ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Математика»

Краткий курс лекций

«Дифференциальное исчисление»

Авторы
Ароева Г.А., Глушкова В.Н.

Ростов-на-Дону, 2015

Аннотация

Методические указания предназначены для студентов всех технических специальностей сокращенной формы обучения.

Авторы

Старший преподаватель Ароева Г.А.

Доцент кандидат физико - математических наук

Глушкова В.Н.

Оглавление

§1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ. ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть E – заданное множество точек числовой оси R.

<u>*Определение 1.*</u> *Закон, который каждой точке $x \in E$ ставит в соответствие единственное вполне определенное число y, называется функцией, определенной на множестве E или отображением множества E в R.*

Обозначать функцию будем чаще всего буквой *f*, а также другими прописными или заглавными буквами латинского или греческого алфавитов. Запись $y = f(x)$ говорит о том, что значение аргумента *x* функция *f* ставит в соответствие числу *y*. Множество *E* называется областью определения функции *f*. Функция *f* отображает каждое значение $x \in E$ в некоторое число $y = f(x)$, называемое образом точки *x*. Например, функция $y = x^2$ представляет собой операцию возведения аргумента *x* в квадрат. Так, числу $x_1 = 3$ она ставит в соответствие число $y_1 = 3^2 = 9$, числу $x_2 = 5$ она ставит в соответствие число $y_2 = 5^2 = 25$ и т.д. Функция $y = \sin x$ каждому действительному числу *x* ставит в соответствие его синус. Например, $\sin 0 = o$, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

<u>*Определение 2.*</u> *Если множество E заранее не задано, а функция f определена аналитической формулой $y = f(x)$, то областью её определения называют множество всех значений $x \in R$, для которых $f(x)$ может быть вычислено.*

Примеры:

1) $y = 5x^4 - 3x^2 + 2x + 7$ - многочлен; его значения могут быть вычислены при всех $x \in R$;

2) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = a^x$, $(a > 0, a \neq 1)$ тоже имеют область определения всю числовую ось *R*;

3) $y=\dfrac{4x^5-2x^3+3}{x^2-12x+35}$ - рациональная функция определена на всей числовой оси, за исключением тех точек, где знаменатель равен нулю, т.е. за исключением точек $x_1=5$, $x_2=7$;

4) $y=\sqrt{x}$ - иррациональная функция. Она определена на множестве $\left[0;+\infty\right)$;

5) $y=\log_a x \quad (a>0, a\neq 1)$ - логарифмическая функция, определена на множестве $(0;+\infty]$

§2. ПОНЯТИЕ ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Определение 3. *Окрестностью (δ - окрестностью) точки $a \in R$ называется симметричный относительно точки а интервал* $(a-\delta, a+\delta)$.

Точку *a* , будем называть предельной точкой множества *E,* если в любой (даже очень малой) окрестности точки *a* есть точки множества *E,* т.е. точками множества *E* можно «добраться» до точки *a*.

Пусть *a* – предельная точка множества *E.*

Определение 4 *Число А называется пределом функции $y = f(x)$ когда х стремится к а, если величина $|f(x) - A|$ может быть сделана меньше любого наперед заданного числа Е >0 за счет того, что х очень близко подойдет к точке а.*

Строго это определение выглядит так:

$$\lim_{n\to a} f(x) = A \overset{\text{опред}}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ |f(x) - A| < \varepsilon\ \forall x \in (a-\delta, a+\delta)$$

Определение 5 *Число А называется пределом функции $y = f(x)$ когда х стремится к $+\infty$, если величина $|f(x) - A|$ может быть сделана меньше любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ за счет того, что х станет очень большим положительным числом.*

Строгое определение:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \overset{\text{опред}}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon > 0\ \ \exists M > 0 :\ |f(x) - A| < \varepsilon\ \ \forall x > M$$

Аналогично дается определение предела на $-\infty$

2.1 Основные теоремы о пределах

<u>Теорема 1</u>
$\lim_{x\to a} c = c$ (предел постоянной равен самой постоянной).

<u>Теорема 2</u>
Если существует $\lim_{x\to a} f(x)$ и $\lim_{x\to a} g(x)$, то

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)*g(x))=\lim_{x\to a} f(x)*\lim_{x\to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$ (при дополнительном условии $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$)

<u>Теорема 3</u>
Пусть в некоторой окрестности точки a $f(x)\geq 0$. Тогда из условия $\lim_{x\to a} f(x)=A$ следует, что $A\geq 0$.

<u>Теорема 4</u>
Если $\lim_{x\to a} f(x)=A$, $\lim_{x\to a} g(x)=A$ и в некоторой окрестности точки a выполняются неравенства
$f(x)\leq h(x)\leq g(x)$, то $\lim_{x\to a} h(x)=A$.

Все сформулированные теоремы справедливы также и когда $x\to\infty$.

2.2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

<u>Определение 6</u> Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой (б.м.ф.) $x\to a$, если
$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0$.

Аналогично, $\alpha(x)$- б.м.ф. при $x\to\infty$, если
$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0$.
Например, при $x\to 0$ бесконечно малыми являются функции

$\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, $e^x - 1$, $\ln(1+x)$, а при $x \to 3$ – функции $(x-3)^2$, $5^{x-3} - 1$, $\sin(2x-6)$, $\ln(1-x)$, $\operatorname{arctg}\frac{x-3}{8}$ и т.п.

Из теоремы 2 вытекают важные следствия:

1) Сумма двух б.м.ф. является б.м.ф.,
2) Произведение б.м.ф. на функцию ограниченную есть б.м.ф.

Напомним, что функция $g(x)$ называется ограниченной на множестве E, если все её значения на этом множестве меньше некоторого числа. Если функция имеет конечный предел

$$\lim_{x \to a} g(x)$$

то в окрестности точки а она ограничена.

