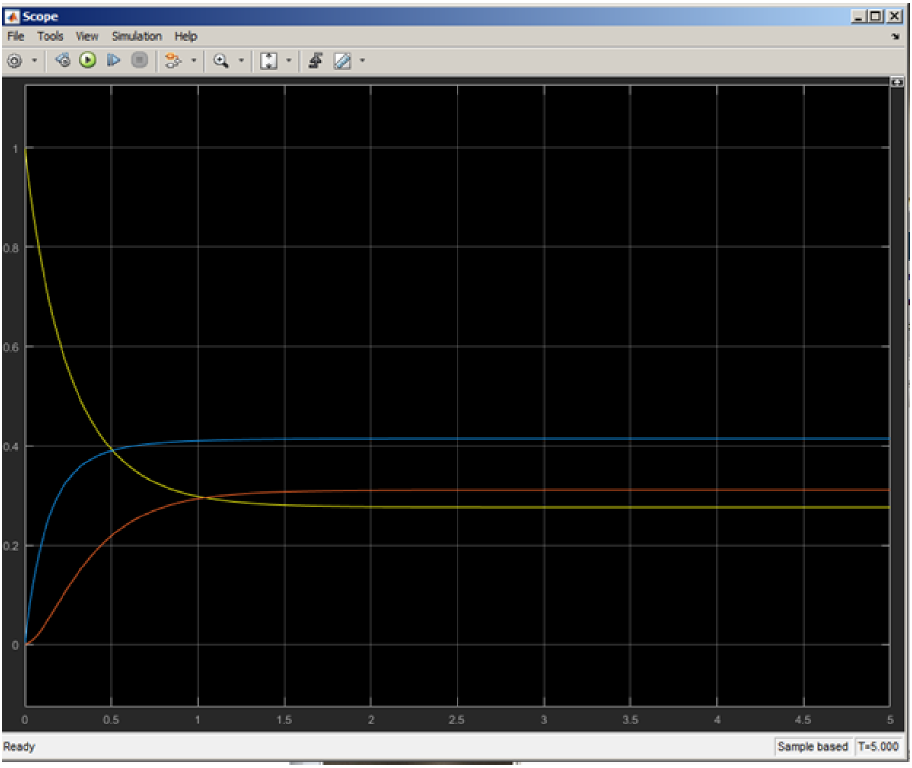

dusmo - Simulink
File Edit View Display Diagram Simulation Analysis Code Tools Help
Configuration Parameters: dusmo/Configuration (Active)
Commonly Used Parameters
All Parameters
Select:
Solver
Data Import/Export
Optimization
Diagnostics
Hardware Implementation
Model Referencing
Simulation Target
Code Generation
Coverage
HDL Code Generation
Simulation time
Start time: 0.0
Stop time: 5
Solver options
Type: Variable-step
Solver: auto (Automatic solver selection)
Additional options
OK
Cancel
Help
Apply
Community
Request Support
Learn MATLAB



Для запуска симуляции следует выполнить команду

«Simulation ⇒ Run»

Чтобы получить результаты работы модели в графическом виде следует дважды щелкнуть по соответствующему блоку Scope.



