ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Математика»

Лекции по курсу

«Системный анализ»

Авторы
Азарова Л.В., Ароева Г.А., Глушкова В.Н.

Ростов-на-Дону, 2015

Аннотация

Лекции предназначены для студентов специальности 190109 очной формы обучения.

Авторы

Старший преподаватель

Азарова Л.В.

Старший преподаватель

Ароева Г.А.

Доцент кандидат физико - математических наук

Глушкова В.Н.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Системный анализ – это наука, которая занимается проблемой, связанной с принятием правильных решений в условиях большого количества информации.

Системный анализ как пограничная наука между практическим анализом и математикой включает в себя множество базовых понятий и инструментов, которые практически всегда используются для решения той или иной проблемы.

По своему содержанию и методам исследования к системному анализу примыкает математическая дисциплина – исследование операций.

Исследование операций – дисциплина, занимающаяся выборкой количественных рекомендаций, необходимых при планировании и организации любых целенаправленных действий.

Системный анализ, использующий количественные методы принятия решений, дает возможность полнее учитывать все факторы и явления, влияющие на решение проблемы.

Рассмотрим элементы исследования операций.

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Постановка задачи

Рассмотрим постановку задачи, возникающую при практической реализации принципа оптимальности в планировании и управлении.

Пусть решение принимаемое субъектом описывается набором чисел $\overline{X} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ (например, x_i –это количества выпускаемой продукции i-ого вида). Достоинства решения определяются значением целевой функции $F\left(\overline{X}\right)$, то есть функции, значения которой зависят от выбранных нами параметров производства. При этом наилучшим считается то решение, при котором целевая функция принимает max значение (если она описывает доход), или min значение (если она описывает издержки). Требуется найти те значения $\overline{X^0} = \{x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\}$, при которых $F\left(\overline{X^0}\right) = \max$, или $F\left(\overline{X^0}\right) = \min$. Множество $D = \{\overline{X}\}$ на котором ищется наше решение называется областью допустимых решений.

Возможны следующие два принципиально разных случая.

1. Если для решения доступны все точки пространства, то экстремум отыскивается во всем пространстве и называется безусловным. Если к тому же целевая функция $F\left(\overline{X}\right)$ непрерывно дифференцируема, то экстремум находится из условия $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$ (см. необходимые условия экстремума функции нескольких переменных).

2. Если не все точки пространства доступны (что, например, может быть связано с ограниченностью ресурсов), то

в этом случае имеем ограничения вида $g\left(\overline{X}\right)=0$, или $g\left(\overline{X}\right)\geq 0$. В этом случае экстремум ищется только среди допустимых точек и называется условным.

В данном методическом пособии рассматривается решение задач в которых экстремум ищется на границе выпуклой области заданной системой неравенств $g_i\left(\overline{X}\right)\geq 0, \quad i=1,2,...,n$. Решение таких задач изучается в разделе математики называемом «математическое программирование». К задачам математического программирования относятся задачи следующих типов: линейные, нелинейные, целочисленные, динамические, одно – и многокритериальные и т.д. Наиболее развитый раздел этих задач – Задачи линейного программирования (ЗЛП). Эти задачи впервые были исследованы в работах российского ученого Л.В.Канторовича в 1939 г. Затем они получили развитие в США, где в 1949 г. Данциг разработал Симплексный метод, наиболее широко используемый при решении ЗЛП.

Линейное программирование (ЛП) – это метод оптимизации моделей, в которых целевые функции и ограничения строго линейны.

ЛП успешно применяется в военной области, индустрии, сельском хозяйстве, транспортной отрасли, экономике, системе здравоохранения и даже в социальных науках.

2. МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Пример

Компания Mikks производит краску для внутренних и наружных работ из сырья двух типов C1 и C2. Следующая таблица представляет основные данные для задачи.

	Расход сырья (в тоннах) на тонну краски		Максимально возможный ежедневный расход сырья
	Для наружных работ	Для внутренних работ	
Сырье C1	6	4	24
Сырье C2	1	2	6
Доход (в тыс. долл.) на тонну краски	5	4	

Отдел маркетинга компании ограничил ежедневное производство краски для внутренних работ до 2 т (из-за отсутствия надлежащего спроса), а также поставил условие, чтобы ежедневное производство краски для внутренних работ не превышало более, чем на 1 т аналогичный показатель производства краски для внешних работ. Компания хочет определить оптимальное (наилучшее) соотношение между видами выпускаемой продукции для максимизации общего ежедневного дохода.

Задача (модель) линейного программирования (ЗЛП), как и любая задача исследования операций, включает три основных элемента.

1. Переменные, которые следует определить.

2. Целевая функция, подлежащая оптимизации.

3. Ограничения, которым должны удовлетворять переменные.

Определение переменных – первый шаг в создании модели. В нашем примере необходимо определить ежедневные объемы производства краски для внутренних и наружных работ. Обозначим эти объемы как переменные модели:
x_1 - ежедневный объем производства краски для наружных работ;
x_2 - ежедневный объем производства краски для внутренних работ.

Используя эти переменные, далее строим целевую функцию. Логично предположить, что целевая функция, как суммарный ежедневный доход, должна возрастать при увеличении ежедневных объемов производства красок. Обозначим эту функцию через z (она измеряется в тысячах долларов) и положим, что $z = 5x_1 + 4x_2$.
В соответствии с целями компании получаем задачу:
Максимизировать $z = 5x_1 + 4x_2$, или $z = 5x_1 + 4x_2 \to \max$.
При построении модели нужно учитывать ограниченные возможности ежедневного потребления сырья и ограниченность спроса на готовую продукцию.

$$\begin{pmatrix}\text{Используемый объем}\\ \text{сырья для производства}\\ \text{обоих видов краски}\end{pmatrix} \le \begin{pmatrix}\text{Максимально возможный}\\ \text{ежедневный расход сырья}\end{pmatrix}$$

Из таблицы с данными имеем следующее. Используемый объем сырья $C1 = 6x_1 + 4x_2$ (т)

Используемый объем сырья $C2 = 1x_1 + 2x_2$ (т)

Поскольку ежедневный расход сырья С1 и С2 ограничен соответственно 24 и 6 тоннами, получаем следующие ограничения.

$6x_1 + 4x_2 \le 24$ (сырье С1)

$x_1 + 2x_2 \le 6$ (сырье С2)

Существует еще два ограничения по спросу на готовую продукцию:

Максимальный ежедневный объем производства краски для внутренних работ не должен превышать 2 т, т.е. $x_2 \le 2.$

Ежедневный объем производства краски для внутренних работ не должен превышать ежедневный объем производства краски для наружных работ более чем на одну тонну (разность между ежедневными объемами производства красок для внутренних и наружных работ не должна превышать одной тонны), т.е. $x_2 - x_1 \le 1.$

Еще одно неявное ограничение состоит в том, что переменные x_1 и x_2 должны быть неотрицательными.

Таким образом, к сформулированным выше ограничениям необходимо добавить условие не отрицательности переменных: $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Окончательно задача будет записана следующим образом:

Максимизировать $z = 5x_1 + 4x_2$ (или $z = 5x_1 + 4x_2 \to \max$)

при выполнении следующих ограничений:

$6x_1 + 4x_2 \le 24,$

$x_1 + 2x_2 \le 6,$

$-x_1 + x_2 \le 1,$

$x_2 \le 2,$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Любое решение, удовлетворяющее ограничениям модели, является допустимым. Например, решение $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$ будет допустимым, так как не нарушает ни одного ограничения, включая условие не отрицательности. Чтобы удостовериться в этом, подставьте значения $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$ в левые части неравенств системы ограничений и убедитесь, что ни одно неравенство не нарушается. Значение целевой функции при этом решении будет равно $z = 5 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 19$ (тысяч долларов). Итак, задача сформулирована. Теперь встает вопрос о нахождении оптимального допустимого решения, доставляющего максимум целевой функции. После некоторых раздумий приходим к выводу, что задача имеет много (фактически, бесконечно много) допустимых решений. По этой причине невозможна подстановка значений переменных для поиска оптимума, т.е. нельзя применить простой перебор всех допустимых решений. Следовательно, необходима эффективная процедура отбора допустимых решений для поиска оптимального.

2.1 Некоторые сведения из линейной алгебры

Системой m линейных уравнений с n неизвестными называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где a_{ij} и b_i (i=1,…,m; b=1,…,n) – некоторые известные числа, а $x_1,\ldots,x_n$ – неизвестные. В обозначении коэффициентов a_{ij} первый индекс i обозначает номер уравнения, а второй j – номер неизвестного, при котором стоит этот коэффициент.

Коэффициенты при неизвестных будем записывать в виде матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

которую назовём матрицей системы.

Числа, стоящие в правых частях уравнений,

$b_1,\ldots,b_m$ называются свободными членами.

Совокупность n чисел $c_1,\ldots,c_n$ называется решением данной системы, если каждое уравнение системы обращается в равенство после подстановки в него чисел $c_1,\ldots,c_n$ вместо соответствующих неизвестных $x_1,\ldots,x_n$. Наша задача будет заключаться в нахождении решений системы. При этом могут возникнуть три ситуации:

1. Система может иметь единственное решение.

2. Система может иметь бесконечное множество решений. Например,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}.$$

Решением этой системы является любая пара чисел, отличающихся знаком.

1. И третий случай, когда система вообще не имеет решения.

Например,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases},$$

если бы решение существовало, то x1 + x2 равнялось бы одновременно нулю и единице.

Система линейных уравнений, имеющая хотя бы одно решение, называется совместной. В противном случае, т.е. если система не имеет решений, то она называется несовместной.

Приведем определение общего частного базисного решения:

Общим решением разрешенной системы уравнений называется совокупность выражений разрешенных неизвестных через свободные члены и свободные неизвестные:

$$\begin{cases} x_1 = b_1 - a_{1(m+1)}x_{m+1} - \dots - a_{1n}x_n, \\ x_2 = b_2 - a_{2(m+1)}x_{m+1} - \dots - a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m = b_m - a_{m(m+1)}x_{m+1} - \dots - a_{mn}x_n. \end{cases}$$

Частным решением системы уравнений называется решение, получающиеся из общего при конкретных значениях свободных переменных и неизвестных.

Базисным решением называется частное решение, получающееся из общего при нулевых значениях свободных переменных.

Базисное решение (вектор) называется вырожденным, если число его координат, отличных от нуля, меньше числа разрешенных неизвестных.

Базисное решение называется невырожденным, если число его координат, отличных от нуля, равно числу разрешенных неизвестных системы, входящих в полный набор.

Теорема

Разрешенная система уравнений всегда совместна (потому что она имеет хотя бы одно решение); причем если система не имеет свободных неизвестных, (то есть в системе уравнений все разрешенные входят в базис) то она определена (имеет единственное решение); если же имеется хотя бы одна свободная переменная, то система не определена (имеет бесконечное множество решений).

Пример

Найти общее, базисное и какое-либо частное решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 \quad + 2x_3 - x_4 + x_5 = 10, \\ \quad x_2 + 3x_3 - 4x_4 \quad = 20. \end{cases}$$

Решение:

1. Проверяем является ли система разрешенной?

Система является разрешенной (т.к. каждое из уравнений содержит в себе разрешенную неизвестную)

2. Включаем в набор разрешенные неизвестные — по одному из каждого уравнения.

В нашем случае мы можем включить в набор разрешенных неизвестных из первого уравнения — x_1 и x_5, а из второго уравнения только x_2. То есть набор может состоять из ($x_1 x_2$) или ($x_5 x_2$).

3. Записываем общее решение в зависимости от того какие разрешенные неизвестные мы включили в набор.допустим мы включили в набор неизвестные x_1 и x_2, тогда общее решение будет выглядеть так:

$$\begin{cases} x_1 = 10 - 2x_3 + x_4 - x_5, \\ x_2 = 20 - 3x_3 + 4x_4. \end{cases}$$

4. Находим частное решение. Для этого приравниваем свободные переменные, которые мы не включили в набор приравнять к произвольным числам.