<u>Определение 7.</u> Функция $\Phi(x)$ называется бесконечно большой функцией (б.б.ф.) при $x \to a$ (при $x \to \infty$), если при приближении х к а её значения по абсолютной величине неограниченно растут, становятся больше любого наперёд заданного числа. Тот факт, что $\Phi(x)$ - б.б.ф., обозначается записью

$$\lim_{x \to a} \Phi(x) = \infty.$$

Сумма двух бесконечно больших функций одного знака есть б.б.ф. того же знака.

Существует тесная связь между б.м. и б.б. функциями:

- если $\alpha(x)$ – б.м.ф. при $x \to a$, то $\Phi(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ – б.б.ф. при $x \to a$,
- если $\Phi(x)$ - б.б.ф. при $x \to a$, то $\alpha(x) = \frac{1}{\Phi(x)}$ – б.м.ф. при $x \to a$.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции можно сравнивать.

Функция $\alpha(x)$ называется б.м. более высокого порядка, чем $\beta(x)$, если

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0.$$

Например, при $x \to 4$ $\alpha(x) = (x-4)^2$, б.м.ф. более высокого порядка, чем $\beta(x) = (x-4)$, т.к.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)^2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{1}=0.$$

Функция $\Phi(x)$ называется б.б. более высокого прядка, чем $F(x)$ при $x\to a$, если

$$\lim_{x\to a}\frac{\Phi(x)}{F(x)}=\infty.$$

Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными при $x\to a$, если

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1.$$

Обозначается этот факт таким образом: $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Это понятие относится и к б.м. и к б.б. функциям. Оказывается, что при $x\to 0$ имеют место следующие эквивалентности: $\sin x\sim x$, $\operatorname{tg} x\sim x$, $\arcsin x\sim x$, $\operatorname{arctg} x\sim x$, $e^x-1\sim x$, $\ln(1+x)\sim x$, а при $x\to\infty$ каждый многочлен эквивалентен своему старшему члену, например,

$$4x^5+13x^4-6x^3+2x+7\sim 4x^5.$$

При решении задач на вычисление пределов эффективно используется такой принцип:

$$\left\|\begin{array}{l}\text{каждый б.м. или б.б. многочлен числителя}\\ \text{или знаменателя можно заменить эквивалентным}\end{array}\right.$$

Приведем примеры:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\operatorname{tg} 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{5x}=\frac{1}{5}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{arctg} 4x}{x^3+8x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x4x}{x^2(x+)}=\lim_{x\to 0}\frac{4}{x+8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x^2}}{\operatorname{tg}(7x)\ln(1+2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{7x2x}=\frac{5}{14};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\arcsin(4x)}{e^{7x^2}-e^{2x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x4x}{e^{2x^2}(e^{5x^2}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{e^{2x^2}5x^2}=\frac{4}{5}$$

(здесь мы воспользовались также тем, что $e^0=1$);

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^4-2x^3+3x+5}{16x^4-5x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{7x^4}{16x^4}=\frac{7}{16}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(5x^2+2)(3x^4-x^3+2)}{(2x+7)^3(4x^3+9x^2+6)}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2 3x^4}{(2x)^3 4x^3}=\frac{15}{32}$$

При решении следующих примеров учитывается связь между б.м. и б.б. функциями

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{\operatorname{tg}^2 x\ln(1+10x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x3x}{x^2 10x}=\frac{3}{10}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty;$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4-2x+7}{9x^5+3x^4+8}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4}{9x^5}=\frac{5}{9}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+5x}{\sin x\, 2^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+5)}{x 2^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0}(x+5)\frac{1}{2^{\frac{1}{x}}}=0$$

В последнем примере мы воспользовались тем, что при $x\to 0$ функция $\frac{1}{x}$ является б.б.ф. Отсюда следует, что $2^{\frac{1}{x}}$ - б.б.ф. при $x\to 0$, но тогда функция $\frac{1}{2^{\frac{1}{x}}}$ является б.м. и её произведение на ограниченную (в окрестности нуля) функцию (x+5) тоже представляет собой б.м., поэтому предел равен нулю.

§3. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Определение 8. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке a, если она определена в некоторой окрестности точки a и $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Определение 9. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на множестве E, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Доказано, что все элементарные функции непрерывны, каждая в своей области определения. На самом деле, непрерывностью элементарных функций мы уже пользовались неоднократно при вычислении пределов. Например, утверждая, что $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$, мы используем непрерывность функции $y = x^2$ в точке a=3, а заявление о том, что

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \sin x = \frac{1}{2}$$

означает непрерывность функции $y = \sin x$ в точке $\frac{\pi}{6}$.

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называют точками разрыва. Что касается основных элементарных функций, то полезно иметь в виду следующее:

1) многочлен, $\sin x$, $\cos x$, a^x $(a > 0,\ a \neq 1)$ непрерывны на всей числовой оси

2) рациональная функция – отношение двух многочленов $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ – непрерывна на всей численной оси, кроме точек где $Q_n(x) = 0$; эти точки являются точками разрыва функции f(x);

3) $\operatorname{tg} x$ непрерывна на всей оси, кроме точек $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, а $\operatorname{ctg} x$ - на всей оси, кроме точек $x = \pi n, n \in Z$;

4) логарифмическая функция $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ непрерывна при всех x > 0.

§4. ПРОИЗВОДНАЯ. ТЕХНИКА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Пусть на множестве *E* определена функция $y = f(x)$. Допустим, что *x* – произвольная точка множества *E*, а $x + \Delta x$ – близкая к ней точка, тоже принадлежащая этому множеству.

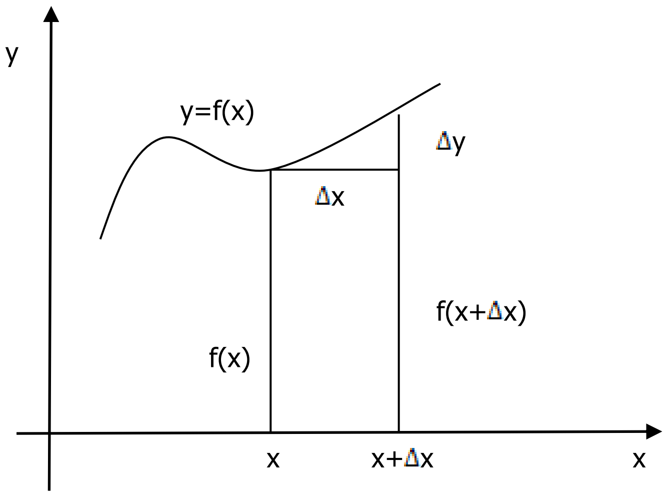


Рис. 1

Величина Δx называется приращением аргумента, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ – приращением функции, соответствующим приращению аргумента Δx.