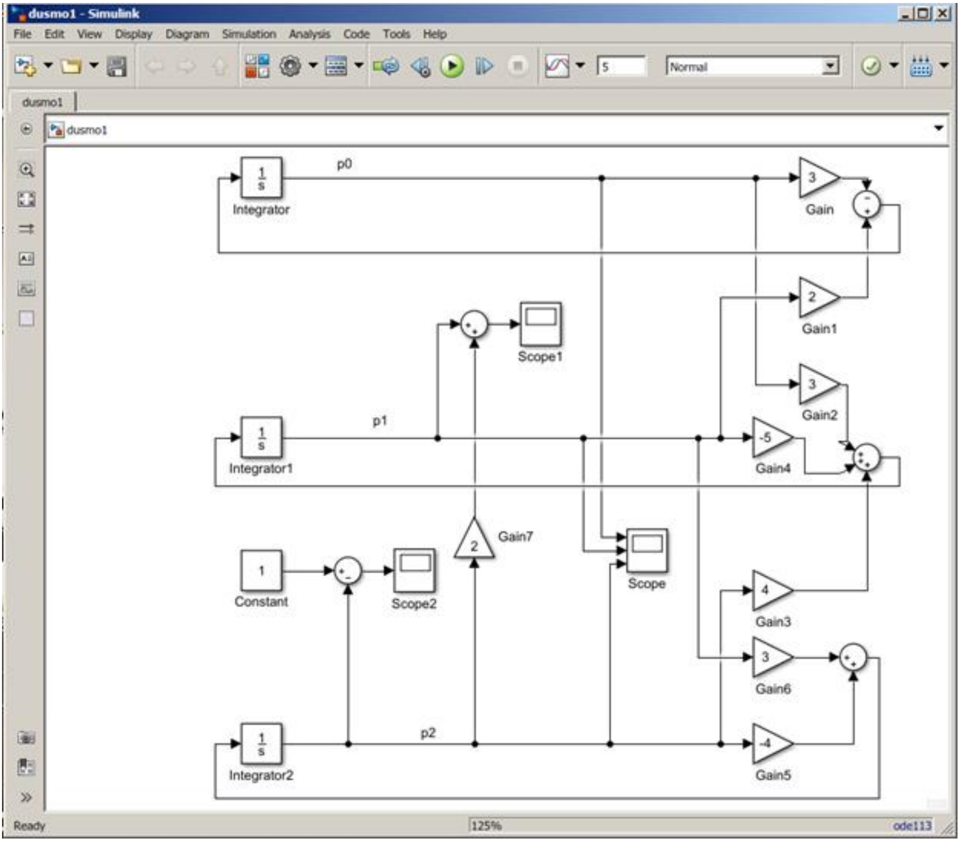
Используя построенную модель, определим изменение во времени некоторых характеристик СМО, например как в предыдущем пункте среднее число занятых каналов rk и вероятность обслуживания заявки vo, используя формулы

$$rk=1*P_1(t)+2*P_2(t),\ \ vo=1-P_2(*t).$$

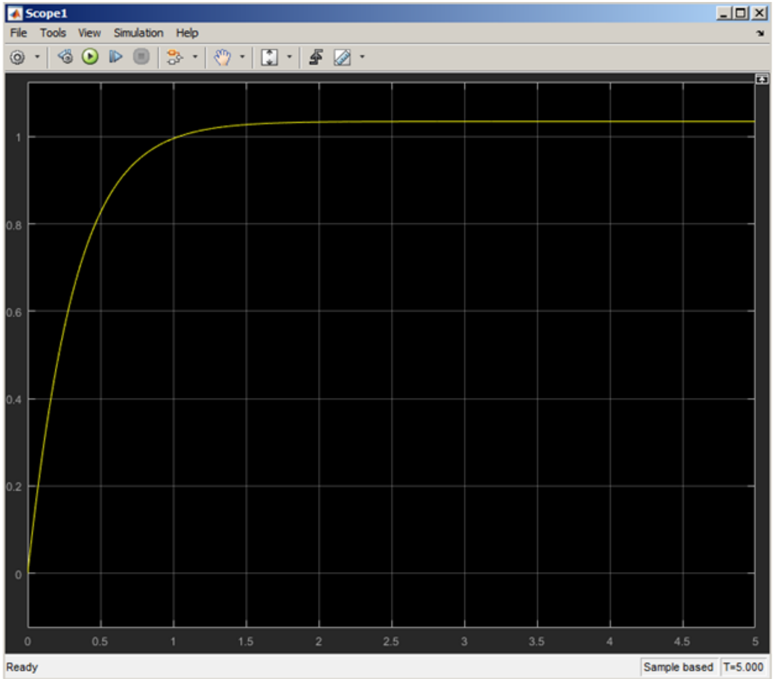
Для этого добавим в рабочее окно к уже имеющимся блокам два блока Scope, два блока Sum, блок Gain7 и блок Constant из раздела Sources, который является источником сигнала постоянной величины, не меняющейся во времени. В нашем случае он будет нужен для определения вероятности обслуживания заявки vo и будет выдавать постоянный сигнал единичной величины.