Пусть $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 2$, тогда из общего решения находим:

$$\begin{cases} x_1 = 10 - 2 \cdot 0 + 1 - 2 = 9, \\ x_2 = 20 - 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 24. \end{cases}$$

Ответ: частное решение (один из вариантов) $x = (9,24,0,1,2)$

Находим базисное решение. Для этого приравниваем свободные переменные, которые мы не включили в набор к нулю.

$x_3 = x_4 = x_5 = 0$, то из общего решения получаем $x_1 = 10$, $x_2 = 20$ и базисное решение: $x_b = (10,20,0,0,0)$

2.2 Постановка ЗЛП

Линейной функцией переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется функция вида $F = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a_0$, где все a_i – некоторые const. В задачах линейного программирования все входящие в них функции – целевая функция $F(\overline{X})$, все ограничения $g_i(\overline{X})$ и т.д. являются линейными функциями переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Как правило ЗЛП может быть записана в одной из следующих двух форм.

1. Стандартная (основная) форма ЗЛП.

Найти вектор-план $\overline{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, удовлетворяющий системе ограничений

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \le b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

и доставляющий max целевой функции $F\left(\overline{X}\right) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \Rightarrow \max$

2. Каноническая форма ЗЛП.

Найти вектор-план $\overline{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, удовлетворяющий системе ограничений

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\ x_j \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

и доставляющий max целевой функции $F(\overline{X}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \Rightarrow \max$

Замечание Каждая из форм может быть легко сведена к другой.

Так ограничение $a\,x = b$ можно записать системой

$$\begin{cases} a\,x \geq b \\ a\,x \leq b \end{cases} \quad \text{откуда легко получаем} \quad \begin{cases} -a\,x \leq -b \\ a\,x \leq b \end{cases}$$

В результате от ЗЛП в канонической форме перешли к ЗЛП в стандартной форме.

Если ЗЛП записана в стандартной форме, например, $a\,x_1 \leq b$, $F(\overline{X}) = c\,x_1$, то введем дополнительную переменную $x_2 = b - a\,x_1$, после чего получим запись ЗЛП $a\,x_1 + x_2 = b$, $F(\overline{X}) = c\,x_1 + 0\,x_2$ в канонической форме.

2.3 Графическое решение ЗЛП

ЗЛП записанная в стандартной форме и содержащая только 2 переменные может быть решена графическим методом. Поскольку графический метод наиболее наглядный и служит основой для осмысления всех других методов, то рассмотрим его подробно. Пусть дана следующая ЗЛП :

Найти вектор – план $\overline{X} = \{x_1, x_2\}$, удовлетворяющий системе ограничений

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 \le b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}\,x_1 + a_{k2}\,x_2 \le b_k \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

и доставляющий максимум целевой функции $F(x_1, x_2) = c_1\,x_1 + c_2\,x_2 \Rightarrow \max$.

Очевидно уравнения

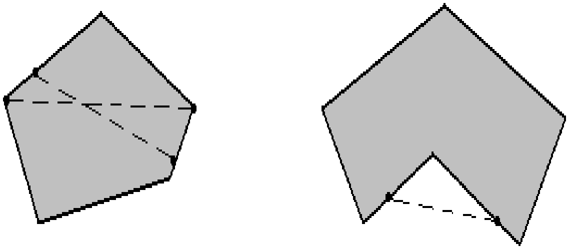
$$a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 = b_i, \quad i = 1,2,\dots m, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0$$

на плоскости OX_1X_2 определяют прямые, каждая из которых разбивает плоскость на 2 полуплоскости.

Неравенства

$$a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 \le b_i, \quad i = 1,2,\dots m, \quad x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

определяют каждое одну из этих двух полуплоскостей. Множество D допустимых решений представляет собой область, полученную от пересечения всех указанных полуплоскостей, удовлетворяющих вышеприведенной системе неравенств. Можно показать, что область D представляет собой выпуклый многоугольник. Выпуклым называется многоугольник, у которого отрезок прямой соединяющий любые две точки границы этого многоугольника целиком принадлежит этому многоугольнику. Так на рис.1 изображены:



Выпуклый многоугольник Невыпуклый многоугольник

Рис.1

Выпуклый многоугольник. Невыпуклый многоугольник рис.1. Для решения задачи надо найти такую точку этого многоугольника D, в которой целевая функция $F\left(\overline{X}\right)$ принимала бы максимальное значение.

Для определения этой точки проведем через многоугольник решений D линию уровня функции $F\left(\overline{X}\right)$, то есть такую линию, во всех точках которой целевая функция принимает постоянное значение $F(\overline{X}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 = const$. Увеличивая значение этой const получим семейство параллельных прямых, на каждой из которых целевая функция принимает все большие и большие значения. Очевидно, что из всех линий уровня этого семейства следует взять ту, которая проходит через самую крайнюю точку A области D, так как именно на ней целевая функция принимает самое большое значение. Действительно, поскольку эта линия проходит через крайнюю точку области D, то при дальнейшем увеличении значения целевой функции линия уровня выйдет за пределы области D и значения переменных x_1 и x_2 уже не будут принадлежать области допустимых решений. Поэтому координаты крайней точки A и являются оптимальным планом решаемой ЗЛП.

Для проведения линии уровня и определения направления в котором ее следует перемещать используется вектор «градиент функции F» с координатами grad F = { c_1, c_2 }, обладающий двумя важными свойствами:

- grad F перпендикулярен линии уровня $F(\overline{X}) = const$

- grad F всегда направлен в сторону увеличения значения функции $F(\overline{X})$.

При отыскании минимума функции $F\left(\overline{X}\right)$ линию уровня перемещают в направлении

-grad F = { $-c_1$, $-c_2$ }.

2.4 Выпуклые множества и многогранники

Перейдем теперь к более строгому изложению основ теории линейного_программирования, хотя будут изложены лишь наиболее простые результаты.

Рассмотрим n - мерное евклидово пространство R^n и пусть $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - точка в этом пространстве.

Рассмотрим две точки $\vec{x}_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ и $\vec{x}_2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)})$, принадлежащие R^n .Множество точек $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, которые могут быть представлены в виде $\vec{x} = \lambda\vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2, \quad 0 \le \lambda \le 1$

(в координатах это записывается так:

$x_i = \lambda x_i^{(1)} + (1-\lambda)x_i^{(2)}, \quad i = \overline{1,n}, \quad 0 \le \lambda \le 1$),

называется выпуклой комбинацией точек $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ или отрезком, соединяющим точки $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$. Сами точки $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ называются концами отрезка. В случаях $n=2$ и $n=3$ это · отрезок в обычном понимании этого слова на плоскости или в пространстве (см. рис. 2).Заметим, что при $\lambda=0$ выполняется: $\vec{x} = \vec{x}_2$, а при $\lambda=1$ $\vec{x} = \vec{x}_1$, т.е. при $\lambda=0$ и $\lambda=1$ получаются концы отрезка.

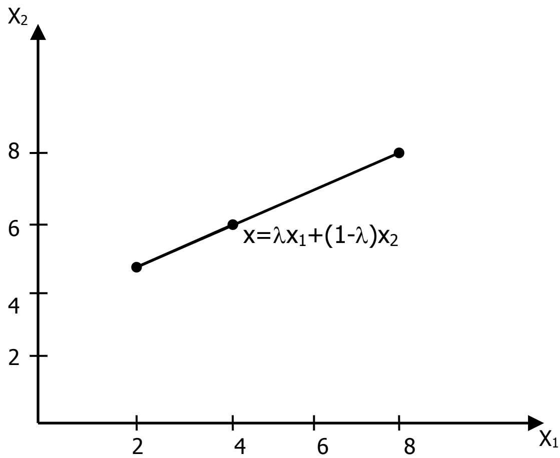


Рис. 2

Пусть в R^n заданы k точек $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$. Точка

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{x}_i \quad \text{где все } \alpha_i \geq 0 \text{ и } \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$$

называется выпуклой комбинацией точек $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$. Пусть $G \subset R^n$ есть некоторая область в пространстве R^n (другими словами, G есть некоторое множество точек из R^n)

Определение. Множество (область) $G \subset R^n$ называется выпуклым, если из того, что $\vec{x}_1 \in G$ и $\vec{x}_2 \in G$

следует,что
$\vec{x} = \lambda\vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2 \in G$
для · ·[0,1].

Другими словами, G · выпуклое множество, если оно, вместе с любыми двумя своими точками, содержит в себе отрезок, соединяющий эти точки.

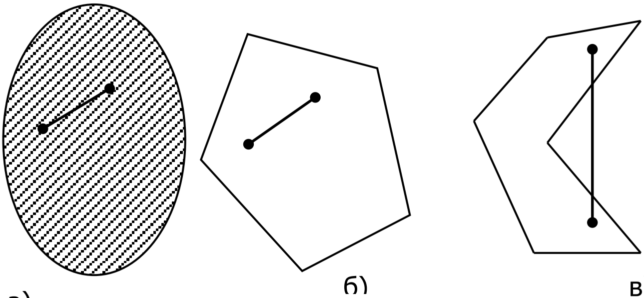


рис 3

На этих рисунках "а" и "б" - выпуклые множества, а "в" не является выпуклым множеством, так как в нём есть такая пара точек, что соединяющий их отрезок не весь принадлежит этому множеству.

Теорема 1. Пусть G · выпуклое множество. Тогда любая выпуклая комбинация точек, принадлежащих этому множеству, также принадлежит этому множеству.

Теорема 2. Допустимая область задачи линейного программирования является выпуклым множеством.

Теорема 3. Множество оптимальных планов задачи линейного программирования выпукло (если оно не пусто).

Теорема 4. Для того, чтобы задача линейного программирования имела решение, необходимо и достаточно, чтобы целевая функция на допустимом множестве была ограничена сверху (при решении задачи на максимум) или снизу (при решении задачи на минимум).

Применение математических методов в экономике приводит к необходимости отыскания неотрицательных решений системы линейных уравнений, т.е. таких, в которых $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \ldots, x_j \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$

При этом особое значение имеют неотрицательные базисные решения, которые принято называть опорными решениями.

Таким образом, у опорных решений все базисные неизвестные должны иметь только неотрицательные значения.

Пример графического решение ЗЛП для задачи использования сырья.

Пусть для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 требуется три вида сырья S_1, S_2, S_3. Параметры производства даны в таблице.

Выбрать производственный план, обеспечивающий максимальную прибыль.

Вид сырья	Запасы сырья (кол. единиц)	Количество единиц сырья идущих на единицу продукции	
		Продукция P_1	Продукция P_2
Сырье S_1	20	2	5
Сырье S_2	40	8	5
Сырье S_3	30	5	6
Прибыль от продажи единицы продукции (тыс.руб.)		50	40

Решение

Составим математическую модель ЗЛП.

Обозначим через **x_1 –** количество выпускаемой продукции P_1, а через **x_2 -** количество выпускаемой продукции P_2. Система ограничений, означающая, что количество израсходованного сырья не превышает имеющихся запасов, будет иметь вид

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \end{cases}$$

Ограничения $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$ очевидны.

Прибыль от реализации всей выпущенной продукции описывается линейной функцией двух переменных – целевой функцией $F(x_1, x_2) = 50x_1 + 40x_2$. Стремление получить максимальную прибыль приводит к необходимости выбрать такие значения x_1 и x_2 при которых целевая функция принимает максимально возможное значение

Итак, получили ЗЛП, записанную в стандартной форме :найти вектор – план $\overline{X} = \{x_1, x_2\}$, удовлетворяющий системе ограничений

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

и доставляющий максимум целевой функции $F(x_1, x_2) = 50x_1 + 40x_2 \Rightarrow \max$.

