ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Высшая математика»

Учебное пособие

по дисциплине

«Аналитическая геометрия: кривые и поверхности второго порядка»

Автор
Ермилова О. В.

Ростов-на-Дону, 2026

Аннотация

В учебнике представлены основные понятия и теоремы высшей математики по разделу аналитическая геометрия, в простом изложении. В курсе есть большое количество подробно решённых типовых примеров и задач, которые поясняют теоретический материал и способствуют его более глубокому пониманию. Учебное пособие предназначено для студентов очной формы обучения всех технических направлений подготовки бакалавриата. Пособие дополнено заданиями для самостоятельного решения, для проверки собственных знаний все примеры приведены с ответами, что способствует ещё лучшему усвоению темы. Цель пособия — помочь студентам в формировании их математического мышления, в выработке практических навыков для решения прикладных задач.

Автор

ст.преподаватель кафедры «Высшая математика» Ермилова О.В.

Оглавление

ГЛАВА 1. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1.1. Определение линии второго порядка

Ранее подробно была изучена простейшая плоская линия – прямая. Как известно, прямая на плоскости задается линейным уравнением с двумя переменными. Порядком алгебраического уравнения называется высшая степень входящего в уравнение неизвестного. Линейное уравнение иногда называют алгебраическим уравнением первой степени, а прямую – линией первого порядка.

Линии, определяемые алгебраическими уравнениями второй степени относительно переменных x и y ,то есть уравнениями вида

$$\boldsymbol{Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0} \; \mathbf{(1.1)},$$

где хотя бы один из коэффициентов A, B, C отличен от нуля $(A^2+B^2+C^2\neq 0)$,называются **кривыми второго порядка**.

Здесь x,y – переменные, а коэффициенты при переменных – параметры, при фиксировании которых получается конкретное уравнение линии.

Кривые второго порядка делятся на вырожденные и невырожденные. Вырожденные кривые второго порядка — это прямые и точки, которые задаются уравнением второй степени, например уравнение $x^2+y^2=0$ определяет на плоскости точку $O(0;0)$, в этом случае говорят, что окружность вырождается в точку. Если уравнению второго порядка не удовлетворяет ни одна точка плоскости, то говорят, что уравнение определяет вырожденную кривую (мнимую кривую второго порядка), например, уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ задаёт «мнимый» эллипс.

К невырожденным кривыми второго порядка относятся: окружность, эллипс, гипербола и парабола.

Замечание: уравнение (1.1) всегда определяет либо окружность $A=C$; либо эллипс $A\cdot C>0$; либо гиперболу $A\cdot C<0$; либо параболу $A\cdot C=0$.

При этом возможны случаи вырождения: для эллипса (окружности) - в точку или мнимый эллипс (окружность), для гиперболы - в пару пересекающихся прямых, для параболы - в пару параллельных прямых.

Опишем реально существующие линии второго порядка, то есть линии, образованные непустым множеством точек.

К реально существующим линиям относятся: окружность, эллипс, гипербола и парабола.

1.2. Окружность

Простейшей кривой второго порядка является окружность.

Окружностью радиуса R с центром в точке $M_0(x_0; y_0)$ называется множество всех точек $M(x; y)$плоскости удовлетворяющих условию $M_0M = R$,то есть множество точек плоскости, равноудалённых от данной точки M_0 (центра) на расстояние R.

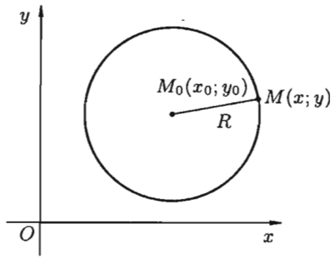


Рис.1

Из определения получаем уравнение:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R;$$

$$\boldsymbol{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2} \quad \textbf{(1.2)}$$

Уравнение (1.2) задаёт **окружности радиуса $\boldsymbol{R}$, с центром в точке $\boldsymbol{M_0(x_0; y_0)}$**(рис.1) и называется **каноническим уравнением окружности.**

В частности, полагая в формуле (1.2) $x_0 = 0, y_0 = 0$,получим:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = R^2} \quad \textbf{(1.3)}$$

Уравнение (1.3) задаёт окружность с центром в начале координат $O(0; 0)$ и радиусом R .

Пример 1.1. Найти координаты центра и радиус окружности и построить её, если её уравнение задано в виде $x^2 + 2x + y^2 - 6y + 6 = 0$.

Решение.

При сравнении исходного уравнения с уравнением (1.1) легко заметить, что $A = C, B = 0$,поэтому данное уравнение определяет окружность. Для нахождения координат центра и радиуса окружности данное уравнение необходимо привести к виду $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Для этого преобразуем левую часть данного уравнения и выделим полные квадраты относительно xи y:$\left(x^2 + 2 \cdot \overset{b}{\widehat{1}} \cdot \overset{a}{\widehat{x}} + \overset{b^2}{\widehat{1}}\right) - 1 + \left(y^2 - 2 \cdot \overset{b}{\widehat{3}} \cdot \overset{a}{\widehat{y}} + \overset{b^2}{\widehat{9}}\right) - 9 + 6 = 0$,

$(x+1)^2+(y-3)^2=2^2$, сравнивая полученное уравнение с уравнением (1.2) определяем $M_0(-1;3)$- центр окружности, $R=2$ –радиус окружности (рис.2).

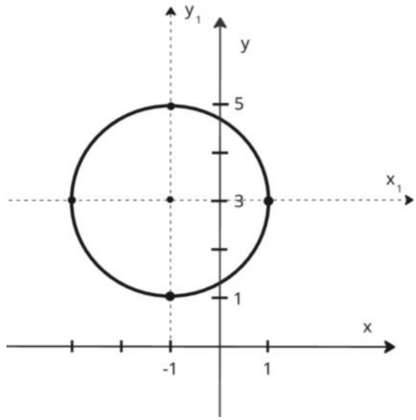


Рис.2

Пример 1.2. Показать, что уравнение $2x^2+4x+2y^2-$

$-12y+33=0$ не определяет никакой линии.

Решение.

Преобразуем уравнение к виду

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2:$$

$$2x^2+4x+2y^2-12y+33=0,$$

$$2(x^2+2\cdot1\cdot x+1)-2+2(y^2-2\cdot3\cdot y+9)-18+33=0,$$

$$2(x+1)^2+2(y-3)^2=-13|:2,$$

$$(x+1)^2+(y-3)^2=-\frac{13}{2}.$$

Поскольку сумма квадратов двух вещественных чисел не может быть числом отрицательным, то на плоскости Oxy не существует точек, которые удовлетворяли бы данному уравнению, поэтому уравнение не определяет никакой кривой.

Иногда говорят, что уравнение является уравнением мнимой окружности.

Пример 1.3. Установить, какая линия определяется уравнением $x^2+4x+y^2-y+4{,}25=0$.

Решение.

Поскольку$A=C, B=0$ приведем уравнение к каноническому уравнению окружности $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$:

$$(x^2+2\cdot2\cdot x+4)-4+\left(y^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot y+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+4{,}25=0,$$

$(x+2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=0$ –окружность, вырожденная в точку

$M_0\left(-2;\frac{1}{2}\right)$.

Пример 1.4. Напишите уравнение окружности с центром в точке $C(2;1)$,проходящей через точку $D(-1;1)$.

Решение.

Уравнение окружности радиуса R с центром в точке $M_0(x_0;y_0)$ имеет вид:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

То есть для того, чтобы написать уравнение окружности необходимо знать координаты её центра (они известны по условию) и радиус.

Радиус окружности определяет расстояние от центра окружности до любой точки, лежащей на окружности. В нашем случае радиус будет равен расстоянию от точки $C(2;1)$ до точки $D(-1;1)$, то есть $CD=R$ или

$$R=\sqrt{(x_D-x_C)^2+(y_D-y_C)^2}=\sqrt{(-1-2)^2+(1-1)^2}=3.$$

Подставим известные значения центра- $C(2;1)$ и радиуса $R=3$ в уравнение окружности $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$, получим:

$(x-2)^2+(y-1)^2=3^2$ –уравнение искомой линии.

Пример 1.5. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(7;-7), B(-2;-4)$ и $C(6;0)$.

Решение.

Уравнение окружности будем искать в виде:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2;$$

Поскольку окружность проходит через заданные точки, координаты каждой из этих точек удовлетворяют уравнению окружности. Подставляя поочередно в искомое уравнение координаты данных точек, получим систему из трёх уравнений для определения x_0, y_0, и R:

$$\begin{cases}(7-x_0)^2+(-7-y_0)^2=R^2\\(-2-x_0)^2+(-4-y_0)^2=R^2\\(6-x_0)^2+(0-y_0)^2=R^2\end{cases}\text{ или}$$

$$\begin{cases}(7-x_0)^2+(7+y_0)^2=R^2\\(2+x_0)^2+(4+y_0)^2=R^2.\\(6-x_0)^2+{y_0}^2=R^2\end{cases}$$

Приравняем первое и второе уравнения (правые части этих уравнений между собой равны, значит, равны и левые их части), а потом первое и третье:

$$\begin{cases}(7-x_0)^2+(7+y_0)^2=(2+x_0)^2+(4+y_0)^2 & (1)\\ (7-x_0)^2+(7+y_0)^2=(6-x_0)^2+{y_0}^2 & (2)\end{cases};$$

Раскрывая скобки и упрощая, имеем:

(1) $(7-x_0)^2+(7+y_0)^2=(2+x_0)^2+(4+y_0)^2$;

$$49-14x_0+{x_0}^2+49+14b+b^2=4+4x_0+{x_0}^2+16+8b+{y_0}^2;$$

$$18x_0-6y_0=78|:6;$$

$$\underline{3x_0-y_0=13}.$$

(2) $(7-x_0)^2+(7+y_0)^2=(6-x_0)^2+{y_0}^2$;

$$49-14x_0+{x_0}^2+49+14y_0+{y_0}^2=36-12x_0+{x_0}^2+{y_0}^2;$$

$$2x_0-14y_0=62|:2;$$

$$\underline{x_0-7y_0=31.}$$

Решая систему $\begin{cases}3x_0-y_0=13\\ x_0-7y_0=31\end{cases}$, находим x_0, y_0:

$$\begin{cases}y_0=3x_0-13\\ x_0-7y_0=31\end{cases};$$

$$x_0-7(3x_0-13)=31;$$

$$20x_0=91-31;$$

$x_0=3$, следовательно, $y_0=3x_0-13=9-13=-4$.

Подставляя полученные значения x_0 и y_0 в третье уравнений системы $(6-x_0)^2+{y_0}^2=R^2$, получим:

$R^2=(6-3)^2+(-4)^2=25$.

Искомое уравнение имеет вид:

$(x-3)^2+(y+4)^2=25$.

Пример 1.6. Установить, какая линия определяется уравнением: **а)** $y=-\sqrt{4-x^2}$;**б)** $x=\sqrt{16-y^2}$.

Решение.

а) Заметим, что подкоренное выражение не может быть отрицательной величиной, то есть $4-x^2\geq 0$, поэтому $y\leq 0$.

Чтобы установить вид линии возведем обе части равенства $y=-\sqrt{4-x^2}$ в квадрат:

$y^2=\left(-\sqrt{4-x^2}\right)^2$,

$y^2=4-x^2$,

$x^2+y^2=4$.

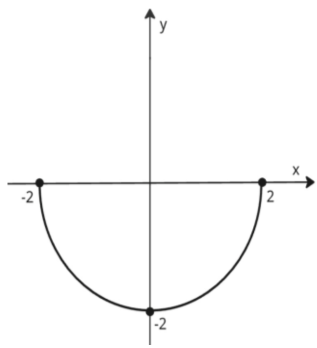


Рис.3

Данное уравнение определяет полуокружность с центром в точке $O(0;0)$и радиусом $R=2$, расположенную в нижней полуплоскости, то есть там, где $y \le 0$ (рис.3).

б) Заметим, что $x \ge 0$,так как $16 - y^2 \ge 0$,то есть данное уравнение будет определять часть линии, которая располагается в правой полуплоскости, то есть там, где $x \ge 0$.

Избавляемся от иррациональности и приводим уравнение к виду $x^2 + y^2 = R^2$:

$x^2 = \left(\sqrt{16 - y^2}\right)^2$;

$x^2 = 16 - y^2$;

$x^2 + y^2 = 16$ – уравнение окружности с центром в точке $O(0;0)$, радиуса $R = 4$.

Итак, уравнение $x = \sqrt{16 - y^2}$ определяет полуокружность, расположенную в правой полуплоскости, то есть там, где $x \ge 0$ (рис.4).

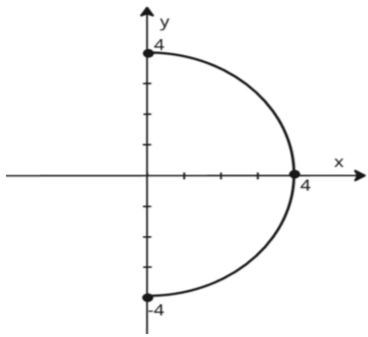


Рис.4

Пример 1.7. Составить каноническое уравнение окружности, проходящей через точки $A(2;-1)$ и $B(1;0)$, если её центр лежит на прямой $2x - y + 1 = 0$.

Решение.

Каноническое уравнение окружности имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Если окружность проходит через данные точки, то координаты этих точек удовлетворяют уравнению окружности:

$$(2 - x_0)^2 + (-1 - y_0)^2 = R^2,$$

$$(1 - x_0)^2 + (0 - y_0)^2 = R^2,$$

или, что то же самое

$$(2 - x_0)^2 + (1 + y_0)^2 = R^2,$$

$$(1 - x_0)^2 + {y_0}^2 = R^2.$$

Кроме того, известно, что центр $M_0(x_0;y_0)$ лежит на прямой $2x - y + 1 = 0$, то есть выполняется

равенство: $y_0 = 2x_0 + 1.$

Таким образом, получим систему из трёх уравнения с тремя неизвестными x_0, y_0, R:

$$\begin{cases} (2 - x_0)^2 + (1 + y_0)^2 = R^2 \\ (1 - x_0)^2 + {y_0}^2 = R^2 \\ y_0 = 2x_0 + 1 \end{cases}$$

Подставляем $y_0 = 2x_0 + 1$ в уравнения

$(2 - x_0)^2 + (1 + y_0)^2 = R^2$,$(1 - x_0)^2 + {y_0}^2 = R^2$ имеем:

$$(2 - x_0)^2 + (2 + 2x_0)^2 = R^2, (1 - x_0)^2 + (1 + 2x_0)^2 = R^2$$

Раскрываем скобки и приводим подобные:
$4 - 4x_0 + {x_0}^2 + 4 + 8x_0 + 4{x_0}^2 = R^2$ или

$8 + 4x_0 + 5{x_0}^2 = R^2$;

$1 - 2x_0 + {x_0}^2 + 1 + 4x_0 + 4{x_0}^2 = R^2$ или

$2 + 2x_0 + 5{x_0}^2 = R^2$;

Правые части одинаковые, можно приравнять левые части:
$8 + 4x_0 + 5{x_0}^2 = 2 + 2x_0 + 5{x_0}^2$,

$2x_0 = -6, x_0 = -3$,тогда$y_0 = 2x_0 + 1 = -6 + 1 = -5.$

Таким образом, $M_0(-3; -5)$-центр искомой окружности.

Подставляя в любое уравнение системы, например во второе$(1 - x_0)^2 + {y_0}^2 = R^2$, координаты центра находим R:

$\left(1-(-3)\right)^2+(-5)^2=R^2,$

$R^2=41,$

$R=\sqrt{41}$ - радиус искомой окружности.

Каноническое уравнение окружности имеет вид: $(x+3)^2+(y+5)^2=41$.

1. Задания для самостоятельного решения по теме: "Окружность".

1. Составить и записать уравнение окружности, если известны координаты центра $M_0(0;3)$ и радиус $R=4$.

2. Составить и записать уравнение окружности, если известны координаты центра $C(0;6)$ и точки $A(-3;2)$,которая

лежит на окружности.

3.Установить, какую линию определяет следующее уравнение:

а) $x^2-4x+y^2+6y-12=0$; **б)** $x^2+y^2+2x+1=0$;

в) $x^2+y^2+4x+2y+7=0$.

4. Постройте окружности:

а) $x^2+y^2-6y-10x-2=0$; **б)** $x^2+y^2+x-2=0$.

5.Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(1;2)$,$B(0;-1)$,$C(-3;0)$.

6. Установить, какую линию определяет следующее уравнение:

а) $y=\sqrt{9-x^2}$; **б)** $x=-5+\sqrt{40-6y-y^2}$.

7. Составить каноническое уравнение окружности, проходящей через точки $A(5;0)$ и $B(1;4)$, если её центр лежит на

прямой $x+y-3=0$.

8. Найти координаты центра и радиус окружности, заданной уравнением $x^2+y^2+8x-4y-29=0$.

9.Найдите точки пересечения окружности$(x-2)^2+(y+3)^2=20$ прямой $x-y-3=0$.

10. Составить каноническое уравнение окружности, имеющей диаметр AB,где $A(3;-2)$ и $B(3;0)$.

Ответы:

1.1. $x^2+(y-3)^2=16$, **1.2.** $x^2+(y-6)^2=25$.

1.3.а)- окружность радиуса $R=5$ с центром в точке $C(2;-3)$;

б) $(x+1)^2+y^2=0-$ точка $C(-1;0)$;

в) $(x+2)^2+(y+1)^2=-2-$ никакой вещественной кривой не

определяет (мнимая окружность).
1.4.а)$(x-5)^2+(y-3)^2=6^2$- окружность радиуса $R=6$ с

центром в точке $C(5;3)$;

б) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2$- окружность радиуса $R=1{,}5$ с центром в

точке $C(-0{,}5;0)$.