<u>Определение 10.</u> Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Если в точке *x* производная существует, то функция *f* называется дифференцируемой в этой точке.

Если *t* – время, а *y=f(t)* – некоторый процесс (физический, химический, биологический, экономический), то *f′(t)* представляет собой скорость (мгновенную) протекания этого процесса в момент *t*.

Исходя из определения производной, выведены формулы для производных всех основных элементарных функций и получены основные законы дифференцирования:

1) $c'=0$	9) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
2) $(x^n)' = n * x^{n-1}, \forall n \in R$	10) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
3) $(a^x)' = a^x * \ln a$	11) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4) $(e^x)' = e^x.$	12) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5) $(\log_a x)' = \frac{1}{x * \ln x}, a > 0, a \neq 1$	13) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
6) $(\ln x)' = \frac{1}{x}.$	14) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
7) $(\sin x)' = \cos x$	
8) $(\cos x)' = -\sin x$	

Если $U=U(x)$ и $V=V(x)$ – дифференцируемые функции, то

I. $(U+V)'=U'+V'$

II. $(cU)'=cU'$

III. $(UV)'=U'V+UV'$

IV. $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V-UV'}{V^2}$

V. Если $U=U(x)$- дифференцируемая функция в точке *x*, а $y=f(U)$ дифференцируемая в точке *U*, то производная сложной функции $y=f(U(x))$ равна производной внешней функции по своему аргументу, умноженной на производную внутренней функции по своему аргументу:

$$y'_x = y'_U U'_x \,.$$

Примеры:

1) $y = 5^x + 7\sin x - x^6 + 3$. Найти y'.

Используя законы дифференцирования I и II, а также формулы 3), 5), 2), 1), имеем:

$$y' = 5^x \ln 5 + 7\cos x - 6x^5.$$

2) $y = x^3\sqrt{x} + 4\sqrt[5]{x^2} - \frac{3}{x^3}$. Найти y'.

Вначале перепишем данную функцию в более удобном виде, заменив все корни на степени.

$$y = x^{\frac{7}{2}} + 4x^{\frac{2}{5}} - 3x^{-3}.$$

Теперь находим производную, используя законы I, II и формулу 2):

$$y' = \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{5}x^{-\frac{3}{5}} + 9x^{-4}.$$

3) $y = x^4 \sin x$. Найти y'.

Используя закон III и формулы 2) и 5):

$$y' = 4x^3 \sin x + x^4 \cos x.$$

4) $y = \frac{x^5}{x^4+1}$. Найти y'.

Воспользуемся законом IV:

$$y' = \frac{5x^4(x^2+1) - x^5 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^6 + 5x^4}{(x^2+1)^2}.$$

Теперь обратим внимание на закон V, дающий возможность дифференцировать сложные функции.

Примеры (продолжение):

5) $y = (\operatorname{tg} x)^5$. Найти y'.

Перед нами сложная функция, у которой внешней является пятая степень, а внутренней – тангенс. Производная внешней функции равна $5(\operatorname{tg} x)^4$, а производная внутренней $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. Поэтому получаем:

$$y' = 5(\operatorname{tg} x)^4 \frac{1}{\cos^2 x} = 5\operatorname{tg}^4 x \frac{1}{\cos^2 x} .$$

6) $y = ln(x^4 + 2x)$. Найти y'.

Производная внешней функции по своему аргументу равна $\frac{1}{x^4+2x}$, а производная внутренней функции, т.е. производная выражения, стоящего в скобках, равна $4x^3 + 2$; поэтому

$$y' = \frac{1}{x^4+2x}(4x^3 + 2).$$

7) $y = (\operatorname{arctg}(x^3 + 2x))^9$. Найти y'.

Здесь сложная функция состоит уже из трех звеньев: внешняя – девятая степень, её аргументом является арктангенс, а аргументом арктангенса – выражение $(x^3 + 2x)$. Поэтому дифференцируя в цепочку, получаем:

$$y' = 9(\operatorname{arctg}(x^3 + 2x))^8 \frac{1}{1+(x^3+2x)^2}(3x^3 + 2).$$

8) $y = \frac{\cos^2 x + x^3}{e^{\sin x} + \operatorname{tg} 2x}$. Найти y'.

Данная функция представляет собой частное. Поэтому в основу дифференцирования закладываем закон IV, но в ходе дифференцирования учитываем, что слагаемое числителя, а также оба слагаемых знаменателя - функции сложные:

$$y' = \frac{(2\cos x(-\sin x)+3x^2)*(e^{\sin x}+\operatorname{tg} 2x)-(\cos^2 x+x^3)(e^{\sin x}\cos x+\frac{1*2}{\cos^2 2x})}{(e^{\sin x}+\operatorname{tg} 2x)^2}.$$

9) $y = \ln(\operatorname{arcctg} x) + e^{\operatorname{tg} 5x}x^4$. Найти y'.

$$y' = \frac{1}{\operatorname{arctg} x} * \frac{1}{1 + x^2} + e^{\operatorname{tg} 5*x}\frac{1}{\cos^2 5x}5x^4 + e^{\operatorname{tg} 5x}4x^3$$

10) $y = \frac{x+\ln 4x}{e^x+e^{-x}} + \sin(x^4)$. Найти y'.

$$y' = \frac{\left(1+\frac{1}{4x}4\right)(e^x+e^{-x})-(x+\ln 4x)(e^x+e^{-x}(-1))}{(e^x+e^{-x})^2} + + \cos(x^4)4x^3$$

§5. НАХОЖДЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Следующая теорема дает мощное средство вычисления пределов.

