ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Математика»

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

по дисциплине

«Математика»

Автор
Волокитин Г.И.

Ростов-на-Дону, 2013

Аннотация

Методическая разработка предназначена для студентов заочной формы обучения гуманитарных специальностей 100100, 100100S, 100700, 100700S. Содержит программу изучения основных разделов курса математики, включающую темы: «Интегрирование», «Обыкновенные дифференциальные уравнения», «Ряды», «Теория вероятностей и математическая статистика». Указана рекомендуемая литература, а также 10 вариантов заданий контрольной работы (первый семестр). Даны образцы решения всех задач. Номер варианта студент определяет по последней цифре зачетной книжки. Цифра 0 соответствует варианту №10.

Автор

Волокитин Г.И., к.ф-м.н., доцент

Оглавление

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ 1-ГО КУРСА ЗАОЧНОГО ФАКУЛЬТЕТА.

Интегральное исчисление

Первообразная и понятие неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла и таблица интегралов. Основные методы интегрирования: метод непосредственного интегрирования, метод подстановки, интегрирование по частям. Задача о площади криволинейной трапеции и понятие определенного интеграла, геометрический смысл определенного интеграла. Условия существования определенного интеграла. Свойства определенного интеграла, выражаемые равенствами и неравенствами. Связь определенного и неопределенного интегралов. Замена переменной в определенном интеграле. Основная формула интегрального исчисления - формула Ньютона-Лейбница. Приложения определенного интеграла: вычисление площадей плоских фигур, вычисление длины дуги плоской кривой, объем тела вращения.

Дифференциальные уравнения

Определение обыкновенного дифференциального уравнения и его решения. Дифференциальные уравнения первого порядка. Интегральные кривые. Задача Коши и ее геометрический смысл. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Определение общего, частного и особого решений. Некоторые основные типы дифференциальных уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные дифференциальные уравнения первого порядка, линейные уравнения первого порядка и подстановка Бернулли. Линейные однородные и неоднородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение и общее решение линейного однородного дифференциального уравнения. Структура общего решения однородного и неоднородного уравнения. Метод неопределенных коэффициентов нахождения частного решения неоднородного уравнения.

Ряды

Определение суммы ряда и основные свойства. Примеры геометрического и гармонического рядов. Необходимый признак сходимости. Критерий сходимости положительных рядов. Достаточные признаки сходимости: первый и второй признаки сравнения, признак Даламбера, радикальный и интегральный признаки Коши. Понятие абсолютной и условной сходимости знакопеременных рядов. Теорема Лейбница о сходимости знакочередующихся рядов и следствие из этой теоремы об оценке остатка ряда. Теорема Абеля и следствие из этой теоремы о существовании для степенных рядов интервала сходимости. Радиус сходимости степенного ряда и его вычисление. Свойства степенных рядов. Логарифмический ряд. Ряды Тэйлора и Маклорена. Условия представимости функции ее рядом Тэйлора. Единственность представления заданной функции степенным рядом. Разложение элементарных функций e^x, $\cos x$, $\sin x$, $(1+x)^\mu$ в степенные ряды. Применение степенных рядов к приближенным вычислениям.

Теория вероятностей и математическая статистика

Понятие случайного события, алгебра событий. Классическое, геометрическое, статистическое и абстрактное определения вероятности. Некоторые понятия комбинаторики: размещения, перестановки и сочетания. Свойства вероятности. Теорема сложения. Условная вероятность, теорема умножения. Независимость событий. Формула полной вероятности и формулы Байеса. Схема независимых испытаний Бернулли, формула Бернулли. Предельные теоремы в схеме Бернулли. Понятие случайной величины, дискретные и непрерывные случайные величины. Способы их задания. Числовые характеристики случайных величин – математические ожидание и дисперсия, их свойства и формулы вычисления. Нормальное распределение как важнейший пример непрерывных распределений, нормальная кривая. Понятие выборки. Выборочные характеристики – выборочное среднее, выборочная дисперсия, исправленная выборочная дисперсия. Точечные оценки. Интервальные оценки.

Литература.

1. А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович. Краткий курс математического анализа для втузов. Москва: “Наука”. Главная редакция физико-математической литературы, 1973.
2. Г.М. Берман, Сборник задач по курсу математического анализа (для втузов). Москва: “Наука”. 1985.
3. П. Е. Данко, и др. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учебное пособие для втузов. В 2-х ч. 1980 – ч.1, 1984 – ч.2.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.1. – М.: Интеграл-Пресс, 2005.
5. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высшая школа, 1998.
6. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М: Высшая школа, 1999.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1

Задача 1. Вычислить неопределенные интегралы:

Вариант 1.

а) $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{5x-2}}$; б) $\int \frac{(3x-2)\,dx}{\sqrt{2x^2+3}}$;

в) $\int (3x-2)e^{-x}dx$;

г) $\int \frac{x^3+6x^2+13x+15}{x^3+5x}dx$; д) $\int 3^{\cos 2x}\sin 2x dx$;

е) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx$.

Вариант 2.

а) $\int \frac{\sin 2x}{e^{\cos^2 x}}dx$; б) $\int \frac{2x-3}{x^2-x+1}dx$;

в) $\int (x-2)\sin 2x dx$;

г) $\int \frac{x+3}{(x+1)(x^2+x+1)}dx$; д) $\int \cos x \sin 2x dx$;

е) $\int \frac{1-\sqrt{x-1}}{\sqrt{1+x}}dx$.

Вариант 3.

а) $\int \frac{\cos 2x}{(15+\sin 2x)}dx$; б) $\int \frac{x+3}{\sqrt{7x^2-1}}dx$;

в) $\int (9x-2)\ln x dx$;

г) $\int \frac{x^3+5}{(x-1)(x^2+4)}dx$;　　д) $\int \sin^4 \frac{x}{2} dx$;

е) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x-3}}$.

Вариант 4.

а) $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2 - 2x\cos x}{x} dx$;　　б) $\int \frac{4x-3}{\sqrt{2x^2+1}} dx$;

в) $\int \left(x^2-2\right)2^x dx$;

г) $\int \frac{x^2}{(x+2)(x-1)^2}dx$;　　д) $\int \cos^4 x dx$;

е) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x}+\sqrt[4]{x-1}}$.

Вариант 5.

а) $\int \frac{dx}{(2x-1)\ln(2x-1)}$;　　б) $\int \frac{x+5}{5x^2+3} dx$;

в) $\int x\sin x\cos x dx$;

г) $\int \frac{x^2+2x-3}{x^3-2x^2-3x}dx$;　　д) $\int \sin^6 \frac{x}{2} cos \frac{x}{2} dx$;

е) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

Вариант 6.

а) $\int \sin \frac{2}{x} \frac{dx}{x^2}$;　　б) $\int \frac{8x-3}{\sqrt{4x^2+4x+5}} dx$;

в) $\int \left(x^2-1\right)\cos 2x dx$;

г) $\int \frac{(3x^2+1)}{(x^4-1)}dx$;

д) $\int \cos^3 x dx$;

е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}$.

Вариант 7.