1.5.$(x+1)^2+(y+3)^2=5^2$.

1.6. а) уравнение полуокружности $x^2+y^2=9$,где $y\geq 0$;

б) уравнение полуокружности $(x+5)^2+(y+3)^2=49$, где $x\geq -5$.

1.7. $(x-2)^2+(y-1)^2=10$.

1.8. $C(-4;2)$-центр, $R=5$ - радиус.

1.9. $(4; 1), (-2; -5)$.

1.10. $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 1$.

1.2. Эллипс

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых **фокусами**, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Постоянную сумму расстояний произвольной точки эллипса до фокусов принято обозначать через $2a$.

Фокусы эллипса обозначают буквами F_1 и F_2, расстояние между ними -через $2c$.

Таким образом, по определению эллипса равная, $F_1M + F_2M = 2a$, $2a > 2c$ $(a > c)$.

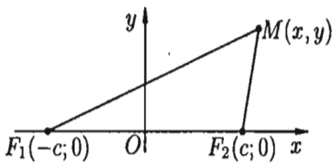


Рис.5

Если известно расстояние между фокусами эллипса $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$,равное $2c$, то в прямоугольной декартовой системе координат, где ось Ox проходит через фокусы F_1, F_2,а начало координат находится посередине между ними (рис.5), уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \textbf{(1.4)}$$

Доказательство.

Пусть $M(x; y)$ произвольная точка эллипса, по определению эллипса:

$$F_1M + F_2M = 2a, \text{ где } a > c,$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2,$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

$$x^2 + 2cx + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2,$$

$$4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} |: 4,$$

$$cx = a^2 - a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$(a^2 - cx)^2 = \left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2,$$
$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2((x-c)^2 + y^2),$$
$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2,$$
$$a^4 + c^2x^2 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2,$$
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2,$$
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2),$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1,$$

так как $a > c$,следовательно, $a^2 > c^2, a^2 - c^2 > 0$.

Введём обозначение: $\boldsymbol{a^2 - c^2 = b^2}$ **(1.5)**, то есть $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Уравнение (1.4) называется **каноническим уравнением эллипса.**

Исследование канонического уравнения эллипса.

Установим форму эллипса, пользуясь ее каноническим уравнением.

1) Уравнение (1.4) содержит x и y только в четных степенях. Следовательно, эллипс симметричен относительно осей Ox и Oy, а также относительно точки 0(0;0), которую называют центром эллипса. Центр симметрии эллипса называют центром эллипса.

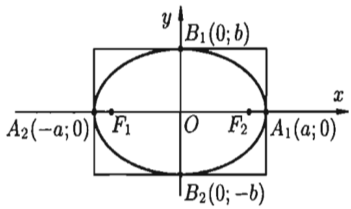


Рис. 6

2) Найдем точки пересечения эллипса с осями координат.

Положив $y = 0$ в уравнении (1.4), находим точки пересечения эллипса с осью Ox:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 | \cdot a^2;$$
$$x^2 = a^2;$$
$$x_{1,2} = \pm a.$$

Следовательно, эллипс пересекает ось Ox в точках $A_1(a;0), A_2(-a;0)$.

Положив $x = 0$ в (1.4), находим точки пересечения эллипса с осью Oy:

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 | \cdot b^2;$$
$$y^2 = b^2;$$

$$y_{1,2} = \pm b.$$

Следовательно, эллипс пересекает ось Oy в точках $B_1(0; b)$, $B_2(0; -b)$.

Точки $A_1(a; 0)$, $A_2(-a; 0)$, $B_1(0; b)$, $B_2(0; -b)$ называются **вершинами эллипса**, а отрезки $A_1A_2 = 2a$ и $B_1B_2 = 2b$ называются соответственно **большой и малой осями эллипса**.

Числа a и b называются соответственно большой и малой **полуосями эллипса**, точки $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$ фокусы эллипса, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Дополнительная информация об эллипсе.

Форма эллипса (мера его сжатости) характеризуется эксцентриситетом $\varepsilon = \frac{c}{a}$, то есть отношением фокусного расстояния к большей оси, так как $a > c$, то $\varepsilon < 1$. Чем меньше эксцентриситет эллипса, тем эллипс будет менее вытянутым.

Замечание: окружность является частным случаем эллипса, у которого фокусы совпадают с центром, поэтому расстояние между фокусами равно нулю и вытянутость отсутствует, то есть $\varepsilon = 0$.

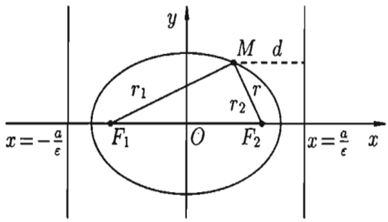


Рис. 7

Фокальным радиусом называется расстояние от некоторой точки кривой до фокуса. Фокальные радиусы эллипса r_1 и r_2 связаны соотношением

$$\boldsymbol{r_1 + r_2 = 2a} \quad \textbf{(1.6)}$$

С эллипсом связаны две прямые d_1 и d_2, называемые его **директрисами**, уравнения которых имеют вид $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ (рис.7).

Теорема 1.1. Для произвольной точки $M(x; y)$, принадлежащей эллипсу верны соотношения:

$$\boldsymbol{r_1 = a + \varepsilon x,\ r_2 = a - \varepsilon x} \quad \textbf{(1.7)}.$$

Доказательство.

Из определения эллипса известно, что $r_1 + r_2 = 2a$, где

$r_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}, r_2 = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$, тогда

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a,$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2},$$
$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2,$$
$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2,$$
$$4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} |: 4a,$$
$$\frac{cx}{a} = a - \sqrt{(x-c)^2+y^2},$$
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a - \frac{c}{a}x,$$
$$r_2 = a - \varepsilon x.$$

Таким образом, $r_2 = a - \varepsilon x$.

Аналогично доказывается, что $r_1 = a + \varepsilon x$.

Теорема доказана.

Теорема 1.2. Отношение расстояния r_i от фокуса F_i до точки $M(x;y)$ эллипса к расстоянию d_i от этой точки до соответствующей директрисы при $i = 1,2$ есть величина постоянная, равная ε , то есть $\varepsilon = \frac{r_i}{d_i}$.

Доказательство.

$$r_1 = F_1M = \sqrt{x^2+2cx+c^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} =$$
$$= \sqrt{\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2+2cx+c^2+b^2};$$

Учитывая, что

$$b^2 = a^2 - c^2 |: a^2,$$
$$\frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2},$$
$$1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2},$$
$$1 - \frac{b^2}{a^2} = \varepsilon^2,$$
$$\varepsilon^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2},$$
$$\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}},$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \text{отсюда } c = a\varepsilon,$$

$$r_1 = \sqrt{\varepsilon^2 x^2 + 2a\varepsilon x + a^2} = \sqrt{(a + \varepsilon x)^2} = a + \varepsilon x = \\ = \varepsilon\left(\frac{a}{\varepsilon} + x\right) = \varepsilon d_1, \text{то есть } \frac{r_1}{d_1} = \varepsilon.$$

Аналогично доказывается, что $\frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$.

Таким образом, каждая директриса обладает следующим свойством: если r– расстояние от произвольной точки М гиперболы до какого-либо фокуса, d– расстояние от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ – величина постоянная, равная эксцентриситету, то есть

$$\varepsilon = \frac{r}{d} \quad \mathbf{(1.8)}$$

Замечание:

1) если $a = b$ $\left(\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = 0\right)$, эллипс превращается в окружность, частный случай эллипса;

2) если выбрать систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 были на оси Oy и на одинаковом расстоянии от начала координат, то уравнение эллипса будет иметь вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, b > a \text{ (рис.8).}$$

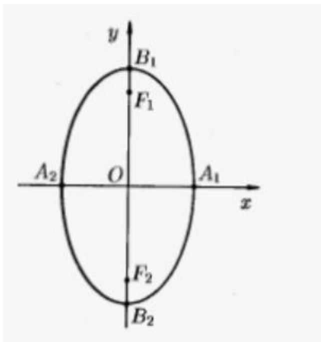


Рис. 8

Для этого эллипса $2b$ – большая ось, $2a$ – малая ось, фокусы имеют координаты $F_1(0; -c)$ и $F_2(0; c)$.

Эксцентриситет: $\varepsilon = \frac{c}{b}$.

Уравнения директрис имеют вид: $y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$.

Фокальные радиусы точки $M(x; y)$, находятся по формулам: $r_1 = a - \varepsilon y, r_2 = a + \varepsilon y$.

Пример 1.8. Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти:

а) полуоси; **б)** фокусы; **в)** эксцентриситет; **г)** уравнения директрис. Сделать чертёж.

Решение.

Приведем заданное уравнение к каноническому уравнению $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$:

$$9x^2 + 25y^2 = 225 |: 225;$$

$$\frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = 1;$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

а) $a^2 = 25, \quad a = 5;$

$b^2 = 9, b = 3.$

б)
$a > b$,следовательно,

фокусы эллипса лежат на оси Ox, то

есть $F_1(-c; 0)$и $F_2(c; 0)$

фокусы эллипса, где
$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4,$

тогда $F_1(-4; 0)$, $F_2(4; 0)$.

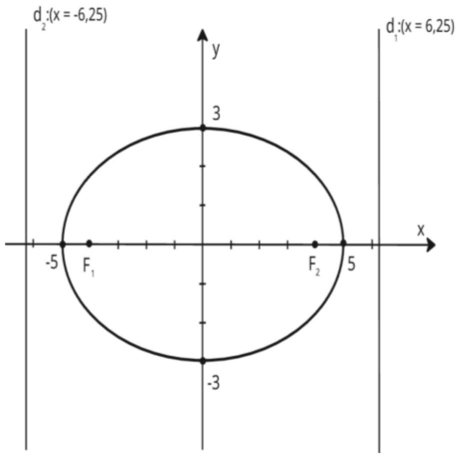


Рис. 9

в)$a > b, \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0{,}8;$

г) уравнения директрис:
$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{5}{\frac{4}{5}} = \pm\frac{25}{4} = \pm 6{,}25.$$

Сделаем чертёж:(рис.9).

Пример 1.9. Определить, какие из точек $A_1(-2;3)$, $A_2(0;-2)$, $A_3(0;3)$ лежат на эллипсе $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$, какие внутри эллипса и какие вне эллипса.

Решение.

Для удобства дальнейшего решения преобразуем уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1|\cdot 45,$$

$$9x^2+5y^2=45.$$

Если координаты точки удовлетворяют уравнению эллипса, значит точка лежит на эллипсе:

$A_1(-2;3)\colon 9\cdot(-2)^2+5\cdot 3^2>45 \Rightarrow$ точка A_1 лежит вне эллипса;

$A_2(0;-2)\colon 9\cdot 0^2+5\cdot(-2)^2<45 \Rightarrow$ точка A_2 лежит внутри эллипса;

$A_3(0;3)\colon 9\cdot 0^2+5\cdot 3^2=45 \Rightarrow$ точка A_3 лежит на эллипсе.

Пример 1.10. Составить каноническое уравнение эллипса, симметричного относительно координатных осей проходящего через точки $A(0;2)$, $B\left(2;\sqrt{3}\right)$.

Решение.

Учитывая, что уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ подставим в него координаты точек A и B:

$\frac{0^2}{a^2}+\frac{2^2}{b^2}=1$, то есть $b^2=4$ и

$$\frac{2^2}{a^2}+\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{b^2}=1,$$

$$\frac{4}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1.$$

Таким образом, получим систему для определения aи b:

$\begin{cases}\frac{4}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1\\ b^2=4\end{cases}$, следовательно,

$$\frac{4}{a^2}+\frac{3}{4}=1,$$

$$\frac{4}{a^2}=\frac{1}{4},$$

$$a^2=16.$$

Итак, искомое уравнение будет иметь вид: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1.$

Пример 1.11. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса, заданного уравнением $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Решение.

Построим эллипс и найдём координаты его нижней вершины:
$a^2=25, a=5; b^2=9,$
$b=3, a>b,$следовательно,
$(0;-3)$ –нижняя вершина эллипса.

Найдём координаты левого фокуса:
$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=4,$
$F_1(-4;0).$

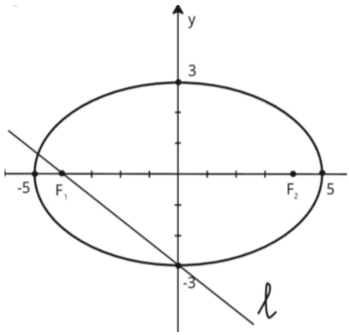


Рис. 10

Уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса, то есть две точки $(0;-3)$ и $(-4;0)$ (рис. 10) имеет вид:

$\frac{x-0}{-4-0}=\frac{y-(-3)}{0-(-3)},$

$\frac{x}{-4}=\frac{y+3}{3},$

$3x=-4(y+3),$

$3x+4y+12=0.$

Пример 1.12. Дан эллипс $9x^2+5y^2=45$. Найти: **а**) его полуоси; **б)** фокусы; **в)** эксцентриситет; **г)** уравнения директрис. Сделать чертёж.

Решение.

Приведем заданное уравнение к каноническому уравнению

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$

$9x^2+5y^2=45|:45;$

$$\frac{9x^2}{45}+\frac{5y^2}{45}=1;$$

$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$ –уравнение

эллипса с центром $O(0;0)$.

а) $a^2=5,\ a=\sqrt{5}$;

$b^2=9, b=3.$

б) $b>a$,следовательно,

фокусы эллипса лежат на оси Oy,

то есть $F_1(0;-c)$и $F_2(0;c)$ фокусы

эллипса,
где $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{9-5}=2,$

тогда $F_1(0;-2),\ F_2(0;2).$

в)$b>a, \varepsilon=\frac{c}{b}=\frac{2}{3}$;

г) уравнения директрис:

$$y=\pm\frac{b}{\varepsilon}=\pm\frac{3}{\frac{2}{3}}=\pm\frac{9}{2}=\pm4{,}5.$$

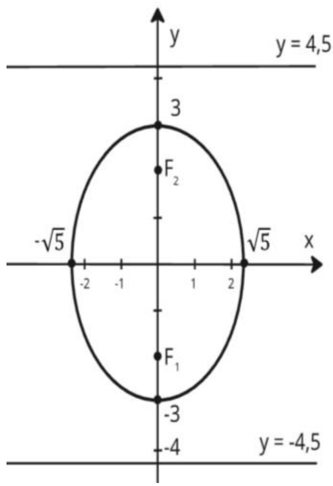


Рис.11

Сделаем чертёж: рис.11.

Пример 1.13. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная:

а) малую полуось $b=8$ и эксцентриситет $\varepsilon=0{,}6$;

б) сумму полуосей $a+b=12$ и расстояние между фокусами $2c=6\sqrt{2}$.

Решение.

а) Так как $a>b, \varepsilon=\frac{c}{a}=0{,}6,$ то $c=0{,}6a$. Подставляя в соотношение $a^2-c^2=b^2$ известные величины $b=8$ и $c=0{,}6a$, получим:

$a^2-(0{,}6a)^2=8^2$;

$a^2 - 0{,}36a^2 = 64;$
$0{,}64a^2 = 64;$
$a^2 = 100.$

Уравнение эллипса будет иметь вид: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1.$

б) Для определения уравнения эллипса по известным соотношениям $a + b = 12$ и $2c = 6\sqrt{2}\ (c = 3\sqrt{2})$ необходимо определить a и b,из соотношения $a^2 - c^2 = b^2$ имеем:

$$a^2 - b^2 = c^2;$$
$$a^2 - b^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2;$$
$$a^2 - b^2 = 18;$$

$(a - b)(a + b) = 18,$ подставляя $a + b = 12$ в полученное равенство, имеем:

$$12(a - b) = 18;$$
$$a - b = 1{,}5.$$

Решая систему уравнений $\begin{cases} a - b = 1{,}5 \\ a + b = 12 \end{cases}$, получим: $a = 6{,}75, b = 5{,}25.$

Уравнение эллипса принимает вид:

$\frac{x^2}{6{,}75^2} + \frac{y^2}{5{,}25^2} = 1.$

Пример 1.14. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат симметрично относительно начала координат, зная, что:
а) большая ось равна 10 и расстояние между фокусами равно 8;
б) расстояние между фокусами равно 24 и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$.

Решение.

а) Так как $a < b$, то $2b = 10$, тогда $b = 5$.По условию$2c = 8$, тогда $c = 4$. Подставляя в соотношение $a^2 = b^2 - c^2$ уже известные величины $b = 5$ и $c = 4$, получим: $a^2 = 25 - 16 = 9;$

Уравнение эллипса будет иметь вид: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1.$

б) Так как $2c = 24$, то $c = 12$. Учитывая, что $\varepsilon = \frac{c}{b}$, с другой стороны, $\varepsilon = \frac{12}{13}$, то $\frac{c}{b} = \frac{12}{13}$, $\frac{12}{b} = \frac{12}{13}$, $b = 13.$

Найдём a из соотношения:

$c^2 = b^2 - a^2$;

$a = \sqrt{b^2 - c^2}$;

$a = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5.$

Таким образом, искомое уравнение эллипса будет иметь вид: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1.$

Пример 1.15. Установить, какая линия определяется уравнением $y = -\frac{5}{3}\sqrt{9 - x^2}$.

Решение.

Заметим, что $y \le 0$,так как $9 - x^2 \ge 0$,то есть это будет часть линии, которая располагается в нижней полуплоскости, там, где y отрицательный.