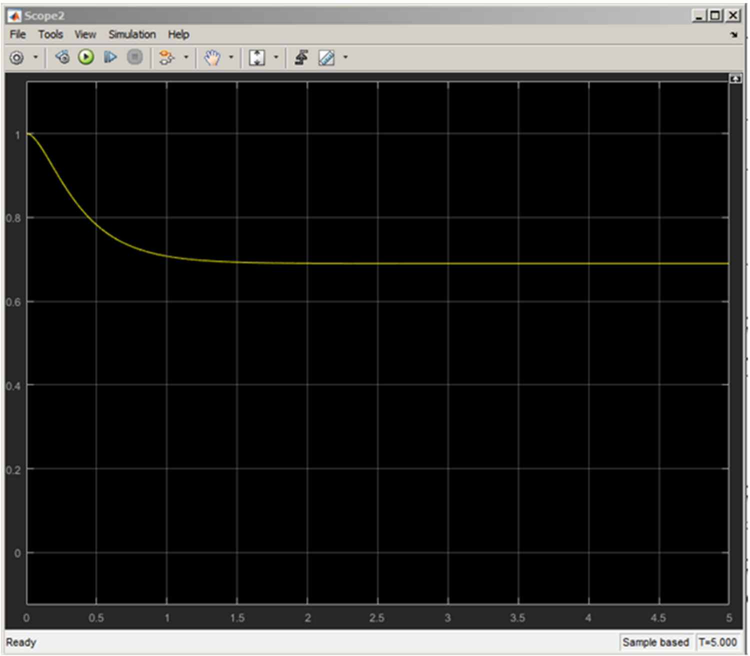
Соединим с двумя входами одного из блоков Sum сигнал, выходящий из блока integrator1 и сигнал выходящий из блока integrator2, через блок Gain7 с коэффициентом усиления 2 (в соответствии с формулой, определяющей величину rk. Для того, чтобы можно было увидеть результаты симуляции, выход данного блока Sum соединим с блоком Scope1. Входы другого блока Sum соединим с блоком Constant, установив на нем величину испускаемого сигнала равную 1, и с блоком integrator2. Для того, чтобы установить единичный уровень сигнала, выходящего из блока Constant, следует щелкнуть по этому блоку и в открывшемся окне ввести 1. Так как в силу формулы для vo сигнал от блока integrator2 должен вычитаться из 1, то соответствующий вход блока

должен быть помечен знаком «-». Для этого надо щелкнуть по блоку Sum и в открывшемся окне ввести знак «-» в соответствующее поле. Для того, чтобы можно было увидеть результаты симуляции, выход данного блока Sum соединим с блоком Scope2. В результате получим модель изображенную на рисунке.



После запуска симуляции будут получены нижеследующие результаты работы модели.


Scope1
File
Tools
View
Simulation
Help
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
Ready
Sample based
T=5.000



Индивидуальные задания.

1. Разработать программу, используя возможности MATLAB, для решения приведенной ниже задачи.

Задача.

Система массового обслуживания – завод, выполняющий специальные заказы. Интенсивность поступления заказов равна λ, интенсивность их выполнения - μ. Если при поступлении нового заказа все производственные линии завода заняты, то заказ не принимается. Стоимость одного заказа равна C_1 ед.. Стоимость простоя одной производственной линии равна C_2 ед. Определить оптимальное количество производственных линий при котором убытки завода, обусловленные потерянными заказами и простаивающими производственными линиями, были минимальны.

Значения для указанных в условии величин выбрать в соответствии с вашим вариантом из таблицы

Варианты	λ	μ	C_1	C_2
1	3	2	7	5
2	2	1	5	3
3	4	3	3	1
4	5	3	4	2
5	4	2	6	5
6	7	5	5	4
7	3	1	7	5
8	5	4	6	4
9	6	3	4	2
10	5	4	5	2

2.Рассчитать изменение во времени среднего числа занятых каналов rk и вероятность обслуживания заявки vo СМО с отказами, состоящей из двух каналов обслуживания, работа которой описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), используя функцию Matlab ode23(f,interval,x0) и возможности пакета SIMULINK. Результаты представить в графическом виде. Все исходные данные приведены в таблице ниже.

