ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Высшая математика»

# Учебное пособие «Алгебра: специальные главы, часть 1»

по дисциплине

## «Алгебра»

Автор
Ермилова О.В.

Ростов-на-Дону, 2026

## Аннотация

Учебное пособие предназначено для студентов очной формы обучения всех технических направлений подготовки бакалавриата. В пособии представлены теоретические и практические задачи с подробным решением по дисциплине «Алгебра: специальные главы». Пособие дополнено заданиями для самостоятельного решения, для самоконтроля все примеры приведены с ответами. Цель пособия — помочь студентам в формировании их математического мышления, в выработке практических навыков для решения прикладных задач.

## Авторы

ст. преподаватель кафедры «Высшая математика» Ермилова О. В.

# Оглавление

# ГЛАВА 1. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Системы линейных уравнений широко используются в задачах экономики, физики, электротехники, программирования и других наук.

## 1.1. Системы линейных уравнений (СЛУ). Основные определения.

**Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)**, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь $a_{ij}$ - числа называемые **коэффициентами** системы $\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n};\right)$, числа $b_i$ -**свободные члены**, $x_j$ - **неизвестные** действительные числа, их необходимо найти.

Введем обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ -матрица из коэффициентов при неизвестных, называемая **основной матрицей системы**;

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – **вектор-столбец неизвестных;** $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ – **вектор-столбец свободных членов;** $(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ — **расширенная матрица системы.**

Используя понятие произведения матриц, систему (1.1) можно записать в компактной матричной форме

$$A\cdot X=B \quad (1.2)$$

Действительно, поскольку

$$A\cdot X=\begin{pmatrix} a_{11} \; a_{21} \dots a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \; \dots \; \dots \; \dots \\ a_{m1} \; a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\dots+a_{1n}\cdot x_n \\ a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+\dots+a_{2n}\cdot x_n \\ \dots \\ a_{m1}\cdot x_1+a_{m2}\cdot x_2+\dots+a_{mn}\cdot x_n \end{pmatrix}=B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

используя понятие равных матриц, получим систему (1.1).

Например, систему линейных уравнений общего вида $\begin{cases} -2x_1-x_2=1 \\ -2x_1+x_2=-7 \end{cases}$ легко записать в матричной форме. Система состоит из двух уравнений $(m=2)$ с двумя неизвестными $x_1, x_2$ $(n=2)$, где $A=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$-основная матрица системы, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$- столбец свободных членов, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ - столбец неизвестных. В матричной форме система уравнений имеет вид $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$.

**Решением системы** (1.1) называется $n$ значений неизвестных $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \ldots, x_n = c_n$, при подстановке которых в уравнения системы (1.1), получаются верные равенства.

Система уравнений **совместна**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместна**, если она не имеет решения.

**Решить систему** — это значит выяснить, совместна она или несовместна. Если система совместна, найти общее решение. Решение системы, полученное из общего при фиксированных значениях $c_1, c_2, \ldots, c_n$ называется **частным решением.**

Система уравнений называется **определённой**, если она имеет единственное решение, и **неопределённой**, если она имеет бесконечное множество решений.

Две системы уравнений называются **равносильными (эквивалентными)**, если множества их решений совпадают.

Эквивалентные системы получаются, в частности, при элементарных преобразованиях системы при условии, что преобразования выполняются лишь над строками матрицы.

Система уравнений называется **неоднородной**, если $B \neq 0$, и **однородной**, если $B = 0$.

### 1.2. Методы решения квадратных систем линейных алгебраических уравнений: метод Крамера, матричный метод.

Метод Крамера и матричный метод применяются для решения неоднородных систем n уравнений с n неизвестными, у которых определитель основной матрицы системы отличен от нуля:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \ldots + a_{nn} \cdot x_n = b_n \end{cases} \tag{1.3}$$

$$, \text{где } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \quad .$$

**Метод Крамера.**

Применяется только для решения систем с невырожденной основной матрицей $A$. Метод основан на следующей теореме.

**Теорема 1.1.** Если определитель основной матрицы системы отличен от нуля $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое формулами:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = 1, 2, \dots, n \; (1.4),$$

где $\Delta_i$ - определитель, полученный из определителя $\Delta$ заменой i-го столбца столбцом свободных членов $B$.

Доказательство.

Докажем теорему на примере систем третьего порядка. Пусть имеется система третьего порядка: $\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2, \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = b_3 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0, \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Умножим уравнения исходной системы на алгебраические дополнения элементов первого столбца и складывая полученные равенства имеем:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 = b_2 \\ a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_2 + a_{33}\cdot x_3 = b_3 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot A_{11} \\ \cdot A_{21} \\ \cdot A_{31} \end{vmatrix} +$$

$$(a_{11}\cdot A_{11} + a_{21}\cdot A_{21} + a_{31}\cdot A_{31})\cdot x_1 + (a_{12}\cdot A_{11} + a_{22}\cdot A_{21} + a_{32}\cdot A_{31})\cdot x_2 +$$
$$+ (a_{13}\cdot A_{11} + a_{23}\cdot A_{21} + a_{33}\cdot A_{31})\cdot x_3 = b_1\cdot A_{11} + b_2\cdot A_{21} + b_3\cdot A_{31}$$

По свойству 8 определителей имеем: $a_{12}\cdot A_{11} + a_{22}\cdot A_{21} + a_{32}\cdot A_{31} = 0,\ a_{13}\cdot A_{11} + a_{23}\cdot A_{21} + a_{33}\cdot A_{31} = 0$,

$a_{11}\cdot A_{11} + a_{21}\cdot A_{21} + a_{31}\cdot A_{31} = \Delta$.

В итоге получим, $\Delta\cdot x_1 = b_1\cdot A_{11} + b_2\cdot A_{21} + b_3\cdot A_{31}$, выражение в правой части равенства отличается от $\Delta$ тем, что на местах элементов первого столбца стоят элементы столбца свободных членов, то есть $b_1\cdot A_{11} + b_2\cdot A_{21} + b_3\cdot A_{31} = \Delta_1$.Итак, $\Delta\cdot x_1 = \Delta_1,\ x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$.

Формулы $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$ выводятся аналогично. Доказано.

**Алгоритм (метода Крамера)**:

1)Находим определитель основной матрицы системы $A$, то есть $\Delta = \det A = |A|$,если $\Delta = 0$,то система не имеет решения (несовместна) или не может быть решена методом Крамера, поскольку совместна и неопределенна;

2) Затем (в случае $\Delta \neq 0$) последовательно вычисляем n вспомогательных определителей $\Delta_i$, подставляем найденные значения в формулы Крамера $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$ получим единственное решение системы.

**Пример 1.1.** Решить методом Крамера систему уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 = -1 \\ 2x_1 + x_2 = 7 \end{cases}.$

Решение.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$-основная матрица системы, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$- столбец свободных членов, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ - столбец неизвестных.

Вычисляем определитель основной матрицы $\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 \cdot (-1) = 3 \neq 0$, следовательно, матрица системы невырожденная, СУ имеет единственное решение.

Вычисляем вспомогательные определители $\Delta_i \,(i = 1,2)$:

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 7 \cdot (-1) = 6$;

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 2 \cdot (-1) = 9$.

По формулам Крамера (1.4) находим неизвестные $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{6}{3} = 2,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{9}{3} = 3$.

То есть, $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$,полученное решение можно записать в матричной форме $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

<u>Проверка</u>: подставим $x_1 = 2, x_2 = 3$ в исходную систему уравнений $\begin{cases} 2 - 3 = -1 \\ 2 \cdot 2 + 3 = 7 \end{cases}$, верно.

**Пример 1.2.** Решить методом Крамера систему уравнений:

**а)** $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6 \\ 2x_1-x_2+x_3=3 \\ 3x_1+2x_2-x_3=4 \end{cases}$ **;б)** $\begin{cases} -6x_1-6x_2+x_3=0 \\ -9x_1-12x_2+5x_3=-\ 12. \\ -15x_1-8x_2+2x_3=-18 \end{cases}$

Решение.

**а)** Вычислим определитель основной матрицы системы, раскладывая его по элементам первой строки:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-1+5+7=11\neq 0,$$

следовательно, система имеет единственное решение.

Находим вспомогательные определители $\Delta_i\left(i=1,2,3\right)$ ,раскладывая определители $\Delta_1$ и $\Delta_2$по элементам третьего столбца, $\Delta_3$- по первой строке:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=$$
$$=6+4-(12-4)-(-6-3)=10-8+9=11;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-1+14+9=22;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}+6\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-10+1+42=33.$$

Итак, $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{11}{11}=1,x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{22}{11}=2,x_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}=\dfrac{33}{11}=3$ или в матричной форме $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .Проверку сделайте самостоятельно.

**б)** $\Delta = |A| = \begin{vmatrix} -6 & -6 & 1 \\ -9 & -12 & 5 \\ -15 & -8 & 2 \end{vmatrix} \overset{l_1 - l_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 3 & -12 & 5 \\ -7 & -8 & 2 \end{vmatrix} =$

$= -2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 5 \\ -7 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -2\left(-3\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -7 & 4 \end{vmatrix}\right) =$

$= -2(-3(6+35)+12+42) = -2(-123+54) =$

$= -2(-69) = 138 \neq 0$, СУ имеет единственное решение.

Найдем вспомогательные определители $\Delta_i\,(i = 1,2,3)$:

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -6 & 1 \\ -12 & -12 & 5 \\ -18 & -8 & 2 \end{vmatrix} = (-6)\cdot(-2)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 12\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} =$

$= 12\cdot\left(-3\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\right) = 12(-3(4-15)+8-18)$

$= 12(33-10) = 12\cdot 23 = 276;$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & 0 & 1 \\ -9 & -12 & 5 \\ -15 & -18 & 2 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-6)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 18\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$

$= 18\left(2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}\right) = 18(2(4-15)+9-10) = 18(-23) = -414;$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -6 & -6 & 0 \\ -9 & -12 & -12 \\ -15 & -8 & -18 \end{vmatrix} \overset{l_1 - l_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & -6 & 0 \\ 3 & -12 & -12 \\ -7 & -8 & -18 \end{vmatrix} =$

$=(-2)\cdot(-6)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \\ -7 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 12\cdot(-3)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} =$

$= -36(9+14) = -36\cdot 23 = -828.$

Таким образом,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{276}{138} = 2;\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-414}{138} = -3;\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-828}{138} = -6.$$

Проверку сделайте самостоятельно.

### Матричный метод.

Применяется при тех же условиях, что и метод Крамера, то есть только для решения систем с невырожденной матрицей $A$. Метод основан на теореме 1.2.

**Теорема 1.2.** Если определитель основной матрицы системы (1.3) отличен от нуля $|A| \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое равенством

$$X = A^{-1} \cdot B \quad (1.5)$$

Доказательство.

Так как $|A| \neq 0$ ,то матрица $A$ имеет обратную $A^{-1}$.

Умножим обе части матричной формы записи системы $A \cdot X = B$ на матрицу $A^{-1}$ слева, учитывая определение обратной матрицы $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ и то ,что умножение матрицы на единичную матрицу не меняет матрицу $E \cdot X = X$ имеем: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$, $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$ $\Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$.

Доказано.

**Пример 1.3.** Решить матричным методом систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -4 \\ 2x_1 + x_2 = -5. \end{cases}$$

Решение.

Вычисляем определитель основной матрицы системы: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 \cdot (-1) = 3 \neq 0$, следовательно, система имеет единственное решение.

Найдем обратную матрицу $A^{-1}$ по формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot A^* = \dfrac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 1 = 1; \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-1) = 1;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+1} \cdot 2 = -2; \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1.$$

Таким образом, $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \dfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

Найдем столбец неизвестных $X = A^{-1} \cdot B$:

$$X=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\ -5\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-9\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ 1\end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\begin{cases}x_1=-3\\ x_2=1\end{cases}$.

**Пример 1.4.** Решить матричным методом систему уравнений $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=6\\ 4x_1+5x_2+6x_3=9\\ 7x_1+8x_2=-6\end{cases}$.

Решение.

Находим $|A|$:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 0\end{vmatrix}=7\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{vmatrix}-8\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}=-21+48=27\neq 0.$$

Находим $A^{-1}$: $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot A^{*}$, $\quad A^{*}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$,

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij},$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}5 & 6\\ 8 & 0\end{vmatrix}=-48;\qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 8 & 0\end{vmatrix}=24;\qquad A_{31}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-3;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}4 & 6\\ 7 & 0\end{vmatrix}=42;\qquad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 7 & 0\end{vmatrix}=-21;\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}=6;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}4 & 5\\ 7 & 8\end{vmatrix}=-3;\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 7 & 8\end{vmatrix}=6;\qquad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-3.$$

Итак, $A^{-1}=\dfrac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix}-48 & 24 & -3\\ 42 & -21 & 6\\ -3 & 6 & -3\end{pmatrix}$.

Найдем решения системы $X$ :

$$X = A^{-1}\cdot B = \frac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -48\cdot 6 + 24\cdot 9 + (-3)\cdot(-6) \\ 42\cdot 6 + (-21)\cdot 9 + 6\cdot(-6) \\ (-3)\cdot 6 + 6\cdot 9 + (-3)\cdot(-6) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix} -54 \\ 27 \\ 54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$. Таким образом, $x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 2.$

**Пример 1.5.** Решить по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы (матричным методом) систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 15 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 24 \end{cases}.$$

Решение.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 9 = 0,$$

$A^{-1}$-не существует (матрица $A$ вырождена).

**Замечание:** если главный определитель системы $\Delta$ и все вспомогательные определители $\Delta_{\mathrm{i}}$ $(\mathrm{i} = 1,2,\dots,n)$ равны нулю, то система совместна и неопределенна (имеет бесчисленное множество решений), которые находятся методом Гаусса или Жордана-Гаусса. Если главный определитель системы $\Delta = 0$, а хотя бы один вспомогательный определитель отличен от нуля, то система несовместна (не имеет решения).