а) $\int \frac{\arcsin^3 x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}dx$;

б) $\int \frac{x+1}{\sqrt{8x-4x^2}}dx$;

в) $\int (2x-1)\sin x dx$;

г) $\int \frac{x^2-x+6}{x^3+8}dx$;

д) $\int \sin^3 x dx$;

е) $\int \frac{x-2}{\sqrt{x}+1}dx$.

Вариант 8.

а) $\int \frac{ctg^5 x}{4\sin^2 x}dx$;

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-4x+3}}$;

в) $\int (2x-4)\sin 3x dx$;

г) $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$;

д) $\int \sin^3 x\cos^2 x dx$;

е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}$.

Вариант 9.

а) $\int \frac{\sin x dx}{2\sqrt[3]{\cos^2 x}}$;

б) $\int \frac{x dx}{2x^2-3x-2}$;

в) $\int x\,arctg x dx$;

г) $\int \frac{x^2dx}{x^4-16}$; д) $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$;

е) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$.

Вариант 10.

а) $\int \frac{4\cos 3x dx}{4+\sin 3x}$; б) $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$;

в) $\int \arccos x dx$;

г) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$; д) $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^4 x}$;

е) $\int \frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+6\right)}$.

Задача 2. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

1. $y''-4y'+5y=5x^2+2$
2. $y''+4y'+4y=\cos 2x$
3. $y''-y=xe^x$
4. $y''-2y'+y=4e^{3x}$
5. $y''-4y'+4y=xe^x$
6. $y''+3y=\sin 5x$
7. $y''+3y'-4y=e^{-4x}$
8. $y''+9y=2\cos x$
9. $y''-9y=\sin 2x$
10. $y''-6y'+9y=9x+3$

Задача 3. Исследовать сходимость положительного ряда, применяя какой – либо из достаточных признаков сходимости (сравнения, Даламбера, радикальный или интегральный):

1. a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4+3n}{6n-1}\right)^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$;

2. a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{10^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$; c) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$;

3. a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{2^{3n-4}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2-1}{5n^2-4}\right)^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2+1)^2}$;

4. a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}, (p\le 1)$;

5. a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{1000}}{3^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}, (p>1)$;

6. a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\frac{n^2+1}{n^2+n}$; c) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln^3 n}}$;

7. a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n+2)^n}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{e^{3n^3}}$;

$8.a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!};$ $b)\sum_{n=1}^{\infty}arctg\frac{n^2-n}{n^2+1};$ $c)\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt{n}};$

$9.a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^{200}};$ $b)\sum\frac{7^{n-1}}{3^{2n}}$ $c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3};$

$10.\quad a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^{300}};$ $b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{2n-1}}{6^{n+2}};$ $c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3}.$

Задача 4. (Комбинаторный метод вычисления вероятностей в классической схеме).

Варианты 1, 2

В магазин поступило n телевизоров. Из них k имеют скрытые дефекты. Покупателю для выбора наудачу предложено l телевизоров. Какова вероятность того, что все предложенные покупателю изделия не содержат дефектов?

1. n=30, k=3, l=2.
2. n=20, k=2, l=3.

Варианты 3,4

Из партии, содержащей n изделий, среди которых k бракованных, наудачу извлекают m изделий для контроля. Найти вероятности следующих событий: A={в полученной выборке ровно l бракованных изделий}, B={в полученной выборке нет бракованных изделий}.

3. n=10, k=3, l=1, m=4.
4. n=12, k=3, l=2, m=5

Варианты 5,6

Имеются два ящика с деталями. В первом n деталей, из них m годных. Во втором ящике N изделий, из них M годных. Сборщик наудачу выбрал по одной детали из каждого ящика. Найти вероятность того, что обе выбранные детали годные. Какова вероятность того, что обе выбранные детали бракованные?

5. n=12, m=8, N=8, M=7.
6. n=14, m=10, N=6, M=4.

Варианты 7,8

Группа, состоящая из 8 человек, занимает места с одной стороны прямоугольного стола. Найти вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом, если:

7. число мест равно 8.
8. число мест равно 12.

Варианты 9,10

Из урны, содержащей m+n шаров, из которых m белых и n черных, на удачу отбирают k шаров и откладывают в сторону. Найти вероятности следующих событий: A={все отложенные шары белые}, B={среди отложенных шаров ровно l белых}.

9. m=10, n=6, k=5, l=3.
10. m=8, n=12, k=6, l=4.

Задача 5. (Выборка, выборочные характеристики)

Из изучаемой налоговыми органами обширной группы населения случайным образом отобраны 10 человек и собраны сведения об их доходах за истекший квартал года в тысячах рублей: x1, x2,…, x10. Найти выборочное среднее, исправленную выборочную дисперсию. Считая распределение доходов в группе нормальным и принимая в качестве его параметров выборочные характеристики, определить, какой процент населения имеет квартальный доход, превышающий 70 тыс. рублей.

№ вар	*x1*	*x2*	*x3*	*x4*	*x5*	*x6*	*x7*	*x8*	*x9*	*x10*
1	50	40	60	80	40	50	60	120	70	50
2	45	65	85	45	55	65	95	75	65	55
3	80	70	60	50	70	90	50	60	70	100
4	65	55	45	65	85	55	45	65	100	80
5	50	60	70	100	80	70	60	50	70	90
6	100	40	80	90	50	60	80	70	70	50
7	100	50	80	90	100	130	55	60	100	80
8	70	40	45	90	110	60	50	40	110	90
9	80	110	90	80	70	60	60	50	65	50
10	90	40	60	40	80	65	90	70	50	60

ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2

В задаче 1 требуется вычислить неопределенные интегралы. При этом интеграл в задании 1а) вычисляется методом подведения выражений под знак дифференциала. Интеграл задания 1б) относится к интегралам «группы четырех». Для приведения таких интегралов к табличным необходимо выделять в знаменателе подынтегральных дробей полные квадраты и применить далее соответствующую подстановку. Можно, также, сразу выполнить замену переменной интегрирования по такому правилу: новая переменная интегрирования равна старой переменной интегрировании плюс половина коэффициента при первой степени старой переменной интегрирования в приведенном квадратном трехчлене. Для решения примера 1в) надо применить формулу интегрирования по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du \;.$$

В задании 1г) требуется проинтегрировать дробно-рациональную функцию. Если дробь под интегралом неправильная, надо выделить сначала целую часть. Это можно сделать, например, с помощью приема деление многочлена на многочлен «уголком». Затем правильную дробь следует представить суммой простых дробей в соответствии с корнями знаменателя. Неизвестные вначале коэффициенты простых дробей определяются методом неопределенных коэффициентов. Интеграл 1д) содержит тригонометрические функции и решается соответствующей подстановкой. Замену переменной интегрирования необходимо выполнить и для решения последнего примера этой группы заданий. Подстановка должна быть такой, чтобы избавиться от иррациональностей.

Приведем образцы решений примеров задания 1, где более детально разъясняются вышеуказанные рекомендации.

Пример 1. Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{x^2}{x^6+4}dx$.

