Математическая статистика в физической культуре и спорте

Кафедра «Математика»

Лекционный курс

Автор

Ларченко В.В.

Аннотация

Лекционный курс предназначен для студентов направления 49.03.01 «Физическая культура».

Автор

Ларченко Виктор Васильевич –

д.т.н., профессор

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЛЕКЦИЯ №1 4

ЛЕКЦИЯ №2 8

ЛЕКЦИЯ №3 12

ЛЕКЦИЯ №4 15

ЛЕКЦИЯ №5 18

ЛЕКЦИЯ №6 21

ЛЕКЦИЯ №1

Вероятность и риск, пространство элементарных событий

В этом разделе мы введем некоторые исходные понятия теории вероятностей и начнем работать с математическим аппаратом на несложных примерах. Рассматривая интересующие нас события как элементы множеств, мы можем в дальнейшем производить над ними определенные действия, что поможет нам анализировать совокупность этих событий.

Исторически первой группой случайных событий, которые были исследованы математиками, были азартные игры. Сами правила игры предполагали равноправие участников перед судьбой, при всем мастерстве игрока многое зависело от "везения". Мы также рассмотрим несколько примеров из этой области, т.к. они хорошо иллюстрируют некоторые возможности аппарата теории вероятностей, который пригодится нам в дальнейшем для других случаев. В условиях игры (в карты, в кости) математики и игроки связывают понятие вероятности выигрыша с шансом получения выигрышной комбинации по сравнению с общим числом всех возможных комбинаций.

Пример 1.1.

При падении монеты существует два возможных результата (математики называют эти результаты элементарными исходами): выпадет герб или выпадет решетка. Оба результата равновероятны, т.е. вероятность того, что монета останется лежать гербом вверх равна 50% (или 1/2), с такой же вероятностью выпадет другая сторона. Какой бы результат не загадал игрок как благоприятный для себя, его шанс выиграть и вероятность проиграть одинаковы.

Пример 1.2.

При бросании игральной кости существует уже шесть возможных элементарных исходов (количество выпавших очков может меняться от 1 до 6). Если игральная кость имеет правильную форму, все шесть результатов равновероятны. Другими словами, вероятность того, что при единственном выбрасывании кости выпадет, например, шесть очков, равна 1/6. Если только эта цифра считается выигрышем при данном броске, шансов выиграть у игрока в три раза меньше, чем в прошлый раз. Если мы хотим "уровнять" шансы при бросании игральной кости с шансом выиграть при бросании монеты, нам надо изменить правила игры, например, считать выигрышем выпадение любого четного числа. Поскольку игральная кость имеет три грани с четными числами и три грани с нечетными, шансы выиграть и проиграть при единственном броске у нас будут одинаковыми (вероятность выигрыша станет равной 1/2, т.е. такой же, как при бросании монеты).

Задание

При подбрасывании монеты вероятность выиграть составляет 1/2, а при бросании игральной кости выигрышем считается выпадение цифры шесть (вероятность выигрыша 1/6). Чему равна вероятность проигрыша в каждом случае? Значит ли это, что играть в кости менее выгодно?

Обсуждение

В каждом из двух случаев вероятность выиграть и проиграть должны составить в сумме 100% или единицу, поскольку ничейный вариант в этих ситуациях невозможен. Это означает, что при бросании монеты вероятность проиграть равна 1/2, а при бросании игральной кости - 5/6. А вот вопрос о "выгодах" предложения поиграть в кости по сравнению с предложением бросить монету не так прост, как это кажется. Оставив на минуту в стороне азартные игры, обсудим одну важную для бизнеса проблему. Решение о "выгодности" любого предпринимаемого нами действия, очевидно, зависит не только от нашей оценки риска данного предприятия, но и от величины предполагаемого выигрыша по сравнению с нашими ставками. Чем меньше шансов получить выигрыш, тем больше должна быть величина этого выигрыша по сравнению со ставкой, чтобы сделать игру привлекательной для потенциальных игроков. Забота о привлекательности условий игры, конечно, распространяется только на те случаи, когда игроки принимают решение об участии в процессе добровольно и осмысленно. Так, чем рискованнее финансовые вложения, тем большую прибыль мы ожидаем получить в результате. Когда соотношение "риск - прибыльность" кажется нам неподходящим, мы ищем возможности покинуть "игру". Поэтому при любой оценке бизнес-проекта оценка рисков не менее важна, чем оценка прибыльности, по сути, это - неотъемлемая часть финансово-экономического анализа. Возвращаясь к нашему заданию, пришло время обсудить финансовые условия игры. Какой именно выигрыш покажется нам справедливым и почему? Если при бросании монеты участвуют два игрока, сделавшие одинаковые ставки, причем выигравший забирает все, то возможный выигрыш в такой игре должен вдвое превышать исходную ставку. Менее очевидный случай - бросание кости. Должен ли выигрыш в шесть раз превышать ставку игрока, и откуда возьмется эта сумма, если игроков по-прежнему только двое? Вот если бы игроков было шестеро, и каждый поставил бы на разную цифру, то при одинаковых исходных ставках получилась бы вполне справедливая игра. Выигравший забрал бы в шесть раз больше, чем поставил, но шансы каждого игрока выиграть были бы одинаковыми. Если же играют двое, причем один выигрывает, только при выпадении цифры "шесть", значит второй выигрывает при любой другой ситуации, и его шансы на выигрыш в пять раз выше. Само по себе это не означает, что игра "нечестная", просто справедливые правила должны потребовать от второго игрока сделать исходную ставку, которая будет в пять раз выше, чем ставка первого игрока. Определение 1. Совокупность всех возможных результатов опыта в теории вероятности называется пространством элементарных исходов, мы будем обозначать это пространство греческой буквой W. Элементарные исходы обозначаются как w_i, где i может принимать значения от одного до максимума по числу возможных вариантов результата опыта. Для наглядности W изображают в виде некоторой области на плоскости, а элементарные исходы w_i - точками в этой области. Мы будем также пользоваться математическим обозначением $W = \{w_i, i=1, ...\}$ для описания того факта, что пространство элементарных исходов W образуется совокупностью всех элементарных исходов w_i. Определение 2.