Избавляемся от иррациональности и приводим уравнение к виду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$:

$y^2 = \left(-\frac{5}{3}\sqrt{9 - x^2}\right)^2,$

$y^2 = \frac{25}{9}(9 - x^2),$

$\frac{y^2}{25} = \frac{1}{9}(9 - x^2),$

$\frac{y^2}{25} = 1 - \frac{x^2}{9},$

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1.$

Итак, уравнение $y = -\frac{5}{3}\sqrt{9 - x^2}$ определяет половину эллипса, расположенную в нижней полуплоскости, то есть там, где $y \ge 0$(рис.12)

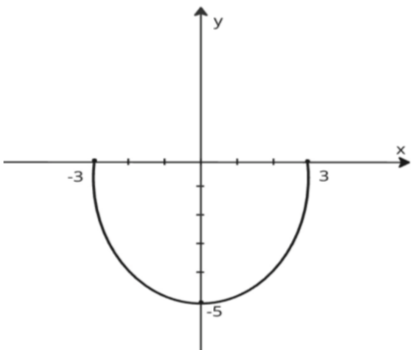


Рис.12

2. Задания для самостоятельного решения по теме: “Эллипс”.

1. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что: **а)** его полуоси равны 5 и 2; **б)** его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами $2c = 8$; **в)** его малая ось равна 24, а расстояние между фокусами $2c = 10$; **г)** расстояние между его фокусами $2c = 6$ и эксцентриситет$\varepsilon = \frac{3}{5}$;**д)** его большая ось равна 20, а эксцентриситет$\varepsilon = \frac{3}{5}$; **е)** его малая ось равна 10, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$; **ё)** расстояние между его директрисами равно 5 и расстояние между фокусами $2c = 4$; **ж)** его большая ось равна 8, а расстояние между директрисами $\frac{2a}{\varepsilon}$ равно 16.

2. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат симметрично относительно начала координат, если: **а)** полуоси эллипса равны 7 и 4;

б) расстояние между фокусами равно 24, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$;**в)** его малая ось равна 16, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

г) расстояние между его фокусами$2c = 6$ и расстояние между директрисами$\frac{2b}{\varepsilon}$ равно$\frac{50}{3}$.

3. Определить полуоси каждого из следующих эллипсов:

а) $x^2 + 25y^2 - 25 = 0$; **б)** $4x^2 + 9y^2 = 25$;

в) $9x^2 + y^2 = 1$.

4. Составить уравнение эллипса, проходящего через точки $M_1(2;3), M_2\left(1;\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$.

5. Определить при каком значении m прямая $y = m - x$:

а) пересекает; **б)** касается; **в)** проходит вне эллипса $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$.

6. Установить, что уравнение:

а) $9x^2 + 25y^2 - 18x - 100y - 116 = 0$;

б) $2x^2 + y^2 - 8x - 6y + 1 = 0$ определяет эллипс, и найти

координаты его центра, полуоси, фокусы, эксцентриситет и уравнения директрис.

7. Установить, какую линию определяет следующее уравнение $y = 1 - \frac{4}{3}\sqrt{-6x - x^2}$.

8. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная большую полуось $a = 5$ и эксцентриситет $\varepsilon = 0{,}6$.

.

9. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, что он проходит через точку $A(6;0)$ и

фокальное расстояние равно 4.

10. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, что он проходит через точку $A(2;-3)$ и имеет большую полуось $a = 4$.

Ответы:

2.1.а) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$;**б)** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$;**в)** $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$;

г) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.**д)** $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$;**е)** $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$;**ё)** ;

ж) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.**2.2. а)** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{49} = 1$;**б)** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1$;

в) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$;**г)** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$;**д)** $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$;

е) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$;**ё)** $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{1} = 1$;**ж)** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

2.3. а) $a = 5, b = 1$;**б)** $a = \frac{5}{2}, b = \frac{5}{3}$; **в)** $a = \frac{1}{3}, b = 1$.

2.4. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.**2.5. а)** $-5 < m < 5$;**б)** $m < -5, m > 5$;
в) $m_{1,2} = \pm 5$.**2.6. а)** $C(1;2), a = 5, b = 3, \varepsilon = \frac{4}{5},\ F_1(-3;2)$,

$F_2(5;2), x_{1,2} = 1 \pm 6{,}25$;

б) $\frac{(x-2)^2}{8}+\frac{(y-3)^2}{16}=1, C(2;3), a=2\sqrt{2}, b=4,$

$\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $F_1(2;3-2\sqrt{2})$, $F_2(2;3+2\sqrt{2})$, $y=3\pm 4\sqrt{2}$.

2.7. $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$- уравнение половины эллипса, где $y\le 1$. **2.8.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. **2.9.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{32}=1$. **2.10.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

1.3. Гипербола.

Гиперболой называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых **фокусами** есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами, то есть$|F_1M-F_2M|=2a, 2a<2c, a<c$.

Если за ось Ox принять прямую F_1F_2,а за ось Oy прямую перпендикулярную ей и проходящую через середину отрезка F_1F_2, получим уравнение гиперболы (1.9):

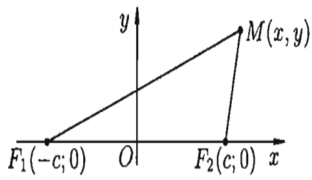


Рис.13

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ \textbf{(1.9)}$$

Доказательство.

Пусть $M(x;y)$ произвольная точка гиперболы, по определению гиперболы $|r_1-r_2|=2a$;

$$r_1-r_2=\pm 2a;$$
$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}, r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2};$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a;$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2};$$
$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(\pm 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2;$$
$$(x+c)^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2;$$
$$x^2+2cx+c^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2;$$
$$4cx=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}|:4;$$
$$cx=a^2+a\sqrt{(x-c)^2+y^2};$$
$$(cx-a^2)^2=\left(a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2;$$
$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2((x-c)^2+y^2);$$
$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2;$$
$$c^2x^2+a^4=a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2;$$
$$c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4;$$
$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)|:a^2(c^2-a^2);$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1,\text{так как } c>a,$$

Обозначим: $\boldsymbol{c^2-a^2=b^2}$**(1.10)**,тогда уравнение гиперболы примет вид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Уравнение (1.9) называется **каноническим уравнением гиперболы.**

Исследование канонического уравнения гиперболы.

Установим форму гиперболы, пользуясь ее каноническим уравнением.

1)Уравнение (1.9) содержит x и y только в четных степенях. Следовательно, гипербола симметрична относительно осей Ox и Oy, а также относительно точки $O(0;0)$, которую называют центром гиперболы.

2)Найдем точки пересечения гиперболы с осями координат. Положив $y=0$ в уравнении (1.9), находим точки пересечения гиперболы с осью Ox:

$$\frac{x^2}{a^2}=1|\cdot a^2;$$
$$x^2=a^2;$$
$$x_{1,2}=\pm a.$$

Следовательно, гипербола пересекает ось Ox в точках $A_1(a;0), A_2(-a;0)$.

Положив $x=0$ в (1.9), получаем:

$$-\frac{y^2}{b^2}=1|\cdot(-b^2);$$

$y^2=-b^2$,чего не может быть, следовательно, гипербола ось Oy не пересекает.

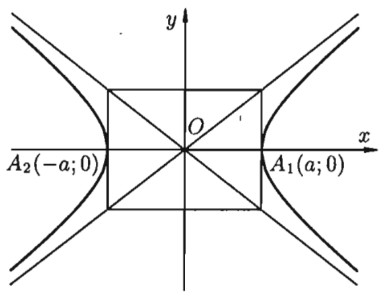


Рис.14

Точки $A_1(a;0)$ и $A_2(-a;0)$ называются вершинами гиперболы, а отрезок $A_1A_2=2a$ **действительной осью** гиперболы, отрезок $OA_1=OA_2=a$ **действительной полуосью** гиперболы. Отрезок $B_1B_2=2b$, соединяющий точки $B_1(0;b)$ и $B_2(0;-b)$ называется **мнимой осью**, число b **мнимой полуосью**. Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$(рис.14) называется **основным прямоугольником гиперболы.**

Дополнительная информация о гиперболе.

Напомним: прямая l называется асимптотой кривой, если расстояние от точки M кривой до прямой l стремится к нулю при удалении точки M от начала координат. Наклонные асимптоты кривой $y = f(x)$имеют уравнение $y = kx + b$, в нашем случае

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \frac{b}{a} \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}{x} = \pm\frac{b}{a};$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{b}{a}x\right) =$$

$$= \frac{b}{a} \lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-a^2} - x\right) = (\infty - \infty) =$$

$$= \frac{b}{a} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-a^2} - x\right)\left(\sqrt{x^2-a^2} + x\right)}{\sqrt{x^2-a^2} + x} =$$

$$= \frac{b}{a} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-a^2 + x^2}{\sqrt{x^2-a^2} + x} = -ab \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2} + x} = 0.$$

Таким образом, гипербола имеет две наклонные асимптоты $y = \pm\frac{b}{a}x$-эти прямые не пересекают гиперболу.

Эксцентриситетом гиперболы (1.9) называется отношение расстояния между фокусами $2c$ к величине действительной оси гиперболы $2a$, то есть отношение $\frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$.

Обозначение: $\varepsilon = \frac{c}{a}$, где c – половина расстояния между фокусами, a – действительная полуось.

Учитывая, что $c^2 = a^2 + b^2$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, то $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} > 1$.

Эксцентриситет характеризует форму гиперболы, чем меньше эксцентриситет гиперболы, тем более вытянут ее основной прямоугольник.

Две прямые, перпендикулярные действительной оси гиперболы и расположенные симметрично относительно центра гиперболы на расстоянии

$\frac{a}{\varepsilon}$ от него называются **директрисами** гиперболы. Их уравнения имеют вид: $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ (рис.15).

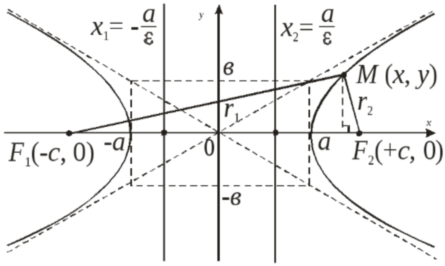


Рис.15

Замечания:

1) При построении гиперболы (1.9) целесообразно сначала построить основной прямоугольник гиперболы (рис. 16), провести прямые (асимптоты гиперболы), проходящие через противоположные вершины этого прямоугольник и отметить вершины гиперболы;

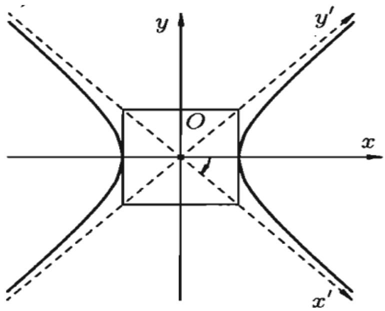


Рис.16

2) Если $a = b$,то гипербола называется **равнобочной** (равносторонней), её каноническое уравнение имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 | \cdot a^2$,

$x^2 - y^2 = a^2$.

3) Если выбрать систему координат так, чтобы фокусы F_1и F_2 лежали на оси Oy и на одинаковом расстоянии от начала координат $O(0;0)$, то уравнение гиперболы будет иметь вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

(рис.17-пунктирная линия).

Для этой гиперболы: действительная ось – ось Oy , мнимая ось – ось Ox, фокусы имеют координаты $F_1(0;-c)$ и $F_2(0;c)$;

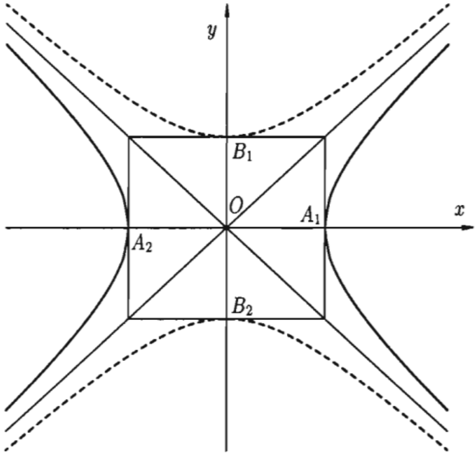


Рис. 17

Асимптоты имеют вид: $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Уравнения директрис имеет вид:$y=\pm\frac{b}{\varepsilon}$.

Пример 1.16. Дана гипербола$16x^2-9y^2=144$. Найти:
а) полуоси; **б)** фокусы; **в)** эксцентриситет;
г) уравнения асимптот; **д)** уравнения директрис. Сделать чертеж.

Решение.

Найдем стандартную форму уравнения-приведем заданное уравнение к каноническому уравнению гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm1$,

для этого разделим обе части данного уравнения на 144, чтобы правая часть была равна единице:

$$16x^2-9y^2=144|:144;$$

$$\frac{16x^2}{144}-\frac{9y^2}{144}=1;$$

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ –уравнение гиперболы с центром $O(0;0)$.

а) Находим полуоси:
$a^2 = 9,\ a = 3;$

$b^2 = 16, b = 4.$

б) Так как уравнение имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, фокусы гиперболы лежат на оси Ox, то есть $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$ фокусы гиперболы, где $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$,

тогда $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$.

в) Эксцентриситет: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$.

г) Асимптоты гиперболы находим по формулам:

$$y = \pm\frac{b}{a}x;$$

$$y = \pm\frac{4}{3}x.$$

д) Уравнения директрис находим по формулам:

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon};$$

$$x = \pm\frac{3}{\frac{5}{3}} = \pm\frac{9}{5} = \pm 1{,}8.$$

Сделаем чертеж: рис. 18

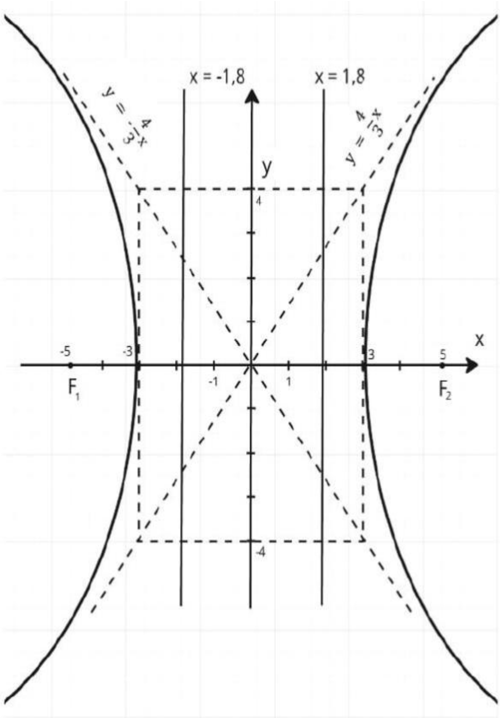


Рис.18

Пример 1.17. Дана гипербола $16x^2 - 9y^2 = -144$. Найти: **а)** полуоси a и b ; **б)** фокусы; **в)** эксцентриситет; **г)** уравнения асимптот; **д)** уравнения директрис. Сделать чертеж.

Решение.

$16x^2 - 9y^2 = -144|: 144;$

$$\frac{16x^2}{144} - \frac{9y^2}{144} = -1;$$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$ –уравнение гиперболы с центром $O(0; 0)$.

а) Находим полуоси:

$a^2 = 9, a = 3;$

$b^2 = 16, b = 4.$

б) Так как уравнение имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, фокусы гиперболы лежат на оси Oy, то есть $F_1(0; -c), F_2(0; c)$ – фокусы гиперболы, где

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$,

тогда $F_1(0; -5)$, $F_2(0; 5)$.

в) Эксцентриситет:

$\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{5}{4}$.

г) Асимптоты гиперболы находим по формулам:

$$y = \pm \frac{b}{a} x;$$

$$y = \pm \frac{4}{3} x.$$

д) Уравнения директрис:

$y = \pm \frac{b}{\varepsilon} = \pm \frac{4}{\frac{5}{4}} = \pm \frac{16}{5} = \pm 3{,}2$.

Сделаем чертеж: см. рис.19.

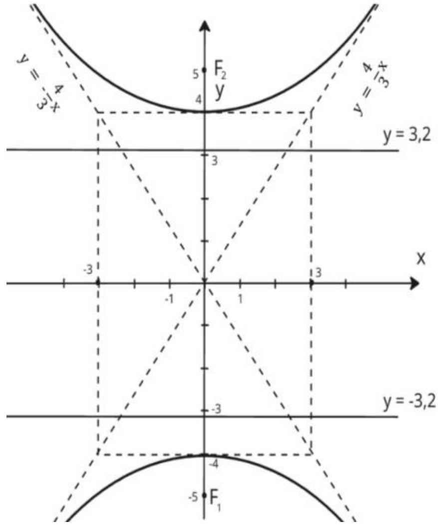


Рис. 19

Пример 1.18. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что: **а)** ее оси $2a = 10$ и $2b = 8$;**б)** расстояние между фокусами$2c = 10$ и ось$2b = 8$; **в)** расстояние между фокусами $2c = 10$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$; **г)** уравнения асимптот $y = \pm \frac{4}{3} x$ и расстояние между фокусами $2c = 20$;**д)** $\varepsilon = \sqrt{3}$ и точка$M(\sqrt{5}; \sqrt{2})$ лежит на гиперболе; **е)** расстояние между директрисами равно $\frac{228}{13}$ и расстояние между фокусами $2c = 26$.

Решение.

Поскольку фокусы гиперболы расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, уравнение гиперболы будем искать в виде:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

а) Так как $2a = 10$,то $a = 5$,$2b = 8, b = 4$.

Уравнение гиперболы будет иметь вид:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

б) Так как $2c = 10, c = 5$,

$2b = 8, b = 4$,известно, что $c^2 = a^2 + b^2$,тогда

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3.$$

Уравнение гиперболы будет иметь вид:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

в) Так как $2c = 10$, $c = 5$,$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$, то $\frac{5}{a} = \frac{3}{2}$, $a = \frac{10}{3}$,подставляя в соотношение $c^2 = a^2 + b^2$ известные величины $a = \frac{10}{3}$ и $c = 5$, получим:

$$b^2 = c^2 - a^2;$$

$$b = \sqrt{25 - \frac{100}{9}} = \frac{\sqrt{125}}{3}.$$

Уравнение гиперболы будет иметь вид: $\frac{x^2}{\frac{100}{9}} - \frac{y^2}{\frac{125}{9}} = 1.$

г) Так как $2c = 20$,$c = 10$.