Поскольку неизвестных в задаче две (x_1 и x_2), то возможно ее графическое решение. Решение начнем с построения области допустимых решений D. Найдем границы области D, для чего в системе ограничений ЗЛП заменим знаки неравенств на знаки равенств и построим соответствующие прямые по двум точкам, откладываемым на осях координат. Имеем:

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2=20 & \begin{array}{c|c|c} x_1 & 0 & 10 \\ \hline x_2 & 4 & 0 \end{array} \\ 8x_1+5x_2=40 & \begin{array}{c|c|c} x_1 & 0 & 5 \\ \hline x_2 & 8 & 0 \end{array} \\ 5x_1+6x_2=30 & \begin{array}{c|c|c} x_1 & 0 & 6 \\ \hline x_2 & 5 & 0 \end{array} \\ x_1=0, \quad x_2=0 \end{cases}$$

Построив эти границы отметим стрелками полуплоскости, удовлетворяющие неравенствам, для чего подставим точку (0, 0) в каждое неравенство. Если эта точка удовлетворяет неравенству, то стрелки направлены в сторону этой точки, если нет, то в противоположную сторону. Учитывая, что неравенства

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ определяют на плоскости первую четверть заштрихуем общую часть всех полуплоскостей и получим искомую область допустимых решений D (пятиугольник OBACE) как это показано на рис. 4.

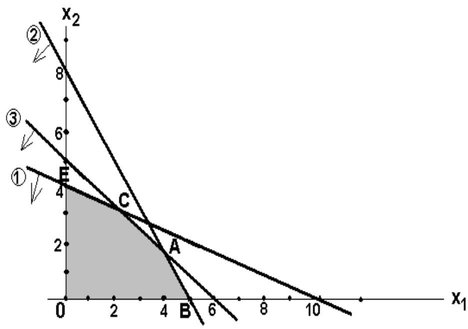


рис. 4

Теперь строим вектор grad F = $\{ 50,\ 40 \}$, причем, поскольку нас интересует только направление этого вектора, то на рисунке отметим вектор в 10 раз меньший, т.е. grad F = $\{ 5,\ 4 \}$. Затем через область D произвольно проведем линию уровня

F = c1 x1 + c2 x2 = const , которая в нашем случае будет записана в виде

50 x1 + 40 x2 = const. По свойству вектора grad F линия уровня

F = const расположена перпендикулярно этому вектору. Потом линию уровня перемещаем параллельно самой себе в направлении вектора grad F (так как ищем max F), до совмещения с последней точкой области D. Как видно из чертежа такой точкой будет точка А, которая и является решением исходной ЗЛП (рис. 5).

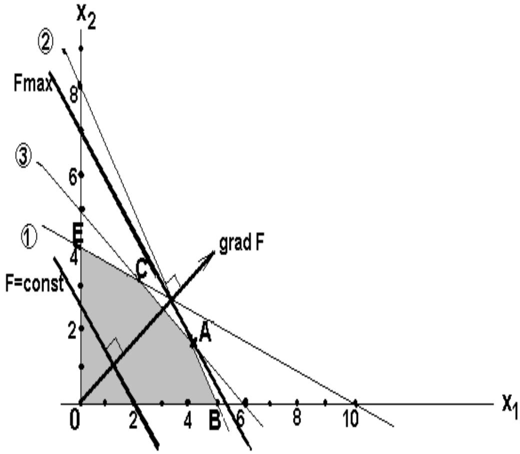


рис.5

Найдем координаты точки А. Так как точка А образована пересечением прямых отмеченных на чертеже номерами 2 и 3, то решим совместно систему уравнений 2 и 3. Имеем

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 = 40 \\ 5x_1 + 6x_2 = 30 \end{cases}$$

Решением будет

$$x_1 = \frac{90}{23} \approx 4, \qquad x_2 = \frac{40}{23} \approx 1{,}8$$

После этого находим значение целевой функции при этих x1, x2

$$F = \left(\frac{90}{23}, \frac{40}{23}\right) = 50 * \frac{90}{23} + 40 * \frac{40}{23} = \frac{6100}{23} \approx 265{,}2$$

Ответ : Для получения максимального дохода рекомендуется выпускать продукцию первого вида в количестве $\approx$ 4 ед., а продукцию второго вида в количестве $\approx$ 1,8 ед. в день.

При этом максимально возможный при данных параметрах производства доход составит $\approx$ 265,2 тыс. денежн. ед.

Замечания. Анализируя решение приведенной задачи можно сделать следующие заключения:

- Область D является выпуклым многоугольником, координаты точек которого являются решением исходной системы ограничений ЗЛП. Если система несовместна, то множество точек области D пустое и в этом случае ЗЛП решения не имеет.

- ЗЛП может не иметь решения и в случае если область D открытая. В этом случае линия уровня перемещаясь в направлении grad F уходит на бесконечность и значение целевой функции на ней неограниченно возрастает.

- Экстремальное значение целевой функции (оптимальное решение) всегда достигается в угловой точке (вершине) многоугольника допустимых решений D и никогда во внутренней точке. Если экстремальное решение достигается в двух соседних вершинах, то оно будет таким же и во всех точках отрезка (границы) соединяющего эти вершины.

3.ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Задача о размещении (транспортная задача) – это распределительная задача, в которой работы и ресурсы измеряются в одних и тех же единицах. В таких задачах ресурсы могут быть разделены между работами, и отдельные работы могут быть выполнены с помощью различных комбинаций ресурсов.

Примером типичной транспортной задачи является распределение (транспортировка) продукции, находящейся на складах, по предприятиям-потребителям.

Стандартная транспортная задача - это задача разработки наиболее экономичного плана перевозки продукции одного вида из нескольких пунктов отправления в пункты назначения. При этом величина транспортных расходов прямо пропорциональна объему перевозимой продукции и задается с помощью тарифов на перевозку единицы продукции.

Исходные параметры модели ТЗ:

1. n – количество пунктов отправления, m – количество пунктов назначения.
2. a_i – запас продукции в пункте отправления A_i ($i = \overline{1,n}$) [ед. тов.].
3. b_j – спрос на продукцию в пункте назначения B_j ($j = \overline{1,m}$) [ед. тов.].
4. c_{ij} – тариф (стоимость) перевозки единицы продукции из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j [руб./ед. тов.].

Искомые параметры модели ТЗ

1. x_{ij} – количество продукции, перевозимой из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j [ед. тов.].
2. $L(X)$ – транспортные расходы на перевозку всей продук-

ции [руб.].

Этапы построения модели

1. Определение переменных.
2. Проверка сбалансированности задачи.
3. Построение сбалансированной транспортной матрицы.
4. ЗаданиеЦФ.
5. Задание ограничений.

Транспортная модель

$$L(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij}\rightarrow \min;$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i, i=\overline{1,n},\\ \sum_{i=1}^{n}x_{ij}=b_j, j=\overline{1,m},\\ \forall x_{ij}\geq 0\left(i=\overline{1,n}; j=\overline{1,m}\right).\end{cases} \qquad (7)$$

Целевая функция представляет собой транспортные расходы на осуществление всех перевозок в целом. Первая группа ограничений указывает, что запас продукции в любом пункте отправления должен быть равен суммарному объему перевозок продукции из этого пункта. Вторая группа ограничений указывает, что суммарные перевозки продукции в некоторый пункт потребления должны полностью удовлетворить спрос на продукцию в этом пункте. Наглядной формой представления модели ТЗ является транспортная матрица.

Таблица

Общий вид транспортной матрицы

Пункты отправления, A_i	Пункты потребления, B_j				Запасы, [ед. прод.]
	B_1	B_2	…	B_m	
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1m}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2m}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_n	c_{n1}	c_{n2}	…	c_{nm}	a_n
Потребность [ед. прод.]	b_1	b_2	…	b_m	$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$
Сумма запасов продукции во всех пунктах отправления должна равняться суммарной потребности во всех пунктах потребления, то есть. $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$					

Транспортная задача называется сбалансированной, если $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$, в противном случае –несбалансированной.

Поскольку ограничения транспортной модели могут быть выполнены только при сбалансированной ТЗ, то при построении транспортной модели необходимо проверять условие баланса.

В случае, когда суммарные запасы превышают суммарные потребности, необходим дополнительный фиктивный пункт потребления, который будет формально потреблять существующий излишек запасов, то есть:

Если суммарные потребности превышают суммарные запасы, то необходим дополнительный фиктивный пункт отправления, формально восполняющий существующий недостаток продукции в пунктах отправления:

$$a_{\phi} = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i .$$

Введение фиктивного потребителя или отправителя повлечет необходимость формального задания фиктивных тарифов c_{ij}^{ϕ} (реально не существующих) для фиктивных перевозок. Поскольку нас интересует определение наиболее выгодных *реальных* перевозок, то необходимо предусмотреть, чтобы при решении задачи (при нахождении опорных планов) *фиктивные* перевозки не рассматривались до тех пор, пока не будут определены все реальные перевозки. Для этого надо фиктивные перевозки сделать невыгодными, то есть дорогими, чтобы при поиске решения задачи их рассматривали в самую последнюю очередь. Таким образом, величина фиктивных тарифов должна превышать максимальный из реальных тарифов, используемых в модели, то есть

$$c_{ij}^{\phi} > \max c_{ij} \left(i = \overline{1,n}; j = \overline{1,m}\right).$$

На практике возможны ситуации, когда в определенных направлениях перевозки продукции невозможны, например, по причине ремонта транспортных магистралей. Такие ситуации моделируются с помощью введения так называемых запрещающих тарифов $c_{ij}^{з}$. Запрещающие тарифы необходимо сделать невозможными, то есть совершенно невыгодными перевозки в соответствующих направлениях. Для этого величина запрещающих тарифов должна превышать максимальный из реальных тарифов, используемых в модели:

$$c_{ij}^{з} > \max c_{ij} \left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}\right).$$

Построение первоначального опорного плана.

Распределительная таблица имеет вид

					поставщики
	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	….	c_{1n} x_{1n}	**a_1**
	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…….	c_{2n} x_{2n}	**a_2**
	………	………	….	………	…….
	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	….	c_{mn} x_{mn}	**a_m**
потребители	**b_1**	**b_2**	**…**	**b_n**	$\sum a_i = \sum b_i$

Строки и столбцы по контуру таблицы служат для вспомогательных записей,

а в клетках самой таблицы в правом верхнем углу пишут тарифы перевозок c_{ij}, а посреди клетки величины перевозок. Если в данном плане перевозка от i-ого поставщика к j-ому потребителю присутствует и составляет величину $a \neq 0$, то значение $x_{ij} = a$ заносится в клетку (i,j) и эта клетка считается занятой. Если перевозка отсутствует, то в клетку ничего не заносится и клетка считается свободной.

В крайний правый (вспомогательный) столбец пишут количества грузов имеющихся у поставщиков. В крайнюю нижнюю (вспомогательную) строку пишут количество грузов требующихся потребителю.

Замечание. Число занятых клеток основной таблицы обязательно должно быть равным m+n-1 (m – число строк, n – число столбцов основной таблицы). Если занятых клеток меньше, то план вырожденный и следует добавить клетки с нулевой перевозкой до m+n-1. Тогда в свободную клетку с наименьшим тарифом пишут число «0», и клетка считается занятой. Для того, чтобы занятых клеток было именно столько сколько нужно разработан ряд методов заполнения таблицы. В дальнейшем будем пользоваться одним из них, наиболее удобным для применения.

3.1 Метод минимальной стоимости

Заполнение таблицы начинаем с клетки с min тарифом, в которую заносится максимально возможная перевозка. Из оставшихся клеток выбираем клетку со следующим по величине тарифом и заносим в нее максимально возможную перевозку из оставшихся, и т.д. На последнем шаге остается один не заполненный поставщик или потребитель и в его клетки заносятся оставшиеся перевозки уже несмотря на тарифы.

Пример. Даны поставщики $A_1=35$, $A_2=55$ и потребители $B_1=10$, $B_2=50$, $B_3=30$.

Матрица тарифов $C_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Строим первоначальный опорный план заполняя последовательно клетки методом минимальной стоимости.