Элементарные исходы могут образовывать группы, каждая из которых называется событием. Событие A, принадлежащее пространству W, (обозначается A M W, см. рисунок), наступает тогда и только тогда, когда наступает один из элементарных исходов w_i, входящих в A.

Пример 1.3.

В Примере 2 событием можно считать факт выпадения четной цифры при бросании кости. Это событие наступает, когда выпадает или цифра два, или четыре, или шесть (при трех элементарных исходах из шести возможных). Мы будем пользоваться математическим обозначением $A=\{w_i, i=1, ...\}$ для описания того факта, что событие образуется некоторой группой элементарных исходов (напомним, что событие содержится внутри пространства элементарных исходов, как говорят математики, является его подмножеством). В данном примере пространство элементарных исходов W состоит из следующих элементарных исходов:

$w_1=\{1\}$, $w_2=\{2\}$, $w_3=\{3\}$, $w_4=\{4\}$, $w_5=\{5\}$, $w_6=\{6\}$.

Событие A (выпадение четной цифры) можно записать как $A=\{w_2, w_4, w_6\}$. Иногда говорят, что элементарные исходы w_2, w_4 и w_6 благоприятны для наступления события A, в то время как w_1, w_3 и w_5, напротив, неблагоприятны для него.

Сортировка всего пространства элементарных исходов на благоприятные для интересующего нас события и неблагоприятные, как мы это увидим в следующем разделе, очень важна для нашей оценки вероятности реализации этого события.

Задание.

Из трех цифр 1, 2, 3 наудачу берутся две цифры и составляется двузначное число. Выпишите все элементарные исходы этого опыта. Составьте из элементарных исходов события A, B и C, такие что: A={число содержит цифру 1} B={число содержит только нечетные цифры} C={число четное} Запишите эти события, используя соответствующие математические обозначения.

Обсуждение.

Пространство элементарных исходов W состоит из следующих элементарных исходов: $w_1=\{12\}$, $w_2=\{21\}$, $w_3=\{13\}$, $w_4=\{31\}$, $w_5=\{23\}$, $w_6=\{32\}$. Тогда: $A= \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ $B=\{w_3, w_4\}$ $C=\{w_1, w_6\}$ Отметим, что само пространство элементарных исходов W также представляет собой событие, происходящее всегда (при любом элементарном исходе w). События, от которых в данном эксперименте "никуда не деться", называются достоверными событиями. События называются независимыми, если реализация одного из них не оказывает никакого влияния на вероятность реализации другого. К этому важному свойству мы еще вернемся в следующих разделах. События называются несовместными, если они не могут произойти одновременно. Тоже очень важное свойство, мы встретимся с ним еще не раз.

Пример 1.1.

Элементарные исходы являются несовместными событиями при однократном опыте. Например, если мы бросили монету один раз, выпадет или решетка, или герб, но, конечно, что-нибудь одно.

В простейшем случае (две стороны одной монеты, шесть граней кубика) вероятность реализации каждого элементарного исхода несложно посчитать из простого здравого смысла. Задача существенно усложняется, если этих элементарных исходов очень много и их приходится определенным образом комбинировать для составления интересующего нас события. Именно в таких более сложных ситуациях на помощь приходит математика. В следующем параграфе мы познакомимся с некоторыми правилами специального раздела математики – комбинаторики.

ЛЕКЦИЯ №2

Независимость событий. Последовательные события и слепой случай. Теорема умножения вероятностей. "Дерево вероятностей"

При оценки вероятности наступления какого-либо случайного события очень важно предварительно хорошо представлять, зависит ли вероятность наступления интересующего нас события от того, как развиваются остальные события. В случае классической схемы, когда все исходы равновероятны, мы уже можем оценить значения вероятности интересующего нас отдельного события самостоятельно. Мы можем сделать это даже в том случае, если событие является сложной совокупностью нескольких элементарных исходов. А если несколько случайных событий происходит одновременно или последовательно? Как это влияет на вероятность реализации интересующего нас события?