Теорема 5 (правило Лопиталя). Пусть функции *f* и *g:*

1) Непрерывны в точке *a* и в некоторой её окрестности,

2) Дифференцируемы в окрестности точки *a*,

3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0, \qquad \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0,$

4) Существует $y = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда существует предел отношения данных функций и справедливо равенство

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

т.е. предел отношения функций равен пределу отношения их производных.

Примеры

1) Вычислить

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^5 + 8x - 9}{4x^4 + 3x - 7}$$

Условия 1) - 3) очевидно выполнены. Условие 4) всегда проверяется в ходе вычислений. Применяя правило Лопиталя, получаем:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^5 + 8x - 9}{4x^4 + 3x - 7} = \lim_{x \to 1} \frac{5x^4 + 8}{16x^3 + 3} = \frac{13}{19}.$$

Замечание. Теорема остается справедливой и в следующих случаях:

1. Когда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty$ или $=-\infty$,

2. Когда $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$,

3. Когда $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ или $\lim_{x\to a}g(x)=\infty$.

Таким образом, правило Лопиталя применимо, когда *f(x)* и *g(x)* являются либо обе бесконечно малыми (неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$), либо обе – бесконечно большими (неопределённость вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$).

<u>Примеры (продолжение)</u>

2) Вычислить

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{22+x}-5}{\sqrt{13+x}-4}.$$

Здесь снова встречаем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, что позволяет использовать правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to3}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{22+x}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{13+x}}}=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{13+x}}{\sqrt{22+x}}=\frac{4}{5}$$

3) Вычислить

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}.$$

Здесь числитель и знаменатель дроби являются б.б. функциями, т.е. перед нами неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Применив правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$$

4) Вычислить

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{5^x}$$

Поскольку при $x\to\infty$ и числитель и знаменатель б.б.ф., то применив правило Лопиталя два раза подряд, имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{5^x\ln 5}=\frac{2}{\ln 5}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{5^x\ln 5}=0\,.$$

5) Вычислим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x-\sin 3x}{e^{16x}-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x-\sin 3x}{e^{16x}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos 7x)7-(\cos 3x)3}{e^{16x}16}=\frac{7-3}{16}$$
$$=\frac{1}{4}\,.$$

6) Вычислить $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^{12}+3x^8-7}{20x^{12}+10x^{11}-4}$

Здесь правило Лопиталя использовать не рационально. Каждое применение этого правила снижало бы степень числителя на 1 и степень знаменателя на 1. В то же время, заменяя числитель и знаменатель эквивалентными б.б. функциями, сразу получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^{12}}{20x^{12}}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}\,.$$

Во многих случаях полезно сочетать использование правила Лопиталя с заменой эквивалентных .

7) Вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x^2}-e^{2x^2}}{\sin x\operatorname{arctg}4x}.$$

Сначала б.м. множители знаменателя заменим эквивалентными и уже затем применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x^2}-e^{2x^2}}{4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x^2}10x-e^{2x^2}4x}{8x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x^2}5-e^{2x^2}2}{4}=\frac{3}{4}$$

8) Вычислить $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$.

Здесь неопределенность вида $(\infty-\infty)$. После приведения выражения в скобках к общему знаменателю получим под знаком предела отношение двух б.м.ф., что дает возможность и замены эквивалентных множителей и применения правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2}=0\,.$$

§6. МОНОТОННОСТЬ ФУНКЦИЙ. ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА

Функция f называется возрастающей на интервале *(a,b)*, если $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$$ (рис. 2)

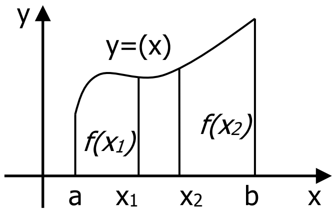


Рис. 2

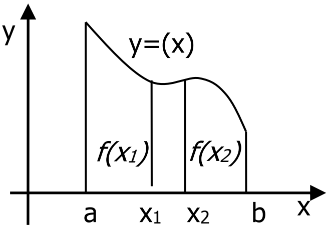


Рис. 3

Функция f называется убывающей на интервале *(a,b)*, если $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$$ (рис.3).

Возрастающие и убывающие функции носят общее название – монотонные. Оказывается, монотонностью функции управляет знак её производной. Справедлива следующая теорема.

<u>Теорема 6</u> Для того, чтобы дифференцируемая функция *y=f(x)* возрастала на интервале *(a,b)*, необходимо и достаточно, чтобы

$$f'(x) \ge 0 \quad \forall x \in (a,b).$$

Для того, чтобы *f(x)* убывала на всей *(a,b),* необходимо и достаточно, чтобы

$$f'(x) \le 0 \; \forall x \in (a,b).$$

Пусть на множестве *E* определена функция *f.*

<u>Определение 11.</u> Точка $x_0 \in E$ *называется точкой максимума функции f, если существует окрестность этой точки* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$*, такая, что*

$$f(x_0) \ge f(x) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap E.$$

Точки максимума и минимума имеют общее название –

точки экстремума. Обращаем Ваше внимание на то, что экстремум понятие локальное. Это означает, что указанные неравенства выполняются не на всём множестве *E*, а в какой-то, быть может очень малой окрестности точки x_0. Наряду с экстремумами существуют понятия наибольшего и наименьшего значений функции на рассматриваемом множестве *E*. Это – понятия глобальные. Может случится (см. рис. 4, где *E=(a,b)*), что на множестве *E* функция *f* имеет даже несколько точек экстремума и не имеет на нем ни наименьшего, ни наибольшего значений. Однако, справедлива следующая теорема.

<u>*Теорема 7.*</u> Если *E* – замкнутое множество, т.е. оно содержит свои граничные точки, то непрерывная на *E* функция *f* принимает хотя бы в одной точке этого множества наименьшее значение *m* и хотя бы в одной точке – наибольшее значение *M*.