Вариант	Система ОДУ	Значения параметров

1	$\begin{cases} P_0' = -(a+b)P_0 - bP_2 + b \\ P_2' = -aP_0 - (a+2b)P_2 + a \end{cases}$ $P_1 = 1 - P_0 - P_2, P_0(0) = 1, P_2(0) = 0$	$a = 3, b = 3$
2	$\begin{cases} P_0' = -(a+b)P_0 - bP_2 + b \\ P_2' = -aP_0 - (a+2b)P_2 + a \end{cases}$ $P_1 = 1 - P_0 - P_2, P_0(0) = 1, P_2(0) = 0$	$a = 4, b = 5$
3	$\begin{cases} P_0' = -(a+b)P_0 - bP_2 + b \\ P_2' = -aP_0 - (a+2b)P_2 + a \end{cases}$ $P_1 = 1 - P_0 - P_2, P_0(0) = 1, P_2(0) = 0$	$a = 5, b = 3$
4	$\begin{cases} P_0' = -aP_0 - bP_1 \\ P_1' = (a-2b)P_0 - (a+3b)P_1 + 2b \end{cases}$ $P_2 = 1 - P_0 - P_1, P_0(0) = 1, P_2(0) = 0$	$a = 3, b = 3$
5	$\begin{cases} P_0' = -aP_0 - bP_1 \\ P_1' = (a-2b)P_0 - (a+3b)P_1 + 2b \end{cases}$ $P_2 = 1 - P_0 - P_1, P_0(0) = 1, P_2(0) = 0$	$a = 5, b = 3$
6	$\begin{cases} P_0' = -aP_0 - bP_1 \\ P_1' = (a-2b)P_0 - (a+3b)P_1 + 2b \end{cases}$ $P_2 = 1 - P_0 - P_1, P_0(0) = 1, P_2(0) = 0$	$a = 3, b = 4$
7	$\begin{cases} P_1' = -(2a+b)P_1 + (2b-a)P_2 + a \\ P_2' = aP_1 - 2bP_2 \end{cases}$ $P_0 = 1 - P_1 - P_2, P_1(0) = 0, P_2(0) = 0$	$a = 3, b = 3$

8	$\begin{cases} P_1' = -(2a+b)P_1 + (2b-a)P_2 + a \\ P_2' = aP_1 - 2bP_2 \end{cases}$ $P_0 = 1 - P_1 - P_2, P_1(0) = 0, P_2(0) = 0$	$a = 5, b = 4$
9	$\begin{cases} P_1' = -(2a+b)P_1 + (2b-a)P_2 + a \\ P_2' = aP_1 - 2bP_2 \end{cases}$ $P_0 = 1 - P_1 - P_2, P_1(0) = 0, P_2(0) = 0$	$a = 3, b = 4$
10	$\begin{cases} P_1' = -(2a+b)P_1 + (2b-a)P_2 + a \\ P_2' = aP_1 - 2bP_2 \end{cases}$ $P_0 = 1 - P_1 - P_2, P_1(0) = 0, P_2(0) = 0$	$a = 4, b = 5$

3. Индивидуальные задания для решения общей задачи линейного программирования

Ниже приведены задачи линейного программирования, для которых необходимо построить соответствующую математическую модель и реализовать ее с помощью Matlab.

Вариант 1. Предприятие располагает двумя видами сырья S1 и S2 в количествах 15 и 13 условных единиц и изготавливает из него изделия двух видов П1 и П2. Изготовление единицы изделия П1 требует расхода сырья S1 в 1 усл.ед., S2 в 3 усл.ед., а для производства единицы изделия П2 необходимо сырья S1 – 3 усл.ед., сырья S2 - 1 усл.ед. Известна прибыль от реализации одной единицы продукции каждого вида. Для вида П1 она составляет 2 ден.ед, для вида П2 – 3 ден.ед. Требуется найти оптимальный план производства продукции, реализация которого обеспечит предприятию максимальную прибыль.