Решение.

$$\int \frac{x^2}{x^6+4}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^6+4}dx = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(x^3\right)}{x^6+4} = \left| \begin{matrix} x^3 = t, \\ dt = 3x^2dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+2^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}+C = \frac{1}{6}arctg\frac{x^3}{2}+C$$

Пример 2. Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx.$

Решение.

$$\int \frac{x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx = \int \frac{(x+1)-4}{\sqrt{4-(x+1)^2}}dx = \left| \begin{matrix} x+1=t, \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{t-4}{\sqrt{4-t^2}}dt = \int \frac{tdt}{\sqrt{4-t^2}} - 4\int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(4-t^2\right)}{\sqrt{4-t^2}} - 4\arcsin\frac{t}{2}+C = -\sqrt{4-(x+1)^2} - 4\arcsin\frac{x+1}{2}+C.$$

Пример 3. Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx$.

Решение.

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx = \left| \begin{matrix} u=\arcsin x, & du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv=\frac{dx}{\sqrt{x+1}}, & v=2\sqrt{x+1} \end{matrix} \right| = 2\sqrt{x+1}\cdot\arcsin x - 2\int \sqrt{x+1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= 2\sqrt{x+1}\cdot\arcsin x - 2\int \frac{\sqrt{x+1}dx}{\sqrt{(1+x)(1-x)}} = 2\sqrt{x+1}\cdot\arcsin x +$$

$$+2\int \frac{d(1-x)}{\sqrt{1-x}} = 2\sqrt{x+1}\cdot\arcsin x + 4\sqrt{1-x}+C.$$

Пример 4.

Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx.$

Решение. Выделяем сначала целую часть подынтегральной дроби:

$$\frac{x^3+1}{x^3-x^2}=\frac{x^3-x^2+x^2+1}{x^3-x^2}=1+\frac{x^2+1}{x^3-x^2}.$$

Знаменатель правильной дроби имеет один простой корень $x=1$ и один кратный корень $x=0$.
Поэтому дробь заменим суммой простых дробей вида:

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x}.$$

Неизвестные вначале коэффициенты находим следующим образом (метод неопределенных коэффициентов). Просуммируем дроби в правой части, приводя их к общему знаменателю. Сравнивая числители дробей, справа и слева, имеем тождество

$$Ax^2+B(x-1)+Cx(x-1)\equiv x^2+1.$$

Поочередно задавая удобные значения x, составим уравнения для нахождения неизвестных коэффициентов. Пусть $x=0$, тогда $-B=1\Rightarrow \boxed{B=-1}$. Пусть $x=1$, тогда $\boxed{A=2}$. Пусть $x=-1$, тогда $A-2B+2C=2\Rightarrow \boxed{C=-1}$. Таким образом, $\frac{x^2+1}{x^3-x^2}=\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$. Следовательно,

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx=\int\left(1+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)dx=x+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+\frac{1}{x}+C.$$

Пример 5. Вычислить неопределенный интеграл $\int \cos^4 x dx.$

Решение.

$$\int \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x \right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\frac{1+\cos 4x}{2} \right) dx = \int \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x \right) dx =$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Пример 6. Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5} dx.$

Решение.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5} dx = \left| \begin{matrix} x = t^2, \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right| = \int \frac{2t^2}{t+5} dt = 2\int \frac{t^2 - 25 + 25}{t+5} dt = 2\int \left(\frac{(t-5)(t+5)}{t+5} + \frac{25}{t+5} \right) dt =$$

$$= 2\int (t-5)\, dt + 50\int \frac{dt}{t+5} = (t-5)^2 + 50\ln|t+5| + C = \left(\sqrt{x}-5\right)^2 + 50\ln\left(\sqrt{x}+5\right) + C.$$

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДУ. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ И ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

В математике часто встречаются уравнения, в которые, кроме неизвестной переменной (или нескольких переменных) входит неизвестная функция и ее производные (частные производные). Такие уравнения называются ***дифференциальными уравнениями***.

Если функция зависит от одной переменной, то такое уравнение называют обыкновенным дифференциальным уравнением – ОДУ. Если же функция зависит от нескольких переменных, то такое уравнение называют (дифференциальным) уравнением в частных производных – ДУвЧП. Исторически дифференциальные уравнения возникли из задач механики, в которых участвовали координаты тел, их скорости и ускорения, рассматриваемые как функции времени.

В данном пособии будут рассматриваться обыкновенные дифференциальные уравнения.

Уравнение вида

$$F(x, y, y', y''...y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

называется ***ОДУ n-го порядка*** из-за того, что максимальный порядок производной в этом уравнении равен n.

Пример: второй закон Ньютона представляется в виде ОДУ второго порядка

$$m\ddot{x} = F(x, t),$$

где где m — масса тела, x — его координата, F(x,t) — внешняя сила, действующее на тело с координатой x в момент времени t, $\ddot{x}$ вторая производная x по времени t. Решением этого уравнения является траектория движения тела под действием указанной силы.

Общим решением дифференциального уравнения называют функцию $y = f(x, C_0, C_1, C_2...C_{n-1})$, которая при подстановке в дифференциальное уравнение вида $F(x, y, y', y''...y^{(n)}) = 0$ обращает его в тождество. Постоянные $C_0, C_1, C_2...C_{n-1}$ являются константами интегрирования.

Пример:

Рассмотрим уравнение $y' = 6x^2$. Это ОДУ первого порядка. Очевидно, что функция, например, $y_1 = 2x^3 + 5$ является решением этого уравнения (это легко проверить, просто посчитав производную функции). Но решением будет также и функция $y_2 = 2x^3 - 11$ и $y_3 = 2x^3 + 554{,}8$. Аналогично можно показать, что любое решение вида $y = 2x^3 + C$, где C – произвольная постоянная, является решением данного уравнения. Функции такого вида и являются общим решением ДУ $y' = 6x^2$.

Частным решением ДУ называют функцию вида $y = f(x)$, которая при подстановке ее в дифференциальное уравнение вида $F(x, y, y', y''...y^{(n)}) = 0$ обращает уравнение в тождество.

Пример:

Все функции y_1, y_2 и y_3 из предыдущего примера являются частными решениями уравнения $y' = 6x^2$.

Таким образом, можно сказать, что общее решение ДУ это совокупность всех его частных решений.

Задачей Коши или ***начальной задачей*** для ОДУ n-го порядка называется совокупность самого дифференциального уравнения и начальных условий, т.е. значений функции и ее производных до n-1 порядка включительно, заданных в одной точке:

$$\begin{cases} F(x, y, y', y''...y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0 \\ y''(x_0) = y_2 \\ ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} \qquad (2)$$

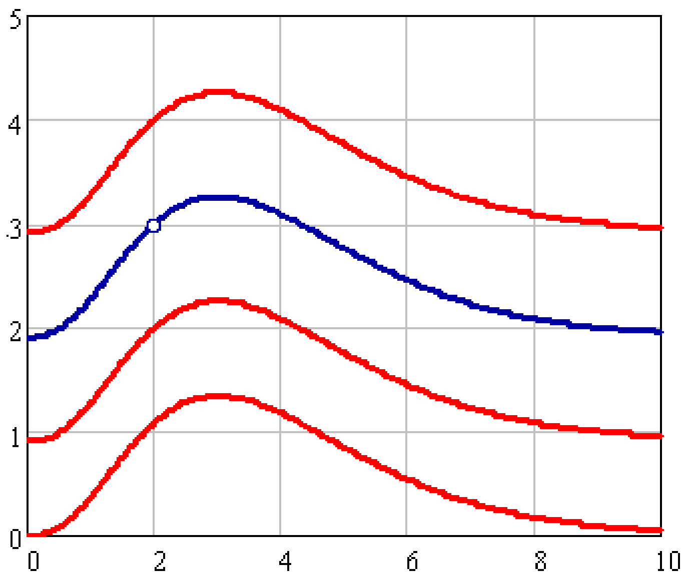
При определенных, достаточно общих ограничениях на функцию F (которые здесь оговаривать не будем) задача Коши имеет решение, и оно является единственным.