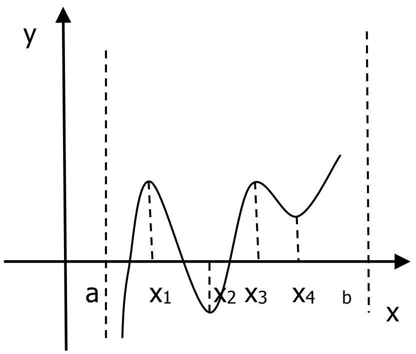


Рис. 4.

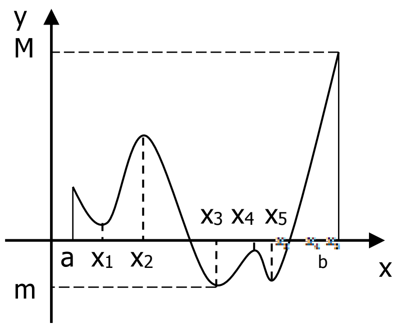


Рис. 5.

Так, функция *f*, непрерывная на *E=[a,b]* (рис. 5) принимает наименьшее значение в точке минимума x_3, а наибольшее – на конце отрезка *[a,b]*, т.е. в точке *b*.

В общем случае, непрерывная на отрезке *[a,b]* функция может достигать наибольшего значения либо в точке максимума, либо на конце отрезка, либо и там, и там. Аналогичное положение имеет место и с наименьшим значением.

О локальности понятия экстремума говорит еще такой факт: значение функции в точке минимума может оказаться больше её значения в точке максимума (см. рис. 5, точки x_1 и x_4).

<u>Теорема Ферма</u> (необходимое условие экстремума). Если x_0 – точка экстремума функции *f* и если в этой точке существует

производная, то она равна нулю.

Фактически теорема выражает тот факт, что точки экстремума следует искать среди тех, где $f'(x) = 0$ и тех, где $f'(x)$ не существует. Все такие точки называют подозрительными на экстремум или критическими. Точки, где $f'(x) = 0$ называют также стационарными.

Условие равенства нулю производной не является достаточным. Так у функции $y = x^3$ $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$, однако точка *x=0* не является ни точкой минимума, ни точкой максимума.

Теорема 8 (достаточное условие экстремума). Если при переходе через критическую точку x_0 (в которой функция *f* непрерывна) производная $f'(x)$:

а) меняется знак с «+» на «-», то x_0 - точка максимума,
б) меняется знак с «-» на «+», то x_0 - точка минимума,
с) не меняет знака, то x_0 не является точкой экстремума.

Алгоритм решения задачи: найти интервалы монотонности и точки экстремума функции *f*.

1-й этап – найти критические точки, т.е. точки, где $f'(x) = 0$ и точки, где $f'(x)$ не существует.

2-й этап анализ каждой критической точки, где выясняется меняется знак производной при переходе через эту точку (тогда экстремум есть) или не меняется (и тогда экстремума нет).

Примеры

1) Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $y = 3x^5 - 5x^3$.

1-й этап. Находим производную $y' = 15x^4 - 15x^2$. Приравниваем ее к нулю и решаем полученное уравнение $15x^2(x^2 - 1) = 0$, выписываем корни уравнения $x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$.

2-й этап реализуем, сводя все рассуждения в таблицу:

x	$(-\infty;\ -1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;\ +\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
y	↗	2	↘	0	↘	-2	↗
		max		*Нет экстр.*			

На каждом из образованных интервалов определяем знак производной, вычисляя её значение в одной точке:

$$y'(-2) = 180, \qquad y'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{45}{16}, \qquad y'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{45}{16}, \qquad y'(2) = 180.$$

Расстановка знаков в таблице дает возможность сделать вывод, что на интервалах $(-\infty;\ -1)$ и $(1;\ +\infty)$ данная функция возрастает, а на интервалах $(-1;0)$ и $(0;1)$ она убывает, что показано стрелочками вверх и вниз соответственно. Согласно достаточному признаку экстремума теперь можно заключить, что $x_1 = -1$ – точка максимума, $x_3 = 1$ - точка минимума, а в точке $x_2 = 0$ - экстремума нет (как убывала функция до этой точки, так и убывает после неё). Остается подсчитать значения функции в точках экстремума:

$$y_{max} = y(-1) = 2, \qquad y_{min} = y(1) = -2.$$

2) Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции

$$y = \frac{x^2}{x-3}$$

Данная функция определена и непрерывна на всей числовой оси, за исключением точки *x=3.* В этой точке функция вообще не определена, это точка разрыва. Оказывается, что при переходе через такие точки характер монотонности может измениться. При разбиении области определения функции на интервалы это должно учитываться.

1-й этап. Находим производную

$$y' = \frac{2x(x-3)-x^2 1}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x}{(x-3)^2},$$

и , приравнивая её к нулю, приходим к уравнению
$x^2 - 6x = 0$,

корни которого $x_1 = 0$, $x_2 = 6$ - критические точки. Других критических точек нет, ибо *x=3* интереса не представляет, так как в ней не существует данная функция.

2-й этап проведем, оформляя всё в таблицу

x	$(-\infty;\ 0)$	0	$(0;3)$	$(3;6)$	*6*	$(6;\ +\infty)$
y'	$+$	*0*	$-$	$-$	*0*	$+$
y	↗	*0*	↘	↘	*2*	↗
		max			*min*	

Вычисляем значение производной в точках, выбранных по одной в каждом интервалов

$$y'(-1) = \frac{7}{16},\ y'(1) = -\frac{5}{4},\ y'(4) = -8,\ y'(7) = \frac{7}{16},$$

Определяем знаки производной и делаем выводы, которые отражает последняя строка таблицы.

3) Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции

$$y = \frac{\ln x}{x}$$

Поскольку логарифмы существуют только у положительных чисел, областью определения данной функции является полуось $(0;\ +\infty)$.