Уравнения асимптот гиперболы имеет вид $y = \pm\frac{b}{a}x$, следовательно,$\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$, $b = \frac{3}{4}a$,из соотношения $c^2 = a^2 + b^2$ находим a:

$$a^2 + \frac{9}{16}a^2 = 100,$$

$$\frac{25}{16}a^2 = 100,$$

$a^2 = 100 \cdot \frac{16}{25} = 64$,следовательно, $b^2 = \frac{9}{16}a^2 = \frac{9}{16} \cdot 64 = 36.$

Таким образом, уравнение гиперболы имеет вид: $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$

д) Так как, точка $M(\sqrt{5};\sqrt{2})$ лежит на гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,то ее координаты удовлетворяют уравнению гиперболы, то есть $\frac{5}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1$**.**

Учитывая, что $\varepsilon = \frac{c}{a}$, $\sqrt{3} = \frac{c}{a}, c = \sqrt{3}a.$

Из соотношения $c^2 = a^2 + b^2$,получим:

$$3a^2 = a^2 + b^2,$$

$$2a^2 = b^2.$$

Имеем систему:

$$\begin{cases} \frac{5}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1; \\ 2a^2 = b^2 \end{cases}$$

$$\frac{5}{a^2} - \frac{2}{2a^2} = 1;$$

$$\frac{5}{a^2} - \frac{1}{a^2} = 1;$$

$$\frac{4}{a^2} = 1;$$

$a^2 = 4$,тогда $b^2 = 8$.

Уравнение гиперболы будет иметь вид:
$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1.$

е) $2c = 26, c = 13;$

$\frac{2a}{\varepsilon} = \frac{228}{13};$

$\frac{a}{\varepsilon} = \frac{114}{13}$,поскольку $\varepsilon = \frac{c}{a}$,то

$$\frac{a}{\frac{c}{a}} = \frac{114}{13};$$

$$\frac{a^2}{c} = \frac{114}{13};$$

$$\frac{a^2}{13} = \frac{114}{13};$$

$a^2 = 114,$

$b^2 = c^2 - a^2,$

$b^2 = 169 - 114 = 55.$

Уравнение гиперболы будет иметь вид: $\frac{x^2}{114} - \frac{y^2}{55} = 1.$

Пример 1.19. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси ординат симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:
а) ее оси $2a = 12, 2b = 18$; **б)** расстояние между фокусами $2c = 10$и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$; **в)** уравнения асимптот$y = \pm\frac{12}{5}x$ и расстояние между вершинами равно 48;**г)** расстояние между

директрисами равно $\frac{12}{7}$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{7}{6}$.

Решение.

Поскольку фокусы гиперболы расположены на оси ординат симметрично относительно начала координат, уравнение гиперболы будем искать в виде:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

а) Так как её оси равны $2a = 12$, $2b = 18$,то $a = 6, b = 9,$ следовательно уравнение гиперболы будет иметь вид: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{81} = 1.$

б) Так как $2c = 10$, $c = 5, \varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{5}{3}$, то $\frac{5}{b} = \frac{5}{3}, b = 3,$

подставляя в соотношение $c^2 = a^2 + b^2$ известные величины $b = 3$ и $c = 5$, получим:

$a^2 = c^2 - b^2;$

$a = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4.$

Уравнение гиперболы будет иметь вид: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1.$

в) Уравнения асимптот имеет вид $y = \pm\frac{12}{5}x$, $\left(y = \pm\,\frac{b}{a}x\right)$ то

есть $b = n \cdot 12, a = n \cdot 5,$ так как

$2b = 48$, $b = 24$,следовательно, $n = 2, a = 2 \cdot 5 = 10.$

Таким образом, уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{576} = -1.$$

г) $\frac{2b}{\varepsilon} = \frac{72}{7}$, $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{7}{6}$,тогда $\frac{2b}{\frac{7}{6}} = \frac{72}{7}$, $2b = \frac{7}{6} \cdot \frac{72}{7}, b = 6.$

Следовательно, $\frac{c}{6} = \frac{7}{6}$, $c = 7$. Следовательно,

$a = \sqrt{49 - 36} = \sqrt{13}.$

Таким образом, $\frac{x^2}{13} - \frac{y^2}{36} = -1$.

Пример 1.20. Найти уравнение асимптот гиперболы $2x^2 - 3y^2 = 6$.

Решение.

Разделив обе части уравнения гиперболы на 6, получим:

$2x^2 - 3y^2 = 6|:6$,

$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$, отсюда $a = \sqrt{3}, b = \sqrt{2}$.

Найдем уравнения асимптот $y = \pm\frac{b}{a}x$, $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x$ – искомые уравнения асимптот гиперболы.

Пример 1.21. Найти площадь прямоугольника, вершины которого лежат на гиперболе $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{10} = 1$, а две стороны проходят через фокусы параллельно оси Oy.

Решение.

Воспользуемся формулой $c^2 = a^2 + b^2 = 20 + 10 = 30$,откуда $c = \sqrt{30}$.

Из условий задачи следует, что длина прямоугольника равна фокальному расстоянию гиперболы, то есть $2c = 2\sqrt{30}$.

Найдем ординаты вершин прямоугольника, учитывая, что они лежат на данной гиперболе и что их абсциссы $x = \pm\sqrt{30}$,

имеем: $\frac{30}{20} - \frac{y^2}{10} = 1$,

$\frac{y^2}{10} = \frac{1}{2}$,

$y^2 = 5$,

$y = \pm 5$.

Тогда высота прямоугольника равна $2\sqrt{5}$.

Таким образом, искомая площадь равна $S = 2\sqrt{30} \cdot 2\sqrt{5} = 20\sqrt{6}$.

Пример 1.22. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса, заданного уравнением $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Решение.

Найдем фокусное расстояние $2c$:

$c = \sqrt{25 - 9} = 4$, $2c = 8$.

Для гиперболы $\varepsilon = \frac{c}{a}$, $\varepsilon = 2$,то есть $\frac{c}{a} = 2, c = 2a, 2c = 4a, 8 = 4a,$

$a = 2$,следовательно, $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Таким образом, $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$– искомое уравнение гиперболы.

Пример 1.23. Найти уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах эллипса $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$,а фокусы в вершинах эллипса.

Решение.

Будем искать уравнение гиперболы в виде:

$$\frac{x^2}{(a^*)^2} - \frac{y^2}{(b^*)^2} = 1;$$

Найдём фокусы эллипса: $c^2 = a^2 - b^2, c = \sqrt{8 - 5} = \sqrt{3}$,то есть вершины гиперболы находятся в точках$(\sqrt{3}; 0)$, $(-\sqrt{3}; 0)$,то есть $a^* = \sqrt{3}$.

Вершинами эллипса являются точки $(\sqrt{8}; 0)$, $(-\sqrt{8}; 0)$,следовательно фокусы гиперболы имеют такие же координаты, то есть $c^* = \sqrt{8}$,отсюда

$$b^* = \sqrt{c^{*2} - a^{*2}} = \sqrt{8 - 3} = \sqrt{5}.$$

Таким образом, уравнение гиперболы имеет вид: $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$.

Пример 1.24. Установить, какая линия определяется уравнением $y^2 - x^2 = 0$.

Решение.

$y^2 - x^2 = 0,$

$(y - x)(y + x) = 0,$

Таким образом, исходное уравнение определяет две пересекающиеся прямые $y = x$ и $y = -x$(рис. 20)

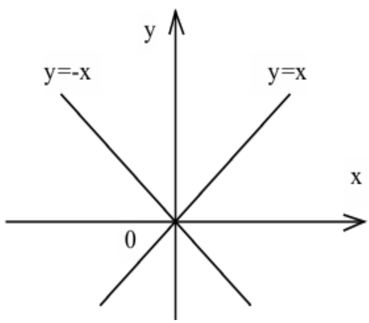


Рис. 20

Пример 1.25. Составить каноническое уравнение гиперболы, симметричной относительно координатных осей, пересекающих ось Oy и проходящей через две точки $M_1(4;\sqrt{2})$, $M_2(0;1)$. Найти фокусы этой гиперболы.

Решение.

По условию задачи искомая гипербола пересекает ось Oy, поэтому ее уравнение ищем в виде

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1;$$

Так как точки $M_{1,2}$ лежат на гиперболе, то их координаты удовлетворяют уравнению гиперболы. Подставим координаты данных точек в уравнение и получим:

$\frac{16}{a^2}-\frac{2}{b^2}=-1$ и $\frac{1}{b^2}=1$,следовательно $b^2=1$

и, значит уравнение $\frac{16}{a^2}-\frac{2}{b^2}=-1$ принимает вид $\frac{16}{a^2}-2=-1$,тогда $a^2=16$.

Уравнение гиперболы приобретает вид:

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{1}=-1;$$

Учитывая, что $c^2=a^2+b^2$, найдем c: $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$.

Фокусы данной гиперболы лежат на оси Oy , следовательно $F_1(0;-\sqrt{17})$, $F_2(0;\sqrt{17})$.

3. Задания для самостоятельного решения по теме: “Гипербола”.

1. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что: **а)** ее оси $2a=10$, $2b=8$; **б)** расстояние

между фокусами$2c=10$ и ось $2b=8$; **в)** расстояние между фокусами $2c = 6$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$; **г)** уравнения асимптот

$y = \pm\frac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами фокусами $2c = 20$;

д) расстояние между директрисами $\frac{2a}{\varepsilon}$ равно $\frac{8}{3}$ и эксцентриситет

$\varepsilon = \frac{3}{2}$.

2. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси ординат, симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что: **а)** ее полуоси $a = 6$, $b = 18$;

б) расстояние между фокусами $2c = 10$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$;

в) уравнения асимптот $y = \pm\frac{12}{5}x$, расстояние между

вершинами равно 48;
г) расстояние между директрисами $\frac{2b}{\varepsilon}$ равно $\frac{50}{7}$ и эксцентриситет

$\varepsilon = \frac{7}{5}$.

3. Вычислить площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ и прямой $9x + 2y - 12 = 0$.

4. Составить каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точки $M_1(6; -1)$, $M_2(-8; 2\sqrt{2})$, фокусы которой

лежат на оси Ox симметричной относительно начала координат.

5. Установить, какая линия определяется уравнением:
а) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 4}$; **б)** $x = -\frac{2}{3}\sqrt{y^2 - 9}$.

6. Составить уравнение гиперболы, если ее вершины находятся в точках $A_1(-5; 0)$, $A_2(5; 0)$, а фокусы в точках

$F_1(-7;0)$, $F_2(7;0)$.

7.Даны уравнения асимптот гиперболы $y=\pm\frac{5}{12}x$ и координаты точки $A(24;5)$, лежащей на гиперболе. Составить уравнение гиперболы.

8. Составить уравнение гиперболы, если её фокусы находятся в точках $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$,а уравнение асимптоты имеет вид $4x+3y=0$.

9. Составить уравнение гиперболы, проходящей через точку $A\left(-5;\frac{9}{4}\right)$,если фокальное расстояние равно 10.

10. Составить уравнение гиперболы, если её вершины находятся в точках $A_1(0;-3)$, $A_2(0;3)$,а расстояние между фокусами равно 10.

Ответы:

3.1. **а)** $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$;**б)** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$;**в)** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$;**г)** $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$.**д)** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.

3.2. **а)** $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{324}=-1$;**б)** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$;**в)** $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{576}=-1$;

г) $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{25}=-1$.**3.3.**3. **3.4.** $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{8}=1$.**3.5.** **а)** ветвь гиперболы $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$,расположенной там, где $y\geq 0$;

б) ветвь гиперболы $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=-1$,расположенной там, где $x\leq 0$.**3.6.** $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{14}=1$ **3.7.** $\frac{x^2}{432}-\frac{y^2}{75}=1$.**3.8.**$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

3.9. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.**3.10.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$.

1.4. Парабола.

Параболой называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой. Расстояние от фокуса F до директрисы называется **параметром параболы** и обозначается через p ($p > 0$). Геометрический смысл параметра p состоит в том, что, чем больше его величина, тем ближе к оси симметрии лежат ветви параболы.

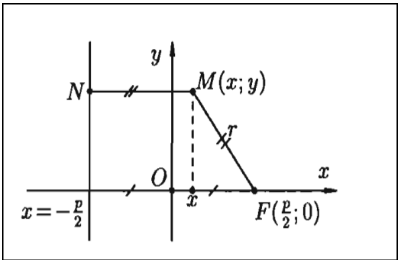


Рис.21

Для вывода уравнения параболы выберем систему координат Oxy так, чтобы ось Oxпроходила через фокус F перпендикулярно директрисе в направлении от директрисы к фокусу, а начало координат O расположим посередине между фокусом и директрисой (рис. 21). В выбранной системе фокус F имеет координаты $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, а уравнение директрисы имеет вид $x = -\frac{p}{2}$.

Пусть $M(x;y)$ - произвольная точка параболы. Соединим точку M с точкой F. Проведем отрезок MN перпендикулярно директрисе.

Из определения параболы имеем:

$NM = FM$, где $N\left(-\frac{p}{2};y\right), F\left(\frac{p}{2};0\right), M(x;y)$,

тогда $FM = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + (y-0)^2}$,

$NM = \sqrt{\left(x-\left(-\frac{p}{2}\right)\right)^2 + (y-y)^2} = \sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}$, то есть

$$\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + (y-0)^2},$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2,$$

$$x^2 + xp + \frac{p^2}{4} = x^2 - xp + \frac{p^2}{4} + y^2,$$

$$\boldsymbol{y^2 = 2px} \ \textbf{(1.11)}$$

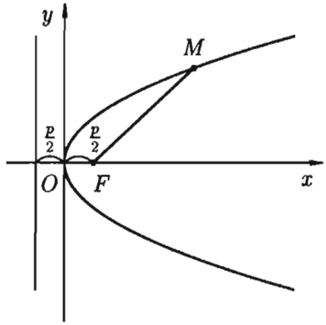


Рис.22

Уравнение (1.11) называется **каноническим уравнением параболы.**

Парабола $y^2 = 2px$ имеет вид, изображенный на рис.22. Точка $O(0;0)$ называется **вершиной параболы**, отрезок $FM = r$ называется **фокальным радиусом точки** M.

Исследование канонического уравнения параболы.

Установим форму параболы, пользуясь ее каноническим уравнением.

1)Уравнение (1.11) содержит y в четной степени. Следовательно, парабола симметрична относительно оси Ox;

2)Так как $p > 0$, то из (1.11) следует, что $x > 0$. Следовательно, парабола расположена справа от оси Oy.

3)При $x = 0$ имеем $y = 0$. Следовательно, парабола проходит через начало координат. При неограниченном возрастании x неограниченно возрастает y.

Аналогично выводится уравнение параболы симметричной относительно оси $Oy, x^2 = 2py$ (рис. 23) и каждое из следующих уравнений параболы $y^2 = -2px$ (рис. 24),$x^2 = -2py$ (рис. 25) и называются каноническими.

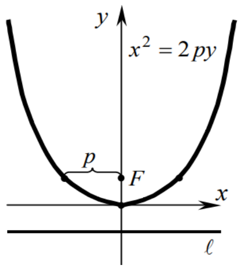


Рис. 23

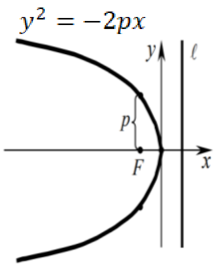


Рис. 24

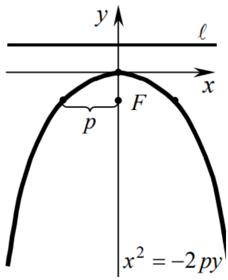


Рис. 25

Пример 1.26. Дано уравнение параболы: **а)** $y^2 = 6x$;

б) $x^2 = -4y$. Составьте уравнение ее директрисы и найти координаты фокуса.

Решение.

а) Сравнивая данное уравнение с каноническим уравнением параболы $y^2 = 2px$, получим, что $2p = 6$, откуда $p = 3$. Так как фокус данной параболы имеет координаты $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, а директриса - уравнение $x = -\frac{p}{2} = -\frac{3}{2}$, получим: $F(1,5; 0)$- координаты фокуса и $x = -1,5 -$ уравнение директрисы.

б) Опираясь на каноническое уравнение $x^2 = -2py$, получим, что $2p = 4$, откуда $p = 2$. Так как парабола симметрична относительно оси Oy и её ветви направлены вниз, то её фокус имеет координаты $F\left(0; -\frac{p}{2}\right)$, то есть $F(0; -1)$- координаты фокуса, а директриса задаётся уравнением $y = \frac{p}{2}$, то есть $y = 1 -$ уравнение директрисы.

Пример 1.27. На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.

Решение.

Из уравнения параболы получаем, что $2p = 8, p = 4, \frac{p}{2} = 2$.
По условию $x + \frac{p}{2} = 4$, следовательно, $x = 2$.
При $x = 2$ имеем:

$$y^2 = 16,$$
$$y = \pm 4.$$

Искомые точки: $M_1(2; 4), M_2\,(2; -4)$.

Пример 1.28. Составить каноническое уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, а фокус в точке $F(0;-4)$.

Решение.