Вариант 2. На заводе используется сталь трех марок: A, B, C, запасы которых равны соответственно 10, 16 и 12 ед. Завод выпускает два вида изделий. Для изделия 1 требуется по одной единице стали всех марок. Для изделия 2 требуется 2 единицы стали марки B, одна – марки C и не требуется сталь марки A. От реализации единицы изделия вида 1 завод получает 400 руб. прибыли, а вида 2 – 250 руб. Составить план выпуска продукции, дающий наибольшую прибыль.

Вариант 3. Производитель безалкогольных напитков располагает двумя разливочными машинами A и B по 4 шт. каждой. Машина A спроектирована для пол-литровых бутылок, а машина B – для литровых. Машина A может выпускать до 50 пол-литровых бутылок в 1 мин, а машина B – до 30 литровых бутылок в 1 мин. Каждая из машин работает ежедневно по 6 час, при пятидневной рабочей неделе. Прибыль от продажи одной пол-литровой бутылки составляет 4 цента, а одной литровой бутылки – 10 центов. Недельная продукция не может превосходить 259200 л; рынок за неделю принимает не более 288000 пол-литровых бутылок и не более 180000 литровых бутылок. Сколько бутылок пол-литровых и литровых должна выпускать каждая машина A и B за 1 мин., чтобы максимизировать недельную прибыль производителя от продажи безалкогольных напитков, при имеющихся средствах и условиях.

Вариант 4. На фабрике планируется выпустить продукцию двух артикулов: № 1 и № 2 из одинаковой пряжи на одинаковых станках. Планируемый суммарный выпуск 80000 тыс. м. Известно, что фабрика может выделить не более 8400 т основной пряжи и 4500 т дополнительной. Требуется составить такую производственную программу, при которой был бы перевыполнен запланированный выпуск ткани и суммарный выпуск ткани оказался бы максимальным (данные по расходам приведены в таблице).

Ассортимент продукции	расход пряжи на 1 тыс. м ткани, кг	
	основной	дополнительной
продукция № 1	60	45
продукция № 2	70	30

Вариант 5. На предприятии, выпускающем изделия двух типов, производственная мощность цеха сборки составляет 100 изделий первого и 300 изделий второго типа в сутки. Прибыль от продажи изделия первого типа составляет 2540 руб., а второго - 1804 руб. Отдел технического контроля в состоянии проверить не более 178 изделий любого типа в сутки. Складское помещение способно вмещать 260 мест изделий, при этом изделие первого типа занимает 2 места, а изделие второго типа одно место. Предприятию поставлен план выпустить продукцию на 350 тыс. руб. в сутки. Можно ли выполнить такой план? Можно ли превысить его и, если можно, то на сколько руб.? Сколько изделий при этом следует выпускать в сутки?

Вариант 6. Завод выпускает 2 вида мороженого: сливочное и шоколадное. Для их изготовления используются 2 исходных продукта: молоко и наполнители, расходы которых на 1 кг мороженого и суточные запасы исходных продуктов даны в таблице:

Исходный продукт	Расход исходных продуктов на 1 кг мороженого		Запас, кг
	Сливочное	Шоколадное	
Молоко	0.82	0.56	412
Наполнители	0.49	0.72	372

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на сливочное мороженое превышает спрос на шоколадное мороженое не более чем на 116 кг. Кроме того, установлено, что спрос на шоколадное мороженое не превышает 382 кг в сутки. Отпускная цена 1 кг сливочного мороженого 110 ден.ед., шоколадного – 145 ден.ед. Определить количество мороженого каждого вида, которое должна производить фирма, чтобы доход от реализации продукции был максимальным.