1-ый этап. Находим производную

$$y' = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x\, 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Решаем уравнение $\dfrac{1-\ln x}{x^2} = 0,$

$\ln x = 1$

$x = e$ – стационарная точка.

2-ой этап реализуем в виде таблицы

x	$(0;\ e)$	e	$(e;\ +\infty)$
y'	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$
		max	

§7. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ

Постановка задачи: найти наибольшее и наименьшее значения дифференцируемой функции $y = f(x)$ на заданном отрезке $[a, b]$.

Алгоритм решения:

1) Находим критические точки, принадлежащие отрезку $[a, b]$;

2) Вычисляем значения функции в этих точках и на концах отрезка

Из полученных значений выбираем наибольшее и наименьшее.

Примеры

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^3 + 6x^2$ на отрезке $[-3; 1]$.

Находим критические точки:

$y' = 3x^2 + 12x$

$3x^2 + 12x = 0$

$3x(x+4) = 0$

$x_1 = -4, \qquad x_2 = 0$

Точка $x_1 = -4$ не принадлежит отрезку $[-3; 1]$ и, поэтому мы оставляем её без внимания. Теперь вычисляем значения данной функции в точке $x_2 = 0$ и на концах отрезка, т.е. в точках $a = -3$ и $b = 1$:

$f(0) = 0, \qquad f(-3) = 27, \qquad f(1) = 7,$

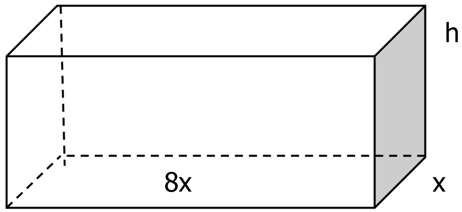
Откуда видно, что

$f_{наиб} = f(-3) = 27,$

$f_{наим} = f(0) = 0.$

2. Открытый бассейн имеет форму параллелепипеда объемом $1536 м^3$. Какими следует выбрать размеры бассейна, чтобы на его внутреннюю облицовку ушло минимальное количество материала, если длина основания бассейна должна в 8 раз превосходить его ширину? Какое количество облицовочного материала потребуется?

Обозначим через *x* – сторону основания бассейна, а через *h* – глубину. Тогда длинна основания равна 8x.



Интересующая нас функция – площадь внутренней поверхности параллелепипеда имеет вид:

$$S(x) = 8xx + 2 * 8xh + 2xh$$
$$S(x) = 8x^2 + 18xh$$

Высоту бассейна *h* можно выразить через *x*, исходя из объема параллелепипеда:

$$V = 8x^2h \to h = \frac{V}{8x}$$

Теперь *S(x)* представляет собой функцию одной переменной:

$$S(x) = 8x^2 + \frac{9V}{4x}$$

И наша задача состоит в том, чтобы определить минимум этой функции. С этой целью находим производную

$$S'(x) = 16x - \frac{9V}{4x^2} = \frac{64x^3 - 9V}{4x^2}$$

и приравниваем её к нулю.

$$\frac{64x^3 - 9V}{4x^2} = 0$$

$$64x^3 - 9V = 0$$
$$x = \frac{1}{4}\sqrt[3]{9V}.$$

Легко проверить, что при переходе через точку $x = \frac{1}{4}\sqrt[3]{9V}$ производная $S'(x)$ меняет свой знак с "$-$" на "$+$", т.е. $x = \frac{1}{4}\sqrt[3]{9V}$ - точка минимума. Принимая во внимание заданное значение объема бассейна $V = 1536\,м^3$, получаем $x = \frac{1}{4}\sqrt[3]{9 * 1536} = 6\ м$, т.е. ширина основания бассейна равна 6м. Тогда длина бассейна составляет 48м и глубина $h = \frac{1536}{8*6^2} = 5\frac{1}{3}м.$ При этих размерах бассейна на его облицовку расходуется минимальное количество материала, равное

$$S_{min} = 86^2 + \frac{9 * 1536}{4 * 6} = 864м^2.$$

3. Завод *D* нужно соединить шоссейной дорогой с прямолинейной железной дорогой, на которой расположен город *A*. Расстояние *DB* до железной дороги равно 140км, а расстояние *AB* по железной дороге равно 300км. (рис. 6). Стоимость перевозок по шоссе в два раза дороже стоимости перевозок по железной дороге. В какую точку *C* следует провести шоссейную дорогу, чтобы стоимость перевозок груза от завода к городу была минимальной?

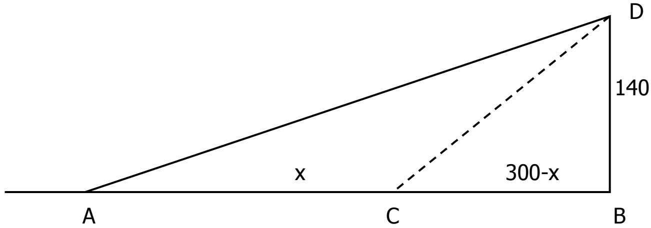


Рис. 6

Обозначим *AC=x*. Ясно, что $0 \le x \le 300$. Пусть стоимость перевоза по железой дороге (стоимость тонно-километра) равна *p*. Тогда стоимость перевоза по шоссе равна 2*p*. Общая стоимость перевоза груза

$$f = 2pDC + pAC,$$

$$f(x) = 2p\sqrt{140^2 + (300-p)^2} + px,$$
$$f(x) = p\left(2\sqrt{140^2 + (300-x)^2} + x\right).$$

Мы должны выбрать наименьшее значение этой функции на отрезке $[0;300]$. Найдем производную:

$$f'(x) = p\left(2\frac{(300-x)(-1)}{\sqrt{140^2 + (300-x)^2}} + 1\right) =$$
$$= p\,\frac{2(x-300) + \sqrt{140^2 + 300 - x^2}}{\sqrt{140^2 + (300-x)^2}}.$$

Из условия $f'(x) = 0$ определяем критическую точку:

$$x = 300 - \frac{140}{\sqrt{3}} \approx 219{,}1.$$

Вычисляем значение стоимости перевозок в критической точке и на концах рассматриваемого отрезка:

$$f(0) = p\left(2\sqrt{140^2 + (300-x)^2}\right) \approx 662{,}11\text{р.},$$

$$f(219{,}1) = p\left(2\sqrt{140^2 + (80{,}9)^2} + 219{,}1\right) \approx 542{,}48\text{р.},$$

$$f(300) = p\left(2\sqrt{140^2} + 300\right) \approx 580\text{р.}$$

Итак, чтобы стоимость перевоза груза от завода *D* к городу *A* была наименьшей, следует шоссейную дорогу провести в пункт *C*, находящийся от города на расстоянии 219,1км.