Проверим имеет ли система из примера 1.5 решение. Для найдем вспомогательные определители $\Delta_{\mathrm{i}}$ $(\mathrm{i} = 1,2,3)$:

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 15 & 5 & 6 \\ 24 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0,$ первый и второй столбцы определителя пропорциональны;

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 15 & 6 \\ 7 & 24 & 9 \end{vmatrix} = 3\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} l_1 - l_3 \\ l_2 - 2l_3 \\ \phantom{0} \end{matrix} = 6\cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 12\cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 12\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 15 \\ 7 & 8 & 24 \end{vmatrix} = 0,$ так как второй и третий столбцы пропорциональны.

Итак, все вспомогательные определители $\Delta_i$ равны нулю, следовательно система совместна и неопределенна (имеет бесчисленное множество решений)- не может быть решена ни с помощью обратной матрицы, ни по формулам Крамера, ее решение можно найти методом Гаусса либо Жордана-Гаусса (модифицированным методом Гаусса), которые мы рассмотрим чуть позже и вернемся к данному примеру.

## 1.3. Методы решения произвольных систем линейных алгебраических уравнений: метод Гаусса, метод Жордана-Гаусса.

**Метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных).**

Одним из наиболее универсальных методов решения и исследования систем линейных уравнений является метод Гаусса-метод последовательного исключения неизвестных, так как применяется для решения неоднородных и однородных систем с произвольным числом уравнений $m$ и произвольным числом неизвестных $n$. Изложенные выше методы (метод Крамера, матричный метод) решения систем применимы только при $\Delta \neq 0$ и исключительно для квадратных матриц $m = n$, причем если $n > 3$ данные методы становятся очень громоздкими.

Сущность метода Гаусса состоит в том, что посредством последовательного исключения неизвестных данная система приводится к ступенчатой системе, равносильной данной. При практическом решении системы линейных уравнений данным методом удобнее приводить к ступенчатому виду не саму систему уравнений, а расширенную матрицу этой системы, выполняя элементарные преобразования над ее строками, элементарные преобразования не изменяют множество решений системы линейных алгебраических уравнений, которую представляет эта матрица. Последовательно получающиеся в ходе преобразования матрицы обычно соединяют знаком эквивалентности ~, далее по полученной ступенчатой матрице идет последовательное определение неизвестных.

Таким образом, процесс решения по методу Гаусса состоит из двух частей.

### Первый этап (прямой ход метода Гаусса):

На первом этапе с помощью элементарных преобразований привести расширенную матрицу системы

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + \ldots + a_{nn}\cdot x_n = b_n \end{cases}$$

, то есть матрицу

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

к ступенчатой форме:

$$(\tilde{A}|\tilde{B}) = \left(\begin{array}{cccc|c} \underline{\widetilde{a_{11}}} & \widetilde{a_{12}} & \ldots & \widetilde{a_{1n}} & \widetilde{b_1} \\ 0 & \underline{\widetilde{a_{22}}} & \ldots & \widetilde{a_{2n}} & \widetilde{b_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \underline{\widetilde{a_{mn}}} & \widetilde{b_m} \end{array}\right).$$

.

Неизвестные, соответствующие ведущим элементам $\widetilde{a_{11}}, \widetilde{a_{22}}, \ldots, \widetilde{a_{mn}}$ называются **главными (базисными)**, остальные неизвестные (не базисные) называются **свободными**.

Затем находим ранги - основной $A$ и расширенной $(A|B)$ матриц системы и применяем теорему Кронекера-Капелли, которая дает ответ на вопрос о совместности системы.

**Теорема 1.3. (Кронекера-Капелли)** Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы, то есть $r(A) = r(A|B)$. При этом возможны три варианта:

**1)** если $r(A) = r(A|B) = n$, система совместна и определена (система имеет единственное решение), $n$ - количество переменных системы;

**2)** если $r(A) = r(A|B) < n$, система совместна и не определена (имеет бесконечное множество решений);

**Замечание:** В случае, когда $r(A) \neq r(A|B)$, система несовместна (не имеет решения).

**Второй этап (обратный ход метода Гаусса):**

На данном этапе идет последовательное определение неизвестных: записываем систему, соответствующую полученной ступенчатой матрице и последовательно выражая главные неизвестные через свободные, получим общее решение системы.

Придавая свободным неизвестным произвольные вещественные значения, получим какое-нибудь частное решение исходной системы.

Вернемся, к примеру 1.5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 15 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 24 \end{cases}$, система совместна и неопределенна, не может быть решена ни методом Крамера**,** ни с помощью обратной матрицы. Решим ее универсальным методом- методом Гаусса.

Применяем прямой ход метода Гаусса:

Выписываем расширенную матрицу $(A|B)$ данной системы, и приводим ее к ступенчатой форме при помощи элементарных преобразований (над строками):

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 6\\ \underline{4} & 5 & 6 & 15\\ 7 & 8 & 9 & 24\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ c_2-4c_1\\ c_3-7c_1\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 6\\ 0 & -3 & -6 & -9\\ 0 & -6 & -12 & -18\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ :(-3)\sim\\ :(-6)\end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 6\\ 0 & \underline{1} & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 3\end{array}\right)\begin{array}{c}\sim\\ \\ c_3-c_2\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 6\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}\underline{1} & 2 & 3 & 6\\ 0 & \underline{1} & 2 & 3\end{array}\right),$$

$r(A)=r(A|B)=2<n=3$. По теореме Кронекера-Капелли система совместна и неопределенна, то есть имеет бесконечное множество решений.

Для нахождения этих решений применяем <u>обратный ход</u> метода Гаусса: записываем систему соответствующую приведенной матрице $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=6\\ x_2+2x_3=3\end{cases}$ и выражаем $x_1, x_2$ главные неизвестные (неизвестные соответствующие ведущим элементам) через свободные (оставшиеся) неизвестные $x_3$, таким образом, получим: $\begin{cases}x_1=6-2x_2-3x_3\\ x_2=3-2x_3\end{cases}$;

$\begin{cases}x_1=6-2\cdot(3-2x_3)-3x_3\\ x_2=3-2x_3\end{cases}$; $\begin{cases}x_1=x_3\\ x_2=3-2x_3\end{cases}$, обозначая независимую неизвестную через любое число $x_3=c=const$, получим $\begin{cases}x_1=c\\ x_2=3-2c\\ x_3=c\end{cases}$ - общее решение системы, запишем его в матричной форме

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\ 3-2c\\ c\end{pmatrix}.$$

Придавая свободному неизвестному $x_3$ любое числовое значение (удобнее нулевое), получим какое-нибудь частное решение, например $x_3 = 0$, тогда частное решение имеет вид $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 0 \end{cases}$,таких решений может быть бесконечно много.

Проверим правильно ли найдено общее решение, для этого подставим полученное частное решение в исходную систему $\begin{cases} 0+2\cdot 3+3\cdot 0=6 \\ 4\cdot 0+5\cdot 3+6\cdot 0=15 \\ 7\cdot 0+8\cdot 3+9\cdot 0=24 \end{cases}$,получили верное тождество (равенство), следовательно, общее решение найдено правильно.

**Пример 1.6.** Исследовать систему на совместность и найти ее решение, если она совместна:

**а)** $\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ x+y-z=0 \\ 4x-y+5z=3 \end{cases}$ **;б)** $\begin{cases} 6x_1+6x_2-x_3=0 \\ 9x_1+12x_2-5x_3=12 \\ 15x_1+8x_2-2x_3=18 \end{cases}$;

**в)** $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3 \\ 6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7 \\ 9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13 \end{cases}$ **;г)** $\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3=0 \\ -x_2+x_3=1 \\ 3x_1+2x_3=1 \\ 3x_1+2x_2=4 \end{cases}$.

Решение.

**а)** <u>Прямой ход</u> -выписываем расширенную матрицу системы и приводим ее при помощи элементарных преобразований к ступенчатой форме:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&1&5\\1&1&-1&0\\4&-1&5&3\end{array}\right)\overset{c_1\leftrightarrow c_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}\underline{1}&1&-1&0\\3&2&1&5\\4&-1&5&3\end{array}\right)\begin{array}{l}\\c_2-3c_1\\c_3-4c_1\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\\0&\underline{-1}&4&5\\0&-5&9&3\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \sim\\c_3-5c_2\end{array}\sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\\0&-1&4&5\\0&0&\underline{-11}&-22\end{array}\right)\begin{array}{l}\\(-1)\cdot c_2\\ \dfrac{c_3}{(-11)}\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}\underline{1}&1&-1&0\\0&\underline{1}&-4&-5\\0&0&\underline{1}&2\end{array}\right),\ r(A)=r(A|B)=3=n,$$

следовательно, система имеет единственное решение.

<u>Обратный ход</u>-выписываем систему, соответствующую ступенчатой матрице, и последовательно находим неизвестные:

$$\begin{cases}x+y-z=0\\y-4z=-5\\z=2\end{cases},\ \begin{cases}x+y-z=0\\y-4\cdot 2=-5,\\z=2\end{cases}\begin{cases}x+y-z=0\\y=3\\z=2\end{cases},\ \begin{cases}x=z-y\\y=3\\z=2\end{cases};\ \begin{cases}x=2-3\\y=3\\z=2\end{cases}.$$

Таким образом, общее решение (единственное решение) имеет вид $\begin{cases}x=-1\\y=3\\z=2\end{cases}$ или в матричной форме $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$.

<u>Проверка:</u> подставив полученное решение в исходное уравнение имеем $\begin{cases}3\cdot(-1)+2\cdot 3+2=5\\-1+3-2=0\\4\cdot(-1)-3+5\cdot 2=3\end{cases}$,получили верное равенство, следовательно, общее решение найдено правильно.

**б)** <u>Прямой ход:</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c}6&6&-1&0\\9&12&-5&12\\15&8&-2&18\end{array}\right)\begin{array}{l}\sim\\c_2-2c_1\\c_3-c_2\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}\underline{6}&6&-1&0\\-3&0&-3&12\\6&-4&3&6\end{array}\right)\begin{array}{l}\sim\\2c_2+c_1\\c_3-c_1\end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}6&6&-1&0\\0&6&-7&24\\0&-10&4&6\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \sim\\ \dfrac{c_3}{2}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}6&6&-1&0\\0&6&-7&24\\0&-5&2&3\end{array}\right)\begin{array}{l}\sim\\c_2+c_3\\ \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & \underline{1} & -5 & 27 \\ 0 & -5 & 2 & 3 \end{array}\right) \underset{c_3+5c_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 27 \\ 0 & 0 & -23 & 138 \end{array}\right),$$

$r(A) = r(A|B) = 3 = n$, следовательно, система имеет единственное решение.

Обратный ход:

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 - x_3 = 0 \ (1) \\ -x_2 - 5x_3 = 27 \quad (2) \\ -23x_3 = 138 \quad (3) \end{cases};$$

Из третьего уравнения получаем:

$x_3 = -\dfrac{138}{23} = -6.$

Подставляя $x_3 = -6$ во второе уравнение СУ $-x_2 - 5x_3 = 27$ имеем:

$-x_2 - 5 \cdot (-6) = 27,$

$x_2 = 3.$

Подставляя $x_2 = 3$, $x_3 = -6$ в первое уравнение СУ

$6x_1 + 6x_2 - x_3 = 0$ имеем: $6x_1 + 6 \cdot 3 - (-6) = 0,$

$$6x_1 = -24,$$

$$x_1 = -4.$$

Таким образом, $X = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Проверку сделайте самостоятельно.

**в)** Прямой ход:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \underline{3} & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 13 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ c_2 - 2c_1 \\ c_3 - 3c_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \underset{c_3 - 4c_2}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{l_1 \leftrightarrow l_3}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} \underline{1} & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 1 \end{array}\right) \end{array},$$

$r(A) = r(A|B) = 2 < n = 4$-система совместна и неопределенна (имеет бесконечное множество решений).

Обратный ход:

$\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3 \\ x_4=1 \end{cases}$, главные неизвестные $x_3, x_4$

выражаем через свободные $x_2$, $x_1$ (оставшиеся),

$\begin{cases} x_3=3-3x_1-4x_2-2x_4 \\ x_4=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x_3=3-3x_1-4x_2-2\cdot 1 \\ x_4=1 \end{cases}$,

$\begin{cases} x_3=1-3x_1-4x_2 \\ x_4=1 \end{cases}$, пусть

$x_2=c_2, x_1=c_1$, тогда общее решение имеет вид

$\begin{cases} x_1=c_1 \\ x_2=c_2 \\ x_3=1-3c_1-4c_2 \\ x_4=1 \end{cases}$ или в матричной форме

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 1-3c_1-4c_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдём какое-нибудь частное решение (придавая свободным неизвестным любое числовое значение, можно получить бесконечно много частных решений), для упрощения решения, положим $x_2=0, x_1=0$, получим $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \\ x_3=1 \\ x_4=1 \end{cases}$ - частное решение.

Проверка: для того, чтобы проверить правильность решения, подставим полученное частное решение в исходную систему имеем $\begin{cases} 3\cdot 0+4\cdot 0+1+2\cdot 1=3 \\ 6\cdot 0+8\cdot 0+2\cdot 1+5\cdot 1=7 \\ 9\cdot 0+12\cdot 0+3\cdot 1+10\cdot 1=13 \end{cases}$, получили верное равенство, следовательно общее решение найдено правильно.

**г)** Прямой ход:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \underline{3} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right) \underset{\begin{array}{l} c_3 - c_1 \\ c_4 - c_1 \end{array}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \underline{-1} & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \underset{\begin{array}{l} c_3 - c_2 \\ c_4 + c_2 \end{array}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \underline{3} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \underline{-1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{5} \end{array}\right), \qquad r(A) = 2,\ r(A|B) = 3,\ r(A) \neq r(A|B),$$

следовательно система несовместна (не имеет решения), поэтому обратный ход применять нет необходимости.