Число начальных условий задачи Коши должно соответствовать порядку дифференциального уравнения для однозначного нахождения всех неизвестных постоянных интегрирования $C_0, C_1, C_2 \ldots C_{n-1}$. Решение задачи Коши является частным решением ОДУ.

Пример: поставлена задача Коши для ОДУ первого порядка.

$$\begin{cases} y' = 6x^2 \\ y(1) = -2 \end{cases}$$

Общее решение этого ОДУ, как показано выше, имеет вид $y = 2x^3 + C$. Подставляя в него начальное условие, получаем: $-2 = 2 \cdot 1^3 + C$, откуда находим значение постоянной $C = -4$.



Таким образом, решение задачи Коши примет вид $y = 2x^3 - 4$.

На рисунке представлены несколько графиков, соответствующих четырем частным решениям некоторого ОДУ. Допустим, надо найти решение задачи Коши с начальными условиями $y(2)=3$, т.е. изо всей совокупности частных решений (общее решение) надо выбрать то, график которого проходит через точку с координатами (2,3).

Классификация ОДУ.

К основным видам дифференциальных уравнение, рассматриваемых в данном пособии относятся.

I. ОДУ первого порядка

- С разделяющимися переменными
- Однородные ДУ
- Линейные ДУ
- Уравнения Бернулли
- Уравнения в полных дифференциалах.

II. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

III. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

- Однородные.
- Неоднородные.
-

ОДУ первого порядка

ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными.

Если в результате каких-либо преобразований ДУ первого порядка $F(x,y,y')=0$ удалось привести к виду

$$\varphi(x)dx=\psi(y)dy, \tag{3}$$

то говорят, что это дифференциальное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными (переменные «разделились» по разные стороны от знака равенства). Тогда решение этого ДУ может быть найдено в квадратурах:

$$\int\varphi(x)dx=\int\psi(y)dy$$

$\Phi(x)=\Psi(y)+C$, где $\Phi(x)$ и $\Psi(y)$ - первообразные функций $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ соответственно.

Пример 10. Найти общее решение ДУ: $y^2-y'\sin^2 x=0$

<u>Решение.</u>

Представим производную как отношение дифференциалов:

$$y'=\frac{dy}{dx}$$

$$y^2-\frac{dy}{dx}\sin^2 x=0$$

Разнесем слагаемые по разные стороны от знака равенства:

$y^2=\frac{dy}{dx}\sin^2 x$, откуда $\frac{dx}{\sin^2 x}=\frac{dy}{y^2}$.

Получили уравнение с разделяющимися переменными, откуда, интегрируя правую и левую части, получим:

$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\int\frac{dy}{y^2} \quad \Rightarrow \quad -\mathrm{ctg}x=-\frac{1}{y}-C$. Знак постоянной C выбран отрицательным для того, чтобы можно было чуть упростить решение, отбросив знак минус.

$$\mathrm{ctg}x=\frac{1}{y}+C.$$

Это выражение и является общим решением ДУ.

Пример 10. Найти решение задачи Коши для ДУ:

$y'=3\sqrt[3]{y^2}$ с начальным условием $y(2)=0$.

<u>Решение.</u>

$$\frac{dy}{dx}=3\sqrt[3]{y^2}$$

$$\frac{dy}{\sqrt[3]{y^2}}=3dx$$

$$\int\frac{dy}{\sqrt[3]{y^2}}=\int 3dx$$

$$\int y^{-\frac{2}{3}}dy=\int 3dx$$

$$3y^{\frac{1}{3}} = 3x + 3C$$

$$\sqrt[3]{y} = x + C$$

Подставим в полученное выражение начальное условие:

$$\sqrt[3]{0} = 2 + C$$

$$C = -2$$

Решение задачи Коши: $\sqrt[3]{y} = x - 2$

Обыкновенное дифференциальное уравнение называется однородным если при замене $x \to kx$, а $y \to ky$ оно не меняется.

Другими словами, если уравнение можно привести к виду

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (4)$$

где f – любая функция, то оно является однородным.

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными типа (3) с помощью подстановки $u = \frac{y}{x}$.

Пример11: решить уравнение $xdy = (x + y)dx$.

Покажем, что это уравнение однородное. Для этого поделим его обе части на xdx.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x}$$

Поделив почленно правую часть на x:

$$y' = 1 + \frac{y}{x}.$$

Слева стоит производная y, а справа функция, зависящая только от $\frac{y}{x}$. Уравнение является однородным. Применим замену

$$u = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y = ux \quad \Rightarrow \quad y' = u'x + u.$$

$$u'x + u = 1 + u$$

Сократим на u и поделим на x:

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}$$

$$du=\frac{dx}{x}$$

$$\int du=\int\frac{dx}{x}$$

$$u=\ln|x|+C$$

Возвращаясь к исходной неизвестной функции $u=\frac{y}{x}$

$$\frac{y}{x}=\ln|x|+C$$

$$y=x\ln|x|+Cx.$$

Кроме этого, есть еще решение $x=0$, которое было потеряно при делении на x.

Линейные ДУ первого порядка.

Если обыкновенное дифференциальное уравнение можно привести к виду

$$y'+p(x)y=q(x), \qquad (5)$$

где p(x) и q(x) функции, не зависящие от y, а только от переменной x, то такое уравнение называется линейным (относительно y).

Линейные ОДУ первого порядка решают с помощью замены

$$y(x)=U(x)\cdot V(x), \qquad (6)$$

где U(x) и V(x) две пока неизвестные функции.

Найдем теперь производную $y'(x)$ по правилу дифференцирования произведения:

$$y'(x)=U'(x)\cdot V(x)+U(x)\cdot V'(x) \qquad (7)$$

Подставив выражения (6) и (7) для y и y' в уравнение, получим:

$$U'\cdot V+U\cdot V'+U\cdot V\cdot p(x)=q(x)$$

Одной из функций U или V можно распорядиться по нашему усмотрению так, чтобы максимально упростить полученное уравнение. Чтобы понять, как наиболее удобно это сделать, вынесем из второго и третьего слагаемых общий множитель U за скобку:

$$U'\cdot V + U\cdot(V' + V\cdot p(x)) = q(x)$$

Теперь видно, что если положить $V' + V\cdot p(x) = 0$, то оставшееся уравнение приобретет максимально простой вид. Таким образом, это уравнение распадается на два уравнения, каждое из которых является уравнением с разделяющимися переменными:

$$V' + V\cdot p(x) = 0$$

$$U'\cdot V = q(x)$$

Теперь, найдя из первого уравнения функцию V(x), подставим ее во второе и найдем функцию U(x). А так как неизвестная функция y(x)=UV, то, значит, мы нашли и ее.

Пример 12: Найти общее решение ДУ: $x^2y' + xy + 1 = 0$.