Если я несколько раз кидаю игральную кость, и хочу, чтобы выпала "шестерка", а мне все время не везет, значит ли это, что надо увеличивать ставку, потому что, согласно теории вероятностей, мне вот-вот должно повезти? Увы, теория вероятности не утверждает ничего подобного. Ни кости, ни карты, ни монетки не умеют запоминать, что они продемонстрировали нам в прошлый раз. Им совершенно не важно, в первый раз или в десятый раз сегодня я испытываю свою судьбу. Каждый раз, когда я повторяю бросок, я знаю только одно: и на этот раз вероятность выпадения "шестерки" снова равна одной шестой. Конечно, это не значит, что нужная мне цифра не выпадет никогда. Это означает лишь то, что мой проигрыш после первого броска и после любого другого броска - независимые события.

События А и В называются **независимыми**, если реализация одного из них никак не влияет на вероятность другого события. Например, вероятности поражения цели первым из двух орудий не зависят от того, поразило ли цель другое орудие, поэтому события "первое орудие поразило цель" и "второе орудие поразило цель" независимы.

Если два события А и В независимы, и вероятность каждого из них известна, то вероятность одновременного наступления и события А, и события В (обозначается АВ) можно посчитать, воспользовавшись следующей теоремой.

Теорема умножения вероятностей для независимых событий: **P(AB) = P(A)*P(B)** - вероятность **одновременного** наступления двух **независимых** событий равна **произведению** вероятностей этих событий.

Пример.

Вероятности попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответственно равны: p_1=0,7; p_2=0,8. Найти вероятность попадания при одном залпе обоими орудиями одновременно.

Решение:

как мы уже видели события А (попадание первого орудия) и В (попадание второго орудия) независимы, т.е. $P(AB)=P(A)*P(B)=p_1*p_2=0{,}56$.

Что произойдет, с нашими оценками, если исходные события не являются независимыми? Давайте немного изменим предыдущий пример.

Пример.

Два стрелка на соревнованиях стреляют по мишеням, причем, если один из них стреляет метко, то соперник начинает нервничать, и его результаты ухудшаются. Как превратить эту житейскую ситуацию в математическую задачу и наметить пути ее решения? Интуитивно понятно, что надо каким-то образом разделить два варианта развития событий, составить по сути дела два сценария, две разные задачи. В первом случае, если соперник промахнулся, сценарий будет благоприятный для нервного спортсмена и его меткость будет выше. Во втором случае, если соперник прилично реализовал свой шанс, вероятность поразить мишень для второго спортсмена снижается.

Для разделения возможных сценариев (их часто называют гипотезами) развития событий мы будем часто использовать схему "дерева вероятностей". Эта схема похожа по смыслу на дерево решений, с которым Вам, наверное, уже приходилось иметь дело. Каждая ветка представляет собой отдельный сценарий развития событий, только теперь она имеет собственное значение так называемой условной вероятности (q_1, q_2, $1-q_1$, $1-q_2$).

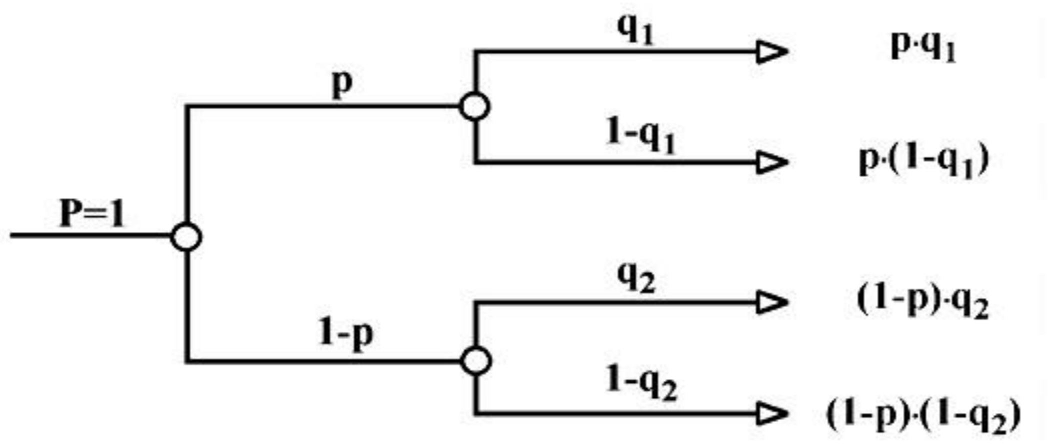


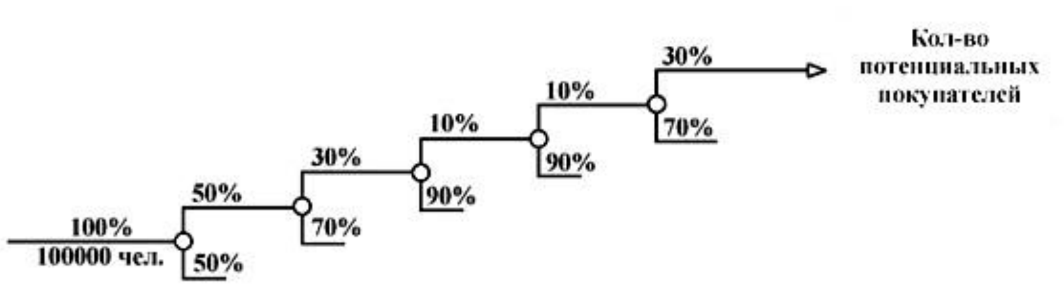
Рисунок 1. Анализ последовательных случайных событий.