1				

	22 10	28	33	**335**
3	66	33	35	**555**
	110	**550**	**330**	5

	22 10	28	33	**335**
	66	33 50	35	**555**
	110	**550**	**330**	5

	22 10	28	33 25	**335**
	66	33 50	35	**555**
	110	**550**	**330**	5

	22 10	28	33 25	**335**
	66	33 50	35 5	**555**
	110	**550**	**330**	5

3.2 Метод потенциалов

Для проверки построенного опорного плана на оптимальность используется метод потенциалов. Для этого по числу строк m и числу столбцов n вводятся двойственные переменные $\alpha_i,\ i=1,\dots,m,\quad \beta_j,\ j=1,\dots,n$, называемые потенциалами. После этого для каждой клетки определяется величина $\Delta_{ij}=\alpha_i+\beta_j-c_{ij}$, называемая оценкой этой клетки. Признак оптимальности сохраняется тот же, что и в симплексном методе, а именно:

Если задача решается на min, то опорное решение будет оптимальным в том и только в том случае, если для всех клеток оценки будут неположительными (то есть все $\Delta_{ij}\le 0$). При этом для занятых клеток обязательно должно выполняться условие $\Delta_{ij}=\alpha_i+\beta_j-c_{ij}=0$ то есть $\alpha_i+\beta_j=c_{ij}$, а для свободных клеток условие $\Delta_{ij}=\alpha_i+\beta_j-c_{ij}\le 0$, или что то же самое $\alpha_i+\beta_j\le c_{ij}$.

На основании указанных равенств для занятых клеток сначала находятся все потенциалы (для вырожденного плана учитывается и клетка с $x_{ij}=0$). Кроме того, поскольку потенциалов m+n штук, а занятых клеток m+n-1, то для полу-чения замкнутой системы добавляется еще одно уравнение. Обычно это

$\alpha_1 = 0$.

После того, как все потенциалы найдены, для свободных клеток проверяется условие $\Delta_{ij} = \alpha_i + \beta_j - c_{ij} \le 0$. Если это условие выполнено для всех свободных клеток, то план оптимальный. Если есть свободные клетки, где это условие не выполнено, то план не оптимальный и в эти клетки надо занести (перераспре-делить) перевозки. Для этого из клеток с нарушенными условиями оптимальности ($\Delta_{ij} > 0$) выбирают ту, в которой $\left|\Delta_{ij}\right| = \max$. Для перераспределения перевозок из выбранной клетки строят цикл пересчета.

<u>Определение.</u> Циклом в распределительной таблице ТЗ называется ломан-ная с вершинами в занятых клетках и звеньями вдоль столбцов и строк. В каждой вершине соединяются только 2 звена. Самопересечение вершиной не является.

Примеры циклов.

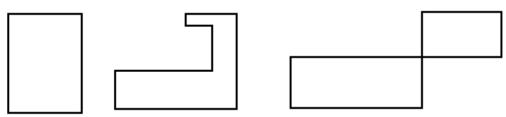


рис. 6

Для любой свободной клетки цикл единственен.

После построения цикла все его вершины помечаются знаками «+» и «-», начиная с «+» в исходной свободной клетке и чередуя знаки. Кроме исходной клетки все остальные знаки стоят в занятых клетках.

Из перевозок в вершинах со знаком «-» выбираем наименьшую и вычитаем ее из всех перевозок в вершинах со знаком «-», а затем прибавляем ее ко всем перевозкам в вершинах со знаком «+». Все остальные клетки без знаков оставляем без изменения. В результате одна свободная клетка из которой начинался цикл стала занятой, а одна занятая клетка в которой разность двух перевозок оказалась равной нулю стала свободной (в ней «0» не пишем). Число занятых клеток поэтому не изменилось. При этом, если разность двух перевозок оказалась равной нулю в двух клетках, то пустой делаем только одну клетку, ту, в которой тариф больше. В клетке с меньшим тарифом оставляем «0», и считаем ее занятой.

В результате получаем новый опорный план и повторяем всю процедуру проверки его на оптимальность заново.

3.3 Пример решения транспортной задачи

На 4-х базах у поставщиков имеется однородный груз в количестве

100, 200, 400, 300 ед. Его надо развести 5-и потребителям в количествах

50, 150, 250, 300, 200 ед. Стоимость доставки ед. груза от поставщика к потребителю задана матрицей тарифов

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \\ 4 & 5 & 1 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 7 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Составить план перевозок с минимальными транспортными затратами.

Решение

1.Проверяем условие баланса $\sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{j=1}^{5} b_j$, т.е.

100+200+400+300 = 1000 $\neq$ 50+150+250+300+200 = 950

Условие не выполнено, поэтому добавляем одного потребителя с 50 ед. груза.

2. Составляем распределительную таблицу, в которую заносится первый опорный план. У фиктивного потребителя в последнем столбце тарифы перевозок равны нулю и перевозки в его клетки заносятся в последнюю очередь.

							поставщики
	2	3	5	1 **100**	8	0	**100**
	4	5	1 **200**	6	2	0 **0**	**200**
	3	4 **150**	7	2 **200**	6	0 **50**	**400**
	3 **50**	7	1 **50**	5	4 **200**	0	**300**
потребители	**50**	**150**	**250**	**300**	**200**	**50**	1000= 1000

Сначала согласно правилу минимальной стоимости заполняем клетки с минимальным тарифом, то есть с тарифом «1» (1-я строка 4-й столбец заносим 100 ед., 2-я строка 3-ий столбец заносим 200 ед., 4-я строка 3-ий столбец заносим 50 ед.). Затем клетки с тарифом «2» (3-я строка 4-й столбец заносим 200 ед.). Потом клетки с тарифом «3» (4-я строка 1-й столбец заносим 50 ед.) После этого клетки с тарифом «4» (3-я строка 2-ой столбец заносим 150 ед., 4-я строка 5-й столбец заносим 200 ед.). И, наконец, оставшиеся 50 ед. груза у 3-го поставщика заносим в клетку фиктивного потребителя с тарифом «0» (3-я строка 6-й столбец заносим 50 ед.).

Весь груз распределен. И поставщики и потребители полностью удовлетворены. Для проверки суммируем перевозки по строкам и столбцам – они должны совпадать со значениями запасов и потребностей в последних столбцах и строках.

3. Проверяем число занятых клеток. Их 8, а должно быть m+n-1 = 4+6-1 = 9. Мы получили вырожденный план. С таким планом дальше работать нельзя, поэтому добавляем нулевую перевозку в клетку с минимальным тарифом (пусть, например, это будет клетка в последнем столбце во 2-й строке).

План стал невырожденным. Идем дальше.

4. Находим стоимость перевозок (значение целевой функции) по этому плану

F = 100·1 + 200·1 + 0·0 + 150·4 + 200·2 + 50·0 + 50·3 + 50·1 + 200·4 = 2300

5. Для проверки условия оптимальности находим потенциалы по занятым клеткам из условия $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$, $\alpha_1 = 0$.

Зная α_1 находим последовательно все остальные потенциалы из приведенных уравнений, выбирая каждый раз уравнение так, чтобы один из входящих в него потенциалов был бы известен. Уравнения решаются устно, а потенциалы заносятся в распределительную таблицу (например:

$$\alpha_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_4 = c_{14} - \alpha_1 = 1 - 0 = 1$$
$$\Rightarrow \quad \alpha_3 = c_{34} - \beta_4 = 2 - 1 = 1$$ и т. д.)

6. Когда все потен- циалы найдены, проверяем

условие оптимальности для свободных клеток. Для этого находим оценки $\Delta_{ij} = \alpha_i + \beta_j - c_{ij}$.

Так как нас интересует только случай когда $\Delta_{ij} > 0$ (план не оптимальный), то в таблицу заносятся только положительные значения Δ_{ij} в левый нижний угол клетки (например, в нашем случае это будет только $\Delta_{25} = 1+3-2=2$)

В результате получаем следующую таблицу

	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 3$	$\beta_3 = 0$	$\beta_4 = 1$	$\beta_5 = 3$	$\beta_6 = -1$	поставщики
$\alpha_1 = 0$	2	3	5	1 **100**	8	0	**100**
$\alpha_2 = 1$	4	5	1 **200**	6	2	0 **0**	**200**
$\alpha_3 = 1$	3	4 **150**	7	2 **200**	6	0 **50**	**400**
$\alpha_4 = 1$	3 **50**	7	1 **50**	5	4 **200**	0	**300**
потребители	**50**	**150**	**250**	**300**	**200**	**50**	1000= 1000

7. Так как в таблице есть положительные оценки клеток $\Delta_{ij} > 0$, то план не оптимальный. Для его улучшения выбираем клетку с положительной оценкой у которой $|\Delta_{ij}| = \max$. (Если

несколько одинаковых $\Delta_{ij} > 0$, то берем ту где тариф меньше.)

В нашем случае это одна клетка с $\Delta_{25} = 2$. Из этой клетки строим цикл пересчета согласно приведенному выше определению. В силу единственности другого цикла из этой клетки получиться не может

	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 3$	$\beta_3 = 0$	$\beta_4 = 1$	$\beta_5 = 3$	$\beta_6 = -1$	Поставщики
$\alpha_1 = 0$	2	3	5	1 **100**	8	0	**100**
$\alpha_2 = 1$	4	5	1 (-) **200**	6	2 (+)	0 **0**	**200**
$\alpha_3 = 1$	3	4 **150**	7	2 **200**	6	0 **50**	**400**
$\alpha_4 = 1$	3 **50**	7	(+) 1 **50**	5	(-) 4 **200**	0	**300**
Потребители	**50**	**150**	**250**	**300**	**200**	**50**	1000= 1000

Расставляем знаки в вершинах цикла чередуя их и начиная со знака «+» в свободной клетке (2;5) с положительной оценкой. Из клеток со знаком «-» выбираем ту где перевозка наименьшая. В нашем случае это

Θ = min (200, 200) =200.

Вычитая значение 200 из перевозок в клетках со знаком

«-» и прибавляя к перевозкам со знаком «+» получим новый опорный план. При этом свободные клетки и перевозки в клетках без знака оставляем без изменения.

Поскольку при вычитании освобождаются сразу две клетки, а надо чтобы только одна, то клетку (4;5) с большим тарифом «4» делаем свободной, а в клетку (2;3) с меньшим тарифом «1» заносим перевозку «0» и считаем ее занятой. В результате число занятых клеток осталось без изменения.

Замечание. В нашем случае три таблицы приведены только затем, чтобы показать последовательность заполнения клеток таблицы. На практике же все предыдущие рассуждения оформляются в виде одной таблицы, поэтому новый опорный план и его исследование приведем в одной таблице, как это и следует делать дальше.

	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 3$	$\beta_3 = 0$	$\beta_4 = 1$	$\beta_5 = 1$	$\beta_6 = -1$	поставщики
$\alpha_1 = 0$	2	3	5	1 **100**	8	0	**100**
$\alpha_2 = 1$	4	5	1 **0**	6	2 **200**	0 **0**	**200**
$\alpha_3 = 1$	3	4 **150**	7	2 **200**	6	0 **50**	**400**
$\alpha_4 = 1$	3 **50**	7	1 **250**	5	4	0	**300**
потребители	**50**	**150**	**250**	**300**	**200**	**50**	1000= 1000

В новом плане проверяем число занятых клеток – оно не нарушилось

Стоимость перевозок по новому плану составляет

$F = 100 \cdot 1 + 200 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 150 \cdot 4 + 200 \cdot 2 + 50 \cdot 0 + 50 \cdot 3 + 250 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1900$

Согласно формуле (6) должно выполняться

$F_{нов} = F_{стар} - \Delta \cdot \Theta$. В нашем случае $\Delta = 2$ и $\Theta = 200$, поэтому получаем $F_{нов} = 2300 - 2 \cdot 200 = 1900$, что подтверждает правильность всех проведенных вычислений.

Аналогично предыдущему вычисляются потенциалы и оценки свободных клеток. Потенциалы приведены в таблице. Все оценки свободных клеток оказались отрицательными, поэтому в таблице они не приводятся, а полученный план с такими оценками является оптимальным.

Ответ: Вычеркивая фиктивного потребителя, получаем матрицу оптимальных перевозок

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 150 & 0 & 200 & 0 \\ 50 & 0 & 250 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и min стоимость перевозок равную 1900 ед.

4. ТЕОРИЯ ИГР

Игра - это идеализированная математическая модель коллективного поведения нескольких лиц (игроков), интересы которых различны, что и порождает конфликт. Конфликт не обязательно предполагает наличие антагонистических противоречий сторон, но всегда связан с определенного рода разногласиями. Конфликтная ситуация будет антагонистической, если увеличение выигрыша одной из сторон на некоторую величину приводит к уменьшению выигрыша другой стороны на такую же величину и наоборот. Антагонизм интересов порождает конфликт, а совпадение интересов сводит игру к координации действий (кооперации).