Действительно из последней строчки приведенной матрицы системы видно, что

$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 5, \quad 0 = 5$, противоречие!

### Метод Жордана-Гаусса.

Метод Жордана -Гаусса называют методом полного исключения неизвестных. Метод является модификацией метода Гаусса. Если метод Гаусса осуществляется в два этапа (прямой ход и обратный) то метод Жордана -Гаусса позволяет решить систему в один этап, который заключается в том, что при помощи элементарных преобразований каждая главная (базисная) неизвестная исключается из всех уравнений, кроме одного, то есть не только из всех последующих уравнений, но и из всех предыдущих (расширенная матрица системы приводится к каноническому виду-к ступенчатой приведенной форме), что позволяет нам найти общее решение системы гораздо быстрее (свободные неизвестные будут автоматически исключены из главных неизвестных) .

### Алгоритм: (метода Жордана-Гаусса)

**1)**При помощи элементарных преобразований расширенную матрицу системы $(A|B)$ приводим к каноническому виду, далее исследуем систему на совместность находим ранги - основной $A$ и расширенной $(A|B)$ матриц системы и применяем теорему Кронекера-Капелли:

**а)** если $r(A)=r(A|B)=n$, система совместна и определена (система имеет единственное решение), $n$ - количество переменных системы;

**б)** если $r(A)=r(A|B)<n$, система совместна и неопределена (имеет бесконечное множество решений);

**в)** $r(A)\neq r(A|B)$, система несовместна (не имеет решения).

**2)**Выписываем систему, соответствующую канонической матрице системы и выражая главные неизвестные через свободные получим общее решение исходной системы.

В частности, в случае единственности решения $r(A)=r(A|B)=n$, матрица системы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\text{n}} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\text{n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\text{m}1} & a_{\text{m}2} & \dots & a_{\text{mn}} \end{pmatrix}$$

приводится к единичному виду $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, при этом расширенная матрица $(A|B)$ системы принимает вид $(E|B')=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1{}' \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2{}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_m{}' \end{array}\right)$. В итоге на месте столбца свободных членов $B$ получим столбец решений исходной системы $X = B' = \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ \dots' \\ b_m' \end{pmatrix}$, то есть

$x_1 = b_1', x_2 = b_2', \dots, x_m = b_m'$ (см. пример 1.7.а)).

**Пример 1.7.** Решить систему методом Жордана –Гаусса:

**а)** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 = 8; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = -9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 8 \\ -3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 12 \end{cases}$;

**в)** $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7. \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 1 \end{cases}$

Решение.

**а)** Выпишем расширенную матрицу системы $(A|B)$ и при помощи элементарных преобразований приведём её к каноническому виду:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 6 \\ -2 & -1 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \underset{\substack{c_2 + 2c_1 \\ c_3 - 3c_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & 6 & 20 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \end{array}\right) \underset{\substack{c_1 - c_2 \\ c_3 + c_2}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -14 \\ 0 & 1 & 6 & 20 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right) \underset{\frac{c_3}{2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -14 \\ 0 & 1 & 6 & 20 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \end{array}\right) \underset{\substack{c_1 + 5c_3 \\ c_2 - 6c_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) = (E|X),$$

$r(A) = r(A|B) = 3 = n$, система имеет единственное решение, следовательно $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ -общее решение.

Проверку сделайте самостоятельно.

**б)** Поступая, аналогично имеем:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -3 & -3 & -1 & -9\\ 1 & 2 & 2 & 3 & 1\\ -7 & 1 & 1 & -2 & 8\\ -3 & 9 & 9 & 10 & 12\end{array}\right) \underset{\sim}{c_1 \leftrightarrow c_2} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 2 & 3 & 1\\ 6 & -3 & -3 & -1 & -9\\ -7 & 1 & 1 & -2 & 8\\ -3 & 9 & 9 & 10 & 12\end{array}\right) \begin{array}{c}\sim\\ c_2-6c_1\\ c_3+7c_1\\ c_4+3c_1\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1\\ 0 & \underline{-15} & -15 & -19 & -15\\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15\\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15\end{array}\right) \begin{array}{c}\sim\\ c_3+c_2\\ c_4+c_2\end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1\\ 0 & \underline{-15} & -15 & -19 & -15\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \begin{array}{c}\frac{c_2}{(-15)}\\ \sim\end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1\\ 0 & \boxed{1} & 1 & 19/15 & 1\end{array}\right) \underset{\sim}{c_1-2c_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 7/15 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 19/15 & 1\end{array}\right),$$

матрица имеет канонический вид, так как в первой и во второй строке выбран ведущий элемент (единица) и содержимое их столбцов обнулено. Итак, $r(A)=r(A|B)=2<n=4$, система совместна и неопределенна.

Выписываем систему, соответствующую приведенной ступенчатой матрице и находим общее решение учитывая, что $x_1, x_2$ -главные неизвестные, $x_3, x_4$ -свободные неизвестные:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{15}x_4 - 1\\ x_2 = 1 - x_3 - \frac{19}{15}x_4\end{cases}$$

,пусть $x_3 = c_1, x_4 = c_2$, тогда

$$\begin{cases} x_1 = -1 - \frac{7}{15}c_2\\ x_2 = 1 - c_1 - \frac{19}{15}c_2 -\\ x_3 = c_1\\ x_4 = c_2\end{cases}$$

общее решение или в матричной форме $X = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - \frac{7}{15}c_2\\ 1 - c_1 - \frac{19}{15}c_2\\ c_1\\ c_2\end{pmatrix}$.

Положим $x_{3,4} = 0$,тогда $x_1 = -1, x_2 = 1$.

Следовательно, $X=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ - одно из частных решений исходной системы, проверку сделайте самостоятельно.

**в)** $\left(\begin{array}{cccc|c}4&-3&2&-1&8\\3&-2&1&-3&7\\5&-3&1&-8&1\end{array}\right)\overset{c_1-c_2}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c}\underline{-1}&0&1&7&7\\3&-2&1&-3&7\\5&-3&1&-8&1\end{array}\right)\begin{array}{c}\sim\\c_2+3c_1\\c_3+5c_1\end{array}$

$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}-1&0&1&7&7\\0&-2&4&18&28\\0&-3&6&27&36\end{array}\right)\begin{array}{c}(-1)c_1\\(-1/2)c_2\\(-1/3)c_3\end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}-1&0&1&7&7\\0&\underline{1}&-2&-9&-14\\0&1&-2&-9&-12\end{array}\right)\begin{array}{c}\sim\\c_3-c_2\end{array}$

$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}-1&0&1&7&7\\0&1&-2&-9&-14\\0&0&0&0&2\end{array}\right)$, $r(A)=2\neq r(A|B)=3$, система несовместна.

**Пример 1.8.** Решить систему $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+2x_4=1\\2x_1+4x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+5x_3+2x_4=1\end{cases}$ методом Гаусса и методом Жордана-Гаусса.

Решение.

<u>1способ (Метод Гаусса):</u>

<u>Прямой ход</u>-приводим расширенную матрицу к ступенчатой форме:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}\underline{1}&2&-1&2&1\\2&4&1&0&0\\1&2&5&2&1\end{array}\right)\begin{array}{c}\sim\\c_2-2c_1\\c_3-c_1\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&2&1\\0&0&3&-4&-2\\0&0&6&0&0\end{array}\right)\underset{c_3\cdot\frac{1}{6}}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&2&1\\0&0&3&-4&-2\\0&0&1&0&0\end{array}\right)\overset{\sim}{c_3\leftrightarrow c_2}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&2&1\\0&0&\underline{1}&0&0\\0&0&3&-4&-2\end{array}\right)\underset{c_3-3c_2}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&2&1\\0&0&\underline{1}&0&0\\0&0&0&-4&-2\end{array}\right)\underset{c_3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} \underline{1} & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & \frac{1}{2} \end{array}\right), r(A)=r(A|B)=3<n=4,$$ система совместна и неопределенна.

Обратный ход- выписываем систему соответствующую приведенной матрице $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+2x_4=1 \\ x_3=0 \\ x_4=\frac{1}{2} \end{cases}$ и выражаем главные неизвестные $x_1, x_3, x_4$ через свободный $x_2$:

$\begin{cases} x_1+2x_2-0+2\cdot\frac{1}{2}=1 \\ x_3=0 \\ x_4=\frac{1}{2} \end{cases}$, $\begin{cases} x_1=-2x_2 \\ x_3=0 \\ x_4=0{,}5 \end{cases}$ ,пусть $x_2=c$ ,тогда $\begin{cases} x_1=-2c \\ x_2=c \\ x_3=0 \\ x_4=0{,}5 \end{cases}$ - общее решение или в матричной форме $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2c \\ c \\ 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$.

Положим $x_2=0$ ,тогда $x_1=0, x_3=0, x_4=0{,}5$.

Следовательно, $X=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ - частное решение исходной системы.

Проверка:

Для проверки подставим полученный вектор частного решения в заданную систему: $\begin{cases} 0+2\cdot 0-0+2\cdot(-0{,}5)=1 \\ 2\cdot 0+4\cdot 0+0=0 \\ 0+2\cdot 0+5\cdot 0+2\cdot 0{,}5=1 \end{cases}$ ,верно.

<u>2 способ (Метод Жордана-Гаусса):</u>

Приводим расширенную матрицу системы (при помощи элементарных преобразований) к каноническому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{c_2-2c_1 \\ c_3-c_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{c_3:6}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{c_3 \leftrightarrow c_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -2 \end{array}\right) \underset{c_3-3c_2}{\overset{c_1+c_2}{\sim}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -2 \end{array}\right) \underset{c_3:(-4)}{\overset{c_1+c_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1/2 \end{array}\right) \overset{c_1-2c_3}{\sim}$$

$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right)$, $r(A)=r(A|B)=3<n=4$, система совместна и неопределенна.

Записываем систему, соответствующую приведенной матрице и получаем выражение главных переменных $x_1, x_3, x_4$ через свободный

$x_2$: $\begin{cases} x_1+2x_2=0 \\ x_3=0 \\ x_4=0{,}5 \end{cases}$, $\begin{cases} x_1=-2x_2 \\ x_3=0 \\ x_4=0{,}5 \end{cases}$ ,пусть $x_2=c$, $\begin{cases} x_1=-2c \\ x_2=c \\ x_3=0 \\ x_4=0{,}5 \end{cases}$ ,тогда

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2c \\ c \\ 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ - общее решение в матричной форме.

## 1.4. Однородные системы уравнений. Фундаментальная система решений.

## Однородные системы уравнений основные определения.

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) называется **однородной**, если все свободные члены этой системы равны нулю. Таким образом, однородная система $m$ уравнений с $n$ неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = 0 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = 0 \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n = 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Используя понятие произведения матриц, систему (1.6) можно записать в компактной матричной форме

$$A\cdot X = 0 \quad (1.7)$$

Однородная система линейных уравнений всегда совместна, так как имеет решение, состоящее из нулей $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, которое называется **тривиальным.** Действительно, добавление столбца из нулей в расширенную матрицу системы не может повысить ее ранг, то есть $r(A) = r(A|B)$.

Поэтому в дальнейшем в ОСУ положим $r(A) = r(A|B) = r$.

Например, система уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$ является однородной, так как все свободные члены этой системы (то есть числа, стоящие в правых частях равенств) состоят из нулей. Система является совместной, так как, например набор $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -1$ является решением системы.

Действительно, подставив $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -1$ в исходную систему убеждаемся в этом: $\begin{cases} -1 - 2\cdot 1 - 3\cdot(-1) = 0 \\ -2\cdot(-1) + 4\cdot 1 + 6\cdot(-1) = 0 \end{cases}$, но система имеет также нулевое решение $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$, $\begin{cases} 0 - 2\cdot 0 - 3\cdot 0 = 0 \\ -2\cdot 0 + 4\cdot 0 + 6\cdot 0 = 0 \end{cases}$,следовательно эта система является совместной и неопределенной (имеет бесконечное множество решений).

Таким образом, существует только два варианта решения однородных систем:1) она может быть совместной и определенной-иметь единственное (нулевое) решение; 2) может быть совместной и неопределенной система – иметь бесконечно много решений. Условия, при которых однородная система является определенной или неопределенной, дает следующая теорема.

**Теорема 1.4.** Для того, чтобы ОС $n$ линейных уравнений с $n$ неизвестными имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы $A$ был меньше числа неизвестных, то есть $r < n$.

Доказательство.

Так как ранг не может превосходить размера матрицы, то, очевидно, $r \le n$.

Пусть $r = n$,тогда один из миноров размера $n \times n$ отличен от нуля, то есть $\Delta = |A| \ne 0$.Поэтому по формулам Крамера система имеет единственное нулевое решение (при подстановке в $\Delta$ нулевого столбца свободных членов, вспомогательные определители $\Delta_i = 0$) ,то есть $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = 0, i = 1,2,\ldots,\text{n}, , \Delta = |A| \ne 0$. Следовательно, других, кроме тривиальных (нулевых), решений нет.

Пусть $r < n$, то однородная система является совместной и неопределенной (по теореме Кронекера-Капелли $r(A) = r(A|B) = r < n$), следовательно она имеет бесчисленное множество решений, в том числе и нетривиальных.

**Следствие.** Система $n$ линейных однородных уравнений с $n$ неизвестными, тогда и только тогда имеет ненулевое решения, когда определитель этой системы равен нулю $|A| = 0$.

Доказательство.

Если система имеет ненулевые решения, то $|A| = 0$ ,так как при $|A| \ne 0$ система имеет только единственное, нулевое решение. Если же $|A| = 0$ ,то $r < n$ и следовательно система имеет бесконечное множество решений.