<u>Решение.</u>

Поделим уравнение на x^2 и перенесем слагаемое $\frac{1}{x^2}$ в правую часть:

$$y' + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

Следуя процедуре, изложенной выше, подставим в уравнение замену $y(x) = U(x)\cdot V(x)$:

$$U'\cdot V + U\cdot V' + \frac{U\cdot V}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

$$U'\cdot V + U\cdot(V' + \frac{V}{x}) = -\frac{1}{x^2}$$

Уравнение распадается на два уравнения с разделяющимися переменными:

$$V' + \frac{V}{x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad U'\cdot V = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{V}{x} \qquad\qquad U'\cdot\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{dV}{V}=-\frac{dx}{x}$$

Интегрируем

$$\int\frac{dV}{V}=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|V|=-\ln|x|$$

Находим V

$$\ln|V|=\ln|x^{-1}|$$

$$V=\frac{1}{x}$$

Подставляем во второе уравнение $\Rightarrow$

$$\frac{dU}{dx}=-\frac{1}{x}$$

$$dU=-\frac{dx}{x}$$

$$\int dU=-\int\frac{dx}{x}$$

$$U=-\ln|x|$$

Итак: $U=-\ln|x|$, а $V=\frac{1}{x}$. Тогда $y=-\ln|x|\cdot\frac{1}{x}+C$.

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Однородные.

Линейные однородные ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами имеют вид:

$$y''+p_1y'+p_2y=0, \tag{8}$$

где p_1 и p_2 — действительные числа.

Согласно теореме о структуре общего решения линейного однородного ДУ достаточно найти два линейно независимых частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (12), чтобы записать общее решение:

$$y_{00}(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x).$$

Где y_{00} – общее решение однородного уравнения.

Будем искать решение уравнения (8) в виде $y=e^{\lambda x}$, где λ — некоторая постоянная. Чтобы определить λ, подставим y,y',y'' в уравнение(8).

В результате подстановки получим уравнение $e^{\lambda x}\left(\lambda^2+p_1\lambda+p_2\right)=0.$

Так как $e^{\lambda x}\neq 0$, то

$$\lambda^2+p_1\lambda+p_2=0. \qquad (9)$$

Квадратное уравнение (9) называют *характеристическим уравнением* для ДУ (8), а его корни λ_1 и λ_2 *характеристическими числами*. При решении характеристического уравнения (9) могут возникнуть три случая:

а) Корни λ_1 и λ_2 действительные и различные. Тогда общее решение уравнения (8) будет иметь вид:

$$y_{00}=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}. \qquad (10)$$

б) Корни λ_1 и λ_2 действительные и равные, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$. Общее решение уравнения (8) будет иметь вид:

$$y_{00}=e^{\lambda x}\left(C_1+C_2x\right). \qquad (11)$$

в) Корни λ_1 и λ_2 комплексно сопряженные, $\lambda_{1,2}=a\pm ib$. Тогда общее решение уравнения (8) примет вид:

$$y_{00}=e^{ax}\left(C_1\cos bx+C_2\sin bx\right). \qquad (12)$$

Пример 13. Найти общие решения линейных однородных ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

а) $4y''+9y'+2y=0;$ б) $y''-10y'+25y=0;$

в) $y''-2y'+17y=0;$ г) $y''+1{,}69y=0;$

Решение.

а) $4y''+9y'+2y=0.$ Составим характеристическое уравнение:

$4\lambda^2+9\lambda+2=0.$

Решим его, используя формулу корней квадратного уравнения:

$$a\lambda^2+b\lambda+C=0,\quad \lambda_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Получим корни:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2}}{2 \cdot 4} = \frac{-9 \pm \sqrt{49}}{8} = \frac{-9 \pm 7}{8};$$

$$\lambda_1 = \frac{-9-7}{8} = -2, \quad \lambda_2 = \frac{-9+7}{8} = -\frac{1}{4}.$$

Поскольку $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то общее решение запишем в виде (10):

$$y_{00} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-\frac{x}{4}}.$$

б) $y'' - 10y' + 25y = 0.$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0,$$

его корни найдем по формуле корней квадратного уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25}}{2} = \frac{10 \pm 0}{2} = 5.$$

Поскольку $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in R$, то общее решение запишем в виде (11):

$$y_{00} = e^{5x}\left(C_1 + C_2 x\right).$$

в) $y'' - 2y' + 17y = 0.$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 17 = 0,$$

его корни найдем по формуле корней квадратного уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 17}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{2 \pm 8i}{2} = 1 \pm 4i.$$

Получим комплексно сопряженные корни $\lambda_{1,2} = a \pm ib$, где a=1, b=4.

Решение запишем в виде (12):

$$y_{00} = e^{x}\left(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x\right).$$

г) $y'' + 1{,}69y = 0.$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 1{,}69 = 0.$$

Решим его:

$$\lambda^2 = -1{,}69; \quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-1{,}69}; \quad \lambda_{1,2} = \pm 1{,}3i.$$

$\lambda_{1,2}$ — комплексно сопряженные корни вида $\lambda_{1,2} = a \pm ib$, где a = 0, b = 1,3. Решение запишем в виде (16), при этом учтем, что $e^0 = 1$:

$y_{00} = C_1 \cos 1{,}3x + C_2 \sin 1{,}3x.$

Неоднородные линейные ДУ.

Линейные неоднородные ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами имеют вид:

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = f(x). \qquad (13)$$

Здесь $f(x)$ — известная функция, непрерывная на некотором промежутке.

Согласно теореме о структуре общего решения линейного неоднородного ДУ общее решение ДУ (13) $y_{\text{он}}(x)$ есть сумма общего решения $y_{\text{оо}}(x)$ соответствующего однородного уравнения (8) и любого частного решения $y_{\text{чн}}(x)$ неоднородного уравнения (13), т. е.

$$y_{\text{он}}(x) = y_{\text{оо}}(x) + y_{\text{чн}}(x). \qquad (14)$$

Рассмотрим, в каком виде можно искать частное решение $y_{\text{чн}}(x)$ ДУ (18), когда правая часть уравнения $f(x)$ имеет специальный вид.

Пусть λ_1 и λ_2 корни характеристического уравнения (9), а правая часть уравнения имеет вид:

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right), \qquad (15)$$

где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ — многочлены от x степеней n и m соответственно с известными коэффициентами.

Тогда частное решение $y_{\text{чн}}$ следует искать в виде:

$$y_{\text{чн}} = x^k e^{\alpha x}\left(R_l(x)\cos\beta x + S_l(x)\sin\beta x\right), \qquad (16)$$

где k — кратность корня $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения:

$$k=\begin{cases}0,\ \text{если } \alpha\pm i\beta \text{ не является корнем;}\\ 1,\ \text{если } \alpha\pm i\beta \text{ — однократный корень;}\\ 2,\ \text{если } \alpha\pm i\beta \text{ — двукратный корень (этот}\\ \quad \text{случай реализуется только при } \beta=0).\end{cases}$$

При этом $R_l(x), S_l(x)$ — многочлены от x степени $l=\max\{n,m\}$ с некоторыми, пока неизвестными, коэффициентами. Неизвестные коэффициенты многочленов $R_l(x)$ и $S_l(x)$ находят методом неопределенных коэффициентов. Следующий пример поясняет решение задания 3 данной контрольной работы.