Так как фокус имеет координаты $F(0;-4)$,то вершина искомой параболы имеет координаты $O(0;0)$. Так как фокус лежит на отрицательной полуоси Oy ветви искомой параболы направлены вниз, каноническое уравнение следует искать в виде $x^2=-2py$. Фокусное расстояние $OF=\frac{p}{2}$, с другой стороны $OF=4$,поэтому $\frac{p}{2}=4$, $p=8$, уравнение искомой параболы имеет вид: $x^2=-16y$.

Пример 1.29. Составить уравнение параболы, которая симметрична относительно оси Ox, проходит через точку $A(4;-1)$, а вершина ее лежит в начале координат.

Решение.

Так как парабола проходит через точку $A(4;-1)$ с положительной абсциссой, а осью симметрии служит ось Ox, то уравнение параболы будем искать в виде $y^2=2px$.

Подставляя в это уравнение координаты точки A, имеем:

$$(-1)^2=2p\cdot 4;$$

$$2p=\frac{1}{4}.$$

Таким образом, искомым уравнением параболы будет иметь вид: $y^2=\frac{1}{4}x$.

Пример 1.30. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями: **а)** $x=\sqrt{5y}$;**б)**$y=-3\sqrt{-2x}$.

Решение.

а) Рассмотрим равенство $x = \sqrt{5y}$ и заметим, что $x \geq 0$, так как $y \geq 0$.

Возводим обе части уравнения $x = \sqrt{5y}$ в квадрат:

$x^2 = \left(\sqrt{5y}\right)^2$ или $x^2 = 5y$.

Учитывая, что $x \geq 0$,понимаем, что данное уравнение определяет ветвь параболы $x^2 = 5y$, расположенную справа от прямой $x = 0$ (рис. 26).

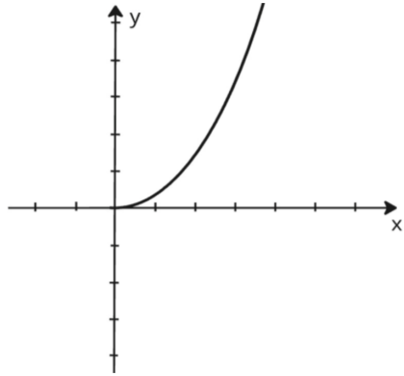


Рис. 26

б) $y = -3\sqrt{-2x}$ заметим, что $y \leq 0$,так как$-2x \leq 0$, $(x \geq 0)$;

$y^2 = \left(-3\sqrt{-2x}\right)^2$;

$y^2 = -18x$— это парабола, симметричная относительно оси Ox,ветви направлены в отрицательном направлении, вершина находится в точке $(0; 0)$.

Но, так как $y \leq 0$, то от всей параболы $y^2 = -18x$ надо взять только ту её часть, которая лежит ниже прямой $y = 0$ (рис.27).

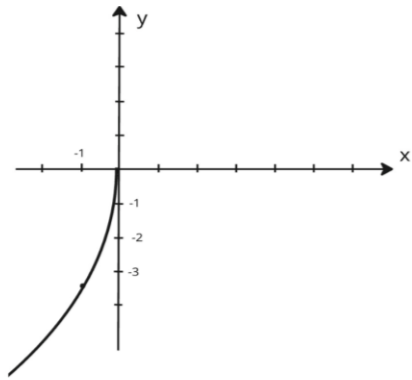


Рис. 27

4. Задания для самостоятельного решения.

1.Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $y^2 = 12x$. Определить расстояние от точки $M(3; 6)$ до фокуса.

2. Фокус параболы с вершиной в начале координат лежит в точке $F(0; -4)$. Написать уравнение этой параболы.

3. Составить уравнение параболы, если даны её фокус $F(-7;0)$ и директриса $x-7=0$.

4.Найти уравнения параболы и её директрисы, если известно, что парабола имеет вершину в начале координат и симметрична относительно оси Ox, и что точка пересечения прямых $y=x$ и $x+y-2=0$ лежит на параболе.

5.Определить при каком значении k прямая $y=kx+2$: **а)** пересекает; **б)** касается; **в)** проходит вне параболы $y^2=4x$.

6. Составить уравнение параболы, которая симметрична относительно оси Ox, проходит через точку $A(-1;3)$, а вершина ее лежит в начале координат.

7. Составить уравнение параболы, которая симметрична относительно оси Ox, проходит через точку $B(4;-8)$, а её

вершина лежит в начале координат.

8. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

а) $x=-\sqrt{2y}$;**б)**$y=3\sqrt{x}$.

9. Найти точки пересечения параболы $y^2=3x$ и гиперболы $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=-1$.

10. Парабола $y^2=x$ отсекает от прямой, проходящей через начало координат, хорду, длина которой равна $\sqrt{2}$. Составить уравнение этой прямой.

Ответ:

4.1. $x=-3, F(3;0), FM=6$.**4.2.** $x^2=-16y$. **4.3.**$y^2=-28x$.

4.4. $y^2=x$.**4.5. а)** $k<\frac{1}{2}$;**б)** $k=\frac{1}{2}$; **в)** $k>\frac{1}{2}$.**4.6.** $y^2=-9x$. **4.7.** $x^2=-2y$. **4.8. а)** ветвь параболы $x^2=2y$, расположенную слева от прямой $x=0$;

б) ветвь параболы $y^2=9x$, которая лежит выше прямой $y=0$.

4.9. $M_1(10;\sqrt{30}), M_2(10;-\sqrt{30}),\ M_3(2;\sqrt{6}), M_4(2;-\sqrt{6})$.

4.10. $y=-x, y=x$.

1.5. Приведение к каноническому виду общего уравнения линии второго порядка.

1.5.1. Случай параллельного переноса осей координат.

В случае, если в общем уравнении кривой второго порядка
$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$,
коэффициент $B = 0$,уравнение принимает вид:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1.12)$$

Выделяя полный квадрат в данном уравнении и делая замену $x' = x - x_0, y' = y - y_0$,получим уравнение кривой второго порядка с осями симметрии параллельными осям координат, следующих видов:

1) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ **(1.13)-уравнение эллипса с центром в точке $O_1(x_0;y_0)$ с осями симметрии параллельными координатным осям, в исходной системе координат.**

Найдем уравнение эллипса с центром в точке $O_1(x_0;y_0)$, оси симметрии которого параллельны координатным осям Ox и Oy и полуоси соответственно равны a и b. Поместим в центре эллипса O_1 начало новой системы координат $O_1x'y'$, оси которой O_1x' и O_1y' параллельны соответствующим осям Ox и Oy и одинаково с ними направленны (рис. 28).

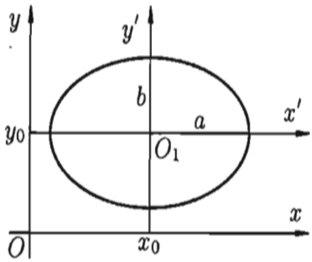


Рис. 28

В новой системе координат уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad (1.14),$$

где $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$(формулы параллельного переноса).

Аналогично размышляя, получим канонические уравнения гиперболы и параболы.

2) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0\ )^2}{b^2}=1$ **(1.15)-уравнение гиперболы с центром в точке** $O_1(x_0;y_0)$ **с осями симметрии параллельными координатным осям, вершины которой лежат на оси** O_1x'**.**

В новой системе координат уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1\ (1.16)$$

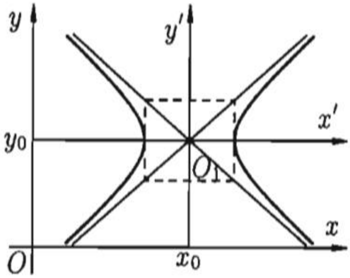


Рис. 29

Замечание: уравнение $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0\ )^2}{b^2}=-1$ определяет гиперболу с центром в точке $O_1(x_0;y_0)$ с осями симметрии параллельными координатным осям, вершины которой лежат на оси $O_1'y'$.

$$\text{3)}\quad \left.\begin{aligned} &(y-y_0\ )^2=2p(x-x_0)-\text{рис. }30\\ &(y-y_0\ )^2=-2p(x-x_0)-\text{рис. }31\\ &(\ x-x_0)^2=2p(y-y_0)-\text{рис. }32\\ &(\ x-x_0)^2=-2p(y-y_0)-\text{рис. }33 \end{aligned}\right\}(1.17)$$

уравнения парабол с вершиной в точке $O_1(x_0;y_0)$ **с осью симметрии параллельной одной из координатных осей.**

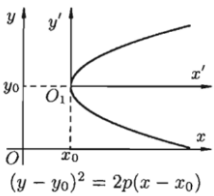


Рис. 30

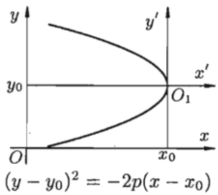


Рис. 31

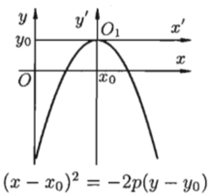


Рис. 32

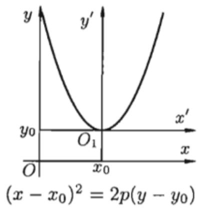


Рис. 33

Пример 1.31. Привести общее уравнение кривой второго порядка: **а)**$5x^2-30x+9y^2+18y+9=0$;
б)$4x^2-8x+3y^2+12y-32=0$ к каноническому виду. Найти координаты центра, координаты вершин и фокусов, уравнения асимптот и директрис, и построить кривую.

Решение.

а) При сравнении исходного уравнения с уравнением $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ легко заметить, что $A\cdot C>0$,поэтому данное уравнение определяет эллипс. Приведем общее уравнение кривой второго порядка к каноническому виду, выделяя полные квадраты:

$$5(x^2-6x)+9(y^2+2y)+9=0;$$

$$5(x^2-2\cdot3\cdot x+9)-45+9(y^2+2\cdot1\cdot y+1)-9+9=0;$$

$$5(x-3)^2+9(y+1)^2=45|:45;$$

$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{5}=1$ – уравнение эллипса с центром в точке $O_1(3;-1)$ и полуосями $a=3, b=\sqrt{5}$.

Оси симметрии кривой: $x'=x-3, y'=y+1$ (рис. 34).

Уравнение эллипса имеет вид:

$\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{5}=1,\ a>b$,следовательно, фокусы эллипса лежат на оси O_1x' то есть $F_1'(-c;0)$ и $F_2'(c;0)$ фокусы эллипса, где $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-5}=2$,тогда $F_1'(-2;0),\ F_2'(2;0)$ – координаты фокусов в новой системе координат $O_1x'y'$,пересчитаем координаты фокусов в старой системе координат Oxy:

$F_1(-2+3;0-1),\ F_2(2+3;0-1)$ или $F_1(1;-1),\ F_2(5;-1)$.

Эксцентриситет: так как $a>b$,то $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$;

Уравнения директрис:

$$x'=\pm\frac{a}{\varepsilon},$$

$$x'=\pm\frac{3}{\frac{2}{3}},$$

$$x-3=\pm\frac{9}{2},$$

$x=3\pm4{,}5$, то есть $x_1=7{,}5, x_2=-1{,}5$.

Сделаем чертеж: рис. 34.

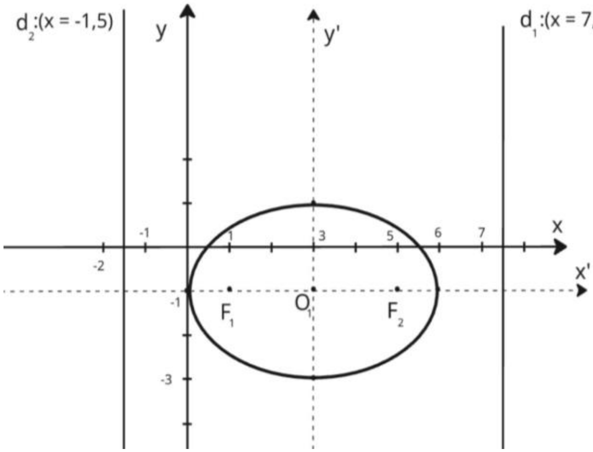


Рис.34

б) Приведем общее уравнение кривой второго порядка $4x^2-8x+3y^2+12y-32=0$ к каноническому виду, выделяя полные квадраты:

$$4(x^2-2x)+3(y^2+4y)-32=0;$$

$$4(x^2-2\cdot 1\cdot x+1)-4+3(y^2+2\cdot 2\cdot y+4)-12-32=0;$$

$$4(x-1)^2+3(y+2)^2=48;$$

$\frac{(x-1)^2}{12}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$ – уравнение эллипса с центром в точке$(1;-2)$и полуосями $a=\sqrt{12}=2\sqrt{3}(\approx 3{,}5), b=4$.

Оси симметрии для кривой: $x'=x-1, y'=y+2$.

Уравнение эллипса имеет вид:

$\frac{x'^2}{12}+\frac{y'^2}{16}=1,\ a<b$,следовательно, фокусы эллипса лежат на оси O_1y',где $F_1'(0;-c)$и $F_2'(0;c)$ фокусы эллипса в новой системе координат, $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{16-12}=2$,тогда

$F_1'(0;-2),\ F_2'(0;2)$ –координаты фокусов в новой системе координат $O_1x'y'$,пересчитаем координаты фокусов в старой системе координат Oxy:

$F_1(0+1;-2-2),\ F_2(0+1;2-2)$ или

$F_1(1;-4),\ F_2(1;0).$

Найдем эксцентриситет: так как $a < b$,то $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{2}{4} = 0{,}5;$

Уравнения директрис имеет вид:

$y' = \pm\frac{b}{\varepsilon}$, тогда

$$y' = \pm\frac{4}{\frac{1}{2}}, y + 2 = \pm 8,$$

то есть $y_1 = 6, y_2 = -10.$

Сделаем чертеж: рис. 35.

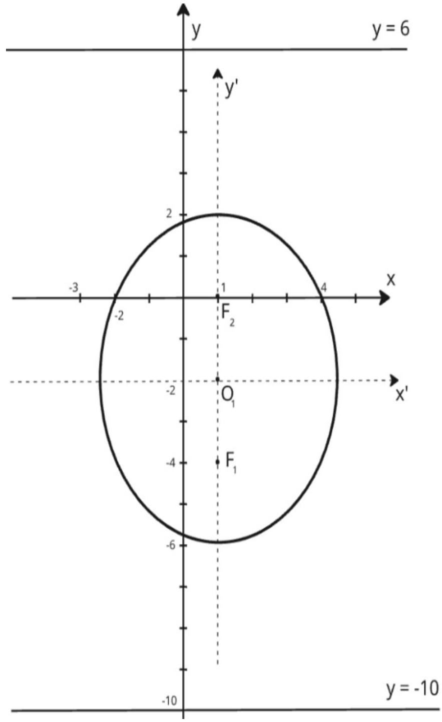


Рис. 35

Пример 1.32. Установить какую линию определяет уравнение и найти все его параметры, построить кривую:
а)$x^2 - 8x - 4y^2 = 0$;**б)** $4x^2 + 8x - y^2 + 6y + 11 = 0$;
в)$9x^2 - 90x - 4y^2 - 8y + 185 = 0$;**г)**$x^2 + 16x - 4y^2 - -8y + 60 = 0$.

Решение.

а) При сравнении исходного уравнения с уравнением $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ легко заметить, что $A \cdot C < 0$,

поэтому данное уравнение определяет гиперболу. Для нахождения всех параметров данного уравнения необходимо привести его к виду:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \pm 1;$$

Выделим полные квадраты:

$(x^2 - 2\cdot 4\cdot x + 16) - 16 - 4y^2 = 0,$
$(x-4)^2 - 4y^2 = 16|:16,$

$$\frac{(x-4)^2}{4^2}-\frac{y^2}{2^2}=1,$$
$$x'=x-4, y'=y,$$
$\frac{x'^2}{4^2}-\frac{y'^2}{2^2}=1$ – уравнение гиперболы со смещённым центром $O_1(4;0)$и полуосями $a=4, b=2$, фокусы лежат на оси O_1x', то есть $F_1'(-c;0)$и $F_2'(c;0)$, где

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}(\approx 4{,}5),$$

тогда $F_1{}'\left(-2\sqrt{5};0\right)$, $F_2{}'\left(2\sqrt{5};0\right)$ –координаты фокусов в новой системе координат $O_1x'y'$,пересчитаем координаты фокусов в старой системе координат Oxy:$F_1\left(-2\sqrt{5}+4;0\right)$, $F_2\left(2\sqrt{5}+4;0\right)$.

Эксцентриситет гиперболы: $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.
Асимптоты гиперболы:
$$y'=\pm\frac{b}{a}x';$$

$$y=\pm\frac{2}{4}(x-4);$$

$$y=\pm\frac{1}{2}(x-4).$$

Уравнения директрис находим по формулам:
$$x'=\pm\frac{a}{\varepsilon};$$

$$x-4=\pm\frac{4}{\frac{\sqrt{5}}{2}};$$

$$x=4\pm\frac{8}{\sqrt{5}}.$$

Сделаем чертеж: рис.36.

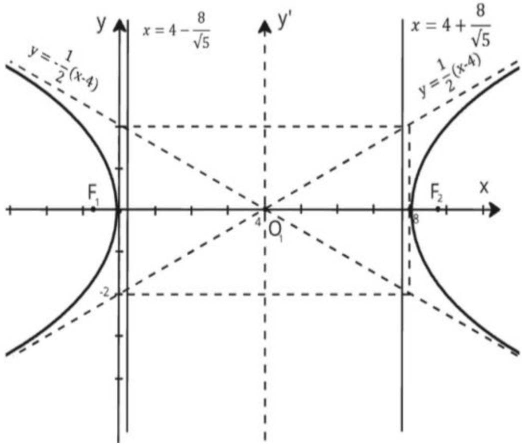


Рис. 36

б) $A \cdot C < 0$, поэтому данное уравнение определяет гиперболу.