Примерами конфликтной ситуации являются ситуации, складывающиеся во взаимоотношениях покупателя и продавца; в условиях конкуренции различных фирм; в ходе боевых действий и др. Примерами игр являются и обычные игры: шахматы, шашки, карточные, салонные и др. (отсюда и название "теория игр" и ее терминология).

В большинстве игр, возникающих из анализа финансово-экономических, управленческих ситуаций, интересы игроков (сторон) не являются строго антагонистическими ни абсолютно совпадающими. Покупатель и продавец согласны, что в их общих интересах договориться о купле-продаже, однако они энергично торгуются при выборе конкретной цены в пределах взаимной выгодности.

Теория игр - это математическая теория конфликтных ситуаций.

Цель теории игр - выработка рекомендаций по разумному поведению участников конфликта (определение оптимальных стратегий поведения игроков).

От реального конфликта игра отличается тем, что ведется по определенным правилам. Эти правила устанавливают последовательность ходов, объем информации каждой стороны о поведении другой и результат игры в зависимости от сложившейся ситуации. Правилами устанавливаются также конец игры, когда некоторая последовательность ходов уже сделана, и больше ходов делать не разрешается.

В теории игр предполагается, что игра состоит из **ходов**, выполняемых игроками одновременно или последовательно.

Ходы бывают **личными** и **случайными**. Ход называется **личным**, если игрок сознательно выбирает его из совокупности возможных вариантов действий и осуществляет его (например, любой ход в шахматной игре). Ход называется **случайным**, если его выбор производится не игроком, а каким-либо механизмом случайного выбора (например, по результатам бросания монеты).

Совокупность ходов, предпринятых игроками от начала до окончания игры, называется **партией**.

Одним из основных понятий теории игр является понятие стратегии. **Стратегией** игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры. В простых (одноходовых) играх, когда в каждой партии игрок может сделать лишь по одному ходу, понятие стратегии и возможного варианта действий совпадают. В этом случае совокупность стратегий игрока охватывает все возможные его действия, а любое возможное для игрока i действие является его стратегией. В сложных (многоходовых играх) понятие «варианта возможных действий» и «стратегии» может отличаться друг от друга.

Стратегия игрока называется оптимальной, если она обеспечивает данному игроку при многократном повторении игры максимально возможный средний выигрыш или минимально возможный средний проигрыш, независимо от того, какие стратегии применяет противник. Могут быть использованы и другие критерии оптимальности.

Возможно, что стратегия, обеспечивающая максимальный выигрыш, не обладает другим важным представлением оптимальности, как устойчивостью (равновесностью) решения. Решение игры является устойчивым (равновесным), если соответствующие этому решению стратегии образуют ситуацию, которую ни один из игроков не заинтересован изменить.

Повторим, что задача теории игр - нахождение оптимальных стратегий.

В зависимости **от числа участников** игры подразделяются на парные и множественные. **В парной** игре число участников равно двум, **в множественной** - более двух.

3. Участники множественной игры могут образовывать коалиции, как постоянные, так и временные. **По характеру** взаимоотношений игроков игры делятся на бескоалиционные, коалиционные и кооперативные.

Бескоалиционными называются игры, в которых игроки не имеют право вступать в соглашения, образовывать коалиции, и целью каждого игрока является получение по возможности наибольшего индивидуального выигрыша.

Игры, в которых действия игроков направлены на максимизацию выигрышей коллективов (коалиций) без последующего их разделения между игроками, называются **коалиционными**.

4.1. Примеры игр

Игра 1. Зачет

Пусть игрок 1 - студент, готовящийся к зачету, а игрок 2 - преподаватель, принимающий зачет. Будем считать, что у студента две стратегии: A_1- хорошо подготовиться к зачету; A_2 - не подготовиться. У преподавателя имеется тоже две стратегии: B_1 - поставить зачет; B_2 - не поставить зачет. В основу оценки значений выигрышей игроков можно положить, например, следующие соображения, отраженные в матрицах выигрышей

	B_1	B_2
A_1	+ (5) (оценили по заслугам)	- (-6) (обидно)
A_2	(1) (удалось словчить)	(0) (получил по заслугам)

Выигрыши студента

	B_1	B_2
A_1	+ (0) (все нормально)	- (-3) (проявил несправедливость)
A_2	-2 (дал себя обмануть)	- 1 (студент придет еще раз)

Выигрыши преподавателя

Игра 2. Морра

Игрой "морра" называется игра любого числа лиц, в которой все игроки одновременно показывают ("выбрасывают") некоторое число пальцев. Каждой ситуации приписываются выигрыши, которые игроки в условиях этой ситуации получают из "банка". Например, каждый игрок выигрывает показанное им число пальцев, если все остальные игроки показали другое число; он ничего не выигрывает во все остальных случаях. В соответствии с приведенной классификацией данная игра является стратегической; в общем случае, множественной (в этом случае игра может быть бескоалиционной, коалиционной, и кооперативной) конечной.

В частном случае, когда игра парная - это будет матричная игра (матричная игра всегда является антагонистической).

Пусть два игрока «выбрасывают» одновременно один, два или три пальца. При четной сумме выигрывает первый игрок, при нечетной – второй. Выигрыш равен сумме «выброшенных пальцев». Таким образом, в данном случае каждый из игроков имеет по три стратегии, а матрица выигрышей первого игрока (проигрышей второго) имеет вид:

	B_1	B_2	B_3
A_1	2	-3	4
A_2	-3	4	-5
A_3	4	-5	6

где A_i – стратегия первого игрока, заключающаяся в «выбрасывании» i пальцев;

B_j – стратегия второго игрока, заключающаяся в «выбрасывании» j пальцев.

Что должен делать каждый из игроков, чтобы обеспечить себе максимальный выигрыш?

Игра 3. Борьба за рынки

Некая фирма А, имея в своем распоряжении 5 условных денежных единиц, пытается удержать два равноценных рынка сбыта. Ее конкурент (фирма В), имея сумму равную 4 условным денежным единицам, пытается вытеснить фирму А с одного из рынков. Каждый из конкурентов для защиты и завоевания соответствующего рынка может выделить целое число единиц своих средств. Считается, что если для защиты хотя бы одного из рынков фирма А выделит меньше средств, чем фирма В, то она проигрывает, а во всех остальных случаях – выигрывает. Пусть выигрыш фирмы А равен 1, а проигрыш равен (-1), тогда игра сводится к матричной игре, для которой матрица выигрышей фирмы А (проигрышей фирмы В) имеет вид:

	B_0	B_1	B_2	B_3	B_4
A_0	1	-1	-1	-1	-1
A_1	1	1	-1	-1	-1
A_2	-1	1	1	-1	-1
A_3	-1	-1	1	1	-1
A_4	-1	-1	-1	1	1
A_5	-1	-1	-1	-1	1

Здесь A_i – стратегия фирмы А, заключающаяся в выделении i условных денежных единиц на защиту первого рынка; B_j – стратегия фирмы В, заключающаяся в выделении j условных денежных единиц на завоевание первого рынка.

4.2. Матричные игры

Наиболее разработанной в теории игр является конечная парная игра с нулевой суммой (антагонистическая игра двух лиц или двух коалиций), называемая матричной игрой.

Рассмотрим такую игру **G**, в которой участвуют два игрока **A** и **B**, имеющие антагонистические интересы: выигрыш одного игрока равен проигрышу второго. Так как выигрыш игрока **A** равен выигрышу игрока **B** с обратным знаком, можем интересоваться только выигрышем **a** игрока **A**. Естественно, игрок **A** хочет максимизировать **a**, а игрок **B** - минимизировать **a**. Для простаты отождествим себя мысленно с одним из игроков (пусть это будет игрок **A**), тогда будем называть игрока **B** - "противник" (разумеется, каких-то реальных преимуществ для **A** из этого не вытекает).

Пусть у игрока **A** имеется **m** возможных стратегий $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, ..., $\mathbf{A_m}$, а у противника - **n** возможных стратегий $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$, ..., $\mathbf{B_n}$ (такая игра называется игрой **m** x **n**).

Обозначим через $\mathbf{a_{ij}}$ выигрыш игрока **A**, в случае, если он воспользуется стратегией $\mathbf{A_i}$, а игрок В - стратегией $\mathbf{B_j}$. Предполагается, что выигрыш $\mathbf{a_{ij}}$ известен. Тогда мы можем составить прямоугольную таблицу (матрицу), в которой перечислены стратегии игроков и соответствующие выигрыши

B_j / A_i	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Если такая таблица составлена, то говорят, что игра **G** приведено к матричной форме. Отсюда рассматриваемая игра и получила название **матричная**. Само по себе приведение игры к такой форме уже может составить трудную задачу, а иногда и невыполнимую, из-за необозримого множества возможных стратегий игроков и трудности определения выигрышей $\mathbf{a_{ij}}$.

Рассмотрим некоторые задачи, решение которых сводится к решению матричных игр.

Игра 1. Вариант игры «Морра»

Игра состоит в том, что каждый из двух игроков независимо друг от друга выбирает определенную сторону монеты (“герб” или “решка”), затем одновременно называют свой выбор. Если игроки выбрали одну и ту же сторону монеты, то второй игрок платит первому одну гривну, если разные, то первый платит второму такую же сумму. Легко видеть, что матрица выигрышей (платежная матрица) этой игры имеет вид:

B_j / A_i	B_1	B_2
A_1	1	-1
A_2	-1	1

Здесь стратегии $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{B_1}$ - игроки **A** и **B** выбирают “герб”, а $\mathbf{A_2}$ и $\mathbf{B_2}$ - игроки **A** и **B** выбирают “решку”.

Нетривиальность сформулированной задачи, как и любой матричной игры, состоит в том, что каждый из игроков делает свой выбор независимо друг от друга.

Игра 2. Борьба за рынки

Фирмы А и В производят одинаковый товар и в настоящее время каждая «контролирует» 50% рынка. Улучшив качество товара, обе фирмы собираются развернуть рекламные кампании. При этом, приобретение новых покупателей одной фирмой сопровождается потерей этих покупателей другой фирмой. Исследование показало, что 60% потенциальных покупателей получают информацию через телевидение, 30% - через газеты и 10% - через радиовещание.

Задача каждой фирмы – выбрать стратегию рекламной кампании.

В данной игре у каждого из игроков по три стратегии:

A_1, B_1 – рекламировать товар через телевидение;

A_2, B_2 – через газеты;

A_3, B_3 – через радиовещание.

Поскольку это игра с нулевой суммой, то матрицу выигрышей фирмы А можно представить в следующем виде:

	B_1	B_2	B_3
A_1	0	30	50
A_2	-30	0	20
A_3	-50	-20	0

где a_{ij} – количество покупателей товара фирмы А в процентах, на которое оно увеличивается, если фирма А применяет стратегию A_i , а фирма В – стратегию B_j.

4.3 Принцип максимина в антагонистических играх. Седловая точка

Как отмечалось, важнейшим вопросом в теории игр (в том числе и матричных) является вопрос о выборе оптимальных стратегий для каждого из игроков.

Оптимальной стратегией игрока в матричной игре называется такая, которая обеспечивает ему максимальный выигрыш. Если игра повторяется неоднократно, то оптимальная стратегия должна обеспечивать максимальный средний выигрыш.

При выборе этой стратегии основой рассуждений является предположение, что **противник является, по меньшей мере, так же разумен, как и мы сами,** и делает все, чтобы добиться такой же цели.

Расчет на разумного противника - лишь одна из возможных позиций в конфликте, но в теории игр именно она кладется в основу.

При этом для выбора оптимальной стратегии используют принцип максимина: выбирай ту стратегию, чтобы при наихудшем для нас поведении противника получить максимальный выигрыш. Другими словами, принцип максимина предполагает выбор той стратегии, при которой наш минимальный выигрыш для различных стратегий максимален. Отсюда и название «принцип максимина».

Как видно, принцип максимина - это принцип крайне осторожного игрока, но именно он является основным принципом теории матричных игр.

Для пояснения принципа максимина рассмотрим пример матричной игры G (4x5) с платежной матрицей, приведенной на рис. 7.

