



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Высшая математика»

## Учебно-методическое пособие

«Исследование устойчивости динамических  
систем»

по дисциплине

**«Математика»**

Авторы  
Рябых Г.Ю.

Ростов-на-Дону, 2026

## Аннотация

Методические указания содержат рекомендации по исследованию динамических систем и задания для самостоятельной работы. Предназначены для студентов факультета ИиВТ.

## Авторы

канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика»  
Рябых Г.Ю.



## Оглавление

<b>Примеры исследования устойчивости.....</b>	<b>4</b>
<b>Задачи для самостоятельного решения .....</b>	<b>6</b>
<b>ПЕРЕЧЕНЬ ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ.....</b>	<b>19</b>

## Примеры исследования устойчивости.

### Пример 1.

Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = 2y \\ \dot{y} = 2x + 3y' \end{cases}$  указать тип точки покоя.

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0, \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4.$$

Корни характеристического уравнения действительны и имеют разные знаки; следовательно, точка покоя – седло, положение равновесия неустойчиво.

### Пример 2.

Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 11y + 8z \\ \dot{y} = -5y - 3z \\ \dot{z} = y - z \end{cases}$

Решение. Найдем собственные числа матрицы системы  $A = \begin{pmatrix} -3 & 11 & 8 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Составим и решим характеристическое уравнение  $\begin{vmatrix} -3-\lambda & 11 & 8 \\ 0 & -5-\lambda & -3 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$

$$-(3+\lambda)((\lambda+5)(\lambda+1)+3) = 0, -(3+\lambda)(\lambda^2 + 6\lambda + 8) = 0, (\lambda+3)(\lambda+2)(\lambda+4) = 0, \lambda_1 = -2,$$

$\lambda_2 = -3, \lambda_3 = -4$ . Все корни характеристического уравнения отрицательны, следовательно, все решения системы асимптотически устойчивы.

### Пример 3.

Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + x^2 \sin y; \\ \dot{y} = -x - 4y + 1 - \cos y. \end{cases}$$

Решение. Составим систему первого приближения для исходной системы:

$\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y; \\ \dot{y} = -x - 4y. \end{cases}$  Найдем корни характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ -1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0, (\lambda+1)(\lambda+4)+3 = 0, \lambda^2 + 5\lambda + 7 = 0, \lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Оба корня имеют отрицательные действительные части, следовательно, нулевое решение исходной системы асимптотически устойчиво.

#### Пример 4.

Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения  $y^{(4)} + 3y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 0$ .

Решение. Составим матрицу Гурвица для данного уравнения и вычислим главные диагональные миноры этой матрицы.

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \Delta_1 = 3, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = 6, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 9 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 9, \Delta_4 = 5 \cdot \Delta_3 = 45.$$

Все миноры положительны, следовательно, нулевое решение уравнения асимптотически устойчиво.

#### Пример 5.

Используя метод функций Ляпунова, исследовать на устойчивость тривиальное решение системы: 
$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y - x^3 - y^2 \\ \dot{y} = x - y + xy \end{cases}$$

Решение. Возьмем функцию  $V(x, y) = x^2 + y^2$  и составим  $\frac{dV}{dt}$  для исходной системы:

$$\frac{dV}{dt} = 2x(-x + y - x^3 - y^2) + 2y(x - y + xy), \quad \frac{dV}{dt} = -2x^2 + 4xy - 2y^2 - 2x^4,$$

$$\frac{dV}{dt} = -2(x - y)^2 - 2x^4 < 0 \text{ при } x, y \neq 0.$$

Следовательно, нулевое решение системы асимптотически устойчиво.

## Задачи для самостоятельного решения

### Вариант 1

1. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = 6x + y \\ \dot{y} = 5x + 2y \end{cases}$ , изобразить траектории на фазовой плоскости.

2. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = y - 2x + 2z, \\ \dot{y} = x - 2y - 2z, \\ \dot{z} = 3y - 3x + 5z. \end{cases}$

3. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения:

$$y'''' + 3y''' + 4y'' + 3y' + 2y = 0$$

4. Пользуясь теоремой об устойчивости по первому приближению, исследовать на устойчивость нулевого решения системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(1+x) + \sin(2x-y) + xy^2, \\ \dot{y} = 5e^{x-y} + x^2 - 5 + 2 \arcsin y. \end{cases}$$

5. Используя метод функции Ляпунова, исследовать на устойчивость тривиальное решение системы:  $\begin{cases} \dot{x} = -3y - 2x^2, \\ \dot{y} = 2x + 3y^3 \end{cases}$ ;  $V(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ .

### Вариант 2

1. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = -x + 3y \end{cases}$ , изобразить траектории на фазовой плоскости.

2. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = y + z, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = x + y. \end{cases}$

3. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения:

$$y'''' + 11y''' + 9y'' + 7y' + 3y = 0$$

4. Пользуясь теоремой об устойчивости по первому приближению, исследовать на устойчивость нулевого решения системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2 \sin y + \operatorname{arctg} y + xy, \\ \dot{y} = 1 - \cos 3x - 2 \sin x + y + y^3. \end{cases}$$

5. Используя метод функции Ляпунова, исследовать на устойчивость тривиальное решение системы:  $\begin{cases} \dot{x} = -xy^4, \\ \dot{y} = x^4y; \end{cases}$   $V(x, y) = x^4 + y^4$ .

### Вариант 3

1. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = 8x + 4y \\ \dot{y} = 12x + 16y \end{cases}$ , изобразить траектории на фазовой плоскости.

## Математика

2. Исследовать на устойчивость систему 
$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y + 2z, \\ \dot{y} = -3x - y + z, \\ \dot{z} = -x + 2y. \end{cases}$$
3. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения:

$$y'''' + 4y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$$

4. Пользуясь теоремой об устойчивости по первому приближению, исследовать на устойчивость нулевого решения системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{x^2 2y} - \cos x + x, \\ \dot{y} = y + x^2 \sin x + \sqrt{1-x} - 1. \end{cases}$$

5. Используя метод функции Ляпунова, исследовать на устойчивость тривиальное решение системы: 
$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2xy^2, \\ \dot{y} = -2y + 4x^2y; \end{cases} \quad V(x, y) = x^2 - 0,5y^2.$$

## Вариант 4

1. Исследовать на устойчивость систему 
$$\begin{cases} \dot{x} = 6x + 2y \\ \dot{y} = -2x + 2y \end{cases}$$
, изобразить траектории на фазовой плоскости.

2. Исследовать на устойчивость систему 
$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + z, \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = x + y - z. \end{cases}$$

3. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения:

$$y'''' + 7y''' + 4y'' + 10y' + y = 0$$

4. Пользуясь теоремой об устойчивости по первому приближению, исследовать на устойчивость нулевого решения системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos^2 x - e^{x^2} + xy + y, \\ \dot{y} = 3 \operatorname{arctg} x - 4 \sin y + x^3. \end{cases}$$

5. Используя метод функции Ляпунова, исследовать на устойчивость тривиальное решение системы: 
$$\begin{cases} \dot{x} = -y - 0,5x - 0,25x^3, \\ \dot{y} = x - 0,5y - 0,25y^3; \end{cases} \quad V(x, y) = x^2 + y^2.$$

## Вариант 5

1. Исследовать на устойчивость систему 
$$\begin{cases} \dot{x} = -2y \\ \dot{y} = 2x \end{cases}$$
, изобразить траектории на фазовой плоскости.

2. Исследовать на устойчивость систему 
$$\begin{cases} \dot{x} = 3y - 4x - 3z, \\ \dot{y} = 3y - 2x - z, \\ \dot{z} = 2y - 4x. \end{cases}$$

3. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения:

$$y'''' + 4y''' + y'' + 3y' + y = 0$$

4. Пользуясь теоремой об устойчивости по первому приближению, исследовать на устойчивость нулевого решения системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2 - e^x + 3 \cos y + y, \\ \dot{y} = 2x - 1 + \sqrt{1 + y} + x^2 y^2. \end{cases}$$

5. Используя метод функции Ляпунова, исследовать на устойчивость тривиальное решение системы:  $V(x, y) = x^2 + y^2$ .
- $$\begin{cases} \dot{x} = y + x^3, \\ \dot{y} = -x + y^3; \end{cases}$$

## Вариант 6

1. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = -12x + 2y \\ \dot{y} = 4x - 10y \end{cases}$ , изобразить траектории на фазовой плоскости.

2. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = -x - 3y + z, \\ \dot{y} = 2x - 3y + 2z, \\ \dot{z} = 2x - y. \end{cases}$

3. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения:

$$y'''' + 7y''' + 8y'' + 2y' + 12y = 0$$

4. Пользуясь теоремой об устойчивости по первому приближению, исследовать на устойчивость нулевого решения системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2 \sin y - y^5, \\ \dot{y} = 3x + xy \cos x. \end{cases}$$

5. Используя метод функции Ляпунова, исследовать на устойчивость тривиальное решение системы:  $V(x, y) = 2x^2 + y^2$ .
- $$\begin{cases} \dot{x} = y + x^2 y^2 - 0,25x^5, \\ \dot{y} = -2x - x^3 y - 0,5y^3; \end{cases}$$

## Вариант 7

1. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 5y \\ \dot{y} = x + 6y \end{cases}$ , изобразить траектории на фазовой плоскости.

2. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = x + y - z, \\ \dot{y} = 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + z. \end{cases}$

3. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения:

$$y'''' + 2y''' + 3y'' + 2y' + 5y = 0$$

4. Пользуясь теоремой об устойчивости по первому приближению, исследовать на устойчивость нулевого решения системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + x^3 - y^2 \sin x, \\ \dot{y} = 2 - e^x - 3y - \cos^2 x + y^5. \end{cases}$$

5. Используя метод функции Ляпунова, исследовать на устойчивость тривиальное решение системы:  $\begin{cases} \dot{x} = -x, \\ \dot{y} = -y; \end{cases} V(x, y) = x^2 + y^2.$

## Вариант 8

1. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = -x - 3y \end{cases}$ , изобразить траектории на фазовой плоскости.

2. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = x + 4y, \\ \dot{y} = x - y - 2z, \\ \dot{z} = x + 2y - z. \end{cases}$

3. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения:

$$y'''' + 2y''' + 3y'' + 8y' + 5y = 0$$

4. Пользуясь теоремой об устойчивости по первому приближению, исследовать на устойчивость нулевого решения системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x - 3x^2 + 3\sin y, \\ \dot{y} = \sin x + \cos y - 1 + x^2y^2. \end{cases}$$

5. Используя метод функции Ляпунова, исследовать на устойчивость тривиальное решение системы:  $\begin{cases} \dot{x} = x + x^3, \\ \dot{y} = -y - y^3; \end{cases} V(x, y) = x^2 - y^2.$

## Вариант 9

1. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = y - x \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$ , изобразить траектории на фазовой плоскости.

2. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 2y + z, \\ \dot{y} = 3x + 5y - 3z, \\ \dot{z} = x + 2y - 2z. \end{cases}$

3. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения:

$$y'''' + 5y''' + 8y'' + 3y' + 2y = 0$$

4. Пользуясь теоремой об устойчивости по первому приближению, исследовать на устойчивость нулевого решения системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = 10x - 29\sin y + x^2y^3, \\ \dot{y} = y^2 - 14y + 5\cos x - 5. \end{cases}$$

5. Используя метод функции Ляпунова, исследовать на устойчивость тривиальное решение системы:  $\begin{cases} \dot{x} = xy^4 - 2x^3 - y, \\ \dot{y} = 2x^2y^3 - y^7 + 2x; \end{cases} V(x, y) = x^2 + 0,5y^2.$

## Вариант 10

1. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = -3x - y \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$ , изобразить траектории на фазовой плоскости.

## Математика

2. Исследовать на устойчивость систему 
$$\begin{cases} \dot{x} = z - x + 3y, \\ \dot{y} = -2x - 3y - 2z, \\ \dot{z} = 2x + y. \end{cases}$$
3. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения:

$$y'''' + 6y''' + 15y'' + 7y' + 10y = 0$$

4. Пользуясь теоремой об устойчивости по первому приближению, исследовать на устойчивость нулевого решения системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sin x + 2e^y - 2 + 4x^3, \\ \dot{y} = \operatorname{tg} x + x^2y - y^3. \end{cases}$$

5. Используя метод функции Ляпунова, исследовать на устойчивость тривиальное решение системы: 
$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y, \\ \dot{y} = x - y; \end{cases} \quad V(x, y) = x^2 + 3y^2.$$

## Вариант 11

1. Исследовать на устойчивость систему 
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$
, изобразить траектории на фазовой плоскости.