Пример 14. Найти общее решение линейных неоднородных ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

а) $y''-4y'=\sin 4x$; б) $y''-y'-2y=e^{-x}(x+2)$.

Решение. а) $y''-4y'=\sin 4x.$

Найдем общее решение соответствующего однородного ДУ:

$y''-4y'=0.$

Характеристическое уравнение:

$\lambda^2-4\lambda=0 \Rightarrow \quad \lambda(\lambda-4)=0 \quad \Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=4.$

Поскольку $\lambda_1,\ \lambda_2\in R$ и $\lambda_1\neq\lambda_2$, то общее решение запишем в виде (10), при этом учтем, что $e^0=1$:

$y_{00}=C_1+C_2e^{4x}.$

Найдем частное решение неоднородного уравнения. Правая часть уравнения $f(x)=\sin 4x.$

Сравнивая ее с видом (15) $f(x)=e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x)$, заключаем, что $\alpha=0,\ \beta=4,\ n=0,\ m=0.$ Определим параметры частного решения (16). Учитывая, что $\alpha=0$, а $\beta=4$, получим, что $\alpha\pm i\beta=\pm 4i$ — не является корнем характеристического уравнения, поскольку корни $\lambda_1=0,\ \lambda_2=4.$ Следовательно, k = 0.

Найдем $l=\max\{0,0\}=0$. Следовательно, порядок многочленов R и S равен 0, т. е. $R_0 = A$, а $S_0 = B$, где A и B — некоторые неизвестные пока коэффициенты. Подставив полученные параметры в $y_{\text{чн}}=x^k e^{\alpha x}\left(R_l(x)\cos\beta x+S_l(x)\sin\beta x\right)$, имеем:

$$y_{\text{чн}}=x^0e^0\left(R_0\cos4x+S_0\sin4x\right)=A\cos4x+B\sin4x.$$

Коэффициенты A и B определим из условия, что функция $y_{\text{чн}}$ — решение уравнения и поэтому должна ему удовлетворять. Найдем $y'_{\text{чн}}$ и $y''_{\text{чн}}$:

$$y'_{\text{чн}}=-4A\sin4x+4B\cos4x,$$

$$y''_{\text{чн}}=-16A\cos4x-16B\sin4x$$

и подставим в исходное уравнение:

$$-16A\cos4x-16B\sin4x+16A\sin4x-16B\cos4x=\sin4x.$$

Приравняем коэффициенты при $\sin4x$ и $\cos4x$ в правой и левой частях полученного равенства:

$$\begin{array}{l|l}\sin4x & -16B+16A=1, \quad \Rightarrow 16A+16A=1, \Rightarrow A=\dfrac{1}{32}, \\ \cos4x & -16A-16B=0. \quad \Rightarrow B=-A \Rightarrow B=-\dfrac{1}{32}.\end{array}$$

Итак, $y_{\text{чн}}=\dfrac{1}{32}\cos4x-\dfrac{1}{32}\sin4x.$

Тогда согласно (15) общее решение неоднородного ДУ имеет вид:

$$y_{\text{он}}=C_1+C_2e^{4x}+\frac{1}{32}\cos4x-\frac{1}{32}\sin4x.$$

б) $y''-y'-2y=e^{-x}(x+2).$

Найдем общее решение соответствующего однородного ДУ:

$$y''-y'-2y=0.$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2-\lambda-2=0.$$

Найдем его корни :

$$\lambda_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot1(-2)}}{2\cdot1}=\frac{1\pm3}{2};$$

$$\lambda_1=\frac{1-3}{2}=-1,\quad \lambda_2=\frac{1+3}{2}=2.$$

Поскольку $\lambda_1,\ \lambda_2\in R$ и $\lambda_1\neq\lambda_2,$ то общее решение запишем в виде (10):

$$y_{00}=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения. Правая часть уравнения $f(x)=e^{-x}(x+2).$ Сравнивая ее с видом (15) $f(x)=e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right),$ заключаем $\alpha=-1,\ \beta=0,\ n=1,\ m=0.$ Определим параметры частного решения (21). Учитывая, что $\alpha=-1,$ а $\beta=0,$ получим, что $\alpha\pm i\beta=-1$ — однократный корень характеристического уравнения, поскольку корни $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=2.$ Следовательно, k = 1. Найдем $l=\max\{1,\ 0\}=1.$ Следовательно, порядок многочленов R и S равен 1, т. е. $R_1=Ax+B,$ а $S_1=Cx+D,$ где A, B, C, D — неизвестные коэффициенты. Подставляя полученные параметры в $y_{чн}=x^ke^{\alpha x}\left(R_l(x)\cos\beta x+S_l(x)\sin\beta x\right),$ имеем:

$$y_{чн}=x^1e^{-x}\left((Ax+B)\cos0+(Cx+D)\sin0\right)=xe^{-x}(Ax+B)=e^{-x}\left(Ax^2+Bx\right).$$

Для определения коэффициентов A и B найдем $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$:

$$y'_{чн}=-e^{-x}\left(Ax^2+Bx\right)+e^{-x}(2Ax+B),$$

$$y''_{чн}=e^{-x}\left(Ax^2+Bx\right)-e^{-x}(2Ax+B)-e^{-x}(2Ax+B)+e^{-x}2A=$$
$$=e^{-x}\left(Ax^2+Bx\right)-2e^{-x}(2Ax+B)+e^{-x}2A$$

и подставим в исходное уравнение:

$$e^{-x}\left(Ax^2+Bx\right)-2e^{-x}\left(2Ax+B\right)+2Ae^{-x}+e^{-x}\left(Ax^2+Bx\right)-$$
$$-e^{-x}\left(2Ax+B\right)-2e^{-x}\left(Ax^2+Bx\right)=e^{-x}\left(x+2\right).$$

Разделим обе части уравнения на $e^{-x}\neq 0$ и приведем подобные члены:

$$-3\left(2Ax+B\right)+2A=x+2 \;\Rightarrow$$
$$-6Ax-3B+2A=x+2.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях уравнения:

x^1

x^0

$$\begin{vmatrix} -6A=1, & \Rightarrow A=-\dfrac{1}{6}, \\ -3B+2A=2. & \Rightarrow -3B+2\cdot\left(-\dfrac{1}{6}\right)=2\Rightarrow -3B=\dfrac{7}{3} \;\Rightarrow B=-\dfrac{7}{9}. \end{vmatrix}$$

Итак, $y_{\text{чн}}=e^{-x}\left(-\dfrac{1}{6}x^2-\dfrac{7}{9}x\right)$.

Тогда согласно (14) общее решение неоднородного ДУ имеет вид:

$$y_{\text{он}}=C_1e^{-x}+C_1e^{2x}+e^{-x}\left(-\frac{1}{6}x^2-\frac{7}{9}x\right).$$

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ РЯДЫ.

Для исследования сходимости **положительных** рядов (т.е. рядов с неотрицательными членами: $u_n \geq 0$) применяют достаточные признаки сходимости рядов. Среди них наиболее часто используют признаки сравнения, Даламбера, радикальный и интегральный признаки Коши.