Пример.

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	5	6	7	4	5	4
A_2	3	10	6	5	6	3
A_3	12	5	3	9	8	3
A_4	6	7	5	6	10	5
β_j	12	10	7	9	10	

максимин $\max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij}$

минимакс $\min\limits_{j} \max\limits_{i} a_{ij}$

Рис. 7

Какой стратегией игроку **А** воспользоваться? Есть соблазнительный выигрыш 12, при применении стратегии **A_3**. Но при этом противник может выбрать стратегию **B_3**, и игрок А получит выигрыш, равный всего трем.

Для определения оптимальной стратегии в соответствии с принципом максимина, запишем в правом добавочном столбце платежной матрицы минимальное значение α_i в каждой строке (минимум строки). Из всех значений α_i (правый столбец) выделим наибольшее. Ему соответствует стратегия A_4. Выбрав эту стратегию, мы во всяком случае можем быть уверены, что при любом поведении противника выигрыш будет не менее пяти.

Эта величина - наш гарантированный выигрыш. Он называется нижней ценой игры (или «максимином» - максимальный из минимальных выигрышей). Будем обозначать его α. В нашем примере $\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = 5$.

Теперь станем на точку зрения игрока В и порассуждаем за него. Выбирая стратегию, он хотел бы отдать поменьше, но должен рассчитывать на наихудшее для него поведение игрока А.

Припишем к платежной матрице (рис.7) нижнюю строку и в ней запишем наихудшее для игрока В возможные результаты (максимумы столбцов β_j.

Очевидно, осторожный противник должен выбрать стратегию, при которой величина β_j минимальна. Эта величина называется верхней ценой игры (или "минимаксом" - минимальный из максимальных проигрышей). Будем обозначать ее β. В нашем примере $\beta = \min_j \max_i a_{ij} = 7$.

Итак, исходя из принципа осторожности, игрок А должен выбрать стратегию A_4, а его противник - B_3. Такие стратегии называются максиминными или минимаксными стратегиями (вытекающие из принципа максимина).

До тех пор, пока обе стороны в нашем примере будут придерживаться своих максиминных стратегий, выигрыш игрока А и проигрыш игрока В будет равен $a_{43}=5$.

Легко показать, что нижняя цена игры никогда не превосходит верхней цены игры.

Случай $\beta=\alpha$, соответствует наличию у платежной матрицы так называемой **седловой точки**.

Определение. Точка (i^*, j^*) называется седловой точкой платежной матрицы $||\mathbf{a}_{ij}||$, если для всех остальных i и j этой матрицы выполняется условие

$a_{i^*j} \geq a_{i^*j^*} \geq a_{ij^*}$, т.е. **a**$_{ij}$ является одновременно минимумом своей строки и максимумом своего столбца.

Приведем без доказательства следующую теорему.

Теорема

Для того чтобы $\min_j \max_i a_{ij} = \max_i \min_j a_{ij}$.

необходимо и достаточно, чтобы матрица ||**a**$_{ij}$|| имела седловую точку. Кроме того, если (i^*, j^*) - седловая точка матрицы ||**a**$_{ij}$||, то

$$a_{i^* j^*} = \min_j \max_i a_{ij} = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Говорят, что матричная игра имеет седловую точку, если соответствующая ей матрица выигрышей (платежная матрица) имеет седловую точку.

4.4 Чистые и смешанные стратегии

Если в игре каждый из противников применяет только одну и ту же стратегию, то про саму игру в этом случае говорят, что она происходит в чистых стратегиях, а используемые игроком А и игроком В пара стратегий называются чистыми стратегиями.

Определение. В антагонистической игре пара стратегий (**A**$_i$, **B**$_j$) называется равновесной или устойчивой, если ни одному из игроков не выгодно отходить от своей стратегии.

Применять чистые стратегии имеет смысл тогда, когда игроки **A** и **B** располагают сведениями о действиях друг друга и достигнутых результатах. Если допустим, что хотя бы одна из сторон не знает о поведении противника, то идея равновесия нарушается, и игра ведется бессистемно.

Рассмотрим матричную игру **G** (3х4), платежная матрица которой приведена на рис 8.

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	5	7	10	8	5
A_2	10	9	11	10	9
A_3	8	6	7	4	4
β_j	10	9	11	10	

Рис. 8

В этом примере нижняя цена игры равна верхней: $\alpha=\beta=9$, т.е. игра имеет седловую точку.

Оказывается, что в этом случае максиминные стратегии A_2 и B_2 будут устойчивыми по отношению к информации о поведении противника.

Действительно, пусть игрок А узнал, что противник применяет стратегию B_2. Но и в этом случае игрок А будет по-прежнему придерживаться стратегии A_2, потому что любое отступление от стратегии A_2 только уменьшит выигрыш. Равным образом, информация, полученная игроком В, не заставит его отступить от своей стратегии B_2.

Пара стратегий A_2 и B_2 обладает свойством устойчивости, а выигрыш (в рассматриваемом примере он равен 9), достигаемый при этой паре стратегий, оказывается седловой точкой платежной матрицы.

Признак устойчивости (равновесности) пары стратегии - это равенство нижней и верхней цены игры.

Стратегии $\mathbf{A}_i$ и $\mathbf{B}_j$ (в рассматриваемом примере $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_2$), при котором выполняется равенство нижней и верхней цены игры, называются оптимальными чистыми стратегиями, а их совокупность - решением игры. Про саму игру в этом случае говорят, что она решается в чистых стратегиях.

Величина $v = \alpha = \beta,$ называется ценой игры.

Если $\nu>0$, то игра выгодна для игрока А, если $\nu<0$ - для игрока В; при $\nu=0$ игра справедлива, т.е. является одинаково выгодной для обоих участников.

Однако наличие седловой точки в игре - это далеко не правило, скорее - исключение. Большинство матричных игр, не имеет седловой точки, а следовательно, не имеет оптимальных чистых стратегий. Впрочем, есть разновидность игр, которые всегда имеют седловую точку и, значит, решаются в чистых стратегиях. Это - игры с полной информацией.

Теорема . Каждая игра с полной информацией имеет седловую точку, а следовательно, решается в чистых стратегиях, т.е. имеется пара оптимальных чистых стратегий, дающая устойчивый выигрыш, равный ν.

Если такая игра состоит только из личных ходов, то при применении каждым игроком своей оптимальной чистой стратегии она должна кончаться выигрышем, равным цене игры. Скажем, шахматная игра, как игра с полной информацией, либо всегда кончается выигрышем белых, либо всегда - выигрышем черных, либо всегда - ничьей (только чем именно - мы пока не знаем, так как число возможных стратегий в шахматной игре огромно).

Если матрица игры содержит седловую точку, то ее решение сразу находится по принципу максимина.

Возникает вопрос: как найти решение игры, платежная матрица которой не имеет седловой точки? Применение максиминного принципа каждым из игроков обеспечивает игроку А выигрыш не менее α, игроку - проигрыш не больше β. Учитывая что $\alpha<\beta$, естественно для игрока А желание увеличить выигрыш, а для игрока В - уменьшить проигрыш. Поиск такого решения производит к необходимости применять смешанные стратегии: чередовать чистые стратегии с какими-то частотами.

<u>Определение.</u> Случайная величина, значениями которой являются чистые стратегии игрока, называется его смешанной стратегией.

Таким образом, задание смешанной стратегии игрока состоит в указании тех вероятностей, с которыми выбираются его чистые стратегии.

Будем обозначать смешанные стратегии игроков **A** и **B** соответственно

$S_A = ||p_1, \ p_2, \ ..., \ p_m||,$

$S_B = ||q_1, \ q_2, \ ..., \ q_n||,$

где p_i - вероятность применения игроком **A** чистой стратегии $\mathbf{A}_i$; $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1;$

q_j - вероятность применения игроком B чистой стратегии B_j; $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$

В частном случае, когда все вероятности, кроме одной, равны нулю, а эта одна - единице, смешанная стратегия превращается в чистую.

Применение смешанных стратегий осуществляется, например, таким образом: игра повторяется много раз, но в каждой партии игрок применяет различные чистые стратегии с относительными частотами их применения, равными $\mathbf{p}_i$ и $\mathbf{q}_j$.

Смешанные стратегии в теории игр представляют собой модель изменчивой, гибкой тактики, когда ни один из игроков не знает, какую чистую стратегию выберет противник в данной партии.

Если игрок **A** применяет смешанную стратегию $S_A = ||p_1, p_2, \ldots, p_m||$, а игрок **B** смешанную стратегию $S_B = ||q_1, q_2, \ldots, q_n||$, то средний выигрыш (математическое ожидание) игрока **A** определяется соотношением

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i \cdot q_j .$$

Естественно, что ожидаемый проигрыш игрока **B** равен такой же величине.

Итак, если матричная игра не имеет седловой точки, то игрок должен использовать оптимальную смешанную стратегию, которая обеспечит максимальный выигрыш ν**.**

Естественно возникает вопрос: какими соображениями нужно руководствоваться при выборе смешанных стратегий? Оказывается принцип максимина сохраняет свое значение и в этом случае. Кроме того, важное значение для понимания решения игр, играют основные теоремы теории игр.

4.5. Основные теоремы матричных игр

Если игрок **A** выбирает смешанную стратегию $S_A = ||p_1, p_2, \ldots, p_m||$, а игрок **B** смешанную стратегию $S_B = ||q_1, q_2, \ldots, q_n||$, то средний выигрыш математическое ожидание выигрыша игрока **A** (проигрыша игрока **B**) определится суммой

,

которая может рассматриваться в качестве характеристики выбранных S_A и S_B.

Формируя свою стратегию S_A в антагонистической игре, игрок **А** в соответствии с принципом максимина должен выбрать такую стратегию, при которой минимально возможный выигрыш был бы максимален, т.е. такую стратегию, которая обеспечивает

$$\max_i \min_j \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i \cdot q_j = v_A.$$

Аналогичные рассуждения, связанные с поиском оптимальной смешанной стратегии игрока **В**, приводят к рекомендации выбрать такую стратегию S_B, которая обеспечивает

$$\min_j \max_i \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i \cdot q_j = v_B \,.$$

Весьма важным для теории и практики является вопрос о том, связаны ли между собой v_A и v_B. Ответ на него дает теорема о максимине.

<u>Теорема о максимине</u>. В конечной игре двух игроков (коалиций) с нулевой суммой (матричной игре) при $\alpha \neq \beta$ имеет место равенство $v_A = v_B$.

Теорема о максимине указывает на существование равновесия для случая $v_A = v_B$, при $\alpha \neq \beta$ и, следовательно, существования оптимальных смешанных стратегий.

Поэтому другая формулировка теоремы о максимине, называемая основной теоремой матричных игр определяется следующим образом.

<u>Основная теорема матричных игр</u>. Любая матричная игра имеет, по крайней мере, одно оптимальное решение, в общем случае, в смешанных стратегиях и соответствующую цену v.

Обе эти теоремы эквивалентны. Из этих теорем следует, что любая матричная игра имеет цену v. Цена игры v - средний выигрыш, приходящийся на одну партию, - всегда удовлетворяет условию $\alpha \le \nu \le \beta$,

т.е. лежит между нижней α и верхней β ценами игры.

Оптимальное решение игры в смешанных стратегиях, также как и решение в чистых стратегиях, обладает тем свойством, что каждый из игроков не заинтересован в отходе от своей оптимальной смешанной стратегии, если его противник применяет свою оптимальную смешанную стратегию, так как это ему невыгодно.

Эта пара стратегий образует в игре положение равновесия: один игрок хочет обратить выигрыш в максимум, другой - в минимум, каждый "тянет" в свою сторону и, при оптимальном поведение обоих, устанавливается равновесие и устойчивый выигрыш ν.

4.6. Решение матричной игры (2х2)

Пусть матричная игра G (2х2) имеет платежную матрицу

B_j \ A_i	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Предположим, что игра не имеет седловой точки, т.е. $\alpha \neq \beta$. При наличии седловой точки решение очевидно.