**Теорема 1.5.** Если $X_1, X_2,..., X_k$ — решения однородной системы $n$ линейных уравнений с $n$ неизвестными, то всякая линейная комбинация

$$X = c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2 + ... + c_k \cdot X_k \quad (1.8),$$

где $c_1, c_2,..., c_k$ — произвольные числа, также будет решением этой системы.

Доказательство.

Согласно следствию теоремы 1.4., $AX_1 = 0, AX_2 = 0,..., AX_n = 0$ , с учетом свойств операций над матрицами имеем:

$c_1AX_1 + c_2AX_2 + \ldots + c_nAX_n = 0$, что и требовалось доказать.

**Замечание:** по сути, однородные системы линейных алгебраических уравнений – это всего лишь частный случай неоднородной системы линейных уравнений, поэтому вся терминология (главные, свободные переменные и так далее) остаётся в силе.

На практике однородную систему решаем аналогично неоднородной, необходимо записать матрицу системы и с помощью элементарных преобразований привести её к ступенчатому виду, если $r = n$-однородная система имеет только нулевое решение, а в случае $r < n$- система имеет бесконечное множество решений, чтобы выписать эти решения не составило труда, привести матрицу системы к каноническому виду, при этом записывать вертикальную черту и нулевой столбец свободных членов нет необходимости, так как какие бы мы операции с нулевыми элементами не совершали, они так и останутся нулями.

**Пример 1.9.** Показать, что однородная система линейных уравнений имеет только нулевое решение $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

Решение.

Покажем, что однородная система линейных уравнений имеет нулевое решение, сделаем это двумя способами.

<u>1 способ: (метод Гаусса)</u>

Для того чтобы однородная система имела только нулевое решение необходимо, чтобы $r = n$,покажем это:

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ c_2 - 3c_1 \\ c_3 - 4c_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & \underline{-1} & 4 \\ 0 & -5 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ \\ c_3 - 5c_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & -1 \\ 0 & \underline{-1} & 4 \\ 0 & 0 & \underline{1} \end{pmatrix}, r = n = 3,$$

система имеет только нулевое решение.

В этом легко убедиться применяя обратный ход метода Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 4 \cdot 0 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0. \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Итак, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

<u>2 способ:(</u>основан на следствии теоремы 1.4.)

Из следствия теоремы 1.4, известно, что однородная система имеет ненулевое решения, когда определитель основной матрицы этой системы равен нулю $|A| = 0$,иначе , то есть если $|A| \neq 0$ она имеет нулевые решения, покажем это:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 9 \end{vmatrix} = -9 + 20 = 11 \neq 0,$$

главный определитель системы отличен от нуля. Таким образом, однородная система линейных уравнений имеет только тривиальное решение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

**Пример 1.10.** Найти решения однородной системы линейных уравнений $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ методом Гаусса.

Решение.

Прямой ход:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \overset{c_1 \leftrightarrow c_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ c_2 + c_1 \\ c_3 - 4c_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 11 & -4 \end{pmatrix}$, $r = 2 < n = 3$ система имеет ненулевые решения.

Обратный ход-найдем решение системы выражая главные неизвестные $x_1$, $x_2$ через свободный $x_3$:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 11x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_1 - 2 \cdot \dfrac{4}{11} x_3 + 2x_3 = 0 \\ x_2 = \dfrac{4}{11} x_3 \end{cases}, \begin{cases} x_1 = -\dfrac{14}{11} x_3 \\ x_2 = \dfrac{4}{11} x_3 \end{cases}, \text{пусть}$$

$x_3 = c$, $\begin{cases} x_1 = -\frac{14}{11} c \\ x_2 = \frac{4}{11} c \\ x_3 = c \end{cases}$, тогда $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{14}{11} c \\ \dfrac{4}{11} c \\ c \end{pmatrix}$ - общего решение (матричная форма).

Найдём какое-нибудь частное решении для этого придадим $x_3$ любое числовое значение, за исключением нуля (однородная система всегда имеет нулевое решение), пусть $x_3 = 11$, тогда $x_1 = -14$, $x_2 = 4$, $x_3 = 11$. Следовательно, $X = \begin{pmatrix} -14 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}$ - частное решение исходной системы.

Проверка: Подставляя частное решение в левую часть каждого уравнения исходной системы получим $\begin{cases} 4\cdot(-14)+3\cdot 4+4\cdot 11=0 \\ -(-14)+2\cdot 4-2\cdot 11=0 \\ -14-2\cdot 4+2\cdot 11=0. \end{cases}$ верное тождество при всех подстановках.

**Замечание:** для однородных системы так же, как и для исследования неоднородных систем можно использовать метод полного исключения неизвестных-метод Жордана-Гаусса, применение данного метода чаще всего оправдано, поскольку обратный ход метода Гаусса обычно требует трудоёмких и неприятных вычислений.

**Пример 1.11.** Найти общее решение системы $\begin{cases} -x_1+4x_2+x_3-5x_4=0 \\ x_1+5x_2+5x_3-4x_4=0 \\ 3x_2+2x_3-3x_4=0 \\ 2x_1+x_2+4x_3+x_4=0 \end{cases}$ методом Гаусса и методом Жордана-Гаусса.

Решение.

1 способ (Метод Гаусса):

Прямой ход-приводим матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} \underline{-1} & 4 & 1 & -5 \\ 1 & 5 & 5 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ c_2+c_1 \\ \sim \\ c_4+2c_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 & -5 \\ 0 & 9 & 6 & -9 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 9 & 6 & -9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \frac{1}{3}\cdot c_1 \\ \sim \\ \frac{1}{3}\cdot c_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 & -5 \\ 0 & \underline{3} & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ c_3-c_2 \\ c_4-c_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \underline{-1} & 4 & 1 & -5 \\ 0 & \underline{3} & 2 & -3 \end{pmatrix}, r=2<n=4,$$

система имеет ненулевое решение, найдем его применяя обратный ход метода Гаусса.

Обратный ход- выписываем систему, соответствующую ступенчатой матрице $\begin{cases} -x_1+4x_2+x_3-5x_4=0 \\ 3x_2+2x_3-3x_4=0 \end{cases}$ и выражая главные неизвестные $x_1$, $x_2$ через свободные $x_3$, $x_4$ получим общее решение:

$$\begin{cases} x_1=4x_2+x_3-5x_4 \\ x_2=-\frac{2}{3}x_3+x_4 \end{cases}, \begin{cases} x_1=4\cdot\left(-\frac{2}{3}x_3+x_4\right)+x_3-5x_4 \\ x_2=-\frac{2}{3}x_3+x_4 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_1=-\frac{5}{3}x_3-x_4 \\ x_2=-\frac{2}{3}x_3+x_4 \end{cases}$$ ,полагая $x_3=c_1, x_4=c_2$ имеем $\begin{cases} x_1=-\frac{5}{3}c_1-c_2 \\ x_2=-\frac{2}{3}c_1+c_2 \\ x_3=c_1 \\ x_4=c_2 \end{cases}$ - общее решение;

2 способ (Жордана-Гаусса):

Выписываем матрицу системы и при помощи элементарных преобразований строк приводим её к каноническому виду:

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 & -5 \\ 1 & 5 & 5 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \overset{(-1)c_1}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -4 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_2-c_1 \\ \sim \\ c_4-2c_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & 5 \\ 0 & 9 & 6 & -9 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 9 & 6 & -9 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_2:3 \\ \sim \\ c_4:3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & 5 \\ 0 & \boxed{3} & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3c_1+4c_2 \\ \sim \\ c_3-c_2 \\ c_4-c_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_1:3 \\ c_2:3 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/3 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1 \end{pmatrix}, r=2<n=4$$ -система совместна и неопределенна, выписываем систему, соответствующую приведенной матрицы и выражая главные неизвестные $x_1$, $x_2$ (соответствующие ведущим элементам) через свободные $x_3$, $x_4$ находим общее решение:

$\begin{cases} x_1 + \frac{5}{3}x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + \frac{2}{3}x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x_1 = -\frac{5}{3}x_3 - x_4 \\ x_2 = -\frac{2}{3}x_3 + x_4 \end{cases}$ ,пусть $x_3 = c_1, x_4 = c_2$,

тогда $\begin{cases} x_1 = -\frac{5}{3}c_1 - c_2 \\ x_2 = -\frac{2}{3}c_1 + c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$ -общее решение или в матричной форме

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3}c_1 - c_2 \\ -\frac{2}{3}c_1 + c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

**Замечание:** сравнивая два метода заметим ,что метод Жордана-Гаусса позволяет избежать неприятных вычислений возникающих при применении обратного хода метода Гаусса (выражение главных неизвестных через свободные), поэтому в дальнейшем для исследования систем будем использовать именно его.

**Пример 1.12.** Найти общее решение системы уравнений $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$ применяя метод Жордана-Гаусса.

Решение.

Применяя метод Жордана-Гаусса, найдем общее решение данной системы:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ c_2 - 2c_1 \\ c_3 - c_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_1 - c_2 \\ \sim \\ c_3 - c_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -8 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -8 & -1 & 0\\ 0 & 5 & 0 & 1\end{pmatrix}\overset{l_2\leftrightarrow l_4}{\sim}\begin{pmatrix}\overbrace{1}^{x_1} & \overbrace{0}^{x_4} & \overbrace{-1}^{x_3} & \overbrace{-8}^{x_2}\\ 0 & 1 & 0 & 5\end{pmatrix}, r=2<n=4,$$ система

имеет ненулевое решение, найдем его выражая $x_1$, $x_4$ -главные неизвестные через $x_2=c_1, x_3=c_2$ -свободные переменные:

$\begin{cases}x_1-x_3-8x_2=0\\ x_4+5x_2=0\end{cases}$, $\begin{cases}x_1=x_3+8x_2\\ x_4=-5x_2\end{cases}$, $x_2=c_1, x_3=c_2$, тогда

$\begin{cases}x_1=c_2+8c_1\\ x_4=-5c_1\\ x_2=c_1\\ x_3=c_2\end{cases}$ -общее решение или в матричном форме

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8c_1+c_2\\ c_1\\ c_2\\ -5c_1\end{pmatrix}.$$

**Фундаментальная система решений (ФСР).**

Пусть общее решение системы $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=0\end{cases}$ (1.9)

записано в виде $X=\begin{pmatrix}x_1(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-r})\\ \vdots\\ x_r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-r})\\ \alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_{n-r}\end{pmatrix}$ (1.10),

где $n$ - общее число неизвестных, $x_1, x_2, \ldots, x_r$ -главные неизвестные, $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-r}$ -значение свободных переменных

$x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ .Выберем $n-r$ решений данной системы ,полученных из общего решения следующим образом: одно из значений свободных неизвестных переменных полагается равным 1,а остальные равными нулю, и так далее до завершения перебора то есть $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{n-r} = 0; \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = \ldots = \alpha_{n-r} = 0; \ldots$

$\ldots; \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-r-1} = 0, \alpha_{n-r} = 1.$ Таким образом, решения системы выглядят так:

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1(1,0,\ldots,0) \\ \vdots \\ x_r(1,0,\ldots,0) \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} x_1(0,1,\ldots,0) \\ \vdots \\ x_r(0,1,\ldots,0) \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots X_{n-r} = \begin{pmatrix} x_1(0,0,\ldots,1) \\ \vdots \\ x_r(0,0,\ldots,1) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Эти решения образуют **нормальную фундаментальную систему решений** однородной системы (1.9).

Если общее решение однородной системы (1.9) представимо в виде линейной комбинации $X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \ldots + c_{n-r} X_{n-r}$ ,то говорят, что набор из $n-r$ решений системы $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ образует **фундаментальную систему решений (ФСР).**

Фундаментальную систему решений обозначают: $X_1, X_2, \ldots, X_k$ , где $k = n - r$ -количество векторов в фундаментальной системе решений, $n$ - количество неизвестных , $r$ - ранг основной матрицы системы.

Общее решение ОСУ является линейной комбинацией частных решений (ФСР).

Общее решение ОСУ обозначают:

$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \ldots + c_k X_k$ .

**Замечание:** фундаментальную систему решений (ФСР) однородной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) можно интерпретировать как координатные столбцы векторов линейного пространства. Более того, в силу линейной независимости ФСР она может выступать в роли базиса линейного пространства, которое образуют все решения системы уравнений.

**Теорема 1.6.** Если $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ -ФСР однородной системы, а $X_{ч.н.}$ -некоторое частное решение соответствующей неоднородной системы, то общее решение неоднородной системы имеет вид

$$X = X_{ч.н.} + X_0 = X_{ч.н.} + c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2 + \ldots + c_{n-r} \cdot X_{n-r} \quad (1.11)$$

Доказательство.

Пусть $X_0 = c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2 + \ldots + c_{n-r} \cdot X_{n-r}$ является общим решением однородной системы $AX_0 = 0$ (1). Обозначим символическим через $X_{ч.н.}$ -частное решение неоднородной системы $AX_{ч.н.} = B$ $(2)$. Складывая тождества (1) и (2), получаем тождество $AX_0 + AX_{ч.н.} = B$, $A(X_0 + X_{ч.н.}) = B$, справедливое при любых значениях свободных параметров, входящих в общее решение $X_0$. Следовательно, матрица $X = X_0 + X_{ч.н.}$ является общим решением неоднородной системы уравнений.

**Алгоритм нахождения ФСР (фундаментальной системы решений) и общего решения ОСУ**:

**1)**Записываем основную матрицу системы $A$ и делаем её ступенчатой формы применяя метод Жордана-Гаусса (Гаусса): $A \overset{э.п.}{\sim} A'$;

**2)**Находим размерность пространства решений системы:

а) Если $r = n$,то система имеет единственное решение-нулевое (фундаментальных решений нет);

б) Если $r < n$,то фундаментальная система решений состоит из $k = n - r -$ линейно независимых решений (количества свободных неизвестных);

**3)**Записываем систему с приведенной матрицей ио $r$ базисных переменных выражаем через $k = n - r$ свободных переменных.