Таблица 1. **Основные достаточные признаки сходимости положительных рядов**

Название признака	**Формулировка признака**	**Примечание**
1. **Первый признак сравнения**	Пусть сравниваются два положительных ряда Σu_n и Σv_n . Если для всех n, начиная с некоторого N, выполняются неравенства $u_n \leq v_n$, то из сходимости «большего» ряда Σv_n следует сходимость «меньшего» ряда Σu_n; если расходится «меньший» ряд Σu_n, то расходится также «больший» ряд Σv_n.	При сравнении могут полезными оказаться известные неравенства: $\sin\alpha < \alpha < \mathrm{tg}\,\alpha$, если $0 < \alpha < \pi/2$ $\ln n < n$, если $n \geq 2$
2.**Второй признак сравнения**	Если существует конечный отличный от нуля предел $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n},$$ то ряды $\Sigma\, u_n$, $\Sigma\, v_n$ одновременно сходятся, либо расходятся.	В качестве эталонного ряда часто используют **обобщенный гармонический ряд** $\Sigma(1/n^p)$ который сходится при $p>1$, а расходится при $p<1$, а также "геометрический" ряд Σq^n , который сходится при $\lvert q\rvert<1$.
3. **Признак Даламбера**	Если для положительного ряда $\Sigma\, u_n$ существует конечный предел	В случае $D = 1$ признак «не работает»; нужен другой, более сильный

	$D = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, тогда при $D<1$ ряд сходится, а при $D>1$ - расходится.	признак.
4. **Радикальный признак Коши**	Если для положительного ряда Σu_n существует конечный предел $K = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n};$ то при $K<1$ ряд сходится, а при $K>1$ – расходится.	Если K = 1, нужен другой признак
5. **Интегральный признак Коши**	Пусть при $x \geq 1$ $f(x)$ - непрерывная монотонно убывающая положительная функция, а члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ являются значениями этой функции натурального аргумента: $u_n=f(n)$. Тогда ряд сходится, если сходится несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx;$ Если интеграл расходится, то и ряд расходится.	Интегральный признак удобно применять к исследованию положительных рядов, для которых признаки Даламбера или радикальный не приводят к цели, а несобственный интеграл легко исследовать на сходимость

Таблица 2. **Разложения элементарных функций в степенные ряды**

Функция	Ряд Маклорена функции	Область сходимости
e^x	$1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+\ldots$	$-\infty < x < \infty$
$\sin x$	$x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$	$-\infty < x < \infty$
$\cos x$	$1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^{n}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$	$-\infty < x < \infty$
$(1+x)^\mu$	$1+\mu x+\dfrac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2+\dfrac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!}+$ $\ldots+\dfrac{\mu(\mu-1)\cdot\ldots\cdot(\mu-n+1)}{n!}x^n+\ldots$	$-1 < x < 1$
$\ln(1+x)$	$x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+\ldots$	$-1 < x \le 1$

$arctgx$	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+...$	$-1\le x\le 1$
$\arcsin x$	$x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+...+\frac{1\cdot 3\cdot...\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot...\cdot 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+...$	$-1\le x\le 1$

Пример 15. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} tg\frac{\pi}{\sqrt[5]{n^4}}$$

Решение. Применим первый признак сравнения. В качестве «эталонного» ряда возьмем обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{\sqrt[5]{n^4}}=\sum v_n$$

Показатель степени гармонического ряда p=4/5<1, поэтому «эталонный» ряд расходящийся. Члены исходного ряда для всех

$$tg\frac{\pi}{\sqrt[5]{n^4}}>\frac{\pi}{\sqrt[5]{n^4}}$$

n≥3 превосходят соответствующие члены «эталонного» ряда:
Применяя первый признак сравнения, получаем, поскольку расходится «меньший» эталонный ряд, то расходится и «больший» исходный ряд.

Пример 16. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\ln(3^n+2^n)-n\ln 3]$$

Решение. Преобразуем общий член исходного ряда

$$u_n=\ln(3^n+2^{n)})-n\ln 3=\ln\frac{3^n+2^n}{3^n}=\ln[1+\left(\frac{2}{3}\right)^n]$$

Исходный ряд сравним с "эталонным" рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Это "геометрический ряд, он сходится, т.к. знаменатель прогрессии q=2/3<1. Поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln[1+\left(\frac{2}{3}\right)^n]}{\left(\frac{2}{3}\right)^n}=1$$

конечное число, отличное от 0, то в силу второго признака сравнения заключаем, что исходный ряд сходится.

Пример 17. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3 3^n}{(2n-1)!}$$

Решение. Применим признак Даламбера. Записываем *n*-ый член ряда: $u_n=\dfrac{n^3\cdot 3^n}{(2n-1)!}$.

(n+1*)*-ый член получим, если в выражении *un* везде *n* заменим на *(n+1):*

$$u_{n+1}=\frac{(n+1)^3 3^{n+1}}{(2(n+1)-1)!}=\frac{(n+1)^3 3^{n+1}}{(2n+1)!}$$

Найдем предел отношения:

Пример 18. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{2n^2}\right)^{-n^3}.$$

<u>Решение.</u> Здесь удобно применить радикальный признак Коши:

$$K=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n^2+1}{2n^2}\right)^{-n^3}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{-n^2}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{\frac{1}{2n^2}}\right]^{\frac{1(-n^2)}{2n^2}}=e^{-\frac{1}{2}}=$$

Следовательно, ряд сходится. Подчеркнем, здесь использовали известный « второй замечательный» предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

Пример 19. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln^3 n}}$$

<u>Решение.</u> Рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{1}{x\sqrt{\ln^3 x}}$$

Она при x≥2 положительная, непрерывная и монотонно убывает. (Заметим, что эта функция получается из выражения общего члена ряда при замене *n* на *x).* Можно применять интегральный признак. Исследуем сходимость несобственного интеграла:

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln^3 x}}=\int_2^{\infty}(\ln x)^{-3/2}d(\ln x)=\lim_{A\to\infty}\int_2^{A}(\ln x)^{-3/2}d(\ln x)=\lim_{A\to\infty}\left.\frac{(\ln x)^{-3/2+1}}{-3/2+1}\right|_2^A=$$

$$\frac{2}{\sqrt{\ln 2}}-\lim_{A\to\infty}\frac{2}{\sqrt{\ln A}}=\frac{2}{\sqrt{\ln 2}}-0<\infty\Rightarrow \quad \textit{интеграл} \quad \textit{сходится}.$$

Из интегрального признака заключаем, поскольку несобственный интеграл сходится, то сходится и исследуемый ряд.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^3 3^{n+1}}{(2n+1)!}}{\frac{n^3 3^n}{(2n-1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^3 3^{n+1}(2n-1)!}{n^3 3^n (2n+1)!}=3\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{n^3 2n(2n+1)}=0<1 \Rightarrow \text{ряд} - \text{сходится}$$

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. <u>Элементы комбинаторики</u> <u>*Размещениями*</u> *m* из *n* элементов называются *m* - элементные подмножества множества E={*a1,a2,…,an*}, различающиеся либо набором элементов, либо порядком их следования. Общее число таких различных комбинаций обозначается символом A_n^m.

<u>*Перестановками*</u> называются размещения из *n* по *n* элементов. Общее число перестановок обозначают символом P_n.