Выделим полные квадраты:

$4(x^2 + 2x + 1) - 4 - (y^2 - 6y + 9) + 9 + 11 = 0,$

$4(x + 1)^2 - (y - 3)^2 = -16|: 16,$

$\frac{(x + 1)^2}{2^2} - \frac{(y - 3)^2}{4^2} = -1,$

$x' = x + 1, y' = y - 3,$

$\frac{x'^2}{2^2} - \frac{y'^2}{4^2} = -1$ – уравнение гиперболы со смещённым центром $O_1(-1; 3)$ – и полуосями $a = 2, b = 4$, фокусы лежат на оси O_1y', то есть $F_1'(0; -c)$ и $F_2'(0; c)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, тогда $F_1'(0; -2\sqrt{5})$, $F_2'(0; 2\sqrt{5})$ – координаты фокусов в новой системе координат $O_1x'y'$, пересчитаем координаты фокусов в старой системе координат Oxy:

$F_1(0 - 1; -2\sqrt{5} + 3)$, $F_2(0 - 1; 2\sqrt{5} + 3)$ или

$F_1(-1; 3 - 2\sqrt{5})$, $F_2(-1; 3 + 2\sqrt{5})$.

Эксцентриситет гиперболы: $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Асимптоты гиперболы:

$$y' = \pm\frac{b}{a}x';$$

$$y-3=\pm\frac{4}{2}(x+1);$$

$$y=3\pm 2(x+1);$$

$$y=2x+5, y=1-2x.$$

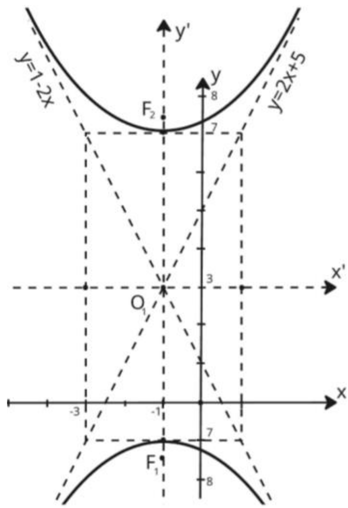


Рис. 37

Уравнения директрис находим по формуле:

$$y' = \pm\frac{b}{\varepsilon};$$

$$y-3=\pm\frac{4}{\frac{\sqrt{5}}{2}};$$

$$y=3\pm\frac{8}{\sqrt{5}}.$$

Сделаем чертеж: рис.37.

в) Приведем уравнение кривой к каноническому виду, выделяя полные квадраты:

$9x^2-90x-4y^2-8y+185=0$

$9(x^2-2\cdot5\cdot x+25)-225-4(y^2+2y+1)+4+185=0,$

$4(x-5)^2-(y+1)^2=36|:36,$

$\dfrac{(x-5)^2}{3^2}-\dfrac{(y+1)^2}{6^2}=1,$

$x'=x-5, y'=y+1,$

$\frac{x'^2}{3^2}-\frac{y'^2}{6^2}=1$-уравнение гиперболы с центром $O_1(5;-1)$ – и полуосями$a=2, b=4$, фокусы лежат на оси O_1x', то есть $F_1'(-c;0)$ и $F_2'(c;0)$, где $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$,тогда $F_1'(-3\sqrt{5};0)$, $F_2'(3\sqrt{5};0)$ –координаты фокусов в новой системе координат $O_1x'y'$,пересчитаем координаты фокусов в старой системе координат Oxy:

$F_1\left(-3\sqrt{5}+5;0-1\right)$, $F_2\left(3\sqrt{5}+5;0-1\right)$ или

$F_1\left(5-3\sqrt{5};-1\right)$, $F_2\left(5+3\sqrt{5};-1\right)$.

Эксцентриситет гиперболы: $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{3\sqrt{5}}{3}=\sqrt{5}$.
Асимптоты гиперболы:

$$y'=\pm\frac{b}{a}x';$$

$$y+1=\pm\frac{6}{3}(x-5);$$

$$y=-1\pm 2(x-5);$$

$$y=2x-11, y=9-2x.$$

Уравнения директрис находим по формулам:

$$x'=\pm\frac{a}{\varepsilon};$$

$$x-5=\pm\frac{3}{\sqrt{5}};$$

$x=5\pm\frac{3}{\sqrt{5}}$.Чертеж сделайте самостоятельно.

г) $x^2+16x-4y^2-8y+60=0$,
$(x^2+2\cdot 8\cdot x+64)-64-4(y^2+2\cdot 1\cdot y+1)+4+60=0$,
$(x-8)^2-4(y+1)^2=0$,
$\left(x-8-2(y+1)\right)\cdot\left(x-8+2(y+1)\right)=0$,
$(x-2y-10)\cdot(x+2y-6)=0$ – данное уравнение определяет две пересекающиеся прямые $x-2y-10=0$ и $x+2y-6=0$.

Пример 1.33. Определить координаты вершины, ось симметрии и директрису параболы: **а)** $x^2-2y-8x+6=0$;
б) $y^2+6x+6y+15=0$;**в)** $y=\frac{1}{4}x^2+2x+7$.

Решение.

а) Преобразуем данное уравнение к виду

$(\ x-x_0)^2=2p(y-y_0)$, выделив полный квадрат:
$x^2-2y-8x+6=0,$
$(x^2-2\cdot 4\cdot x+16)-16-2y+6=0,$
$(x-4)^2-2(y+5)=0,$
$(x-4)^2=2(y+5)$ – уравнение параболы с вершиной $O_1(4;-5)$.

Найдем значение параметра p:
$2p=2$,следовательно, $p=1$.

В результате параллельного переноса координатных осей $x-4=x', y+5=y'$ в новое начало$O'x'y'$, то есть в точку O_1, получим каноническое уравнение параболы:

$x'^2=2y'$ –парабола симметричная относительно оси $O'y'$, то есть прямая $x=4$ является осью симметрии параболы.

В соответствии с видом параболы координаты фокуса в новой системе координат имеют вид $F'\left(0;\frac{p}{2}\right)$, то есть $F'\left(0;\frac{1}{2}\right)$,в старой системе координат $F\left(0+4;\frac{1}{2}-5\right)$ или $F(4;-4{,}5)$.

Уравнение директрисы в новой системе координат имеет вид:

$y'=-\dfrac{p}{2};$

$y+5=-\dfrac{1}{2};$

$y=-5{,}5.$

Для более точного построения параболы найдём её точки пересечения с осями координат.

С ось Oy:

$\begin{cases} x=0 \\ (x-4)^2=2(y+5) \end{cases};$

$(0-4)^2=2(y+5);$

$16=2(y+5)|:2;$

$y+5=8, y=3.$

Таким образом, парабола пересекает ось Oy в точке $(0;3)$.

Найдём точки пересечения параболы с осью Ox:

$\begin{cases} y=0 \\ (x-4)^2=2(y+5) \end{cases};$

$(x-4)^2=2(0+5);$

$(x-4)^2=10;$

$x-4=\pm\sqrt{10};$

$x_1=4+\sqrt{10}(\approx 7{,}2), x_2=4-\sqrt{10}(\approx 0{,}8).$

$\left(4+\sqrt{10};0\right), \left(4-\sqrt{10};0\right)$ –точки пересечения параболы с осью Ox.

Сделаем чертёж: рис. 38.

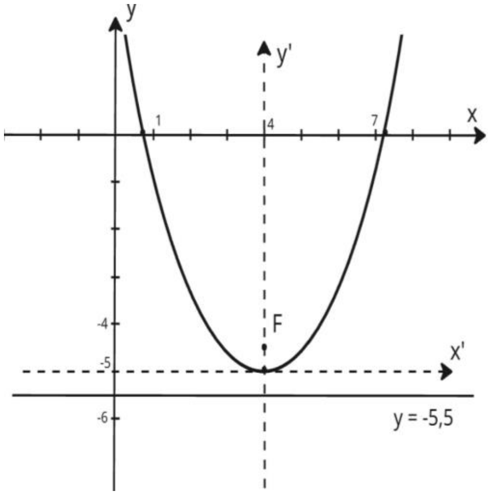


Рис. 38

б) Преобразуем данное уравнение к виду

$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$:

$y^2 + 6x + 6y + 15 = 0$;

$(y^2 + 2 \cdot 3 \cdot y + 9) - 9 + 6x + 15 = 0$;

$(y + 3)^2 + 6x + 6 = 0$;

$(y + 3)^2 + 6(x + 1) = 0$;

$(y + 3)^2 + 6(x + 1) = 0$;

$(y + 3)^2 = -6(x + 1)$ – уравнение параболы с вершиной $O_1(-1; -3)$.

Найдем значение параметра p:

$2p = 6$,следовательно, $p = 3$.

Тогда в результате параллельного переноса координатных осей $x = x' - 1, y = y' - 3$ в новое начало $O_1x'y'$, то есть в точку O_1, получим каноническое уравнение параболы:

$y'^2 = -6x'$ – парабола симметричная относительно оси

O_1x',ветви направлены в противоположную сторону (за счёт минуса перед $2p$) ,прямая $y=-3$ является осью симметрии параболы.

В соответствии с видом параболы координаты фокуса в новой системе координат имеет вид $F'\left(-\frac{p}{2};0\right)$, то есть $F'\left(-\frac{3}{2};0\right)$,в старой системе координат $F\left(-\frac{3}{2}-1;0-3\right)$ или $F(-2{,}5;-3)$.

Уравнение директрисы в новой системе координат имеет вид:

$$x'=\frac{p}{2};$$

$$x+1=\frac{3}{2};$$

$$x=0{,}5.$$

Найдём точки пересечения параболы с ось Oy:

$$\begin{cases} x=0 \\ (y+3)^2=-6(x+1) \end{cases};$$

$$(y+3)^2=-6(0+1);$$

$(y+3)^2=-6-$ ось Oy парабола не пересекает. Найдём точки пересечения параболы с осью Ox:

$$\begin{cases} y=0 \\ (y+3)^2=-6(x+1) \end{cases};$$

$$(0+3)^2=-6(x+1),$$

$$9=-6(x+1)|:(-6),$$

$$x+1=-1{,}5,$$

$x=-2{,}5$, следовательно,

$(-2{,}5;0)$ –точка пересечения параболы с осью Ox.

Сделаем чертёж: рис.39.

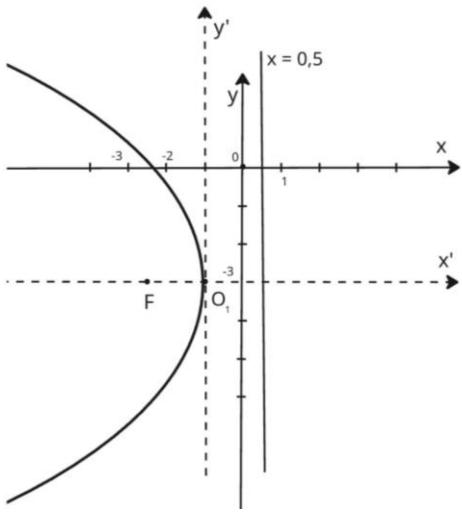


Рис. 39

в) Преобразуем данное уравнение $y=\frac{1}{4}x^2+2x+7$ к виду$(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$:

$$y=\frac{1}{4}x^2+2x+7;$$

$$y=\frac{1}{4}(x^2+8x+16)+3;$$

$$y=\frac{1}{4}(x+4)^2+3;$$

$$\frac{1}{4}(x+4)^2=y-3|\cdot 4;$$

$(x+4)^2=4(y-3)$-уравнение параболы с вершиной $O_1(-4;3)$.

Найдем значение параметра p: $2p=4$, следовательно, $p=2$.

В результате параллельного переноса координатных осей $x+4=x', y-3=y'$ в новое начало $O_1x'y'$, то есть в точку O_1, получим каноническое уравнение параболы: $x'^2=4y'$ –парабола симметричная относительно оси O_1y', то есть прямая $x=-4$является осью симметрии параболы.

В соответствии с видом параболы координаты фокуса в новой системе координат имеет вид $F'\left(0;\frac{p}{2}\right)$, то есть $F'(0;1)$,в старой системе координат $F(0-4;1+3)$ или $F(-4;4)$.

Уравнение директрисы в новой системе координат имеет вид:

$$y'=-\frac{p}{2};$$

$$y-3=-1;$$

$$y=2.$$

Найдём точки пересечения параболы с ось Oy:

$$\begin{cases} x=0 \\ (x+4)^2=4(y-3) \end{cases};$$

$$(0+4)^2=4(y-3);$$

$$16=4(y-3)|:4;$$

$$y-3=4, y=7.$$

Таким образом, парабола пересекает ось Oy в точке $(0;7)$.

Найдём точки пересечения параболы с осью Ox:

$$\begin{cases} y=0 \\ (x+4)^2=4(y-3) \end{cases};$$

$$(x+4)^2=4(0-3);$$

$(x-4)^2=-12$, точек пересечения с осью Ox парабола не имеет.

Чертёж сделайте самостоятельно.

Пример 1.34. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от точки фокус $F(0;3)$ и прямой $y=-5$. Определить точки пересечения этой кривой с осями координат.

Решение.

Пусть $M(x;y)$– произвольная точка геометрического места (рис. 40). По условию $FM=NM$, где N– основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую $y=-5$.Так как прямая имеет вид

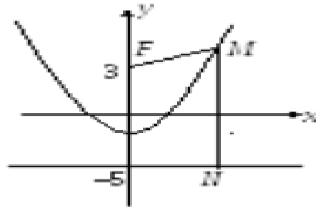


Рис. 40

$y=-5$,то точка N имеет координаты$(x;-5)$,отсюда

$$NM=|\overrightarrow{NM}|=\sqrt{(x-x)^2+\left(y-(-5)\right)^2}=\sqrt{(y+5)^2},$$

$$FM=|\overrightarrow{FM}|=\sqrt{(x-0)^2+(y-3)^2}=\sqrt{x^2+(y-3)^2},$$

То $\sqrt{x^2+(y-3)^2}=\sqrt{(y+5)^2}$, после возведения в квадрат и приводя подобные члены получим:

$x^2+(y-3)^2=(y+5)^2$;

$x^2+y^2-6y+9=y^2+10y+25$;

$x^2=16y+16$;

$x^2=16(y+1)$ –уравнение параболы с вершиной в точке $O_1(0;-1)$, симметричной относительно оси Oy. Заданные в условии точка и прямая являются соответственно ее фокусом и директрисой.

Для определения точек пересечения с осью Ox необходимо решить систему уравнений:

$\begin{cases}x^2=16y+16\\ y=0\end{cases}$, отсюда $x^2=16, x_1=4, x_2=-4$.

Таким образом, $M_1(4;0)$,$M_2(-4;0)$ – две точки пересечения её с осью Ox.

Для определения точек пересечения с осью Oy необходимо решить систему уравнений:

$\begin{cases}x^2=16y+16\\ x=0\end{cases}$, отсюда $16y+16=0, y=-1$, получаем точку $M_3(0;-1)$ – точку пресечения параболы с осью Oy .

Пример 1.35. Составить уравнение параболы, если даны её фокус $F(4;3)$ и директриса $y+1=0$. Найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.

Решение.

Пусть $M(x;y)$ - произвольная точка искомой кривой. Тогда расстояние до точки $F(4;3)$,то есть FM равно:

$FM=\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}$;

Поскольку, директриса имеет вид $y=-1$,то точка N имеет координаты$(x;-1)$,отсюда

$$NM=\sqrt{(x-x)^2+\left(y-(-1)\right)^2}=\sqrt{(y+1)^2}.$$

Из определения параболы, имеем:

$FM=NM$;

$\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(y+1)^2}$;

$(x-4)^2+(y-3)^2=(y+1)^2$;

$x^2-8x+16+y^2-6y+9=y^2+2y+1$;

$x^2-8x-8y+24=0$;

$x^2-8x+16=8y-8$;

$(x-4)^2=8(y-1)$.

Пример 1.36. Составить уравнение линии, расстояние от каждой точки которой до точки $A(2;0)$ относится к ее расстоянию до прямой $5x+8=0$ как 5:4.

Решение.

Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка данной линии, N– основание перпендикуляра, проведенного через точку M к прямой $5x+8=0$ или $x=-\frac{8}{5}$. Расстояние от точки M до точки A и прямой $x=-\frac{8}{5}$ определяется соответственно формулами

$$NM=\sqrt{\left(x-\left(-\frac{8}{5}\right)\right)^2+(y-y)^2}=\sqrt{\left(x+\frac{8}{5}\right)^2}=\left|x+\frac{8}{5}\right|,$$

$AM=\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$.

По условию задачи:

$$\frac{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}{\left|x+\frac{8}{5}\right|}=\frac{5}{4};$$

Откуда $4\sqrt{(x-2)^2+y^2}=5\left|x+\frac{8}{5}\right|$;

Возведем обе части этого уравнение в квадрат:

$16((x-2)^2+y^2)=25\left(x+\frac{8}{5}\right)^2$;

$16(x^2-4x+4+y^2)=25\left(x^2+\frac{16}{5}x+\frac{64}{25}\right)$;

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$16x^2-64x+64+16y^2=25x^2+80x+64$;

$9x^2-16y^2+144x=0$.

Выделим полные квадраты в левой части полученного уравнения:

$9(x^2+16x+64)-16y^2-9\cdot 64=0$;

$9(x+8)^2-16y^2=9\cdot 64|:9\cdot 64$;

$\frac{(x+8)^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$.

Полученное уравнение – уравнение гиперболы с центром в точке с центром $O_1(-8;0)$ и полуосями $a=8, b=6$.

Пример 1.37. Установить какую линию определяет уравнение: **а)** $x=2-\sqrt{6-2y}$;**б)** $y=-2-\sqrt{9-x^2+8x}$;

в)$y=7-\frac{3}{2}\sqrt{x^2-6x+13}$.

Решение.