Поочередно придаем $k=n-r$ свободным неизвестным значения единицы, остальные нули, для каждого набора решаем систему уравнений и находим

соответствующие значения главных (базисных) неизвестных, объединяя значения для свободных и базисных переменных, получаем ФСР. Записываем ФСР $X_1, X_2, \dots, X_k$ и общее решение системы $X = c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2 + \dots + c_k \cdot X_k$.

**Пример 1.13.** Найти ФСР и общее решение системы:

**а)** $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0 \\ -x_1-2x_2-3x_3=0 \\ x_1+2x_2+2x_3=0 \end{cases}$; **б)** $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-5x_4=0 \\ x_1+2x_2+3x_3-2x_4=0 \\ 3x_1+6x_2+10x_3-9x_4=0 \end{cases}$;

**в)** $\begin{cases} x_1+x_3+x_5=0 \\ x_2+x_3+x_6=0 \\ x_1-x_2+x_5-x_6=0 \\ 2x_1-x_2+x_3+2x_5-x_6=0 \end{cases}$; **г)** $\begin{cases} 4x_1-4x_2+x_3=0 \\ -7x_1+3x_2+4x_3=0 \\ x_1+x_2-2x_3=0 \\ -2x_1+2x_2-x_3=0 \\ x_1-x_2=0 \end{cases}$.

Решение.

**а)** Выписываем матрицу системы и применяя метод Жордана-Гаусса делаем ее канонической формы:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ c_2+c_1 \\ c_3-c_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \begin{matrix} c_1-c_3 \\ c_2+2c_3 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $r=2<n=3$-система имеет ненулевое решение, ФСР состоит из одного вектора, так как $k=n-r=3-2=1$;

Записываем систему, соответствующую приведенной матрице и главные неизвестные $x_1, x_3$ выражаем через свободный $x_2$:

$\begin{cases} x_1+2\,x_2=0 \\ x_3=0 \\ x_2 - \text{св. н.} \end{cases}$; $\begin{cases} x_1=-2\,x_2 \\ x_3=0 \\ x_2 - \text{св. н.} \end{cases}$ – -общее решение.

Для нахождения ФСР составляем таблицу, количество столбцов которой соответствует количеству неизвестных ( для рассматриваемого примера их 3), а количество строк равно количеству решений ФСР (количеству свободных неизвестных ), заполняем таблицу придавая свободным неизвестным поочередно значения единицы, остальные нули, так как свободный неизвестный единственный, то получим один вариант $x_2 = 1$,подставляя значение свободного неизвестного в общее решение находим значение главных переменных: $x_1 = -2,\ x_2 = 1, x_3 = 0$. Вычисления занесем в таблицу:

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| $X_1$ | -2 | 1 | 0 |

Итак, фундаментальную систему составляет одно частное решение:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Как известно, общее решение является линейной комбинацией частных решений. Таким образом, пространство решений однородной системы уравнений имеет вид: $X = C\,X_1 = C\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2C \\ C \\ 0 \end{pmatrix}$.

**б)** $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & 6 & 10 & -9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ c_2 - c_1 \\ c_3 - 3c_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ c_2 \cdot (-1) \sim \\ c_3 - 2c_2 \end{matrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_1 - 4c_2 \\ \sim \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & \underline{1} & -3 \end{pmatrix}, r = 2 < n = 4$-система имеет ненулевое решение, ФСР состоит из двух векторов, так как $k = n - r = 4 - 2 = 2$.

Найдем общее решение:

$$\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 + \ 7x_4 = 0 \\ x_3 - \ 3x_4 = 0 \\ x_{2,4} - \text{св. н.} \end{cases} ; \begin{cases} x_1 = -2\,x_2 - \ 7x_4 \\ x_3 = \ 3x_4 \\ x_{2,4} - \text{св. н.} \end{cases}$$ –общее решение.

Для нахождения ФСР составляем таблицу, количество столбцов которой соответствует количеству неизвестных - 4, а количество строк равно количеству решений ФСР количеству свободных неизвестных -2, заполняем таблицу придавая свободным неизвестным поочередно значения единицы, остальные нули. Вычисления занесем в таблицу:

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | -2 | 1 | 0 | 0 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $X_2$ | -7 | 0 | 3 | 1 |

Итак, фундаментальную систему составляет два частных решения:

$X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Таким образом, общее решение данной системы имеет вид:

$$X = C_1\, X_1 + C_2\, X_2 = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2C_1 - 7C_2 \\ C_1 \\ 3C_2 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

**в)** Выписываем матрицу системы и применяя метод Жордана-Гаусса:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \sim \\ c_3 - c_1 \\ c_4 - 2c_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \sim \\ c_3 + c_2 \\ c_4 + c_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$ $r = 2 < n = 6$-система имеет ненулевое решение, $k = n - r = 6 - 2 = 4$-ФСР состоит из четырех векторов.

Выражая главные неизвестные через свободные, находим общее решение: $\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_6 = 0 \\ x_{3,4,5,6} - \text{св. н.} \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 = -x_3 - x_5 \\ x_2 = -x_3 - x_6 \\ x_{3,4,5,6} - \text{св. н.} \end{cases}$ –общее решение.

После чего главные неизвестные $x_1, x_2$ выражаем через свободные неизвестные $x_3, x_4, x_5, x_6$ : $\begin{cases} x_1 = -x_3 - x_5 \\ x_2 = -x_3 - x_6 \end{cases}$ -общее решение.

Для нахождения ФСР, заполняем таблицу придавая свободным неизвестным $x_{3,4,5,6} = c_{1,2,3,4}$ поочередно значения единицы, остальные нули, получим следующие числовые наборы $(x_3; x_4; x_5; x_6)$-$(1; 0; 0; 0), (0; 1; 0; 0), (0; 0; 1; 0), (0; 0; 0; 1)$, подставляя данные значения свободных неизвестных в общее решение находим значение базисных переменных:

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | -1 | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $X_2$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $X_3$ | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $X_4$ | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Итак, фундаментальную систему составляют четыре частных решения:

$$X_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ X_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ X_4=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Таким образом, пространство решений однородной системы имеет вид:

$$X=c_1\cdot X_1+c_2\cdot X_2+c_3\cdot X_3+c_4\cdot X_4=c_1\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+$$

$$+c_3\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+c_4\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-c_1-c_3\\-c_1-c_4\\c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{pmatrix}.$$

**г)** $$\begin{pmatrix}4&-4&1\\-7&3&4\\1&1&-2\\-2&2&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}\underset{c_3\leftrightarrow c_1}{\sim}\begin{pmatrix}\boxed{1}&1&-2\\-7&3&4\\4&-4&1\\-2&2&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{matrix}c_2+7c_1\\c_3-4c_1\\c_4+2c_1\\c_5-c_1\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&10&4\\0&-8&9\\0&4&-5\\0&-2&2\end{pmatrix}\begin{matrix}c_2:2\\c_3+2c_4\\\sim\\c_5:(-5)\end{matrix}\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&5&2\\0&0&-1\\0&4&-5\\0&1&-1\end{pmatrix}\underset{\sim}{c_2\leftrightarrow c_5}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&\boxed{1}&-1\\0&0&-1\\0&4&-5\\0&5&2\end{pmatrix}\begin{array}{c}c_1-c_2\\ \sim\\ \\ c_4-4c_2\\ c_5-5c_2\end{array}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&-1\\0&0&-1\\0&0&7\end{pmatrix}\begin{array}{c}\sim\\(-1)c_3\\(-1)\,c_4\\c_5:7\end{array}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&-1\\0&0&\boxed{1}\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{array}{c}c_1+2c_3\\c_2+c_3\\ \sim\\ c_4-c_3\\ c_5-c_3\end{array}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\underline{1}&0&0\\0&\underline{1}&0\\0&0&\underline{1}\end{pmatrix},\ r=n=3,\text{система}$$

имеет только нулевое решение.

**Пример 1.14.** Найти общее решение неоднородной системы уравнений $\begin{cases}2x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=1\\x_1+2x_2-x_3+x_4-2x_5=1\\4x_1-10x_2+5x_3-5x_4+7x_5=1\\2x_1-14x_2+7x_3-7x_4+11x_5=1\end{cases}$, используя ФСР, соответствующей однородной.

Решение.

Применяем метод Жордана-Гаусса:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r}2&-2&1&-1&1&1\\1&2&-1&1&-2&1\\4&-10&5&-5&7&1\\2&-14&7&-7&11&1\end{array}\right)\begin{array}{c}c_1\leftrightarrow c_2\\ \sim\\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{rrrrr|r}\boxed{1}&2&-1&1&-2&1\\2&-2&1&-1&1&1\\4&-10&5&-5&7&1\\2&-14&7&-7&11&-1\end{array}\right)\begin{array}{c}\sim\\c_2-2c_1\\c_3-4c_1\\c_4-2c_1\end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrrrr|r}1&2&-1&1&-2&1\\0&-6&3&-3&5&-1\\0&-18&9&-9&15&-3\\0&-18&9&-9&15&-3\end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \sim\\ c_3:(-3)\\ c_4:(-3)\end{array}\left(\begin{array}{rrrrr|r}1&2&-1&1&-2&1\\0&\boxed{-6}&3&-3&5&-1\\0&6&-3&3&-5&1\\0&6&-3&3&-5&1\end{array}\right)\begin{array}{c}3c_1+c_2\\ \sim\\ c_3+c_2\\ c_4+c_2\end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrrrr|r}3&0&0&0&-1&2\\0&-6&3&-3&5&-1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\begin{array}{c}c_1:3\\c_3:(-6)\\ \sim\\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{rrrrr|r}1&0&0&0&-1/3&2/3\\0&1&-1/2&1/2&-5/6&1/6\end{array}\right),$$

$r(A) = r(A|B) = 2 < n = 5$ -система имеет ненулевое решение. Находим общее решение неоднородной системы уравнений: $\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_5 \\ x_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{5}{6}x_5 \end{cases}$ ,найдем ее какое-нибудь частное решение,

например, пусть $x_{3,4,5} = 0$ $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{1}{6}$.

Таким образом, $X_{ч.н.} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ -частное решение неоднородной системы.

Найдем ФСР соответствующей однородной системы, для этого в матрице системы столбец свободных членов заменяем нулевым вектором: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$, $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_5 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{5}{6}x_5 \end{cases}$ -общее решение однородной системы, система имеет три свободных неизвестных $x_{3,4,5} = c_{1,2,3}$ ,следовательно ФСР состоит из трех векторов $k = n - r = 5 - 2 = 3$, полагая $(x_3; x_4; x_5)$ равными $(1;0;0), (0;1;0), (0;0;1)$ имеем:

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | 0 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $X_2$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 1 | 0 |
| $X_3$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{5}{6}$ | 0 | 0 | 1 |

Пространство решений однородной системы имеет вид:

$$X = c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2 + c_3 \cdot X_3 = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ c_3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}c_3 \\ \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{2}c_2 + \frac{5}{6}c_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Общее решение неоднородной системы уравнений имеет вид:

$$X = X_{ч.н.} + c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2 + c_3 \cdot X_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}c_3 \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{2}c_2 + \frac{5}{6}c_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

## 1.5. Матричные уравнения и методы их решения.

Простейшими матричными уравнениями называются соотношения вида: $A \cdot X = B$ -правостороннее матричное уравнение;

$X \cdot A = B$ - левостороннее матричное уравнение; $A \cdot X \cdot B = C$, где $A$, $B$, $C$ - известные матрицы, $X$ – столбец-неизвестных.

Такие уравнения сводятся к нескольким системам линейных уравнений (число систем равно числу столбцов матрицы $B$) с одинаковой основной матрицей. Удобно решать все системы одновременно, с помощью метода Жордана –Гаусса (это значительно упрощает решение). Если по крайней мере одна система оказывается несовместной, то матричное уравнение не имеет решения. Если все системы совместны и по крайней мере одна из них неопределенная, то матричное уравнение имеет бесконечно много решений. Если все системы определенные, то матричное уравнение имеет единственное решение.

**Матричные уравнения вида AX=B.**

Если дано уравнение вида $A \cdot X = B$ (1.12), где $A, B$— квадратные матрицы порядка $n$, то решение выглядит так

$$X = A^{-1} \cdot B \quad (1.13)$$

Действительно умножив обе части уравнения (1.12) слева на матрицу $A^{-1}$ и используя свойства действий над матрицами, получим:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B,\ E \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B.$$

Предположим теперь, что нам требуется решить сразу две системы вида (1.12) с одной основной матрицей $A$: $A \cdot X_1 = B_1$,

$A \cdot X_2 = B_2$, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$,

$B_2 = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \dots \\ b_{n2} \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \dots \\ x_{n1} \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}$. Понятно, что решение каждой из них можно найти по формуле $X = A^{-1} \cdot B$, однако две системы $A\cdot X_1=B_1$, $A\cdot X_2=B_2$ удобно записать одним матричным уравнением вида $A\cdot X=B$ (чтобы упростить решение), если ввести двухстолбцовые матрицы: $X=X_1X_2=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} \end{pmatrix}$,

$B=B_1B_2=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} \end{pmatrix}$. В этом случае оба решения $X_1, X_2$ найдутся

сразу по формуле $X=A^{-1}\cdot B$, где матрицы $X$ и $B$ будут определяться соответствующими двухстолбцовыми матрицами.

**Замечание:** если вместо двух систем $A\cdot X_1=B_1$, $A\cdot X_2=B_2$, рассматривается $m$ систем $A\cdot X_1=B_1, A\cdot X_2=B_2,\dots, A\cdot X_m=B_m$ с одной матрицей $A$, поступаем аналогично, то есть объединяем матричным уравнением $A\cdot X=B$, решение которого также будет определяться равенством $X=A^{-1}\cdot B$.