<u>*Сочетаниями*</u> из *n* по *m* элементов называются *m*- элементные подмножества множества E={*a1,a2,…,an*}, имеющие различный состав элементов. Два сочетания считаются различными, если хотя бы один элемент входит в одну комбинацию, но не входит в другую. Общее число различных сочетаний обозначают символом C_n^m.

Число размещений, перестановок и сочетаний определяются формулами:

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!},\qquad P_n=n!,\qquad C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

2. <u>Классическое определение вероятности</u>

$P(A)=\dfrac{m}{n}$, где *n* – общее число элементарных событий (исходов, которые в данном опыте образуют конечную полную группу равновозможных попарно несовместных событий), *m* – число элементарных событий, благоприятствующих наступлению события *A*.

3. Геометрическое определение вероятности

$P(A)=\dfrac{мера(A)}{мера(\Omega)}$. Вероятность попадания точки в какую либо часть *A* области *Ω* пропорциональна мере (длине, площади, объему и т.д.) этой части и не зависит от ее расположения и формы.

4. Основные свойства вероятности

Вероятность любого события *A* - число, заключенное между 0 и 1. Вероятность невозможного события равна 0. Вероятность достоверного события равна 1.

Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:

$$P(A)+P(\bar{A})=1$$

Вероятность появления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Для любых двух событий *A* и *B* имеет место формула (теорема сложения для произвольных событий):

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Для полной группы несовместных событий $A_1,\quad A_2,\quad \ldots,\quad A_n$

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1$$

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)$$ - теорема умножения.

Если события *A* и *B* – независимые, то

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$$ - теорема умножения.

5. Формула полной вероятности. Формулы Байеса

Если известно, что событие *A* может произойти с одним из событий $H_1,\quad H_2,\quad \ldots,\quad H_n$ (гипотез), образующих полную группу попарно несовместных событий, то вероятность события *A* определяется по формуле полной вероятности:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A/H_i)$$

Вероятности гипотез после того как имело место событие *A* переоценивают по формулам Байеса:

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A/H_i)},\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Если производится *n* независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события *A* одна и та же и равна *p* (вероятность «успеха»), то вероятность того, что в этих *n* испытаниях событие *A* наступит ровно *k* раз, выражается формулой Бернулли:

$$P_n(k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Число k_0 называется наивероятнейшим числом наступления события *A* в *n* испытаниях по схеме Бернулли, если значение $P_n(k)$ при $k=k_0$

не меньше остальных значений. Число k_0 можно найти из двойного неравенства:

$$np+p-1\le k_0\le np+p.$$

Пример 20. В ящике находится 10 деталей. Из них 3 - дефектные. Наудачу отобраны 3 детали. Какова вероятность того, что:

а) все детали дефектные *(событие A)*;

б) только одна деталь дефектная *(событие B)*;

в) все три детали годные *(событие C);*

г) хотя бы одна деталь дефектная *(событие D).*

Решение. Используем классическое определение вероятности.

а) *Событие A* = {выбранные три детали дефектные};

$$P(A)=\frac{M}{N}$$

Элементарное событие в данной задаче - комбинация (сочетание) из трех деталей. $N=C_{10}^3$ - общее число способов выбрать 3 детали из имеющихся 10 деталей. $M=1$ (имеется всего один вариант выбора 3 дефектных деталей)

$$P(A)=\frac{1}{C_{10}^{3}}=\frac{1}{\frac{10!}{(10-3)!\cdot 3!}}=\frac{7!\cdot 3!}{10!}=\frac{1}{120}.$$

б) *Событие B* = {из трех выбранных деталей 1 деталь дефектная, две детали без дефекта};

$$P(B)=\frac{M}{N},$$

где $M=C_3^1\cdot C_7^2$ - количество вариантов, благоприятствующих появлению события B, при которых 1 дефектная деталь выбирается из группы 3 дефектных и 2 бездефектные детали выбираются из группы 7 бездефектных деталей $N=C_{10}^{3}$

Следовательно, $P(B)=\dfrac{C_3^1\cdot C_7^2}{C_{10}^3}=\dfrac{\frac{3!}{2!\cdot 1!}\cdot\frac{7!}{5!\cdot 2!}}{\frac{10!}{7!\cdot 3!}}=\dfrac{7}{45}.$

в) *Событие C* = {выбранные три детали бездефектные}

$$P(C)=\frac{C_7^3}{C_{10}^3}=\frac{\frac{7!}{4!\cdot 3!}}{\frac{10!}{7!\cdot 3!}}=\frac{7}{24}.$$

г) *Событие D* = {хотя бы одна из трех выбранных деталей бездефектная}. Рассмотрим противоположное событие $\overline{\mathrm{D}}$.

$\overline{D}=C$ = { среди трех выбранных деталей нет дефектных}. Так как $P(D)=1-P(\overline{D})$, то $P(D)=1-P(C)-1-\dfrac{7}{24}=\dfrac{17}{24}$.

Пример 21. Из группы населения случайным образом отобрано 10 человек и собраны их доходы за истекший квартал года в тысячах рублей x_1, x_2, $x_3 \ldots x_{10}$. Найти выборочное среднее исправленную выборочную дисперсию. Считая распределение доходов в группе нормальным и, применяя в качестве его параметров выборочные характеристики, определить, какой процент населения имеет квартальный доход, превышающий 100 тыс. рублей.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
80	110	130	100	70	90	150	60	90	70

Решение.

Найдем выборочную среднюю по формуле $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$:

$$\overline{X} = \frac{110+130+100+70+90+150+60+80+130}{10} = \frac{950}{10} = 95$$

Вычислим выборочную дисперсию $D_в$.

$$D_{в.} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2 , \qquad n=10.$$

$$D_в = \frac{1}{10}[(80-95)^2 + (110-95)^2 + (130-95)^2 + (100-95)^2 + (70-95)^2 +$$

$$+(90-95)^2 + (150-95)^2 + (60-95)^2 + (90-95)^2 + (70-95)^2] =$$

$$= \frac{1}{10}[225+225+1225+25+625+25+3025+1225+25+625] = \frac{7250}{10} = 725$$

Исправленная выборочная дисперсия:

$$S^2 = \frac{n}{n-1}D_в = \frac{10}{9}\cdot 725 = 805,56 .$$

$$\sigma = \sqrt{S^2} = 28,4 .$$

Чтобы найти процент группы населения, которая имеет доход, превышающий 100 тыс. руб. используем формулу попадания значений нормально распределенной случайной величины в заданный промежуток:

$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$, где Φ – функция Лапласа.

В данном случае принимаем следующие значения параметров:

α = 100 тыс.руб., $a = \overline{x} = 95$ тыс.руб., $\sigma = \sqrt{S^2} = S = 28,4$ тыс. руб., β ? 100 тыс. руб. (нет ограничений сверху). Имеем:

$$P(X>100)=P(100<X<\infty)=\Phi\left(\frac{\infty-95}{28,4}\right)-\Phi\left(\frac{100-95}{28,4}\right)=\Phi(\infty)-\Phi\left(\frac{5}{28,4}\right)=0,5-\Phi(0,176)$$

По таблице находим: $\Phi(0,176)=0,07$, следовательно, $P(X>100)\approx 0,43$.