а) $x-2=-\sqrt{6-2y}$, заметим, что $x-2\le 0$,так как $6-2y\ge 0$ $(y\le 3)$.

Возведем обе части полученного равенства в квадрат:

$(x-2)^2=\left(-\sqrt{6-2y}\right)^2$;

$(x-2)^2=6-2y$;

$(x-2)^2=-2(y-3)$ – это парабола, симметричная относительно прямой $x=2$, ветви направлены вниз, с вершиной в точке $(2;3)$.

Найдём точки пересечения параболы с ось Oy:

$\begin{cases} x=0 \\ (x-2)^2=-2(y-3) \end{cases}$;

$(0-2)^2=-2(y-3)$;

$4=-2(y-3)|:(-2)$;

$y-3=-2$;

$y=1$.

Таким образом, парабола пересекает ось Oy в точке $(0;1)$.

Найдём точки пересечения параболы с осью Ox:

$$\begin{cases} y = 0 \\ (x-2)^2 = -2(y-3) \end{cases};$$

$(x-2)^2 = -2(0-3)$;

$(x-2)^2 = 6$;

$x - 2 = \pm\sqrt{6}$;

$x_1 = 2 + \sqrt{6}, x_2 = 2 - \sqrt{6}$.

Таким образом, $(2+\sqrt{6}; 0), (2-\sqrt{6}; 0)$ –точки пересечения параболы с осью Ox. Но, так как нам нужно выбрать ту часть параболы, которая соответствует неравенству $x - 2 \le 0 (x \le 2)$, то от всей параболы надо взять только ту её часть, которая лежит левее прямой $x = 2$, то есть левую половину параболы (рис. 41).

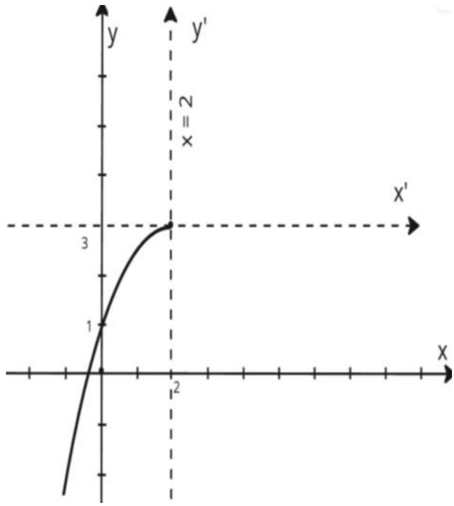


Рис. 41

б) $y + 2 = -\sqrt{9 - x^2 + 8x}$, заметим, что $y + 2 \le 0$, так как $9 - x^2 + 8x \ge 0 (x \epsilon [-1; 9])$.

Возведем обе части равенства в квадрат:

$(y+2)^2 = \left(-\sqrt{9 - x^2 + 8x}\right)^2$,

$(y+2)^2 = 9 - x^2 + 8x$,

$(y+2)^2 = 9 - (x^2 - 8x + 16) + 16$,

$(y+2)^2 = 25 - (x^2 - 8x + 16)$,

$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 25$.

Итак, искомая кривая полуокружность окружности с центром в точке $(4; -2)$ и радиусом 5, а именно ту её часть, где $y + 2 \le 0$ (рис.42).

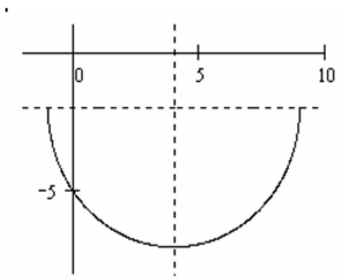


Рис. 42

в) $y = 7 - \frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 6x + 13}$,

$y - 7 = -\frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 6x + 13}$, $y - 7 < 0$,так как $x^2 - 6x + 13 \geq 0(\ x\epsilon R)$.

Возведем обе части полученного равенства в квадрат:

$(y-7)^2 = \frac{9}{4}(x^2 - 6x + 13)$,

$(y-7)^2 = \frac{9}{4}\left((x^2 - 6x + 9) + 4\right)|: 9$,

$\frac{(y-7)^2}{9} = \frac{1}{4}\left((x-3)^2 + 4\right)$,

$\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-7)^2}{9} = -1$ – получили гиперболу с центром в точке $O_1(3;7)$ – и полуосями $a = 2, b = 3$, фокусы лежат на оси O_1y'.

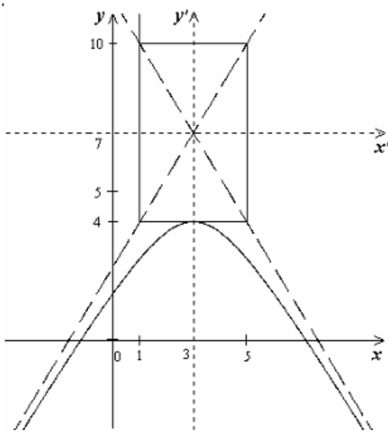


Рис. 43

Учитывая выше оказанное ограничение $y - 7 < 0$, получим, что исходное уравнение определяет ветвь гиперболы, расположенную под прямой $y - 7 = 0$(рис. 43).

Пример 1.38. Уравнение кривой в полярной системе координат имеет вид: **а)**$r = \frac{4}{3-cos\varphi}$;**б)** $r = \frac{9}{4-5cos\varphi}$. Найти уравнение кривой в декартовой прямоугольной системе координат, определит тип кривой, найти фокусы и эксцентриситет.

Решение.

Воспользуемся связью декартовой (прямоугольной) и полярной системы координат

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

а) Подставим в заданное уравнение формулы, связывающие полярную и декартову прямоугольную системы координат:

$$r = \frac{4}{3-cos\varphi};$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{4}{3 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}};$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{4}{3-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}};$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{3\sqrt{x^2+y^2}-x}\left|\cdot\frac{3\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right.;$$

$$3\sqrt{x^2+y^2}-x=4;$$

$$3\sqrt{x^2+y^2}=x+4;$$

$$\left(3\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=(x+4)^2;$$

$$9(x^2+y^2)=(x+4)^2;$$

$$9x^2+9y^2=x^2+8x+16;$$

$$8x^2-8x+9y^2-16=0;$$

$$8\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-2+9y^2-16=0;$$

$$8\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+9y^2=18|:18;$$

$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}}+\frac{y^2}{2}=1$ – получили каноническое уравнение эллипса, со смещённым центром $O_1\left(\frac{1}{2};0\right)$, $x'=x-\frac{1}{2}, y'=y$,то есть в новой системе координат имеет вид:

$\frac{x'^2}{\frac{9}{4}}+\frac{y'^2}{2}=1, a=\frac{3}{2}$ -большая полуось, $b=\sqrt{2}$- меньшая полуось, половина расстояния между фокусами равно $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{\frac{9}{4}-2}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$.

Эксцентриситет равен $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}$. Фокусы $F_1{}'\cdot\left(-\frac{1}{2};0\right), F_2{}'\cdot\left(\frac{1}{2};0\right)$,тогда $F_1(0;0), F_2(1;0)$.

.

б) $r=\frac{9}{4-5cos\varphi}$;

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{9}{4-\frac{5x}{\sqrt{x^2+y^2}}};$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{9\sqrt{x^2+y^2}}{4\sqrt{x^2+y^2}-5x};$$

$$4\sqrt{x^2+y^2}-5x=\frac{9\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$4\sqrt{x^2+y^2}-5x=9;$
$4\sqrt{x^2+y^2}=5x+9;$
$\left(4\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=(5x+9)^2;$
$16(x^2+y^2)=(5x+9)^2;$
$16x^2+16y^2=25x^2+90x+81;$
$9x^2+90x-16y^2+81=0;$
$9(x^2+10x+25-25)-16y^2+81=0;$
$9(x+5)^2-225-16y^2+81=0;$
$9(x+5)^2-16y^2=144|:144;$
$\frac{(x+5)^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ –каноническое уравнение гиперболы,

со смещённым центром $O_1(-5;0)$, $x'=x+5$, $y'=y$,то есть в новой системе координат имеет вид:

$\frac{x'^2}{16}-\frac{y'^2}{9}=1$, $a=4$ – действительная полуось,

$b=3$ – мнимая полуось, тогда

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+9}=5.$

Эксцентриситет: $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}.$

Фокусы $F_1{}'\cdot(-5;0), F_2{}'\cdot(5;0)$ –в новой системе координат, $F_1{}^{\cdot}(-10;0), F_2{}^{\cdot}(0;0)$- в старой.

1.5.2. Случай поворота осей координат.

В случае, если в общем уравнении линии второго порядка

$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$

коэффициент $B\neq 0$,можно путем поворота осей координат на угол α,преобразовать это уравнение, чтобы в нем член с произведением координат отсутствовал.

Для определения угла поворота координатных осей используют формулы поворота осей координат:

$$\begin{cases} x=x'cos\alpha-y'sin\alpha \\ y=x'sin\alpha+y'cos\alpha \end{cases};$$

Подставляя данные формулы в общее уравнение линии второго порядка, выразим старые координаты через новые:

$$A(x'cos\alpha-y'sin\alpha)^2+2B(x'cos\alpha-y'sin\alpha)(x'sin\alpha+y'cos\alpha)+$$
$$+C(x'sin\alpha+y'cos\alpha)^2+D(x'cos\alpha-y'sin\alpha)+E(x'sin\alpha+y'cos\alpha)+F=0$$

Раскрывая скобки имеем:

$$A\left(x'^2cos^2\alpha-2x'y'sin\alpha cos\alpha+y'^2sin^2\alpha\right)+$$
$$+2B\left(x'^2sin\alpha cos\alpha+x'y'cos^2\alpha-x'y'sin^2\alpha-y'^2sin\alpha cos\alpha\right)+$$
$$+C\left(x'^2sin^2\alpha+2x'y'sin\alpha cos\alpha+y'^2cos^2\alpha\right)+$$
$$+D(x'cos\alpha-y'sin\alpha)+E(x'sin\alpha+y'cos\alpha)+F=0$$

или

$(A + Bsin\alpha cos\alpha)x'^2 + (-2Asin\alpha cos\alpha + 2B(cos^2\alpha - sin^2\alpha) +$
$+2Csin\alpha cos\alpha)x'y' + (Asin^2\alpha - Bsin\alpha cos\alpha + Ccos^2\alpha)y'^2 + F = 0$

Выберем угол α так, чтобы коэффициент при $x'y'$обратился в ноль, то есть чтобы выполнялось равенство

$-Asin2\alpha + 2Bcos2\alpha + Csin2\alpha = 0$

или

$(A - C)sin2\alpha = 2Bcos2\alpha,$

$$\boldsymbol{tg2\alpha = \frac{2B}{A-C}} \quad \textbf{(1.18)}$$

Таким образом, при повороте осей на угол α, удовлетворяющий условию $tg2\alpha = \frac{2B}{A-C}$, уравнение $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + +Dx + Ey + F = 0$ сводится к уравнению

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$

Алгоритм приведение уравнений
$\boldsymbol{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$ **к каноническому виду.**

1)Определяем угол α –угол поворота осей координат по формуле $tg2\alpha = \frac{2B}{A-C}$;

2) Подставляя формулам преобразования координат $\begin{cases} x = x'cos\alpha - y'sin\alpha \\ y = x'sin\alpha + y'cos\alpha \end{cases}$ в исходное уравнение, находим уравнение данной линии в новой системе координат $O_1x'y'$.

Замечание: все линии второго порядка в зависимости от знака $AC - B^2$ делятся на следующие три типа:

1)$AC - B^2 > 0$ –эллиптический тип;

2) $AC - B^2 < 0$ – гиперболический тип;

3)$AC - B^2 = 0$ – параболический тип.

Пример 1.39. Привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка $2x^2 + 2xy + 2y^2 + +\sqrt{2}x - \sqrt{2}y - 5 = 0$ и построить её относительно первоначальной системы координат.

Решение.

В данном случае $A = 2, B = 1, C = 2$,тогда $AC - B^2 > 0$, кривая принадлежит к эллиптическому типу.

Для определения угла поворота осей координат воспользуемся формулой (1.18):

$tg2\alpha = \frac{2B}{A-C} = \frac{2}{0}$, тангенс неопределён, найдем

$$ctg2\alpha = \frac{A-C}{2B} = \frac{0}{2} = 0, \quad \text{отсюда } 2\alpha = \frac{\pi}{2}, \ \ \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Так как $cos\frac{\pi}{4} = sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,то формулы преобразования координат будут иметь вид:

$$\begin{cases} x = x'cos\alpha - y'sin\alpha \\ y = x'sin\alpha + y'cos\alpha \end{cases},$$

$$\begin{cases} x = \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{или} \begin{cases} x = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Подставляя эти значения в исходное уравнение, получим:

$$2\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) + 2\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + \sqrt{2}\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right) -$$
$$-\sqrt{2}\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) - 5 = 0,$$

$$x'^2 - 2x'y' + y'^2 + x'^2 - y'^2 + x'^2 + 2x'y' + y'^2 + x' - y' - x' -$$
$$-y' - 5 = 0,$$
$$3x'^2 + y'^2 - 2y' - 5 = 0,$$

Выделяя полный квадрат, получим:

$$3x'^2 + \left(y'^2 - 2y' + 1\right) - 6 = 0,$$
$$3x'^2 + (y'-1)^2 = 6|:6,$$

$\frac{x'^2}{2} + \frac{(y'-1)^2}{6} = 1$,получили каноническое уравнение эллипса с центром в точке$(0;1)$, $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{6}$

Эта кривая изображена на рис. 44.

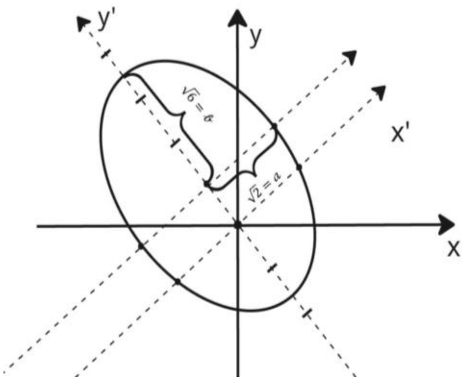


Рис.44

5.Задания для самостоятельного решения.

1. Найти координаты центра и радиуса окружности $x^2+y^2-6x+10y-15=0$.

2.Упростить уравнение кривой и установить его вид $4x^2+9y^2+32x-54y+109=0$.

3. Установить, что уравнение:

а) $9x^2+25y^2-18x-100y-116=0$;

б) $2x^2+y^2-8x-6y+1=0$ определяет эллипс, и найти

координаты его центра, полуоси, фокусы, эксцентриситет и уравнения директрис.

4. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет гиперболу, и найти координаты ее центра, полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис:

а) $3x^2-6y^2-12x-108y-492=0$;

б) $4y^2-x^2-4x+8y-4=0$.

5. Установить, какую линию определяет уравнение:

а)$x=5-\frac{3}{4}\sqrt{y^2+4y-12}$;

б)$y=3-4\sqrt{x-1}$;

в)$y=1-\frac{4}{3}\sqrt{-6x-x^2}$.

6. Установить, что уравнение: **а)** $y=\frac{1}{4}x^2+x+2$;

б)$x=2y^2-12y+14$ определяет параболу, найти координаты её вершины, величину параметра p.

7. Упростить уравнение кривой и установить её вид $4y^2-2x+8y-1=0$.

8. Упростить уравнение кривой и установить её вид $4x^2-25y^2-24x+50y-89=0$.

9. Упростить уравнение кривой и установить её вид$x^2+xy+y^2-3x+6y+3=0$.

10.Привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка и построить её относительно первоначальной системы координат $5x^2-6xy+5y^2-32=0$.

Ответы:

5.1. $(x-3)^2+(y+5)^2=49-$ уравнение окружности с центром в точке (3; –5) и радиусом 7.

5.2. $\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1-$ уравнение эллипса с центром в точке $O_1(-4;3)$ и полуосями
$a=3, b=2.$

5.3. а) $\frac{(x-1)^2}{5^2}+\frac{(y-1)^2}{3^2}=1,\ O_1(1;2), a=5, b=3, \varepsilon=\frac{4}{5},$
$F_1(-3;2),\ F_2(5;2), x_{1,2}=1\pm 6{,}25;$

б) $\frac{(x-2)^2}{8}+\frac{(y-3)^2}{16}=1,$
$O_1(2;3), a=2\sqrt{2}, b=4, \varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2},\ F_1\left(2;3-2\sqrt{2}\right),$
$F_2\left(2;3+2\sqrt{2}\right), y=3\pm 4\sqrt{2}.$

5.4. а) $\frac{(x-2)^2}{6}-\frac{(y+9)^2}{3}=1, O_1(2;-9), a=\sqrt{6}, b=\sqrt{3},$

$\varepsilon=\sqrt{\frac{3}{2}},\ F_1(5;-9),\ F_2(-1;-9), x_{1,2}=2\pm 2, y+9=\pm\sqrt{2}(x-2).$

б) $\frac{(x+2)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{1}=-1,$

$C(-2;-1), a=2, b=1, \varepsilon=\sqrt{5},\ F_1\left(-2;-1-\sqrt{5}\right),$

$F_2\left(-2;-1+\sqrt{5}\right), y_{1,2}=-1\pm\frac{\sqrt{5}}{5},\quad y+1=\pm\frac{1}{2}(x+2).$

5.5. а) часть гиперболы $\frac{(x-5)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{16}=1$,где $x\le 5;$

б) часть параболы $(y-3)^2=16(x-1)$,где $y\le 3;$

в) $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$- уравнение половины эллипса, где $y\le 1.$

5.6. а) $O_1(-2;1),\ p=2;$**б)** $O_1(-4;3),\ p=\frac{1}{4}$.