**Пример 1.15.** Решить матричное уравнение
$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot X+2\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=5\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и сделать проверку.

Решение.

В соответствии с определением операций над матрицами приведем данное уравнение к виду $A\cdot X=B$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 15 & -5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 13 & -3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$, получили уравнение вида $A_{2\times 2} \cdot X = B_{2\times 2}$ ,где $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 13 & -3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ - известные матрицы.

Матрицу неизвестных $X$ в соответствии с определением операции произведения матриц будем искать в виде $X_{2\times 2} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ ,отсюда

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} - 2x_{21} & x_{12} - 2x_{22} \\ x_{11} + 2x_{21} & x_{12} + 2x_{22} \end{pmatrix} = B = \begin{pmatrix} 13 & -3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix},$$

используя понятие равенства матриц получим две системы $\begin{cases} x_{11} - 2x_{21} = 13 \\ x_{11} + 2x_{21} = 3 \end{cases}$, $\begin{cases} x_{12} - 2x_{22} = -3 \\ x_{12} + 2x_{22} = 8 \end{cases}$, с расширенными матрицами соответственно $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 13 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$ и $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 8 \end{array}\right)$,поскольку основные матрицы систем совпадают рациональнее объединять их решение , таким образом получим расширенную матрицу $(A|B) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 13 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right)$ исходной системы , так как $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4 \neq 0,$ следовательно существует единственное решение, по формуле $X = A^{-1} \cdot B$ , где

$$A^{-1} : (A|E) \sim (E|A^{-1}).$$

Чтобы воспользоваться формулой найдём $A^{-1}$ :

$$(A|E) = \left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{c_2 - c_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\frac{c_2}{4}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1/4 & 1/4 \end{array}\right) \underset{\sim}{c_1 + 2c_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/4 & 1/4 \end{array}\right) =$$

$$=(E|A^{-1}), \text{ то есть } A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Вычисляем искомую матрицу $X$ умножая обратную матрицу $A^{-1}$ на матрицу свободных членов $B$:

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 13 & -3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{13}{2}+\frac{3}{2} & -\frac{3}{2}+4 \\ -\frac{13}{4}+\frac{3}{4} & \frac{3}{4}+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & \frac{5}{2} \\ -\frac{10}{4} & \frac{11}{4} \end{pmatrix}.$$

**Замечание:** формула $X=A^{-1}\cdot B$ применим только в случае единственности решения, то есть, когда $|A|\neq 0$.

Рассмотрим метод Жордана-Гаусса- универсальный способ решения матричных уравнений $A\cdot X=B$ ,который работает в любом случае, даже если определитель основной матрицы равен нулю $|A|=0$

(матрица системы $A$ вырожденная) или если матрица $A$ не квадратная (известно, что обратная матрица существует только для квадратных матриц).

Метод Жордана-Гаусса решения матричных уравнений $A\cdot X=B$ заключается в следующем- выписываем расширенную матрицу системы и применяя метод Жордана-Гаусса приводим матрицу $A$ к каноническому виду (к единичному виду в случае единственности решения), при этом справа получим искомую матрицу $X$ , кратко данный алгоритм можно записать так $X:\ (A|B)\overset{\text{э.п.}}{\sim}(E|X)$ .

Решим данным способом преобразованное матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 13 & -3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$, из примера 1.15:

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cc|cc}\boxed{1} & -2 & 13 & -3\\ 1 & 2 & 3 & 8\end{array}\right)\underset{c_2-c_1}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -2 & 13 & -3\\ 0 & 4 & -10 & 11\end{array}\right)\frac{c_2}{4}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -2 & 13 & -3\\ 0 & \boxed{1} & -\frac{5}{2} & \frac{11}{4}\end{array}\right)\underset{\sim}{c_1+2c_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 8 & \frac{5}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{11}{4}\end{array}\right)=(E|X),$$

следовательно, $X=\begin{pmatrix}8 & \frac{5}{2}\\ -\frac{5}{2} & \frac{11}{4}\end{pmatrix}$.

<u>Проверка</u>: подставим полученное решение в исходное уравнение

$$A\cdot X=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8 & \frac{5}{2}\\ -\frac{5}{2} & \frac{11}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8+5 & \frac{5}{2}-\frac{11}{2}\\ 8-5 & \frac{5}{2}+\frac{11}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & -3\\ 3 & 8\end{pmatrix}=B,$$

следовательно, матрица $X$ найдена верно.

**Пример 1.16.** Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 8\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 6 & 5\end{pmatrix}$.

Решение.

Так как определитель основной матрицы $|A|=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 8\end{vmatrix}=8-8=0$, решение не единственно (матрицы $A^{-1}$ -не существует), поэтому для ее решения применяем метод Жордана-Гаусса, то есть её решение $X=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}$ находим по формуле $(A|B)\overset{\text{э.п.}}{\sim}(E|X)$.

Из исходного уравнения $A\cdot X=B$,

$$\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 6 & 5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_{11}+4x_{21} & x_{12}+4x_{22}\\ 2x_{11}+8x_{21} & 2x_{12}+8x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 6 & 5\end{pmatrix},$$

получим две системы уравнения: $\begin{cases} x_{11}+4x_{21}=3 \\ 2x_{11}+8x_{21}=6 \end{cases}$, $\begin{cases} x_{12}+4x_{22}=2 \\ 2x_{12}+8x_{22}=5 \end{cases}$ и

их расширенные матрицы $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 5 \end{array}\right)$, объединения

матрицы получим матрицу $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 6 & 5 \end{array}\right)$ делаем её канонической

формы (при помощи элементарных преобразований) и выписываем решение исходного матричного уравнения:

$\left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 6 & 5 \end{array}\right) \underset{c_2-2c_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), r(A)=1 \neq r(A|B)=2$,

система несовместна-не имеет решения.

Действительно, решая каждую систему по отдельности имеем:

$\begin{cases} x_{11}+4x_{21}=3 \\ 2x_{11}+8x_{21}=6 \end{cases}$,

$\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \end{array}\right) \underset{c_2-2c_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right), r(A)=r(A|B)=1<n=2$, система имеет бесконечное множество решений, главный неизвестный $x_{11}$ через свободный $x_{21}=c_1$,получим общее решение:

$\begin{cases} x_{11}=3-4x_{21} \\ x_{21}=c_1 \end{cases}$, $\begin{cases} x_{11}=3-4c_1 \\ x_{21}=c_1 \end{cases}$ -общее решение; $\begin{cases} x_{12}+4x_{22}=2 \\ 2x_{12}+8x_{22}=5 \end{cases}$,

$\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 5 \end{array}\right) \underset{c_2-2c_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right), r(A) \neq r(A|B)$ система несовместна (не имеет решения).

Итак, первая система имеет множество решений, а вторая система несовместна, следовательно, исходная система не имеет решения. Действительно, интерпретируя неизвестную матрицу $X$ как единый объект, пришли к тому, что матричное уравнение решения не имеет, так как оно не определяет второй столбец матрицы $X$.

**Пример 1.17.** Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

Поскольку $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 0$ (первый и второй столбцы пропорциональны), следовательно решение не единственно, находим его по формуле $(A|B) \overset{\text{э.п.}}{\sim} (E|X)$. Так как, матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$- размера $3 \times 3$,матрица

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ - размера $3 \times 2$,то матрицу неизвестных будем искать в виде $X_{3\times 2} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}$.

Исходное уравнение принимает вид:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} - x_{21} - 2x_{31} & x_{12} - x_{22} - 2x_{32} \\ x_{11} - 2x_{21} - 2x_{31} & x_{12} - 2x_{22} - 2x_{32} \\ 2x_{11} - 3x_{21} - 4x_{31} & 2x_{12} - 3x_{22} - 4x_{32} \end{pmatrix} =$$

$$= B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдём решение исходного матричного уравнения методом Жордана-Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} \boxed{1} & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -4 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{c_2 - c_1 \\ c_3 - 2c_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \underset{\substack{(-1)c_2 \\ (-1)c_3}}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&-2&0&1\\0&\boxed{1}&0&1&2\\0&1&0&1&2\end{array}\right)\begin{array}{c}c_1+c_2\\ \sim\\ c_3-c_2\end{array}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&-2&1&3\\0&1&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&-2&1&3\\0&1&0&1&2\end{array}\right),$$

$r(A)=r(A|B)=2<n=3$, система совместна и неопределенна.

Записывая системы, соответствующие первому и второму столбцу приведённой матрицы, получим:

$$\begin{cases}x_{11}-2x_{31}=1\\ \quad x_{21}=1\\ \quad x_{31}=\text{св. н.}\end{cases},\begin{cases}x_{12}-2x_{32}=3\\ \quad x_{22}=2\\ \quad x_{32}=\text{св. н.}\end{cases};$$

Выражая главные неизвестные через свободные неизвестные $x_{31}=c_1, x_{32}=c_2$ имеем:

$$\begin{cases}x_{11}=1+2c_1\\ \quad x_{21}=1\\ \quad x_{31}=c_1\end{cases},\begin{cases}x_{12}=3+2c_2\\ \quad x_{22}=2\\ \quad x_{32}=c_2\end{cases};$$

Объединяя решения двух систем, получим решения исходного матричного уравнения:

$X=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\\x_{31}&x_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2c_1&3+2c_2\\1&2\\c_1&c_2\end{pmatrix}$. Найдем какое-нибудь частное решение, положим $c_1,c_2=0$,получим $X=\begin{pmatrix}1&3\\1&2\\0&0\end{pmatrix}$-частное решение.

<u>Проверка</u>: для проверки подставим полученное частное решение $X=\begin{pmatrix}1&3\\1&2\\0&0\end{pmatrix}$ в исходное уравнение

$A\cdot X=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\1&-2&-2\\2&-3&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3\\1&2\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\\-1&0\end{pmatrix}=B$, получим верное равенство, следовательно решение найдено верно.

**Пример 1.18.** Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Решение.

Приведём уравнение к виду $A \cdot X = B$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix};$$

Учитывая, что $A_{2\times 4} \cdot X = B_{2\times 2}$матрицу неизвестных $X$ будем искать в виде:

$$X_{4\times 2} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \\ x_{41} & x_{42} \end{pmatrix};$$

Поскольку матрица $A$ исходного матричного уравнения не является квадратной, для его решения применяем метод Жордана-Гаусса $(A|B) \overset{\text{э.п.}}{\sim} (E|X)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} -2 & 4 & -4 & 2 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & -2 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \underset{\sim}{\frac{c_1}{-2}} \left(\begin{array}{cccc|cc} \boxed{1} & -2 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)_{c_2 + c_1}^{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

$r(A) = r(A|B) < n$,система имеет бесконечное множество решений.

Записываем системы, соответствующие первому и второму столбцу свободных членов приведённой матрицы:

$$\begin{cases} x_{11} - 2x_{21} + 2x_{31} - x_{41} = 1 \\ x_{21}, x_{31}, x_{41} - \text{св. н.} \end{cases}, \begin{cases} x_{12} - 2x_{22} + 2x_{32} - x_{42} = 2 \\ x_{22}, x_{32}, x_{42} - \text{св. н.} \end{cases};$$

Выражая главные неизвестные через свободные неизвестные$x_{21} = c_1, x_{31} = c_2, x_{41} = c_3$, $x_{22} = c_4, x_{32} = c_5, x_{42} = c_6$имеем:

$$\begin{cases} x_{11} = 1 + 2c_1 - 2c_2 + c_3 \\ x_{21} = c_1 \\ x_{31} = c_2 \\ x_{41} = c_3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_{12} = 2 + 2c_4 - 2c_5 + c_6 \\ x_{22} = c_4 \\ x_{32} = c_5 \\ x_{42} = c_6 \end{cases}.$$

Объединяя решения двух систем, получим общее решение исходного матричного уравнения:

$$X = \begin{pmatrix} 1 + 2c_1 - 2c_2 + c_3 & 2 + 2c_4 - 2c_5 + c_6 \\ c_1 & c_4 \\ c_2 & c_5 \\ c_3 & c_6 \end{pmatrix}.$$

Проверку сделайте самостоятельно.

### Матричные уравнения вида $X \cdot A = B$.

Для уравнения вида

$X \cdot A = B$ (1.13), где $A, B$ — квадратные матрицы порядка $n$ ,то решение ищем в виде

$$X = B \cdot A^{-1} \quad (1.14)$$

Действительно, умножив обе части уравнения (1.13) справа на матрицу $A^{-1}$ ,имеем: $X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$,

$$X \cdot E = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}.$$

**Замечание:** формула $X = B \cdot A^{-1}$ применим только в случае единственности решения, то есть, когда $|A| \neq 0$ .

Рассмотрим универсальный способ решения матричных уравнения вида (1.13)-метод Жордана-Гаусса.

**Алгоритм решения уравнения вида $X \cdot A = B$ методом Жордана-Гаусса:**

**1)** Транспонируем обе части уравнения $X \cdot A = B$ :

$$(X \cdot A)^T = B^T \ , A^T \cdot X^T = B^T ;$$

**2)** Из уравнения $A^T \cdot X^T = B^T$ находим $X^T$ : $\left(A^T \middle| B^T\right) \sim \left(E \middle| X^T\right)$;

**3)** Находим $X$ : $X = \left(X^T\right)^T$ .

**Пример 1.19.** Решить матричные уравнение
$X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,решение будем искать в виде $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = -16 + 15 = -1 \neq 0$, решение единственно, найдем его двумя способами.

1 способ: по формуле $X = B \cdot A^{-1}$ ,где
$A^{-1}$ $:\left(A|E\right) \sim \left(E|A^{-1}\right)$.

Находим обратную матрицу $A^{-1}$ к ос0новной матрице системы $A$ :

$$(A|E) = \left(\begin{matrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right) \underset{c_2 + c_1}{\sim} \left(\begin{matrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right) \underset{(-c_2) \leftrightarrow c_1}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right) \underset{c_2 - 4c_1}{\sim} \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{matrix}\right) \underset{\sim}{c_1 + c_2}$$

$$\sim \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{matrix}\right) \underset{(-1)c_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{matrix}\right) = (E|A^{-1}).$$

Таким образом, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$.