2. Исследовать на устойчивость систему 
$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z, \\ \dot{y} = 2y + x - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z. \end{cases}$$

3. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения:

$$y'''' + 10y''' + 7y'' + 15y' + 6y = 0$$

4. Пользуясь теоремой об устойчивости по первому приближению, исследовать на устойчивость нулевого решения системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2 \sin x + \ln(1 - 4y) + x^3, \\ \dot{y} = \sin(x + y) + \sqrt{1 + x} - 1. \end{cases}$$

5. Используя метод функции Ляпунова, исследовать на устойчивость тривиальное решение системы: 
$$\begin{cases} \dot{x} = x^5 + y^3, \\ \dot{y} = x^3 - y^5; \end{cases} \quad V(x, y) = x^4 - y^4.$$

## Вариант 12

1. Исследовать на устойчивость систему 
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases}$$
, изобразить траектории на фазовой плоскости.

2. Исследовать на устойчивость систему 
$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = 2y + x - 2z, \\ \dot{z} = x + y - z. \end{cases}$$

3. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения:

$$y'''' + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = 0$$

4. Пользуясь теоремой об устойчивости по первому приближению, исследовать на устойчивость нулевого решения системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{-x+2y} - \cos 3x + 2y, \\ \dot{y} = xy - 2e^y + 2\sqrt[3]{1-6x}. \end{cases}$$

5. Используя метод функции Ляпунова, исследовать на устойчивость тривиальное решение системы:  $\begin{cases} \dot{x} = xy - x^3 + y, \\ \dot{y} = x^4 - x^2y - x^3; \end{cases} V(x, y) = x^4 + 2y^2.$

## Вариант 13

1. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 3y \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$ , изобразить траектории на фазовой плоскости.

2. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y - z, \\ \dot{y} = z - 2x - y, \\ \dot{z} = 2y + x. \end{cases}$

3. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения:

$$y'''' + 7y''' + 12y'' + 3y' + 9y = 0$$

4. Пользуясь теоремой об устойчивости по первому приближению, исследовать на устойчивость нулевого решения системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2e^{x^2} - 2 \cos 2y + y + y^5, \\ \dot{y} = \sin 2x - y - \sqrt[3]{1-xy} + 1. \end{cases}$$

5. Используя метод функции Ляпунова, исследовать на устойчивость тривиальное решение системы:  $\begin{cases} \dot{x} = x^3 + 2xy^2, \\ \dot{y} = x^2y; \end{cases} V(x, y) = x^2 - y^2.$

## Вариант 14

1. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = -7x + y \\ \dot{y} = -2x - 5y \end{cases}$ , изобразить траектории на фазовой плоскости.

2. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = 5x - y - 4z, \\ \dot{y} = 5y - 12x + 12z, \\ \dot{z} = 10x - 3y - 9z. \end{cases}$

3. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения:

$$y'''' + 3y''' + 3y'' + 3y' + 12y = 0$$

4. Пользуясь теоремой об устойчивости по первому приближению, исследовать на устойчивость нулевого решения системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = -e^{-3y} - y^2 \cos 3x + e^{3x}, \\ \dot{y} = 2 \ln(1 + x + y) - \sin 2x + xy. \end{cases}$$

5. Используя метод функции Ляпунова, исследовать на устойчивость тривиальное решение системы:  $\begin{cases} \dot{x} = -2y - x(x - y)^2, \\ \dot{y} = 3x - 0,5y(x - y)^2; \end{cases} V(x, y) = 3x^2 + 2y^2.$

## Вариант 15

1. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = 2y - 5x \\ \dot{y} = x - 6y \end{cases}$ , изобразить траектории на фазовой плоскости.

2. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y + 2z, \\ \dot{y} = -x + 2z, \\ \dot{z} = -3x + y - z. \end{cases}$

3. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения:

$$y'''' + 5y''' + 2y'' + 4y' + 2y = 0$$

4. Пользуясь теоремой об устойчивости по первому приближению, исследовать на устойчивость нулевого решения системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin y + 4 \ln(1 + x) - xy \cos 3x, \\ \dot{y} = -\ln(1 + y) + x^2 \sqrt{1 - 6x}. \end{cases}$$

5. Используя метод функции Ляпунова, исследовать на устойчивость тривиальное решение системы:  $\begin{cases} \dot{x} = x^3 - y, \\ \dot{y} = x + y^3; \end{cases} V(x, y) = x^2 + y^2.$

## Вариант 16

1. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 2x + 3y \end{cases}$ , изобразить траектории на фазовой плоскости.

2. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = 7x - 18y + 18z, \\ \dot{y} = 10y - 3x + 9z, \\ \dot{z} = 18y - 6x - 17z. \end{cases}$

3. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения:

$$y'''' + 2y''' + 4y'' + 8y' + 5y = 0$$

4. Пользуясь теоремой об устойчивости по первому приближению, исследовать на устойчивость нулевого решения системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + \cos 3x - e^{xy} - x^2 \cos x, \\ \dot{y} = 3e^{x+y} - 3 + x^2 + y^4. \end{cases}$$

5. Используя метод функции Ляпунова, исследовать на устойчивость тривиальное решение системы:  $\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x^2, \\ \dot{y} = -3x - 2y^2; \end{cases} V(x, y) = 3x^2 + 2y^2.$

## Вариант 17

## Математика

1. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2x - 3y \end{cases}$ , изобразить траектории на фазовой плоскости.

2. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y - z, \\ \dot{y} = 3y - x + z, \\ \dot{z} = y + 2z. \end{cases}$

3. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения:

$$y'''' + 2y''' + 3y'' + 7y' + 2y = 0$$

4. Пользуясь теоремой об устойчивости по первому приближению, исследовать на устойчивость нулевого решения системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3(e^{2y} - \cos 3x) + x + xy, \\ \dot{y} = \sin(x + y) + \ln(1 - 2y) - xy^2. \end{cases}$$

5. Используя метод функции Ляпунова, исследовать на устойчивость тривиальное решение системы:  $\begin{cases} \dot{x} = xy^4, \\ \dot{y} = -x^4y; \end{cases} \quad V(x, y) = x^4 + y^4.$

## Вариант 18

1. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = 5x - y \\ \dot{y} = x + 3y \end{cases}$ , изобразить траектории на фазовой плоскости.

2. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = x + 3z, \\ \dot{y} = y + z, \\ \dot{z} = z - x - y. \end{cases}$

3. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения:

$$y'''' + 2y''' + 7y'' + 3y' + 2y = 0$$

4. Пользуясь теоремой об устойчивости по первому приближению, исследовать на устойчивость нулевого решения системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin y - 2\arctg 3x + x^4, \\ \dot{y} = y^2 - \cos y + \sqrt{1 + x + y}. \end{cases}$$

5. Используя метод функции Ляпунова, исследовать на устойчивость тривиальное решение системы:  $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 4xy^2, \\ \dot{y} = y + 2x^2y; \end{cases} \quad V(x, y) = y^2 - 0,5x^2.$

## Вариант 19

1. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$ , изобразить траектории на фазовой плоскости.

2. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = -y + z. \end{cases}$

3. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения:

$$y'''' + 8y''' + 14y'' + 7y' + 5y = 0$$

4. Пользуясь теоремой об устойчивости по первому приближению, исследовать на устойчивость нулевого решения системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin x \cos y + x \cos x - xy, \\ \dot{y} = 5 \sin x - 10 \ln(1 + 2y) + x^2. \end{cases}$$

5. Используя метод функции Ляпунова, исследовать на устойчивость тривиальное решение системы:  $\begin{cases} \dot{x} = y - 0,5x - 0,25x^3, \\ \dot{y} = -x - 0,5y - 0,25y^3; \end{cases} V(x, y) = x^2 + y^2.$

## Вариант 20

1. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = -x + 5y \\ \dot{y} = x + 3y \end{cases}$ , изобразить траектории на фазовой плоскости.

2. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = -x - y + z, \\ \dot{y} = -x - y - z, \\ \dot{z} = x - y - y. \end{cases}$

3. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения:

$$y'''' + 5y''' + 3y'' + 14y' + 8y = 0$$

4. Пользуясь теоремой об устойчивости по первому приближению, исследовать на устойчивость нулевого решения системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = 5xe^{x+2y} + 2y + x^2 \cos 3x, \\ \dot{y} = 2 \cos y - 2 + y. \end{cases}$$

5. Используя метод функции Ляпунова, исследовать на устойчивость тривиальное решение системы:  $\begin{cases} \dot{x} = -y + x^3, \\ \dot{y} = x + y^3; \end{cases} V(x, y) = x^2 + y^2.$

## Вариант 21

1. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y \\ \dot{y} = x + 3y \end{cases}$ , изобразить траектории на фазовой плоскости.

2. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = y - x - 2z, \\ \dot{y} = 2x + z, \\ \dot{z} = 2x - y + 2z. \end{cases}$

3. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения:

$$y'''' + 13y''' + 16y'' + 5y' + 6y = 0$$

4. Пользуясь теоремой об устойчивости по первому приближению, исследовать на устойчивость нулевого решения системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = xy - x^2 - 2x, \\ \dot{y} = 5 \sin x - y\sqrt{1+x}. \end{cases}$$

5. Используя метод функции Ляпунова, исследовать на устойчивость тривиальное решение системы:  $\begin{cases} \dot{x} = -2y - xy^3 - 0,5x^3, \\ \dot{y} = x + x^2y^2 - 0,25y^5; \end{cases} \quad V(x, y) = x^2 + 2y^2.$

## Вариант 22

1. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases}$ , изобразить траектории на фазовой плоскости.

2. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = -2y - z, \\ \dot{y} = 2y + x + z, \\ \dot{z} = 2y + x + 2z. \end{cases}$

3. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения:

$$y'''' + 3y''' + 26y'' + 4y' + 8y = 0$$

4. Пользуясь теоремой об устойчивости по первому приближению, исследовать на устойчивость нулевого решения системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2 \sin x - y \cos^2 y, \\ \dot{y} = 3x - \ln(1 + 2y) - x^3. \end{cases}$$

5. Используя метод функции Ляпунова, исследовать на устойчивость тривиальное решение системы:  $\begin{cases} \dot{x} = y - x + xy, \\ \dot{y} = x - y - x^2 - y^3; \end{cases} \quad V(x, y) = x^2 + y^2.$

## Вариант 23

1. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = 5x - y \end{cases}$ , изобразить траектории на фазовой плоскости.

2. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 12y + 12z, \\ \dot{y} = 5y - x + 4z, \\ \dot{z} = 10y - 3x - 9z. \end{cases}$

3. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения:

$$y'''' + 5y''' + 9y'' + 5y' + 3y = 0$$

4. Пользуясь теоремой об устойчивости по первому приближению, исследовать на устойчивость нулевого решения системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3 \sin y - x + x^5, \\ \dot{y} = x + 2y - 1 + \cos y. \end{cases}$$

5. Используя метод функции Ляпунова, исследовать на устойчивость тривиальное решение системы:  $\begin{cases} \dot{x} = -x - x^3, \\ \dot{y} = y + y^3; \end{cases} \quad V(x, y) = -x^2 + y^2.$

## Вариант 24

1. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = 2x + 2y \end{cases}$ , изобразить траектории на фазовой плоскости.

## Математика

2. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 2y - x + z, \\ \dot{z} = 2x - 2y - z. \end{cases}$
3. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения:

$$y'''' + y''' + 10y'' + y' + 2y = 0$$

4. Пользуясь теоремой об устойчивости по первому приближению, исследовать на устойчивость нулевого решения системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin x - y^3 + 6 - 6\cos y, \\ \dot{y} = 2 \ln(1 + x) + 5y - xy. \end{cases}$$

5. Используя метод функции Ляпунова, исследовать на устойчивость тривиальное решение системы:  $\begin{cases} \dot{x} = 2x^3y^2 + 2y - x^7, \\ \dot{y} = x^4y - 2y^3 - x; \end{cases} \quad V(x, y) = 0,5x^2 + y^2.$

## Вариант 25

1. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = -6x + y \\ \dot{y} = 2x - 5y \end{cases}$ , изобразить траектории на фазовой плоскости.

2. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = 2y - z, \\ \dot{y} = x - y - 3z, \\ \dot{z} = 2x + 2y - 3z. \end{cases}$

3. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения:

$$y'''' + y''' + 4y'' + 12y' + y = 0$$

4. Пользуясь теоремой об устойчивости по первому приближению, исследовать на устойчивость нулевого решения системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = 4 \ln(1 + y) - 3x + y^3, \\ \dot{y} = 2e^y - 2 - 2x + x^3. \end{cases}$$

5. Используя метод функции Ляпунова, исследовать на устойчивость тривиальное решение системы:  $\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = -3x - 2y; \end{cases} \quad V(x, y) = 3x^2 + y^2.$

## Вариант 26

1. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = 8x + 4y \\ \dot{y} = 12x + 6y \end{cases}$ , изобразить траектории на фазовой плоскости.

2. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y - 2z, \\ \dot{y} = 2x - 4z, \\ \dot{z} = 3x - 3y - 4z. \end{cases}$

3. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения:

$$y'''' + 2y''' + 3y'' + 7y' + 2y = 0$$

4. Пользуясь теоремой об устойчивости по первому приближению, исследовать на устойчивость нулевого решения системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = e^x - \cos 2x + xy^2, \\ \dot{y} = \sin 2y + 6x - x^3. \end{cases}$$

5. Используя метод функции Ляпунова, исследовать на устойчивость тривиальное решение системы:  $\begin{cases} \dot{x} = y^3 - x^5, \\ \dot{y} = x^3 + y^5; \end{cases} V(x, y) = -x^4 + y^4.$

## Вариант 27

1. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = -x + 4y \end{cases}$ , изобразить траектории на фазовой плоскости.

2. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y + 3z, \\ \dot{y} = x + 4y - 2z, \\ \dot{z} = z. \end{cases}$

3. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения:

$$y'''' + 5y''' + y'' + y' + 2y = 0$$

4. Пользуясь теоремой об устойчивости по первому приближению, исследовать на устойчивость нулевого решения системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin x - 1 - 3x - y^2, \\ \dot{y} = x + 5 \sin y - x^3. \end{cases}$$

5. Используя метод функции Ляпунова, исследовать на устойчивость тривиальное решение системы:  $\begin{cases} \dot{x} = y^4 - xy^2 - y^3, \\ \dot{y} = xy + x - y^3; \end{cases} V(x, y) = 2x^2 + y^4.$

## Вариант 28

1. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = 16x + 12y \\ \dot{y} = 4x + 8y \end{cases}$ , изобразить траектории на фазовой плоскости.

2. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = -4x + 4y, \\ \dot{y} = y, \\ \dot{z} = -2x + y + 2z. \end{cases}$

3. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения:

$$y'''' + 6y''' + y'' + 5y' + 6y = 0$$

4. Пользуясь теоремой об устойчивости по первому приближению, исследовать на устойчивость нулевого решения системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(1 + 5x + y) - xy, \\ \dot{y} = \cos x - 2y - 1. \end{cases}$$

5. Используя метод функции Ляпунова, исследовать на устойчивость тривиальное решение системы:  $\begin{cases} \dot{x} = xy^2, \\ \dot{y} = 2x^2y + y^3; \end{cases} V(x, y) = x^2 - y^2.$

## Вариант 29

1. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = 6x + 2y \\ \dot{y} = -2x + 2y \end{cases}$ , изобразить траектории на фазовой плоскости.

2. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y + 4z, \\ \dot{y} = 2y + z, \\ \dot{z} = -2y + 5z. \end{cases}$

3. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения:

$$y'''' + 3y''' + 5y'' + y' + y = 0$$

4. Пользуясь теоремой об устойчивости по первому приближению, исследовать на устойчивость нулевого решения системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + 1 - e^y + y^2, \\ \dot{y} = 2y + \sin 3x - y^4. \end{cases}$$

5. Используя метод функции Ляпунова, исследовать на устойчивость тривиальное решение системы:  $\begin{cases} \dot{x} = 3y - 0,5x(x - y)^2, \\ \dot{y} = -2x - y(x - y)^2; \end{cases} \quad V(x, y) = 2x^2 + 3y^2.$

## Вариант 30

1. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = 6x + 12y \\ \dot{y} = 4x + 8y \end{cases}$ , изобразить траектории на фазовой плоскости.

2. Исследовать на устойчивость систему  $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 6y, \\ \dot{y} = 5x - 7y, \\ \dot{z} = x + y + 2z. \end{cases}$

3. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения:

$$y'''' + 2y''' + 4y'' + 3y' + 2y = 0$$

4. Пользуясь теоремой об устойчивости по первому приближению, исследовать на устойчивость нулевого решения системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x, \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x}. \end{cases}$$

5. Используя метод функции Ляпунова, исследовать на устойчивость тривиальное решение системы:  $\begin{cases} \dot{x} = x^3 + y, \\ \dot{y} = -x + y^3; \end{cases} \quad V(x, y) = x^2 + y^2.$

## ПЕРЕЧЕНЬ ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ

1. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями. М.: КомКнига, 2005.
2. А.В.Рябова, В.Ю.Тертычный-Даури. [Books.ifmo.ru>file/pdf/1790.pdf](http://Books.ifmo.ru/file/pdf/1790.pdf).