Остается выяснить еще один немаловажный вопрос: откуда берутся исходные значения вероятностей в реальных ситуациях? Ведь не с одними же монетами и игральными костями работает теория вероятностей? Обычно эти оценки берутся из статистики, а когда статистические сведения отсутствуют, мы проводим собственное исследование. И начинать его нам часто приходится не со сбора данных, а с вопроса, какие сведения нам вообще нужны.

Пример.

Допустим, нам надо оценить в городе с населением в сто тысяч жителей объем рынка для нового товара, который не является предметом первой необходимости, например, для бальзама по уходу за окрашенными волосами.

Рассмотрим схему "дерева вероятностей". При этом значение вероятности на каждой "ветке" нам надо приблизительно оценить. Итак, наши оценки емкости рынка: 1) из всех жителей города женщин 50%, 2) из всех женщин только 30% красят волосы часто, 3) из них только 10% пользуются бальзамами для окрашенных волос, 4) из них только 10% могут набраться смелости попробовать новый товар, 5) из них 70% обычно покупает все не у нас, а у наших конкурентов.



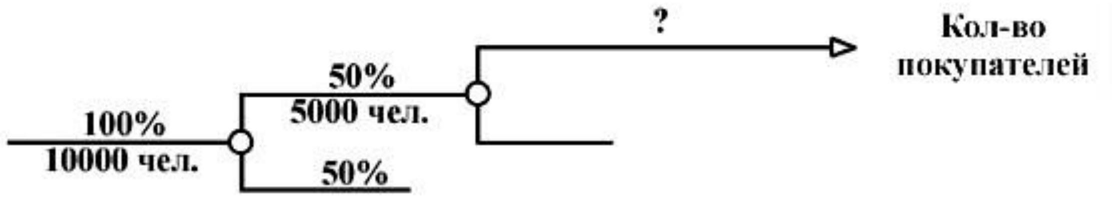
Решение:

По закону перемножения вероятностей, определяем вероятность интересующего нас события А= {житель города покупает у нас этот новый бальзам}=0,00045. Умножим это значение вероятности на число жителей города. В результате имеем всего 45 потенциальных покупательниц, а если учесть, что одного пузырька этого средства хватает на несколько месяцев, не слишком оживленная получается торговля.

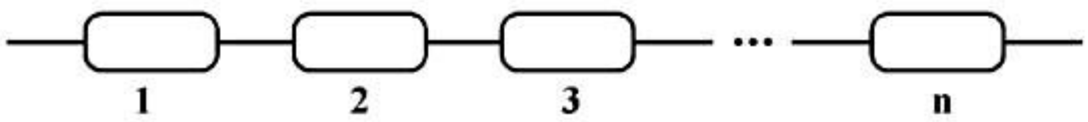
И все-таки польза от наших оценок есть. Во-первых, мы можем сравнивать прогнозы разных бизнес-идей, на схемах у них будут разные "развилки", и, конечно, значения вероятности тоже будут разные. Во-вторых, как мы уже говорили, случайная величина не потому называется случайной, что она совсем ни от чего не зависит. Просто ее точное значение заранее не известно. Мы знаем, что среднее количество покупателей может быть увеличено (например, с помощью рекламы нового товара). Так что имеет смысл сосредоточить усилия на тех "развилках", где распределение вероятностей нас особенно не устраивает, на тех факторах, на которые мы в состоянии повлиять. Рассмотрим еще один количественный пример исследования покупательского поведения. Пример. За день продовольственный рынок посещает в среднем 10000 человек. Вероятность того, что посетитель рынка заходит в павильон молочных продуктов, равна 1/2. Известно, что в этом павильоне в среднем продается в день 500 кг различных продуктов. Можно ли утверждать, что средняя покупка в павильоне весит всего 100 г?

Обсуждение.

Конечно, нельзя. Понятно, что не каждый, кто заходил в павильон, в результате что-то там купил.



Как показано на схеме, чтобы ответить на вопрос о среднем весе покупки, мы должны найти ответ на вопрос, какова вероятность того, что человек, зашедший в павильон, что-нибудь там купит. Если таких данных в нашем распоряжении не имеется, а нам они нужны, придется их получить самим, понаблюдав некоторое время за посетителями павильона. Допустим, наши наблюдения показали, что только пятая часть посетителей павильона что-то покупает. Как только эти оценки нами получены, задача становится уже простой. Из 10000 человек, пришедших на рынок, 5000 зайдут в павильон молочных продуктов, покупок будет только 1000. Средний вес покупки равен 500 грамм. Интересно отметить, что для построения полной картины происходящего, логика условных "ветвлений" должна быть определена на каждом этапе нашего рассуждения так же четко, как если бы мы работали с "конкретной" ситуацией, а не с вероятностями. Задачи для самопроверки 1. Пусть есть электрическая цепь, состоящая из n последовательно соединенных элементов, каждый из которых работает независимо от остальных.