Находим искомую матрицу $X = B \cdot A^{-1}$:

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

2 способ: (методом Жордана-Гаусса)

1) Транспонируем обе части уравнения

$$(X\cdot A)^T=B^T\ ,A^T\cdot X^T=B^T:$$

$$\left(X\cdot\begin{pmatrix}4&3\\-5&-4\end{pmatrix}\right)^T=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^T,\begin{pmatrix}4&3\\-5&-4\end{pmatrix}^T\cdot X^T=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^T,$$

$\begin{pmatrix}4&-5\\3&-4\end{pmatrix}\cdot X^T=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, где $A^T=\begin{pmatrix}4&-5\\3&-4\end{pmatrix}$, $B^T=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$;

2) Из уравнения $A^T\cdot X^T=B^T$ ,находим $X^T$ :
$\left(A^T\middle|B^T\right)\sim\left(E\middle|X^T\right)$;

$$X^T:\left(\begin{array}{cc|cc}4&-5&1&0\\3&-4&0&1\end{array}\right)\underset{\sim}{c_1-c_2}\left(\begin{array}{cc|cc}\boxed{1}&-1&1&-1\\3&-4&0&1\end{array}\right)\overset{\sim}{c_2-3c_1}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&-1&1&-1\\0&-1&-3&4\end{array}\right)\overset{\sim}{(-1)c_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&-1&1&-1\\0&\boxed{1}&3&-4\end{array}\right)\underset{\sim}{c_1+c_2}$$

$\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&4&-5\\0&1&3&-4\end{array}\right)$, тогда $X^T=\begin{pmatrix}4&-5\\3&-4\end{pmatrix}$;

3)Находим $X$ : $X=\left(X^T\right)^T=\begin{pmatrix}4&-5\\3&-4\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}4&3\\-5&-4\end{pmatrix}$.

Проверку сделайте самостоятельно.

**Пример 1.20.** Решить матричное уравнение
$$X\cdot\begin{pmatrix}-1&1\\-1&-2\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-3\\2&1\\-2&2\end{pmatrix}.$$

Решение.

$X\cdot A_{3\times2}=B_{3\times2}$, по определению произведения матриц неизвестную матрицу $X$ будем искать в виде

$X_{3\times3}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}$, методом Жордана-Гаусса, то есть транспонируем исходное уравнение $(X \cdot A)^T = B^T$, $A^T \cdot X^T = B^T$ получим:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^T \cdot X^T = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^T \text{ или}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -x_{11} - x_{12} & -x_{21} - x_{22} & -x_{31} - x_{32} \\ x_{11} - 2x_{12} + 3x_{13} & x_{21} - 2x_{22} + 3x_{23} & x_{31} - 2x_{32} + 3x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Находим $X^T$: $\left(A^T \middle| B^T\right) \sim \left(E \middle| X^T\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{\sim}{(-1) \cdot c_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 0 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{\sim}{c_2 - c_1}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -6 & 3 & 0 \end{array}\right) \overset{\sim}{\frac{c_2}{-3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{c_1 - c_2}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right), r(A) = r\left(A \middle| B\right) = 2 < n = 3$$ , система имеет бесконечное множество решений;

Записываем системы, соответствующие первому, второму и третьему столбцу приведённой матрицы, находим общее решение каждой из них и выписываем общее решение исходного матричного уравнения:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{13} = 1 \\ x_{12} - x_{13} = 2 \end{cases}, \begin{cases} x_{11} = -x_{13} + 1 \\ x_{12} = x_{13} + 2 \end{cases}, x_{13} = c_1 \Rightarrow \begin{cases} x_{11} = 1 - c_1 \\ x_{12} = 2 + c_1 \\ x_{13} = c_1 \end{cases}$$ -

общее решение для первого столбца;

$$\begin{cases} x_{21}+x_{23}=-1 \\ x_{22}-x_{23}=-1 \end{cases}, \begin{cases} x_{21}=-x_{23}-1 \\ x_{22}=x_{23}-1 \end{cases}, x_{23}=c_2 \Rightarrow \begin{cases} x_{21}=-1-c_2 \\ x_{22}=-1+c_2 \\ x_{23}=c_2 \end{cases}$$ -

общее решение для второго столбца;

$$\begin{cases} x_{31}+x_{33}=2 \\ x_{32}-x_{33}=0 \end{cases}, \begin{cases} x_{31}=2-x_{33} \\ x_{32}=x_{33} \end{cases}, x_{33}=c_3 \Rightarrow \begin{cases} x_{31}=2-c_3 \\ x_{32}=c_3 \\ x_{33}=c_3 \end{cases}$$ -общее

решение системы для третьего столбца.

Итак, $X^T=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-c_1 & -1-c_2 & 2-c_3 \\ 2+c_1 & -1+c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$,

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-c_1 & 2+c_1 & c_1 \\ -1-c_2 & -1+c_2 & c_2 \\ 2-c_3 & c_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Проверку сделайте самостоятельно.

### Матричные уравнения вида $A\cdot X\cdot B=C$.

Наряду с правосторонними $A\cdot X=B$ и левосторонними $X\cdot A=B$ матричными уравнениями можно рассматривать уравнения вида

$$A\cdot X\cdot B=C \quad (1.15),$$

где $A, B, C$ — квадратные матрицы порядка $n$ ,решение ищем в виде $X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$ (1.16)

Действительно, умножив обе части уравнение слева на матрицу $A^{-1}$,получим:

$A\cdot A^{-1}\cdot X\cdot B=A^{-1}\cdot C$,

$E\cdot X\cdot B=A^{-1}\cdot C \Rightarrow X\cdot B=A^{-1}\cdot C$, умножим последнее уравнение справа на матрицу $B^{-1}$, имеем:

$X\cdot B\cdot B^{-1}=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$,

$X\cdot E=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}, \Rightarrow X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$ .

**Замечание:** в том случае, когда матрицы $A, B, C$ -не квадратные или вырожденные, то есть, когда решение не единственно, необходимо для решения матричного уравнения $A \cdot X \cdot B = C$ воспользоваться способом решения.

**Алгоритм решения матричных уравнений вида** $A \cdot X \cdot B = C$ **,если матрицы** $A, B, C$ **вырожденные или не квадратные:**

**1)** Делаем подстановку $Y = X \cdot B$ в исходное уравнение $A \cdot X \cdot B = C$,получим уравнение $A \cdot Y = C$, из которого находим $Y$ ;

**2)** Из уравнения $Y = X \cdot B$ с известными матрицами $Y$, $B$ находим $X$ ,для этого транспонируем обе части уравнения $Y = X \cdot B$,

$$Y^T = (X \cdot B)^T, B^T \cdot X^T = Y^T, \ X = (X^T)^T.$$

**Пример 1.21.** Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$.

Решение.

Здесь $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$.Так как

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -6 - (-5) = -1 \neq 0, \qquad |B| = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 42 = -2 \neq 0 \quad ,$$

следовательно $A^{-1}$, $B^{-1}$ существуют, то есть решение единственно, ищем его в виде $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ по формуле $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$.

Находим $A^{-1}$:

$$\left(\begin{matrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right) \overset{2c_1 - c_2}{\sim} \left(\begin{matrix} \boxed{1} & 0 \\ 5 & -2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right) \underset{c_1 - 5c_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 2 & -1 \\ -10 & 6 \end{matrix}\right) \underset{\frac{-c_2}{2}}{\sim} \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{matrix}\right) = (E|A^{-1}),$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix};$$

Находим $B^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}5 & 6 & 1 & 0\\ 7 & 8 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{5c_2-7c_1}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc}5 & 6 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -7 & 5\end{array}\right)\underset{\frac{-c_2}{2}}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc}5 & 6 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -7 & 5\end{array}\right)\frac{-c_2}{2}\sim\left(\begin{array}{cc|cc}5 & 6 & 1 & 0\\ 0 & \boxed{1} & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2}\end{array}\right)\underset{\sim}{c_1-6c_2}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc}5 & 0 & -20 & 15\\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2}\end{array}\right)\underset{\sim}{\frac{c_1}{5}}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -4 & 3\\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2}\end{array}\right)=(E|B^{-1}),$$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2}\end{pmatrix};$$

Находим $X$:

$$X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}=\left(\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}14 & 16\\ 9 & 10\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}-4 & 3\\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28-9 & 32-10\\ 70-27 & 80-30\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix}-4 & 3\\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19 & 22\\ 43 & 50\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4 & 3\\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-76+77 & 57-55\\ -172+175 & 129-125\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}.$$

Итак, $X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

**Пример 1.22.** Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 3 & 0\end{pmatrix}$.

Решение.

Так как $|A|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1-1=0,\ |B|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0,$ то матрицы $A^{-1}$, $B^{-1}$ не существуют, то есть решение не единственно, формула (1.16) не применима.

Решение будем искать в виде $X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ универсальным способом:

1) находим $Y$ ,сделав подстановку $Y=X\cdot B=X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ в исходном уравнении $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, получим уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot Y=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$,где

$Y=\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$.

Расписав равенство, получим две системы: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_{11}+y_{21} & y_{12}+y_{22} \\ y_{11}+y_{21} & y_{12}+y_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\begin{cases} y_{11}+y_{21}=3 \\ y_{11}+y_{21}=3 \end{cases},\begin{cases} y_{12}+y_{22}=0 \\ y_{12}+y_{22}=0 \end{cases}.$$

Решая их совместно находим $Y$ :

$$\left(\begin{matrix} \boxed{1} & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{matrix}\right.\right) c_2-c_1 \sim \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right.\right)\sim(1 \quad 1|3 \quad 0),$$

$r(A)=r(A|B)<n$,система имеет бесконечное множество решений, найдём его:

$$\begin{cases} y_{11}+y_{21}=3 \\ y_{21}-\text{св. н.} \end{cases},\begin{cases} y_{12}+y_{22}=0 \\ y_{22}-\text{св. н.} \end{cases},\begin{cases} y_{11}=3-c_1 \\ y_{21}=c_1 \end{cases},\begin{cases} y_{12}=-c_2 \\ y_{22}=c_2 \end{cases};$$

Таким образом, $Y=\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3-c_1 & -c_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$;

Транспонируем обе части уравнения $X\cdot B=Y$, $X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3-c_1 & -c_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$ и находим $X^T$ :

$$\left(X\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)^T=\begin{pmatrix}3-c_1&-c_2\\c_1&c_2\end{pmatrix}^T,\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}^T\cdot X^T=\begin{pmatrix}3-c_1&-c_2\\c_1&c_2\end{pmatrix}^T,$$

$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_{11}&x_{21}\\x_{12}&x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-c_1&c_1\\-c_2&c_2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x_{11}&x_{21}\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-c_1&c_1\\-c_2&c_2\end{pmatrix}$, выпишем расширенную матрицу $\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&3-c_1&c_1\\0&0&-c_2&c_2\end{array}\right)$ положим $c_2=0$ (если $c_2\neq 0$,то решений нет $r(A)\neq r(A|B)$) , расширенная матрица принимает вид $\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&3-c_1&c_1\\0&0&0&0\end{array}\right)$, $r(A)=r(A|B)$ система имеет бесконечное множество решений, найдем их: $\begin{pmatrix}x_{11}&x_{21}\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-c_1&c_1\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_{11}=3-c_1\\x_{12}=c_3\end{cases},\begin{cases}x_{21}=c_1\\x_{22}=c_4\end{cases}.$

Итак, $X=\left(X^T\right)^T=\begin{pmatrix}3-c_1&c_1\\c_3&c_4\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}3-c_1&c_3\\c_1&c_4\end{pmatrix}.$

**1.Задания для самостоятельного решения.**

**1.** Решить систему матричным методом:

**а)** $\begin{cases}x_1+x_2=3\\x_1-x_2=-1\end{cases}$; **б)** $\begin{cases}x_1+x_2-3x_3=-2\\2x_1-x_2+5x_3=10\\2x_1+4x_2+x_3=1\end{cases}$; **в)** $\begin{cases}4x-3y+2z=9\\2x+5y-3z=4\\5x+6y-2z=18\end{cases}$;

**г)** $\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=6\\x_1+x_2-x_3=6\\-x_1+x_2=2\end{cases}$; **д)** $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=2\\3x_1+2x_2+x_3=2\\-x_1-x_2+4x_3=4\end{cases}$;

**е)** $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=5\\3x_1-5x_2+3x_3=-7\\2x_1+7x_2-x_3=13\end{cases}$; **ё)** $\begin{cases}x+3y+z=-5\\3x-4y+3z=11\\2x+4y-z=-9\end{cases}$.