В соответствии с основной теоремой игра имеет оптимальное решение в смешанных стратегиях: $S_A = ||p_1, \ p_2||$ и $S_B = ||q_1, \ q_2||$, где вероятности применения (относительные частоты применения) чистых стратегий удовлетворяют соотношениям

$$p_1 + p_2 = 1; \qquad (1)$$

$$q_1 + q_2 = 1. \qquad (2)$$

В соответствии с теоремой об активных стратегиях, оптимальная смешанная стратегия обладает тем свойством, что обеспечивает игроку максимальный средний выигрыш, равный цене игры ν, независимо от того, какие действия предпринимает другой игрок, если тот не выходит за пределы своих активных стратегий. В частности, если игрок А использует свою оптимальную смешанную стратегию, а игрок В - свою чистую активную стратегию B_1, то цена игры ν равна

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = \nu, \qquad (3)$$

а при использовании игроком В чистой активной стратегии B_2, выигрыш будет равен

$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = \nu. \qquad (4)$$

Уравнения (1), (3) и (4) образуют систему трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестным:

p_1, p_2 и ν.

Решая ее, легко находим, что

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}. \qquad (5)$$

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}. \qquad (6)$$

$$\nu = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}. \qquad (7)$$

Если игрок В использует свою оптимальную смешанную стратегию, а игрок А - свою чистую активную стратегию A_1, то цена игры ν равна

$$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = \nu, \qquad (8)$$

а при использовании игроком А чистой активной стратегии A_2, выигрыш будет равен

$$a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = \nu. \qquad (9)$$

Уравнения (2), (8) и (9) образует систему трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными: q_1; q_2 и ν.

Решая ее, легко находим, что

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}. \qquad (10)$$

$$q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}. \qquad (11)$$

$$\nu = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}. \qquad (12)$$

Естественно, что в обоих случаях цена игры (выражения (7) и (12)) получилась одна и та же.

Чтобы соотношения (5), (6), (7), (10), (11), (12) имели смысл, необходимо потребовать, чтобы

$$\begin{cases} a_{22} - a_{21} > 0; \\ a_{11} - a_{12} > 0; \\ a_{22} - a_{12} > 0; \\ a_{11} - a_{21} > 0, \end{cases}$$

Или

$$\begin{cases} a_{22} - a_{21} < 0; \\ a_{11} - a_{12} < 0; \\ a_{22} - a_{12} < 0; \\ a_{11} - a_{21} < 0. \end{cases}$$

Тогда $0<p_1<1$; $0<p_2<1$; $0<q_1<1$; $0<q_2<1$.

Нетрудно заметить, что в этих неравенствах отражено предположение об отсутствии в рассматриваемой игре седловой точки. Действительно, ни один из четырех выигрышей a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} не может удовлетворить этим неравенствам, будучи минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце.

Решения системы уравнений (5), (6), (7) и (10), (11), (12), полученные алгебраическим методом, удобно получать и графическим методом (рис. 9). Для нахождения вероятностей p_1, p_2 и цены игры v в прямоугольной системе координат по оси абсцисс откладывается вероятность $p_1 \in [0,1]$, а по оси ординат - соответствующие этой вероятности - выигрыши игрока А.

При $p_1=0$, игрок А применяет чистую стратегию A_2. Если при этом игрок В применяет чистую стратегию B_1, то выигрыш игрока А равен a_{21} (уравнение (3)), а если игрок В применяет чистую стратегию B_2, то выигрыш игрока А равен a_{22} (уравнение (4)). При $p_1=1$, игрок А применяет чистую стратегию A_1.

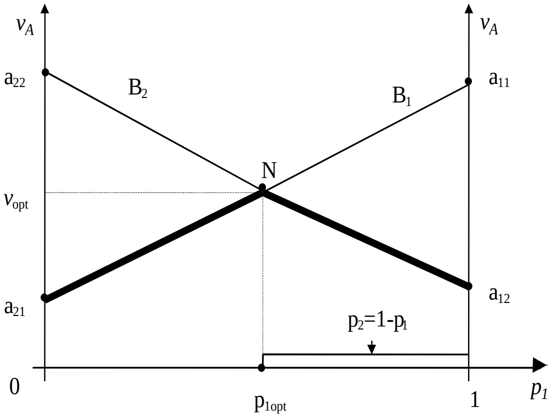


Рис. 9

Если при этом игрок В применяет чистую стратегию B_1, то выигрыш игрока А равен a_{11}, а при применении чистой стратегии B_2 - a_{12}. Так как значения p_1 лежат в пределах [0,1], то соединяя крайние точки для стратегий B_1 и B_2 (строя графики функций $v_A=(a_{11}-a_{21})p_1+a_{22}$ и $v_A=(a_{12}-a_{22})p_1+a_{22}$), получаем значения выигрышей игрока А для всех промежуточных значений p_1.

В соответствии с принципом максимина, игрок А должен выбрать такую смешанную стратегию, при которой его минимальный выигрыш максимален. Точка N пересечения отрезков прямых (рис. 9) и определяет как оптимальную цену игры v_{opt}, так и оптимальные вероятности p_{1opt} и $p_{2opt}=1-p_{1opt}$, соответствующие оптимальной смешанной стратегии игрока А, т.е. дает решения системы уравнений (1), (3), (4).

Для графического решения системы уравнений (2), (8), (9) отложим по оси абсцисс вероятность $q_1 \in [0,1]$, а по оси ординат соответствующие этой вероятности выигрыши игрока В:

$$\boldsymbol{v_B}=(a_{11}-a_{12})q_1+a_{12}; \qquad (13)$$

$$\boldsymbol{v_B}=(a_{21}-a_{22})q_1+a_{22}. \qquad (14)$$

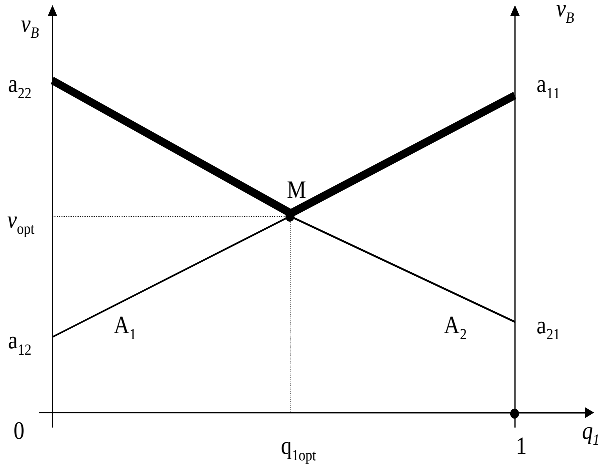


Рис. 10

Решением являются координат точки М пересечения прямых, описываемых уравнений (13) и (14):

$q_{1opt}; q_{2opt} = 1 - q_{1opt}$ и v_{opt}.

Это же следует и из принципа максимина, в соответствии с которым игрок В должен выбрать такую смешанную стратегию, при которой его максимальный проигрыш будет минимальным.

Для игры G(2x2) с седловой точкой геометрическая интерпретация решения быть представлена, например, следующим образом (рис.11).

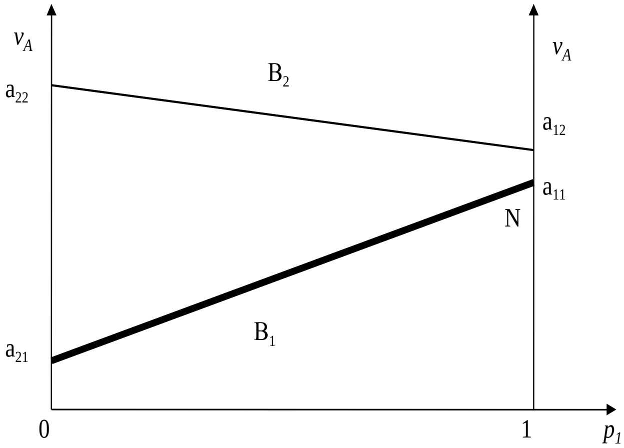


Рис. 11

Стратегия B_2 игрока В является для него явно невыгодной, так как, применяя ее, он в любой случае проигрывает больше, чем при применении стратегии B_1. В данной игре $p_{1opt}=1; p_{2opt}=0; \ v_{opt}=a_{11}$, т.е. игра имеет седловую точку N и решается в чистых стратегиях. Игрок А должен применять стратегию A_1, а игрок В - стратегию B_1.

На рис. 12 показан случай, в котором решением игры для игрока А является чистая стратегия A_2, а для игрока В - стратегия B_1.

Игра имеет седловую точку N.

Пример: Найти алгебраическим и геометрическим методами решение игры, платежная матрица которой имеет вид

B_j / A_i	B_1	B_2	α_i
A_1	4	-2	-2
A_2	1	3	1
β_j	4	3	

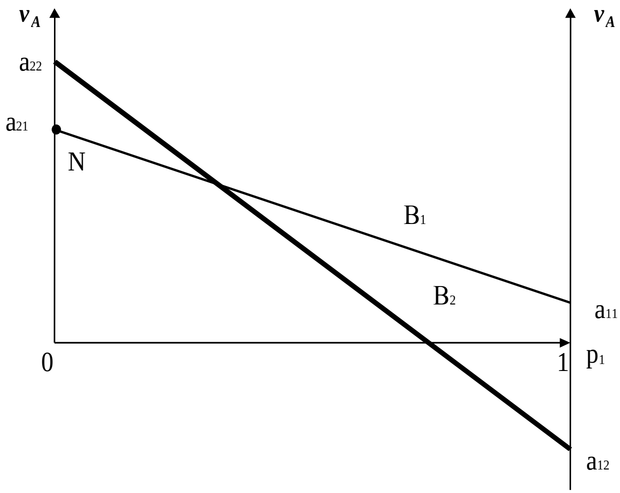


Рис. 12

В данной игре нижняя цена игры $\alpha=1$ не равна верхней цены игры $\beta=3$, поэтому игра не имеет седловой точки и, в соответствии с основной теоремой матричных игр, имеет оптимальное решение в смешанных стратегиях.

Для игрока А, в соответствии с формулами (5) и (6), оптимальные вероятности применения стратегий A_1 и A_2 равны:

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{3-1}{4+3-1+2} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4};$$

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{4+2}{4+3-1+2} = \frac{3}{4}.$$

Для игрока В, в соответствии с формулами (10) и (11), оптимальные вероятности применения стратегий B_1 и B_2 равны:

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{3+2}{4+3-1+2} = \frac{5}{8};$$

$$q_2 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{4-1}{8} = \frac{3}{8}.$$

Таким образом, оптимальные смешанные стратегии игроков $S_A = \left\| \frac{1}{4}; \frac{3}{4} \right\|$; $S_B = \left\| \frac{5}{8}; \frac{1}{8} \right\|$, а цена игры в соответствии с формулой (12) равна:

$$\nu = \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{4 \cdot 3 - (-2) \cdot 1}{4+3-1+2} = \frac{7}{4}.$$

Так как $\nu > 0$, то игра выгодна для игрока А.

Графическое изображение игры для игрока А показана на рис. 13.

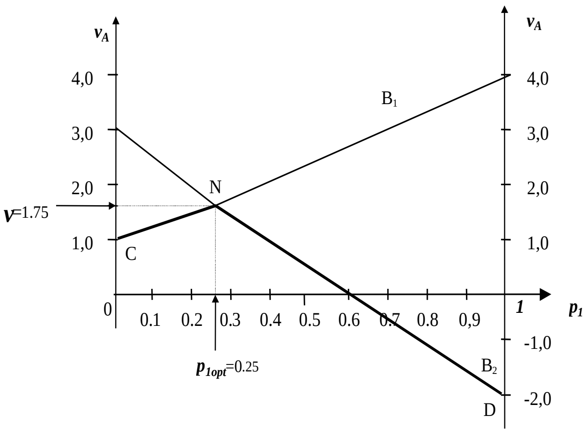


Рис. 13

Нижняя граница выигрыша игрока А определяется ломаной CND. Оптимальное решение, определяется точкой N, естественно, дает тоже решение, что и алгебраический метод: $S_A = \|0.25;0.75\|, \quad v = 1.75$.

Геометрическое изображение игры для игрока В показано на рис.14.