Вопросы для самопроверки:

1. Известна вероятность p невыхода из строя каждого элемента. Определите вероятность исправной работы всего участка цепи (событие A).
2. Студент знает 20 из 25 экзаменационных вопросов. Найдите вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором три вопроса.
3. Производство состоит из четырех последовательных этапов, на каждом из которых работает оборудование, для которого вероятности выхода из строя в течение ближайшего месяца равны соответственно p1, p2, p3 и p4. Найдите вероятность того, что за месяц не случится ни одной остановки производства из-за неисправности оборудования.

ЛЕКЦИЯ №3

Статистическое (частотное) определение вероятности. Теорема сложения вероятностей

В этом разделе мы начнем применять на практике математический аппарат теории вероятностей для оценки вероятности наступления интересующего нас случайного события, которое, в свою очередь, является некоторой комбинацией других случайных событий.

Классическое определение вероятности P(A) события A как отношения числа благоприятных элементарных исходов **m** к числу всех элементарных исходов n предполагает, что все элементарные исходы **равновероятны.** Однако, это условие далеко не всегда выполняется**,** поэтому мы сейчас введем еще одно определение вероятности - **статистическое (или частотное)**. Как оценить вероятность интересующего нас события, если в процессе испытания элементарные исходы вовсе не обязаны быть равновероятными? Строго говоря, необходимо было бы много раз проделать интересующий нас опыт и узнать частоту реализации различных элементарных исходов. В пределе, при увеличении числа испытаний, отношение числа m реализованных событий A к общему количеству испытаний n и будет определять вероятность **P(A)=m/n.** Важно понимать, что статистический подход не противоречит классическому, а лишь расширяет границы возможного применения аппарата теории вероятностей. Поэтому все приемы, которые Вы уже освоили в рамках классической схемы, можно будет использовать и в дальнейшем. Для решения практических задач нам понадобятся следующие важные теоремы.

1. Теорема сложения вероятностей для несовместных событий:

P(A + B) = P(A) + P(B) - вероятность наступления в результате эксперимента хотя бы одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Обсуждение.

Напомним, что события A и B называются **несовместными**, если в результате опыта они не могут появиться вместе. (Пожалуйста, не путайте их с независимыми событиями, которые мы обсуждали в прошлом разделе. Независимые события могут спокойно сосуществовать друг с другом.)

Пример.

По статистике, в прошлом году 10% жителей нашего города встретили Новый год в отъезде, 40% ходили в гости или в ресторан, оставаясь в городе, остальные встречали Новый год дома. Считая, что эта тенденция сохранится, посчитайте вероятность того, что житель нашего города встретит Новый год дома.

Решение:

здесь можно смело пользоваться теоремой сложения вероятностей, т.к. события встречи Нового года в разных местах одним и тем же человеком - несовместны. Поэтому все, кто встретит Новый год в гостях или в другом городе (они составят вместе 40%+10%), не смогут встретить его дома. Принимая общее число жителей города за 100%, найдем, что 50% оставалось дома в прошлый раз. Полагая, что эти же пропорции сохранятся и в этом году, найдем, что вероятность встретить Новый год дома для жителя нашего города равна P=0,5. (Заметим, что в данном случае нам было удобно посчитать сначала вероятность обратного события, а потом вычесть результат из 100%.)

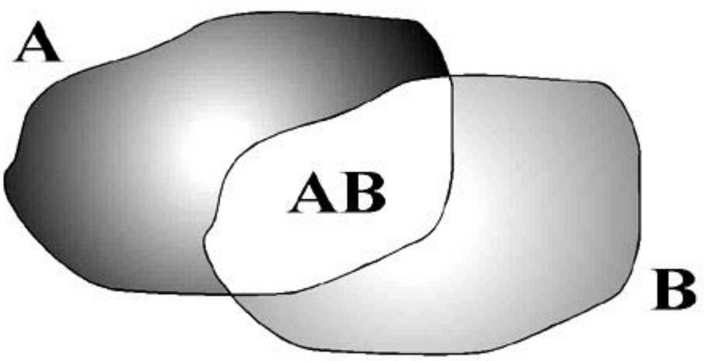
Что произойдет, с нашими оценками, если исходные события не являются несовместными? Давайте немного изменим предыдущий пример.

Пример.

Владелец фирмы частных такси хочет сделать прогноз количества клиентов на новогоднюю ночь. Пусть, по его сведениям, в прошлом году Новый год встретили дома 50%, в компании друзей или родственников, но не выезжая из города - 80%, в отъезде были 10%. Почему у него получилось в сумме больше 100%?

Видимо, каких-то жителей он посчитал больше одного раза. Скорее всего, тех, кто сидел дома, но, одновременно, принимал друзей или родственников, которые пришли к нему в гости. Поскольку эти события не являются несовместными, просто складывая вероятности, он завышает свои оценки.

Впрочем, это относится не только к оценке вероятности события, но и к решению любых задач на подсчет элементов объединения двух множеств путем сложения. Если множества частично перекрываются, сумма их элементов будет больше, чем реальное количество элементов, поскольку при арифметическом сложении элементы этого "перекрытия" мы невольно посчитали дважды, и как входящие в первое множество, и как входящие во второе. Выход здесь один: мы должны заметить, что множества частично "перекрываются", посчитать число элементов в их общей части и вычесть это число из суммы (т.к. при суммировании мы его посчитали дважды).