§8 ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

В науке и в инженерной практике часто приходится иметь дело с функциями, зависящими не от одного аргумента, а от нескольких. Например, объём прямого кругового цилиндра *V* является функцией радиуса его основания *R* и высоты *H*: $V = \pi * R^2 * H$

Переменная z называется функцией аргументов x и y, если каждой паре чисел *(x, y)* из некоторого множества на плоскости ставится в соответствии по определенному закону единственное вполне определённое значение z .

Тот факт, что z есть функция аргументов x и y, записывается так $z = f(x, y)$.

Множество точек плоскости (x, y), для которых z имеет смысл (т.е. может быть вычислено) называется областью определения функции *f*.

Например, областью определения функции $z = \frac{x+y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ является множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 < 1$,

т.е. внутренность единичного круга с центром в начале координат.

Графиком функции $z = f(x, y)$ с областью определения *D* называется множество точек пространства R^3 с координатами $(x, y, f(x, y))$, где $(x, y) \in D$.

Обычно графиком двух переменных является некоторая поверхность (рис. 7).

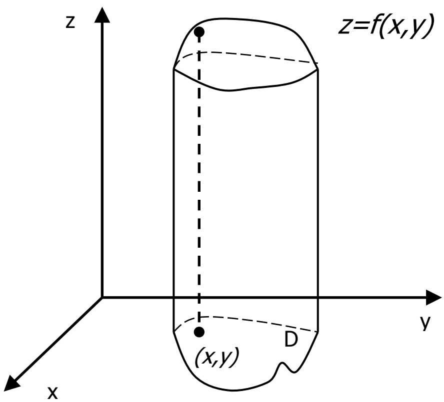


Рис. 7

Пусть $M_0(x_0,y_0)$ – фиксированная точка плоскости. Окрестностью (δ - окрестностью) точки M_0 называется открытый круг радиуса δ с центром в этой точке. δ – окрестность точки M_0 обозначается $U_\delta(M_0)$.

Пусть функция $x = f(x,y) = f(M)$ определена в окрестности точки M_0. Число *A* называется пределом функции $f(M)$ при $M \to M_0$, если величина $|f(M) - A|$ может быть сделана меньше любого наперед заданного положительного числа ε за счет того, что точка *M* очень близко подойдет к точке M_0, т.е. окажется в очень малой окрестности этой точки. Обозначается

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = A.$$

Все теоремы о пределах, которые имели место для функций одной переменной, здесь тоже справедливы.

<u>Определение 12.</u> Функция $z = f(M)$ называется непрерывной в точке M_0, если она определена в этой точке, в некоторой её окрестности и

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = f(M_0).$$

Функция $z = f(M)$ называется непрерывной на множестве *E*, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Все основные теоремы о непрерывных функциях, которые верны для функций одной переменной, имеют место и для функций двух переменных.

8.1 Частные производные

Предположим, что функция $z = f(x,y)$ определена в области *D* (рис. 8). Пусть $M(x,y)$ - произвольная точка области *D* и $N(x+\Delta x,y)$ - близкая к ней точка с той же ординатой, тоже лежащая в *D*.

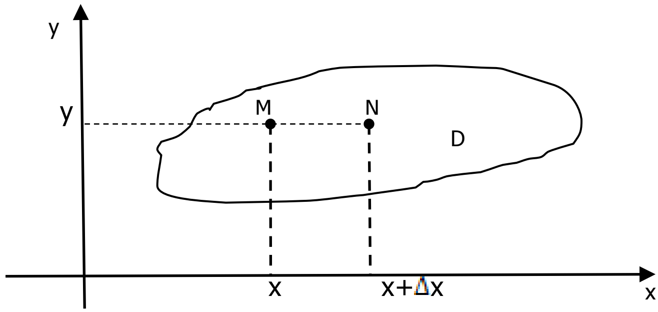


Рис. 8.

Величина $f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$ называется частным приращением функции z по переменной x, а предел отношения

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x},$$

если он существует, называется частной производной функции z по аргументу x и обозначается любым из символов $\frac{\partial z}{\partial x}$ или z'_x. Итак,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x},$$

Аналогично определяется частная производная по y : $\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$.

Принцип нахождения частных производных вытекает из самого определения. Для нахождения частной производной по x достаточно y “заморозить на время дифференцирования” и находить производную функции z по переменной x самым обычным образом, т.е. при дифференцировании по x на y следует смотреть как на постоянную и, наоборот, при дифференцировании по y надо “замораживать” x.

<u>Примеры.</u>

1) $z = 4x^3y^5 - 3\cos x + 5\ln y - 17$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4y^5 3x^2 + 3\sin x = 12x^2y^5 + 3\sin x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4x^3 5y^4 + \frac{5}{y} = 20x^3y^4 + \frac{5}{y}.$$

2) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^4}\right) - \operatorname{arctg} xe^{7y}$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^4}}\left(1+\frac{1*2x}{2\sqrt{x^2+y^4}}\right) - e^{7y}\frac{1}{1+x^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^4}}\left(0+\frac{1*4y^3}{2\sqrt{x^2+y^4}}\right) - \operatorname{arctg} x e^{7y}\, 7.$$

3) $z = (x^3+5x^2)^{\cos(4y^3)}$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(4y^3)\,(x^3+5x^2)^{\cos(4y^3)-1}(3x^2+10x)$, (при дифференцировании по *x* данная функция рассматривается как степенная);

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^3+5x^2)^{\cos(4y^3)}\ln(x^3+5x^2)(-\sin(4y^3))12y^2$$

(при дифференцировании по *y* функция рассматривается как показательная).