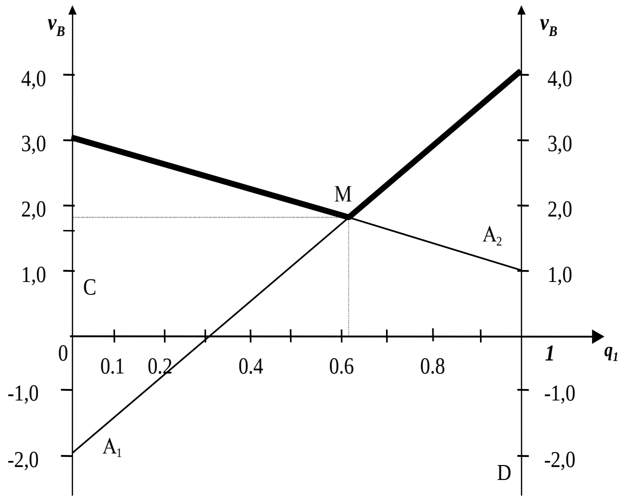


Рис. 14

Оптимальное решение, определяемое точкой М, дает решение $\boxed{}$.

4.7. Игры с «природой»

Отличительная особенность игры с природой состоит в том, что в ней сознательно действует только один из участников, в большинстве случаев называемый игрок1. Игрок 2 (природа) сознательно против игрока 1 не действует, а выступает как не имеющий конкретной цели и случайным образом выбирающий очередные «ходы» партнер по игре. Поэтому термин «природа» характеризует некую объективную действительность, которую не следует понимать буквально.

Матрица игры с природой A = ||aij||, где aij – выигрыш (потеря) игрока 1 при реализации его чистой стратегии i и чистой стратегии j игрока 2 ($i=1, \ldots, m$; $j=1,\ldots,n$).

Мажорирование стратегий в игре с природой имеет определенную специфику: исключать из рассмотрения можно лишь доминируемые стратегии игрока 1: если для всех $j=1,\ldots, n$ $a_{kj} < a_{lj}$, $k, l = 1,\ldots,m$, то k-ю стратегию принимающего решения игрока 1 можно не рассматривать и вычеркнуть из матрицы игры. Столбцы, отвечающие стратегиям природы, вычеркивать из матрицы игры (исключать из рассмотрения) недопустимо, поскольку при рода не стремится к выигрышу в игре с человеком, для нее нет це ленаправленно выигрышных или проигрышных стратегий, она дей ствует неосознанно.

Рассмотрим организацию и аналитическое представление игры с природой. Пусть игрок 1 имеет m возможных стратегий: $A_1, A_2, \ldots, A_m$, а у природы имеется n возможных состояний (стратегий): $П_1$, $П_2$, ..., $П_n$, тогда условия игры с природой задаются матрицей А выигрышей (потерь) игрока 1:

	$П_1$	$П_2$	…	$П_n$
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Возможен и другой способ задания матрицы игры с природой: не в виде матрицы выигрышей (потерь), а в виде так называемой матрицы рисков $R = ||r_{ij}||_{m,n}$. Величина риска - это размер платы за отсутствие информации о состоянии среды. Матрица R может быть построена непосредственно из условий задачи или на основе матрицы выигрышей (потерь) А.

Риск - это разность между результатом, который игрок мог бы получить, если бы он знал действительное состоянием среды и результатом, который игрок получит при j-ой стратегии.

Зная состояние природы (стратегию) $П_j$, игрок выбирает ту стратегию, при которой его выигрыш максимальный или потеря минимальна, т.е.

rij = j-aij, где j = max aij, при заданном j. i=1…m, если aij - выигрыш

rij = aij - j, где j = min aij, при заданном j. i=1…m, если aij – потери (затраты)

Неопределенность, связанную с полным отсутствием информации о вероятностях состояний среды (природы), называют «безнадежной».

В таких случаях для определения наилучших решений используются следующие критерии: Вальда, Сэвиджа, Гурвица.

Критерий Вальда. С позиций данного критерия природа рассматривается как агрессивно настроенный и сознательно действующий противник.

Если в исходной матрице по условию задачи результат aij представляет выигрыш лица, принимающего решение, то выбирается решение, для которого достигается значение W = max min aij, i=1…m, j=1…n, – максиминный критерий.

Если в исходной матрице по условию задачи результат aij представляет потери лица, принимающего решение, то выбирается решение, для которого достигается значение W = min max aij, i=1…m, j=1…n – минимаксный критерий.

В соответствии с критерием Вальда из всех самых неудачных результатов выбирается лучшей. Это перестраховочная по зиция крайнего пессимизма, рассчитанная на худший случай.

Критерий минимаксного риска Сэвиджа. Выбор стратегии аналогичен выбору стратегии по принципу Вальда с тем отличием, что игрок руководствуется не матрицей выигрышей A, а матрицей рисков R:

S = min max rij, i=1…m, j=1…n.

Применение критерия Сэвиджа позволяет любыми путями избежать большого риска при выборе стратегии, а значит, избежать большего проигрыша (по- терь).

Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица. Этот критерий при выборе решения рекомендует руководствоваться некоторым средним результатом, характеризующим состояние между крайним пессимизмом и безудержным оптимизмом.

Критерий основан на следующих двух предположениях: «природа» может находиться в самом невыгодном состоянии с вероятность (1-p) и в самом выгодном состоянии с вероятностью p, где p – коэффициент пессимизма.

Согласно этому критерию стратегия в матрице A выбирается в соответствии со значением:

HA = max p max aij + (1-p) min aij , i=1…m, j=1…n. если aij – выигрыш

HA = min p min aij + (1-p) max aij , i=1…m, j=1…n. если aij – потери (затраты)

При p = 0 критерий Гурвица совпадает с критерием Вальда. При p = 1 приходим к решающему правилу вида max max aij, к так называемой стратегии «здорового оптимизма», критерий максимакса. Применительно к матрице рисков R критерий пессимизма-оптимизма Гурвица имеет вид:

HR = min p max rij + (1-p) min rij , i=1…m, j=1…n.

При p = 0 выбор стратегии игрока 1 осуществляется по условию наименьшего из всех возможных рисков

(min rij); при p = 1 – по критерию минимаксного риска Сэвиджа.

Значение p от 0 до 1 может определяться в зависимости от склонности лица, принимающего решение, к пессимизму или оптимизму. При отсутствии ярко выраженной склонности p = 0,5 представляет наиболее разумный вариант.

В случае, когда по принятому критерию рекомендуются к ис пользованию несколько стратегий, выбор между ними может де латься по дополнительному критерию. Здесь нет стандартного подхода. Выбор может зависеть от склонности к риску игрока1.

Пример

Транспортное предприятие должно определить уровень своих производственных возможностей так, чтобы удовлетворить спрос клиентов на транспортные услуги на планируемый период. Спрос на транспортные услуги не известен, но прогнозируется, что он может принять одно из четырех значений: 10, 15, 20 или 25 тыс. т. Для каждого уровня спроса существует наилучший уровень провозных возможностей транспортного предприятия. Отклонения от этих уровней приводят к дополнительным затратам либо из-за превышения провозных возможностей над спросом (из-за простоя подвижного состава), либо из-за неполного удовлетворения спроса на транспортные услуги. Возможные прогнозируемые затраты на развитие провозных возможностей представлены в табл.

Таблица

Варианты провозных возможностей транспортного предприятия	Варианты спроса на транспортные услуги			
	1	2	3	4
1	6	12	20	24
2	9	7	9	28
3	23	18	15	19
4	27	24	21	15

Необходимо выбрать оптимальную стратегию. Использовать: критерий Вальда, критерий Сэвиджа, критерий Гурвица.

Решение

Имеются четыре варианта спроса на транспортные услуги, что равнозначно наличию четырех состояний «природы»: П1, П2, П3, П4. Известны так же четыре стратегии развития провозных возможностей транспортного предприятия: A1, A2, A3, A4. Затраты на развитие провозных возможностей при каждой паре Пi и Ai заданы следующей матрицей:

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	6	12	20	24
A_2	9	7	9	28
A_3	23	18	15	19
A_4	27	24	21	15

Построим матрицу рисков. В данном примере aij представляет затраты т.е. потери значит для построения матрицы рисков используется принцип rij = aij - j, где j = min aij.

Для П1: j = 6
Для П2: j = 7
Для П3: j = 9
Для П4: j = 15
Матрица рисков имеет следующий вид:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 11 & 9 \\ 3 & 0 & 0 & 13 \\ 17 & 11 & 6 & 4 \\ 21 & 17 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Критерий Вальда</u>

Так как в данном примере aij представляет затраты т.е. потери, то применятся минимаксный критерий.

Для A1: max aij = 24
Для A2: max aij = 28
Для A3: max aij = 23
Для A4: max aij = 27

W = min max aij = 23 наилучшей стратегией развития провозных возможностей в соответствии с минимаксным критерием Вальда будет третья стратегия (A3).

<u>Критерий минимаксного риска Сэвиджа</u>

Для A1: max rij = 11
Для A2: max rij = 13

Для А3: max rij = 17

Для А4: max rij = 21

S = min max rij = 11 наилучшей стратегией развития провозных возможностей в соответствии с критерием Сэвиджа будет первая стратегия (А1).

Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица

Положим значение коэффициента пессимизма p = 0,5.

Так как в данном примере aij представляет затраты (потери), то применятся критерий:

HA = min p min aij + (1-p) max aij

	min aij	max aij	p min aij + (1-p) max aij
Для А1	6	24	15
Для А2	7	28	17,5
Для А3	15	23	19
Для А4	15	27	

Оптимальное решение заключается в выборе стратегии А1

Рассчитаем оптимальную стратегию применительно к матрице рисков

HR = min p max rij + (1-p) min rij

	min rij	max rij	p max rij + (1-p) min rij
Для А1		11	5,5
Для А2		13	6,5
Для А3		17	10,5
Для А4		21	10,5

Оптимальное решение заключается в выборе стратегии А1

Вывод: в примере предстоит сделать выбор, какое из возможных решений предпочтительнее:

- по критерию Вальда – выбор стратегии А3;
- по критерию Сэвиджа – выбор стратегии А1;

- по критерию Гурвица – выбор стратегии А1.

Таким образом, эффективность систем в неопределенных операциях может оцениваться по целому ряду критериев. На выбор того или иного критерии оказывает влияние ряд факторов:

- природа конкретной операции и цель (в одних операциях допустим риск, в других – нужен гарантируемый результат);

- причины неопределенности (одно дело, когда неопределенности являются случайным результатом действия объективных законов природы, и другое, когда она вызывается действиями разумного противника, стремящегося помешать в достижении цели);

- характер лица, принимающего решение (одни люди склонны к риску в надежде добиться большого успеха, другие предпочитают действовать всегда осторожно).

Выбор какого-то одного критерия приводит к принятию решения по оценке систем, которое может быть совершенно отличным от решений, диктуемых другими критериями.

Тип критерия для выбора рационального варианта должен быть оговорен на этапе анализа систем, согласован с заказывающей организацией и в последующих задачах синтеза информационных и других сложных систем предполагается заданным. Процесс выбора вида критерия для учета неопределенности достаточно сложен. Устойчивость выбранного рационального варианта можно оценивать на основе анализа по нескольким критериям. Если существует совпадение, то имеется большая уверенность в правильности выбора варианта решения.

В случае, когда системы, выбранные по различным критериям, конкурируют между собой за право быть окончательно выбранными, могу применяться процедуры, основанные на мажоритарной обработке результатов оценки по простому большинству голосов. Особенностью мажоритарной обработки является опасность выбора систему, не являющейся лучшей.

В любом случае при выделении множества предпочтительных систем по разным критериям окончательный выбор системы осуществляет лицо, принимающее решение.

ИСПОЛЬЗУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА:

1.Василевич Л.Ф. Теория игр. Учебное пособие, КИИМ, 2000.

2. Гуров С.В. Теория системного анализа и принятия решений. Учебное пособие, СПб.: ЛТА, 2008.

3. Н.Ш. Кремер и др. Исследование операций в экономике. – М.: ЮНИТИ, 2003 г.

4. Е.С. Вентцель. Исследование операций: задачи, принципы и методология.

– М.:ДРОФА, 2010.