В случае подсчета вероятности события C, которое наступает или при наступлении события A, или при наступлении события B, если A и B не являются несовместными, можно воспользоваться следующей теоремой:

2. Общая теорема сложения вероятностей: P(C)=P(A)+P(B)-P(AB), где P(AB) - вероятность одновременного наступления и события A, и события B.

Вопросы для самопроверки

1. Из колоды в 36 карт наудачу вынимается одна. Какова вероятность того, что будет вынута пика или дама?
2. На полке стоят 15 книг, из них пять в переплете. Наудачу берут три книги. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых книг в переплете (событие А).

ЛЕКЦИЯ №4

Формула полной вероятности

В данном разделе мы рассмотрим более сложные задачи, имеющие большое практическое значение. Эти задачи встречается на практике в случае, если имеются несколько возможных сценариев развития событий (несколько вероятных гипотез). Известны как величины вероятности реализации каждого из сценариев, так и вероятность наступления интересующего нас события для любого из этих сценариев, а нас интересует, какова полная (совокупная) вероятность наступления интересующего нас события.

Предположим, что в результате опыта может произойти одно из n несовместных событий (гипотез) H_1, H_2, ..., H_n. Пусть также имеется некоторое событие A и известны $P(H_i)$ - вероятность гипотезы, $P(A!H_i)$ - условная вероятность события A при этой гипотезе). Тогда вероятность события A вычисляется по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)$$

Пример.

Из 40 деталей 10 изготовлены в первом цехе, 25 - во втором, а остальные - в третьем. Первый и третий цехи дают продукцию отличного качества с вероятностью 0,9, второй цех - с вероятностью 0,7. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь будет отличного качества?

Решение: обозначим событие A= {выбрана деталь отличного качества}, H_i= {выбранная деталь изготовлена в i цехе}, i=1, 2, 3. Тогда

$$P(H_1) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4};\quad P(H_2) = \frac{25}{40} = \frac{5}{8};\quad P(H_3) = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

По условию задачи $P(A|H_1) = P(A|H_3) = 0{,}9$, $P(A|H_2) = 0{,}7$ По формуле полной вероятности находим искомую вероятность:

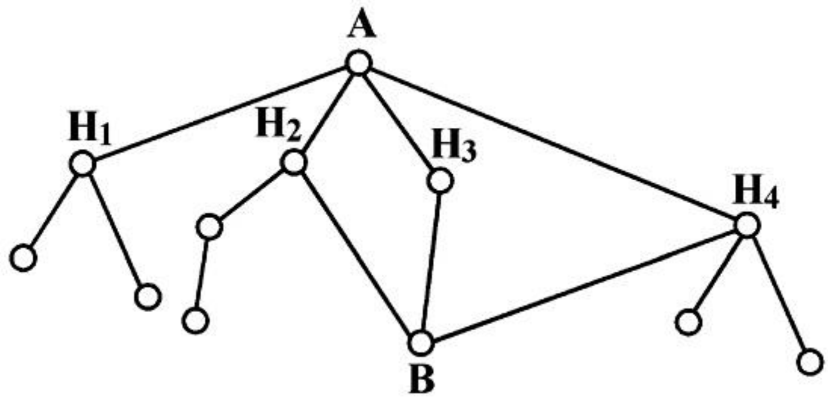
$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(A|H_i) = \frac{1}{4}\cdot 0{,}9 + \frac{5}{8}\cdot 0{,}7 + \frac{1}{8}\cdot 0{,}9 = 0{,}775$$

Пример.

На рисунке изображена схема дорог. Найти вероятность того, что турист, вышедший из пункта A, попадет в пункт B, если на развилке он наугад выбирает любую дорогу (кроме обратной).

Решение:

Обозначим H_i={приход туриста в пункт H_i}, i=1, 2, 3, 4. Поскольку, выйдя из пункта A, он выбирает любую дорогу наугад, то $P(H_i)$=1/4, i=1, 2, 3, 4.

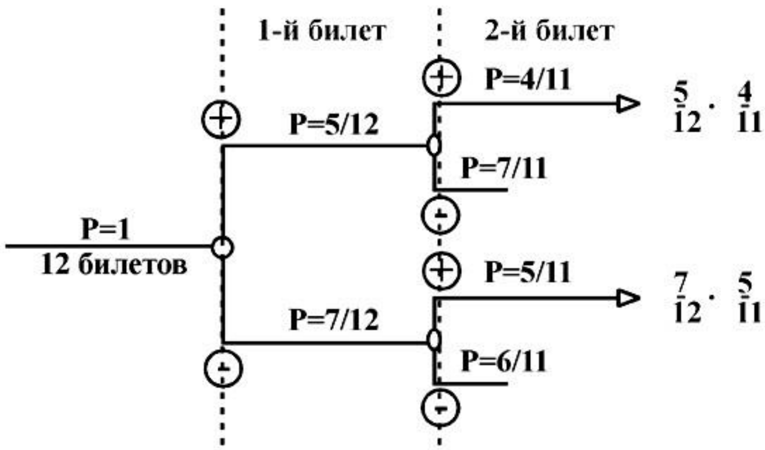


Исходя из схемы дорог, определяем, что P(B!H₁) = 0; P(B!H₂) =1/2; P(B!H₃) = 1; P(B!H₄) =1/3. Таким образом, по формуле полной вероятности

$$P(B) = \sum_{i=1}^{4} P(H_i)P(B|H_i) = \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{11}{24} \approx 0{,}458$$

Пример.