8.2 Градиент функции. Производная по направлению

<u>Определение 12.</u> Градиентом функции $z = f(M)$ в точке M_0 называется вектор, координатами которого являются частные производные этой функции, вычисленные в точке M_0 :

$$\operatorname{grad} z|_{M_0} = \left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}; \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}\right).$$

<u>Пример</u>

Дана функция $z = 4x^3 - 6xy^2 + y^3$. Найти $\operatorname{grad} z|_{M_0}$, где $M_0(-1; 2)$.

Сначала находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 12x^2 - 6y^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -12xy + 3y^2,$$

Теперь вычислим их в точке M_0:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = 12(-1)^2 - 62^2 = -12,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = -12(-1)2 + 32^2 = 36.$$

Значит, $\operatorname{grad} z|_{M_0} = (-12; 36)$.

Пусть $z = f(x, y) = f(M)$ – функция, определенная в области *D* и M_0 - произвольная фиксированная точка этой области (рис. 9). Пусть кроме того, нам задано направление $\bar{l}$

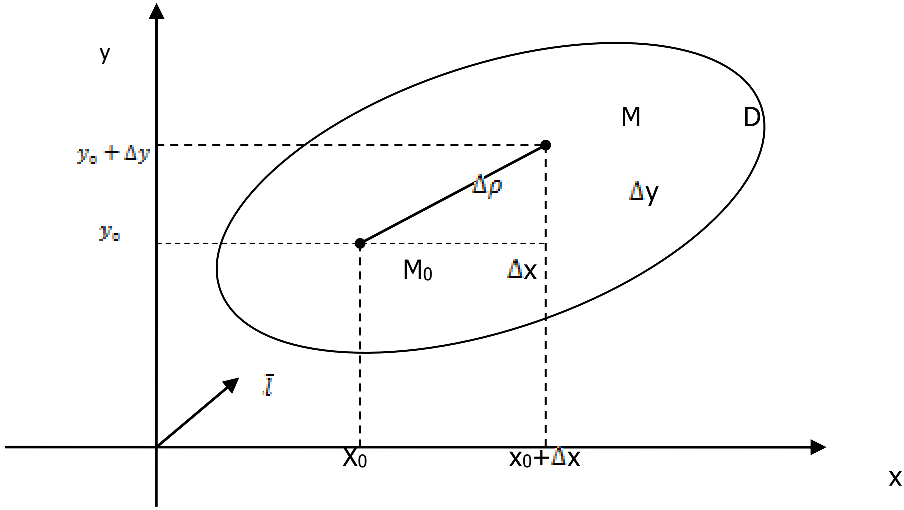


Рис. 9.

Дадим возможность точке перемещаться в направлении $\bar{l}$ из положения $M_0(x_0, y_0)$ в положение $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, где *M* – точка области близкая к M_0; расстояние между ними

$$\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Величины Δx и Δy называются приращениями аргументов, а $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ – полным приращением функции $\Delta z = f(x, y)$ при переходе от точки M_0 к точке *M*. Разделим Δz на $\Delta\rho$ и перейдем к пределу при $\Delta\rho \to 0$. Если указанный предел существует, то он называется производной функции *z* по направлению $\bar{l}$ в точке M_0 и обозначается $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0}$.

Таким образом, по определению

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0} = \lim_{\Delta\rho\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta\rho} = \lim_{\Delta\rho\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta\rho}.$$

Производная по направлению выражает скорость изменения функции в этом направлении.

Между градиентом и производной по направлению имеется тесная связь: производная по направлению $\bar{l}$ есть скалярное произведение градиента на единичный вектор заданного направления

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0} = \operatorname{grad} z|_{M_0} * \overline{l_0}\,, \overline{l_0} = \frac{1}{\|\bar{l}\|}\bar{l}.$$

Пример

Дана функция $z=4x^2y^5+x^3+3y^2$ и направление $\bar{l} = 3\bar{\imath} - 4\bar{\jmath}$. Найти $\operatorname{grad} z|_{M_0}$ и $\left.\frac{\partial z}{\partial \bar{l}}\right|_{M_0}$, $M_0(2;-1)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 8xy^5 + 3x^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 20x^2y^4 + 6y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 8xy^5 + 3x^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 20x^2y^4 + 6y,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = 8 * 2(-1)^5 + 3 * 2^2 = -4,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = 20 * 2^2(-1)^4 + 6(-1) = 74,$$

$$\operatorname{grad} z|_{M_0} = (-4;74).$$

Найдем единичный вектор заданного направления

$$\|\bar{l}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5,$$

$$\overline{l_0} = \frac{3}{5}\bar{\imath} - \frac{4}{5}\bar{\jmath}$$

и, воспользовавшись связью производной по направлению с градиентом, получим:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0} = -4\frac{3}{5} + 74\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{308}{5}.$$

Отметим два важных свойства градиента.

Первое – градиент показывает направление, в котором скорость изменения функции максимальна, причем норма градиента равна величине этой максимальной скорости.

Второе свойство связано с понятием линий уровня.

<u>Определение 13</u>. *Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называется множество точек плоскости xOy, в которых функция принимает одно и то же значение const.*

С линиями уровня приходится встречаться практически во всех инженерных дисциплинах. В геодезии и топографии это горизонтали, в метеорологии-изотермы-линии одинаковых температур и изобары-линии равного давления и т.д.

Второе свойство градиента состоит в том, что в каждой точке каждой линии уровня градиент функции перпендикулярен к ней (т.е. к её касательной рис. 10).

Рис. 10.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа:учебное пособие для ВУЗов – Спб. : Лань, 2008.

2. Бугров Я.С. Высшая математика – М. : Дрофа, 2003.

3. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах – 21 век: Мир и образование, 2009.

4. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике – Спб.: Лань, 2009