Вариант 7. Чулочно-носочная фирма производит и продает два вида товаров: мужские носки и женские чулки. Фирма получает прибыль в размере 10 руб. от производства и продажи одной пары чулок и в размере 4 руб. от производства и продажи одной пары носков. Производство каждого изделия осуществляется на трех участках. Затраты труда (в часах) на производство одной пары указаны в следующей табл. 2 для каждого участка:

Участок производства	Чулки	Носки
1	0,023	0,012
2	0,036	0,014
3	0,032	0,026

Рассчитано, что в следующем месяце фирма ежедневно будет располагать следующими ресурсами рабочего времени на каждом из участков: 60 ч на участке 1; 70 ч на участке 2 и 100 ч на участке 3. Сколько пар носков и чулок следует производить ежедневно, если фирма имела максимальную прибыль?

Вариант 8. Фабрика производит два вида красок: первый – для наружных, а второй – для внутренних работ. Для производства красок используются два ингредиента: A и B. Максимально возможные суточные запасы этих ингредиентов составляют 6 и 8 т соответственно. Известны расходы A и B на 1 т соответствующих красок (см. табл.).

Ингредиенты	Расход ингредиентов, т		Запас, т
	Краска 1-го вида	Краска 2-го вида	
A	1,4	2,1	6,2
B	2,5	1,3	8,1

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску 2-го вида никогда не превышает спроса на краску 1-го вида более, чем на 1,5 т. Кроме того, установлено, что спрос на краску 2-го вида никогда не превышает 1,9 т в сутки. Цены одной тонны красок равны: 3500 руб. для краски 1-го вида; 2100 руб. для краски 2-го вида. Какое количество краски каждого вида надо производить, чтобы доход от реализации продукции был максимальным ? Какова будет выручка от продажи такой продукции?

Вариант 9. Цех выпускает два вида продукции, используя два вида полуфабрикатов. Продукция используется при комплектовании изделий, при этом на каждую единицу продукции второго вида требуется не более двух единиц продукции первого вида. Нормы расхода полуфабрикатов каждого вида на единицу выпускаемой продукции, общие объемы полуфабрикатов и прибыль от единицы каждой продукции предоставлены в таблице:

Полуфабрикаты	Нормы затрат на единицу продукции		Объем полуфабриката
	П1	П2	
1	1	2	800
2	6	2	2400
Прибыль, руб.	1070	1320	

Определить план производства, доставляющий максимум прибыли от реализации этой продукции. Определить оптимальные объемы продукции и прибыль от ее реализации.

Вариант 10. Фирма производит два безалкогольных широко популярных напитка "Колокольчик" и "Буратино". Для производства 1 л. "Колокольчика" требуется 0,02 ч. работы оборудования, а для "Буратино" – 0,04 ч., а расход специального ингредиента на них составляет 0,01 кг. и 0,04 кг. на 1 л. соответственно. Ежедневно в распоряжении фирмы 16 кг. специального ингредиента и 24 ч. работы оборудования. Доход от продажи 1 л. "Колокольчика" составляет 4 руб., а "Буратино" – 9 руб.

Определите ежедневный план производства напитков каждого вида, обеспечивающий максимальный доход от продажи.

Список рекомендуемой литературы

1. **РЕАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В MS EXCEL И MATHCAD** методические указания к лабораторным работам и самостоятельным занятиям по дисциплине «Проектирование и оптимизация технологических процессов» СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ Ставрополь 2017

2. **Братищев А.В.** Руководство к работе с пакетами MATLAB и SIMULINK. Элементы проектирования и анализа: учеб. пособие / А.В. Братищев. – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2012. – 87 с.

3.Очков В.Ф. Мультимедийный обучающий курс по Mathcad 13. Курс создан на фирме Мультимедиа Технологии – (495) 673-76-92, www.mmt-dl.ru

4. **Дьяконов В. П.** Simulink 5/6/7: Самоучитель. – М.: ДМК_Пресс, 2008. – 784 с.: ил.

5. Программирование на Visual Basic for Applications в Excel: учебное пособие / Р. Ш. Гайнанова, О. А. Широкова – Казань: КФУ, 2012. – 153с.