Из двенадцати лотерейных билетов пять выигрышных. Билеты вытягиваются по одному без возвращения. Какова вероятность того, что во второй раз вытянут выигрышный билет



Решение:

Как обычно, вдоль каждой ветви "дерева вероятностей" значения вероятностей перемножаются, а затем значения на концах нужных веток между собой складываются. В результате получаем ответ:

$$P = \frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11} + \frac{7}{12}\cdot\frac{5}{11} = \frac{5}{12}$$

После этого раздела Вам нужно выполнить первое письменное задание. Пожалуйста, пишите решение подробно, поясняйте все сделанные Вами предположения.

ЗАДАНИЕ

1. В отделе найма персонала проводится тестирование на вакантную руководящую должность. Тест составлен из двух производственных ситуаций, не связанных между собой логически. По каждой ситуации предлагается три примера дальнейших действий, из которых надо выбрать один наилучший.

Вероятность того, что претендент знает ответ на первую часть теста равна P_1, вероятность того, что он знает ответ на вторую часть равна P_2. Допустим, что в случае, когда претендент не знает ответа, он принимает решение произвольно выбирать из трех предлагаемых вариантов наугад. Нарисуйте дерево вероятностей и посчитаете вероятности для разных сценариев развития событий. Прокомментируйте свои оценки. Какова вероятность того, что испытуемый знает ответы на обе части теста? Какова полная вероятность, что испытуемый ответит правильно на обе части теста? Можете ли Вы предложить свои способы повышения достоверности результатов такого тестирования?

ЛЕКЦИЯ №5

Последовательность испытаний (схема Бернулли)

Практические задачи, связанные с оценкой вероятности наступления события в результате нескольких равноценных попыток могут анализироваться с применением формулы Бернулли или (при большом количестве таких попыток) с применением приближенной формулы Пуассона. Для работы с этим материалом Вам снова потребуется знание основ комбинаторики (Раздел 1.2).

Схема Бернулли состоит в следующем: производится последовательность испытаний, в каждом из которых вероятность наступления определенного события А одна и та же и равна p. Испытания предполагаются независимыми (т.е. считается, что вероятность появления события А в каждом из испытаний не зависит от того, появилось или не появилось это событие в других испытаниях). Наступление события А обычно называют успехом, а ненаступление - неудачей. Обозначим вероятность неудачи q=1-P(A)=(1-p). Вероятность того, что в **n** независимых испытаниях успех наступит ровно **m** раз, выражается **формулой Бернулли**:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0,\dots,n$$

Вероятность $P_n(m)$ при данном n сначала увеличивается при увеличении m от 0 до некоторого значения m_0, а затем уменьшается при изменении m от m0 до n. Поэтому m_0, называют **наивероятнейшим числом** наступлений успеха в опытах. Это число m_0, заключено между числами np-q и np+p (или, что то же самое, между числами n(p+1)-1 и n(p+1)) .Если число np-q - целое число, то наивероятнейших чисел два: np-q и np+p.

Важное замечание. Если np-q< 0, то наивероятнейшее число выигрышей равно нулю.

Пример.

Игральная кость бросается 4 раза. При каждом броске нас интересует событие A={выпала шестерка}.

Решение:

Здесь четыре испытания, и т.к. кубик симметричен, то
p=P(A)=1/6, q=1-p=5/6.

Вероятность того, что в 4 независимых испытаниях успех наступит ровно m раз (m < 4), выражается формулой Бернулли:

$$P_4(m) = C_4^m \left(\frac{1}{6}\right)^m \left(\frac{5}{6}\right)^{4-m}, \quad m = 0,\dots,4$$

Посчитаем эти значения и запишем их в таблицу.

m	0	1	2	3	4
P(m)	0.482253	0.096451	0.01929	0.003858	0.000772

Самое вероятное число успехов в нашем случае m_0=0.

Пример.

Вероятность появления успеха равна 3/5. Найти наивероятнейшее число наступлений успеха, если число испытаний равно 19, 20.

Решение:

при n =19 находим

$$np - q = 19 \cdot \frac{3}{5} - \frac{2}{5} = 11.$$

Таким образом, максимальная вероятность достигается для двух значений m0, равных 11 и 12. Эта вероятность равна $P_{19}(11) = P_{19}(12) = 0{,}1797$. При n=20 максимальная вероятность достигается только для одного значения m_0, т.к.

$$np - q = 20 \cdot \frac{3}{5} - \frac{2}{5} = 12 - \frac{2}{5}$$

не является целым числом. Наивероятнейшее число наступлений успеха m_0 равно 12. Вероятность его появления равна $P_{20}(12)=0{,}1797$. Совпадение чисел $P_{20}(12)$ и $P_{19}(12)$ вызвано лишь сочетанием значений n и p и не имеет общего характера.

На практике в случае, когда n велико, а p мало (обычно p < 0,1; npq < 10) вместо формулы Бернулли применяют приближенную формулу Пуассона

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}, \quad \text{где} \quad \lambda = np$$

Пример.