5.7. $(y+1)^2=\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{2}\right)-$ уравнение параболы с вершиной $O_1\left(-\frac{5}{2};-1\right).$

5.8. $\frac{(x-3)^2}{25}-\frac{(y-1)^2}{4}=1-$ уравнение гиперболы с центром в точке $O_1(3;1)$ и полуосями
$a=5, b=2.$

5.9. $\frac{\left(x'-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}{4}+\frac{\left(y'-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}{12}=1-$ уравнение эллипса с центром в точке $O_1(0;3)$, $a=2, b=2\sqrt{3}$.

5.10. $\frac{x'^2}{16}+\frac{y'^2}{4}=1$ – уравнение эллипса с центром в точке $O_1\left(-\frac{5}{2};-1\right)$, $a=4, b=2$.

ГЛАВА 2. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Поверхностью второго порядка называется геометрическое место точек в пространстве, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(x, y, z) = 0 \quad \textbf{(2.1)},$$

где $F(x, y, z)$ многочлен второй степени.

В общем случае уравнение поверхности второго порядка в трехмерном пространстве имеет вид

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad \textbf{(2.2)},$$

где $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ – коэффициенты, а по крайней мере один из коэффициентов при квадратичных членах (A, B, C, D, E, F) должен быть отличен от нуля.

Поверхности второго порядка делятся на вырожденные и невырожденные. Вырожденные поверхности второго порядка — это плоскости и точки, которые задаются уравнением второй степени. Если уравнению второго порядка не удовлетворяет ни одна точка пространства, то тоже говорят, что уравнение определяет вырожденную поверхность (мнимую поверхность второго порядка). Невырожденными поверхности второго порядка подразделяются на пять типов: эллипсоиды, гиперболоиды, конусы, параболоиды, цилиндры.

2.1. Эллипсоид.

Эллипсоидом называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \textbf{(2.3)},$$

Система координат, в которой эллипсоид имеет уравнение (2.3), называется его **канонической системой координат**, а уравнение (2.3) – **каноническим уравнением эллипсоида.**

Величины a, b, c– положительные константы называются **полуосями эллипсоида**.

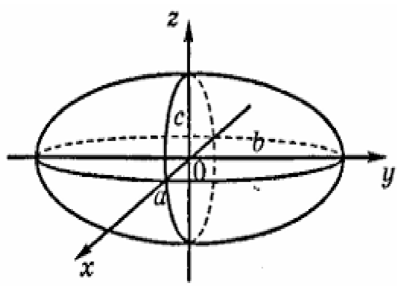


Рис.45

Если все они различны, то эллипсоид называется **трёхосным** (рис.45).

Если какие-нибудь две из полуосей равны, то эллипсоид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения эллипса вокруг одной из своих осей.

Например, если $a = b$,то $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 -$ эллипсоид вращения,Oz –ось вращения.

Эллипсоид, у которого все три полуоси равны, называют **сферой**. Каноническое уравнение сферы принято записывать в виде

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 = r^2} \textbf{(2.4)},$$

где r – величина полуосей, которая называется радиусом сферы. С геометрической точки зрения, сфера– это геометрическое место точек пространства, равноудаленных (на расстояние r) от некоторой фиксированной точки (называемой центром).

Пример 2.1. Привести уравнение поверхности второго порядка к каноническому виду, определить тип поверхности:

$4x^2 + 9y^2 + 36z^2 - 8x - 18y - 72z + 13 = 0.$

Решение.

Сгруппируем слагаемые с одинаковыми переменными и дополним каждую из скобок до полного квадрата:

$$4(x^2 - 2x + 1) - 4 + 9(y^2 - 2y + 1) - 9 + 36(z^2 - 2z + 1) - 36 + 13 = 0;$$

$$4(x-1)^2 + 9(y-1)^2 + 36(z-1)^2 = 36;$$

Делим полученное уравнение на 36, получаем:

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{1} = 1.$$

Произведем параллельный перенос осей координат, приняв за новое начало координат точку $O_1(1;1;1)$.

Формулы преобразования координат имеют вид:

$x' = x - 1$, $y' = y - 1$, $z' = z - 1.$

Тогда уравнение поверхности примет вид:

$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} + \frac{z'^2}{1} = 1$ –это уравнение эллипсоида с центром в точке$O_1(1;1;1)$ и полуосями 3, 2 и 1 соответственно.

2.2. Гиперболоид.

Различают однополостный и двуполостный гиперболоид.

Однополостным гиперболоидом называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\mathbf{1}\,\mathbf{(2.5)},$$

уравнение (2.5) называется **каноническим уравнением однополостного гиперболоида**(рис.46).

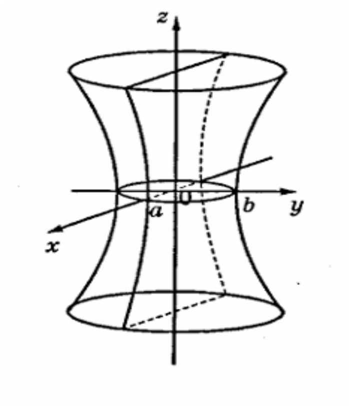


Рис. 46

Величины a,b и c называются **полуосями однополостного гиперболоида.**

Например, если $a=b$, то $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ – однополостный гиперболоид вращения, Oz –ось вращения. Он получается в результате вращения вокруг своей мнимой оси гиперболы $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

Замечание:

уравнения $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ тоже определяют однополостные гиперболоиды, но они «вытянуты» вдоль оси Oy и Ox соответственно.

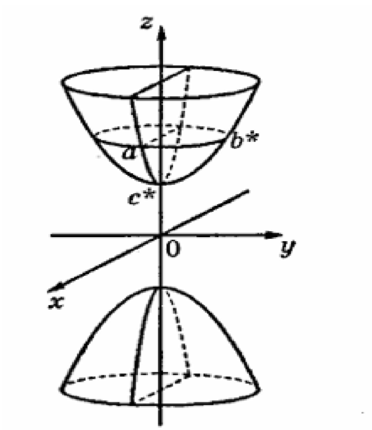


Рис. 47

Двуполостным гиперболоидом называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-\mathbf{1}\ \mathbf{(2.6)},$$

уравнение (2.6) называется **каноническим уравнением двуполостного гиперболоида** (рис. 47).

Величины a, b и c называются **полуосями** двуполостного гиперболоида.

Если $a = b$, то получим $\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ – двуполостный гиперболоид вращения. Он получается в результате вращения вокруг своей действительной оси гиперболы $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Замечание: уравнения $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$, $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ тоже определяют двуполостные гиперболоиды, но они «вытянуты» вдоль оси Oy и Ox соответственно.

2.3. Конус.

Конусом называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \mathbf{(2.7)},$$

уравнение (2.7) называется **каноническим уравнением конуса.**

Величины a, b и c называются **полуосями** конуса. Центр симметрии O называется вершиной конуса (рис.48).

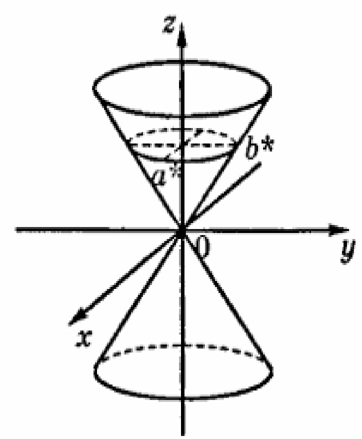


Рис.48

Если $a = b$, то конус является поверхностью вращения $\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

Замечание: уравнения $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ и $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ тоже определяют конусы, но они «вытянуты» вдоль оси Oy и Ox соответственно.

2.4. Параболоид.

Различают эллиптическим и гиперболический параболоид.

Эллиптическим параболоидом называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ **(2.8),**

где a, b – положительные константы.

Уравнение (2.8) называется **каноническим уравнением эллиптического параболоида.**

Величины a и b называются **параметрами параболоида.** Точка O называется вершиной параболоида.

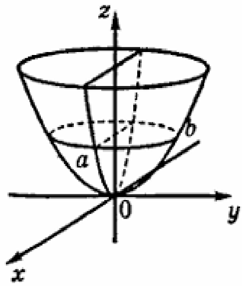


Рис. 49

Если $a=b$, то параболоид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения вокруг оси Oz параболы $\frac{y^2}{b^2}=2z$.

Эллиптический параболоид — это поверхность, которая получается при движении одной параболы вдоль другой (вершина параболы скользит по параболе, оси подвижной и неподвижной параболы параллельны, ветви направлены в одну сторону).

Замечания:

1) уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-2z$ тоже определяет эллиптический параболоид, но «развернутый» вниз;

2) Уравнения $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=\pm 2y$, $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\pm 2x$ определяют эллиптические параболоиды, с осями симметрии Oy и Ox соответственно.

Пример 2.2. Привести уравнение поверхности второго порядка к каноническому виду, определить тип поверхности: $4x^2+z^2-16x+4y+2z+9=0$.

Решение.

Выделим в данном уравнении полные квадраты:

$4(x^2-4x+4)-16+(z^2+2z+1)-1+4y+2z+9=0,$

$4(x-2)^2+(z+1)^2+4y-8=0,$

$4(x-2)^2+(z+1)^2=-4(y-2).$

Делаем замену координат:

$x'=x-2$, $y'=y-2$, $z'=z+1$,эта замена равносильна переносу начала координат в точку $O_1(2;2;-1)$.

После замены получаем уравнение:

$4x'^2 + z'^2 = -4y' | : 4$ или

$x'^2 + \frac{z'^2}{4} = -y'$— это уравнение задает эллиптический параболоид с осью $O_1\, y'$.

В сечении плоскостью $y' = -1$ получится эллипс $\frac{x'^2}{1} + \frac{z'^2}{4} = 1$ с полуосями 1 и 2.

Гиперболическим параболоидом называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad \textbf{(2.9)},$$

где a, b – положительные константы.

Уравнение (2.9) является **каноническим уравнением гиперболического параболоида.**

Гиперболический параболоид — это поверхность, которая получается при движении одной параболы вдоль другой (вершина параболы скользит по параболе, оси подвижной и неподвижной параболы параллельны, ветви направлены в разные стороны-рис.50).

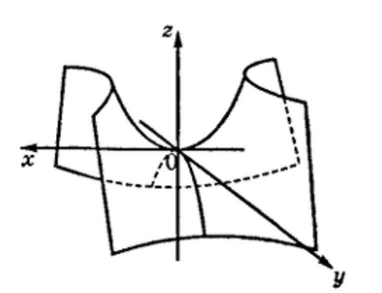


Рис.50

Замечания:

1)Уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -2z$ тоже определяет гиперболический параболоид, но «развернутый» вниз;

2) Уравнения $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 2y$, $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 2x$ определяют гиперболические параболоиды, у которых «неподвижные параболы» лежат в плоскости Oxy и имеют оси Oy и Ox соответственно.

Пример 2.3. Привести уравнение поверхности второго порядка к каноническому виду, определить тип поверхности: $x^2 - y^2 - 4x + 8y - 2z = 0$.

Решение.

Сгруппируем слагаемые, содержащие одинаковые переменные и выделим в данном уравнении полные квадраты:

$$(x^2-4x+4)-4-(y^2-8y+16)+16-2z=0,$$

$$(x-2)^2-(y-4)^2-2(z-6)=0.$$

Введем обозначения:

$x'=x-2$, $y'=y-4$, $z'=z-6$,эта замена равносильна переносу начала координат в точку $O_1(2;4;6)$.

Уравнение поверхности будет иметь вид:

$x'^2-y'^2=2z'$ —это уравнение гиперболического параболоида.

2.5. Цилиндры.

Цилиндрической поверхностью (цилиндром) называется поверхность, которую описывает прямая (называемая образующей), перемещающаяся параллельно самой себе вдоль некоторой кривой (называемой направляющей). Цилиндры называют по виду направляющей: круговые, эллиптические, параболические, гиперболические.

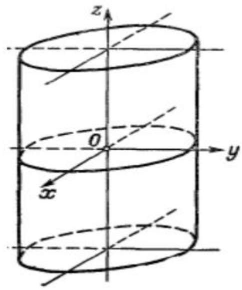


Рис.51

Если в основании цилиндра лежит эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, z=0$,то данная поверхность называется **эллиптическим цилиндром** (рис.51) и определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \mathbf{(2.10)},$$

Если в основании лежит гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, z=0$,то данная поверхность называется **гиперболический цилиндром** (рис.52 верхний) и определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \mathbf{(2.11)},$$

Если в основании лежит парабола $y^2=2px, z=0$ получим **параболический цилиндр** (рис.52 нижний), определяемый уравнением

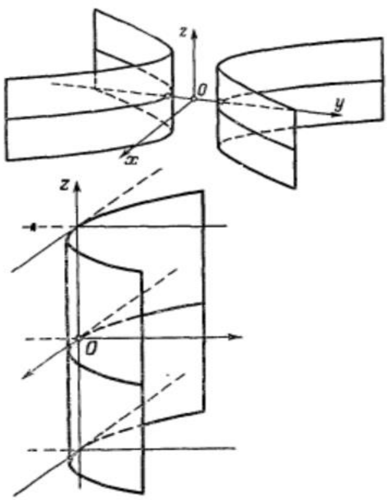


Рис.52

$$y^2 = 2px,\ p > 0 \ \mathbf{(2.12)}$$

Таким образом, цилиндр в некоторой декартовой системе координат задается уравнением, в которое не входит одна из координат. Кривая, которую определяет это уравнение в соответствующей координатной плоскости, является **направляющей цилиндра**, а **образующая**– параллельна оси отсутствующей координаты. Для данных поверхностей образующие представляют собой прямые, параллельные оси Oz.

Пример 2.4. Построить тело, ограниченное поверхностями: **а)** $x = 0, y = 0, z = 1, x + y + z = 2$; **б)** $y = x^2, z = 0, z = 2, y = 1$;**в)** $x + y + z = 3, x^2 + y^2 = 1, z = 0.$

Решение.

а) Рассмотрим уравнение $x + y + z = 2$ – уравнение плоскости, перейдя к уравнению плоскости «в отрезках», получим: $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1$, $a = b = c = 2$, следовательно данная плоскость пересекает координатные оси Ox, Oy, Oz в точках $(2; 0; 0)$, $(0; 2; 0)$, $(0; 0; 2)$ соответственно.

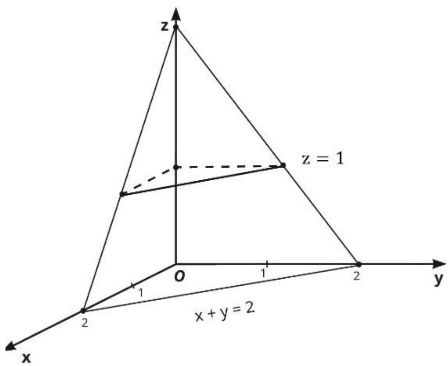


Рис. 53

Уравнение $x = 0$ определяет плоскость Oyz,

$y = 0$ –плоскость Oxz, $z = 1$ –плоскость параллельная плоскости Oxy отсекающая на оси Oz отрезок равный единицы. Сделаем эскиз тела (рис. 53).

б) Уравнение $z = x^2 + y^2$ определяет эллиптический параболоид (рис.54).

Уравнения $z = 0, x = 2, y = 2, x = 0, y = 0$ определяют плоскости:

$x = 0$ –плоскость Oyz;
$y = 0$ –плоскость Oxz;
$z = 0$ –плоскость Oxy;
$x = 2$ –плоскость параллельная плоскости Oyz, на две единицы масштаба смещенная по оси Ox;
$y = 2$ –плоскость параллельная плоскости Oxz на две единицы смещенная вправо по оси Oy. Данные плоскости образуют прямоугольный параллелепипед с бесконечными краями неограниченными сверху.

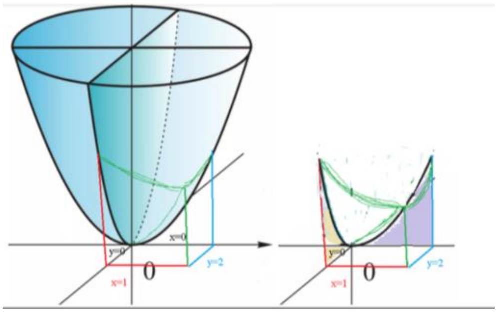
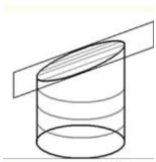


Рис.54

Совмещая два рисунка получим прямоугольный параллелепипед, "накрытый" параболоидом(рис.54).



в) Уравнение $x^2 + y^2 = 1$ определяет круговой цилиндр, осью которого служит ось Oz.

Уравнение $z = 0$ задает координатную плоскость Oxy.

Уравнение $x + y + z = 3$ или $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$-уравнение плоскости «в отрезках», $a = b = c = 3$.

Сделаем эскиз тела (рис. 55).

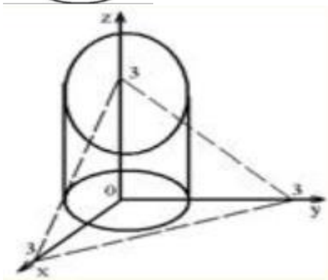


Рис.55

ПЕРЕЧЕНЬ ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ

1. Б. В. Соболь, Н. Т. Мишняков, В. М. Поркшеян. Практикум по высшей математике 3-е изд. Ростов н \ Д: Феникс,2010.
2. Д. Т. Письменный. Конспект лекций по высшей математике (полный курс).2-е изд. Москва: «Айрис-пресс», 2014.
3. П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, Высшая математика в упражнениях и задачах (1 том). — М.: Высш. шк., 2002.
4. Д.В. Клетеник, Сборник задач по аналитической геометрии: учеб. Пособие для втузов. СПб.: Изд-во «Профессия», 2002.