Радиоаппаратура состоит из 1000 элементов. Вероятность отказа одного элемента в течение года равна 0,002. Какова вероятность отказа двух элементов за год? Какова вероятность отказа не менее двух элементов за год?

Решение:

Будем рассматривать работу каждого элемента как отдельное испытание. Обозначим A= {отказ элемента за год}.

P(A)=p=0,002, l=np=1000*0,002=2

По формуле Пуассона

$$P_{1000}(2) \approx \frac{2^2}{2!} \cdot e^{-2} = 2 \cdot e^{-2} \approx 0{,}2707$$

Обозначим через P1000 (> 2) вероятность отказа не менее двух элементов за год. Переходя к противоположному событию, вычислим P1000 > 2) как:

$$P_{1000}(\geq 2) = 1 - P_{1000}(0) - P_{1000}(1) \approx 1 - \frac{2^0}{0!} \cdot e^{-2} - \frac{2^1}{1!} e^{-2} = 1 - 3e^{-2} \approx 0{,}594$$

Задачи для самопроверки

1. В семье пять детей. Считая вероятность рождения мальчика и девочки равными 1/2, определить вероятность того, что среди этих детей два мальчика.
2. Наладчик обслуживает 50 станков. Вероятность того, что в течение смены станок потребует регулировки, равна 1/3. Что более вероятно: а) регулировки потребуют 17 станков; б) регулировки потребуют 16 станков?
3. Какова вероятность того, что среди 500 наугад выбранных человек двое родились 1 апреля?

4. Среди 2000 человек приблизительно 16 левшей. Какова вероятность того, что среди сотни наугад выбранных человек окажется хотя бы один левша?

ЛЕКЦИЯ №6

Среднее арифметическое, мода и медиана. Среднее квадратическое отклонение

Вероятно, Вы отлично знаете, что такое среднее арифметическое. Если мы имеем набор каких-то величин, и все они одной природы (усреднять килограммы с километрами мы, конечно, не можем), надо посчитать сумму, а затем, поделив ее на количество слагаемых, найти среднее арифметическое. Казалось бы, простое и хорошо знакомое действие, но и тут имеется несколько проблем для обсуждения. При знакомстве с некоторыми "показателями" поневоле вспоминается известная шутка о "средней температуре по больнице".

Пример.

Допустим, фирма имеет две палатки, торгующие горячей выпечкой, которую они пекут на месте из полуфабрикатов. В таблице приводится примерная сводка ежедневной выручки каждой из палаток за неделю (в руб.).

Дни недели	Понедельник	Вторник	Среда	Четверг	Пятница	Суббота	Воскресенье
Палатка 1	205	268	258	218	341	1515	1397
Палатка 2	759	801	670	599	633	420	301

По сети Internet данные между компьютерами передаются разбитыми на порции – пакеты.

Пакеты состоят из данных, заголовка, необходимого для их доставки на место назначения. В заголовке указаны: адрес отправителя и получателя, № пакета и другая информация.

В системе Internet используются IP – адреса. Каждый IP – адрес состоит из 4-х цифр от 0 – до 255 разделённых точкой. На IP – адрес отводится 4 байта памяти. Каждый компьютер должен иметь свой адрес, причём все адреса – различны. В реальности только некоторые компьютеры имеют постоянный IP – адрес (провайдеры). Пользователь получает IP – адрес только на время работы в сети.

Для удобства пользователей была разработана доменная система обозначения компьютеров. Компьютер обозначается не трудными для запоминаниями числами, а именами. При этом сеть оказалось поделённой на части – домены. Домены даются во владение различным организациям, которые отвечают за их поддержку. Домены могут быть вложены друг в друга. Организация, отвечающая за более крупный домен, имеет право пользоваться более сегментом в пределах этого домена. Этот принцип нашёл своё отражение в формировании другого типа адресов, URL – адресов. Этот адрес состоит из нескольких слов, разделённых точками. Сначала указывается имя компьютера, имя самого мелкого домена, охватывающего домена и т. д., адрес заканчивается именем самого крупного домена – домена 1-го уровня (корневого).

В общем случае URL – адрес может указывать тип и место расположения ресурса (файла, написанного на языке HTML: protocol://host.domain/path/объект).

Компьютеры, к которым подключаются пользователи, называются хост – компьтеры. Обычно они имеют один или несколько постоянных адресов в Internet.

Protocol – конкретный протокол передачи данных первой из служб Internet (http). Пользователи узлов, входящих в состав www, пользуются протоколом http. Этот протокол задаёт правила общения между программой просмотра web – страницы и www – сервером, которые укладываются в схему «запро - ответ». Например http://www.rambler.ru По этому адресу в программах просиотра загружается стартовая страница системы rambler, а web – страница, описывающая поисковый адес системы имеет вид: http://www.rambler.ru/new/help/html. В этом адресе rambler – имя мелкого домена, а ru – имя корневого домена.

Указывая доменный адрес сервера и вид протокола, пользователь тем самым запрашивает определённую услугу – найти на сервере в нужном месте нужный HTML – документ. Т. о., чтобы просмотреть нужную web – страницу, пользователь в адресном поле поисковой программы должен ввести адрес нужной страницы и нажать «ENTER»