**2.** Решить систему методом Крамера:

**а)** $\begin{cases} y+x=3 \\ 2x+2y=0 \end{cases}$; **б)** $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=-5 \\ x_1+9x_2-4x_3=-1 \\ -2x_1+6x_2-3x_3=6 \end{cases}$; **в)** $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=6 \\ 2x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1+x_2+2x_3=5 \end{cases}$;

**г)** $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=-1 \\ x_1-x_2+2x_3=0 \\ 4x_1-x_2+4x_3=-1. \end{cases}$; **д)** $\begin{cases} 3x+2y+z=-8 \\ 2x+3y+z=-3 \\ 2x+y+3z=-1 \end{cases}$;

**е)** $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=-5 \\ 2x_1-2x_2+3x_3=-8 \\ 3x_1+4x_2-4x_3=5 \end{cases}$; **ё)** $\begin{cases} x+5y+z=3 \\ 2x-3y+3z=8. \\ 2x+4y-z=0 \end{cases}$

**3.** Решить систему матричным методом и по формулам Крамера:

**а)** $\begin{cases} 3y-4x=1 \\ 3x+4y=18 \end{cases}$; **б)** $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=4 \\ 2x_1-x_2+x_3=2 \\ 3x_1+x_2+2x_3=6 \end{cases}$; **в)** $\begin{cases} 2x-y-z=4 \\ 3x+4y-2z=11 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}$;

**г)** $\begin{cases} x_1+5x_2-4x_3=-5 \\ 2x_1-3x_2+x_3=2 \\ 4x_1+x_2-3x_3=-4 \end{cases}$; **д)** $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+3z=16 \\ 5y-z=10 \end{cases}$;

**е)** $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5 \\ 2x_1-x_2+x_3=6 \\ x_1+5x_2=-3 \end{cases}$; **ё)** $\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 3x+2y+3z=6. \\ 2x-2y-z=7 \end{cases}$

**4.** Исследовать по теореме Кронекера-Капелли и решить систему, если решение существует, по методу Гаусса:

**а)** $\begin{cases} x+2y-4z=1 \\ 2x+y-5z=-1 \\ x-y-z=-2 \end{cases}$; **б)** $\begin{cases} 4x_1-7x_2+2x_3=-11 \\ 6x_1-2x_2+x_3=-1 \\ x_1-x_2+5x_3=22 \end{cases}$;

**в)** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 = -2 \end{cases}$; **г)** $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$;

**д)** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - 4x_4 = 10 \end{cases}$; **е)** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2 \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3 \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$;

**ё)** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 6 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \end{cases}$; **ж)** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$;

**з)** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3 \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8 \end{cases}$.

**5.** Исследовать по теореме Кронекера-Капелли и решить систему (если решение существует) по методу Жордана-Гаусса:

**а)** $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 20 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 15 \\ 3x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$; **б)** $\begin{cases} x + y - z = -4 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ -2x - 2z = 16 \end{cases}$;

**в)** $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_4 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$; **г)** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 6 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \end{cases}$;

**д)** $\begin{cases} x+2y+3z=-4 \\ 2x+3y+4z=1 \\ 3x+4y+5z=6 \end{cases}$; **е)** $\begin{cases} 2x_1-4x_2+x_3-5x_4=2 \\ 4x_1-7x_2-x_3-8x_4=-5 \\ 10x_1-18x_2+2x_3-23x_4=3 \\ 2x_1-3x_2+x_3-x_4=0 \end{cases}$;

**ё)** $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+5x_4=1 \\ x_1+3x_2-13x_3+22x_4=-1 \\ 3x_1+5x_2+x_3-2x_4=5 \\ 2x_1+3x_2+4x_3-7x_4=4 \end{cases}$; **ж)** $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5=1 \\ 2x_1-x_2+7x_3-3x_4+5x_5=2 \\ x_1+3x_2-2x_3+5x_4-7x_5=3 \\ 3x_1-2x_2+7x_3-5x_4+8x_5=3 \end{cases}$.

**6.**Определить при каких значениях $a$ и $b$ система уравнений $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3=b \\ 5x_1-8x_2+9x_3=3 \\ 2x_1+x_2+a\,x_3=-1. \end{cases}$ имеет: **а)** единственное решение; **б)** не имеет решений; **в)** имеет бесконечное множество решений.

**7.** Найти общее решение однородной системы уравнений:

**а)** $\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ -x_1-x_2=0 \end{cases}$; **б)** $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 3x-5y+3z=0 \\ 2x+7y-z=0 \end{cases}$;

**в)** $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3=0 \end{cases}$; **г)** $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0 \\ 4x_1-5x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0 \end{cases}$;

**д)** $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=0 \\ 4x_1-x_2+7x_3=0 \\ 2x_1+x_2+3x_3=0 \end{cases}$; **е)** $\begin{cases} x_1-3x_2+3x_4=0 \\ x_1+x_2-x_3+4x_4=0 \\ 2x_1-x_2+x_3+3x_4=0 \end{cases}$;

**ё)** $\begin{cases} -4x_2 + x_3 + 7x_4 = 0 \\ -2x_1 - 7x_2 + 2x_3 + 10x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \\ -5x_1 - 22x_2 + 5x_3 + 43x_4 = 0 \end{cases}$; **ж)** $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$.

**8.** Найти общее решение и ФСР однородной системы уравнений:

**а)** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$; **б)** $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 3x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$;

**в)** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$; **г)** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases}$;

**д)** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$; **е)** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$;

**ё)** $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$; **ж)** $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$.

**9.** Найти общее решение неоднородной системы уравнений, используя ФСР, соответствующей однородной:

**а)** $\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 2 \end{cases}$; **б)** $\begin{cases} x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_5 = 5 \\ 2x_1 + 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 4 \end{cases}$;

**в)** $\begin{cases} -x_1+4x_2+x_3-5x_4=-4 \\ x_1+5x_2+5x_3-4x_4=-2 \\ 3x_2+2x_3-3x_4=-2 \\ 2x_1+x_2+4x_3+x_4=2 \end{cases}.$

**10.** Определить, при каком значении $a$ система однородных уравнений $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3=0 \\ ax_1-14x_2+15x_3=0 \\ x_1+2x_2-3x_3=0 \end{cases}$, имеет нулевое решение.

**11.** Решить матричные уравнения, выполнить проверку:

**а)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - 2\cdot X = 3\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}\cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$;

**в)** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}\cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$;

**д)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -2 & 8 & 7 \\ 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; **е)** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}\cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

**ё)** $\begin{pmatrix} -2 & 4 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot X = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$; **ж)** $X\cdot\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

**з)** $X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; **и)** $X\cdot\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$;

**й)** $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$; **к)** $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$;

**л)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$;**м)** $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

**н)** $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ -1 & 12 \\ 12 & 27 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$.

**Ответы:**

**1.1.а)** $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$; **б)** $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$; **в)** $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 5 \end{cases}$; **г)** $\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = 4 \end{cases}$;

**д)** $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$; **е)** $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$; **ё)** $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ z = 1 \end{cases}$.

**1.2. а)** несовместна; **б)** $\begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 4 \end{cases}$;**в)** $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 3. \end{cases}$;**г)** $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{3} \\ x_2 = -\dfrac{1}{3} \\ x_3 = 0. \end{cases}$;

**д)** $\begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$; **е)** $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -2 \end{cases}$;**ё)** $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$.

**1.3. а)** $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$; **б)** $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=1 \\ x_3=1 \end{cases}$; **в)** $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$; **г)** $\begin{cases} x_1=5 \\ x_2=6 \\ x_3=10 \end{cases}$; **д)** $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \\ z=5 \end{cases}$;

**е)** $\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-1 \\ x_3=1 \end{cases}$; **ё)** $\begin{cases} x=3 \\ y=0 \\ z=-1 \end{cases}$.

**1.4.а)** $X=\begin{pmatrix} -1+2c \\ 1+c \\ c \end{pmatrix}$; **б)** $X=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$;

**в)** $X=\begin{pmatrix} 1+2c \\ c \end{pmatrix}$; **г)** система несовместна; **д)** $X=\begin{pmatrix} -8-4c_1-5c_2 \\ -6-2c_1-3c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$;

**е)** $X=\begin{pmatrix} \frac{3}{4}-\frac{1}{4}c_1+\frac{7}{4}c_2 \\ \frac{1}{2}+\frac{3}{2}c_1-\frac{1}{2}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$; **ё)** $X=\begin{pmatrix} c_1 \\ -2-2c_1+c_4 \\ 3+c_1-2c_4 \\ c_4 \end{pmatrix}$;

**ж)** $X=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}-\frac{1}{3}c \\ -\frac{1}{3}+\frac{5}{3}c \\ c \end{pmatrix}$; **з)** $X=\begin{pmatrix} -1-8c_1-c_2 \\ -2-5c_1+c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

**1.5.а)** $X=\begin{pmatrix}\frac{35}{9}-\frac{1}{9}c_1-\frac{1}{3}c_2\\ \frac{5}{9}-\frac{13}{9}c_1+\frac{2}{3}c_2\\ c_1\\ c_2\end{pmatrix}$; **б)** $X=\begin{pmatrix}-8-c\\ 4+2c\\ c\end{pmatrix}$;

**в)** $X=\begin{pmatrix}\frac{8}{9}+\frac{5}{9}c\\ -\frac{5}{9}-\frac{2}{9}c\\ c\end{pmatrix}$; **г)** $X=\begin{pmatrix}-3+c_1+2c_2\\ 4-2c_1-3c_2\\ c_1\\ c_2\end{pmatrix}$;

**д)** $X=\begin{pmatrix}14+c\\ -9-2c\\ c\end{pmatrix}$; **е)** $X=\begin{pmatrix}-\frac{19}{12}\\ 0\\ \frac{8}{3}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$; **ё)** $X=\begin{pmatrix}5-17c_1+29c_2\\ -2+10c_1-17c_2\\ c_1\\ c_2\end{pmatrix}$;

**ж)** система несовместна.**1.6. а)** $a\neq-3$;**б)** $a=-3, b\neq\frac{1}{3}$;

**в)** $a=-3, b=\frac{1}{3}$.**1.7. а)** $X=\begin{pmatrix}-c\\ c\end{pmatrix}$; **б)** $X=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$;**в)** $X=\begin{pmatrix}7c\\ -5c\\ c\end{pmatrix}$;

**г)** $X=\begin{pmatrix}8c_1-7c_2\\ 5c_2-6c_1\\ c_1\\ c_2\end{pmatrix}$; **д)** $X=\begin{pmatrix}-\frac{5}{3}c\\ \frac{1}{3}c\\ c\end{pmatrix}$; **е)** $X=\begin{pmatrix}-\frac{7}{3}c\\ \frac{2}{9}c\\ \frac{17}{9}c\\ c\end{pmatrix}$;

**ё)** $X=\begin{pmatrix}0\\4c\\9c\\c\end{pmatrix}$ **;ж)** $X=\begin{pmatrix}-3c_1-5c_2\\2c_1+3c_2\\c_1\\0\\c_2\end{pmatrix}$ **.1.8. а)** $X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$;

**б)** $X=\begin{pmatrix}4c\\c\\-5c\end{pmatrix}$ $-$ *общее решение,* $X=\begin{pmatrix}4\\1\\-5\end{pmatrix}$ $-$ ФСР;

**в)**

$X=\begin{pmatrix}2c_1+3c_2\\c_1\\c_2\end{pmatrix}$ $-$ *общее решение,* $X_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, X_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ $-$ *ФСР*;

**г)** $X=\begin{pmatrix}-\frac{7}{15}c_1\\-c_1-\frac{19}{15}c_2\\c_1\\c_2\end{pmatrix}$ $-$ *общее решение,*

$X_1=\begin{pmatrix}-\frac{7}{15}\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, X_2=\begin{pmatrix}0\\-\frac{19}{15}\\0\\1\end{pmatrix}$ $-$ *ФСР*;

**д)** $X=\begin{pmatrix}-c_1-c_2\\ -\frac{1}{2}c_3\\ c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix}$ $-$ *общее решение,*

$X_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ X_3=\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\0\\0\\1\end{pmatrix}-ФСР$ ;**е)** $X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ ;

**ё)** $X=\begin{pmatrix}-5c_1-2c_2\\3c_1+c_2\\c_1\\c_2\end{pmatrix}$ $-$ *общее решение,* $X_1=\begin{pmatrix}-5\\3\\1\\0\end{pmatrix},X_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}-ФСР.$

**1.9. а)**

$$X=X_{ч.н.}+c_1\cdot X_1+c_2\cdot X_2,\ X_{ч.н.}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},X_1=\begin{pmatrix}-9\\14\\1\\0\end{pmatrix},X_2=\begin{pmatrix}-8\\15\\0\\1\end{pmatrix};$$

**б)** $X=X_{ч.н.}+c_1\cdot X_1+c_2\cdot X_2+c_3\cdot X_3$,

$$X_{ч.н.}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix},X_1=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},X_2=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\3\\0\\1\\0\end{pmatrix},X_3=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix};$$

**в)**

$$X = X_{ч.н.} + c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2,\ X_{ч.н.} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**1.10.** $a = 5$. **1.11.а)** $X = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$; **б)** $X = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;**в)** $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

**г)** $X = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & 3 \\ \frac{5}{13} & -1 \\ \frac{30}{13} & 4 \end{pmatrix}$, **д)** $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,**е)** $X = \begin{pmatrix} \frac{(1-3c_1)}{2} & \frac{(2-3c_2)}{2} \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$,

**ё)** $X = \begin{pmatrix} 1+2c_1-2c_2+c_3 & 2+2c_4-2c_5+c_6 \\ c_1 & c_4 \\ c_2 & c_5 \\ c_3 & c_6 \end{pmatrix}$;

**ж)** $X = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{14}{4} & -\frac{11}{4} \end{pmatrix}$, **з)** $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

**и)** $X = \begin{pmatrix} -2+c_1-c_2+2c_3 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 3+c_4-c_5+2c_6 & c_4 & c_5 & c_6 \end{pmatrix}$, **й)** $X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$,

**к)** $X=\begin{pmatrix} -3-2c_1 & c_3 \\ -2c_2 & c_4 \end{pmatrix}$,**л)** $X=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$,**м)** $X=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

**н)** $X=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

# ГЛАВА 2. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

## 2.1. Определение линейного пространства. Подпространства линейного пространства.

Мы будем, в основном, рассматривать два числовых поля: поле действительных (вещественных) чисел $R$ и поле комплексных чисел $C$. Буквой $P$ будем обозначать одно из этих полей.

Непустое множество $L$ называется **линейным** (или векторным) **пространством** над полем $P$, если:

**1)** в $L$ введена операция сложения, ставящая в соответствие любой паре элементов $x, y\epsilon L$ однозначно определенный элемент из множества $L$, называемый их суммой и обозначаемый $x+y$;

**2)** введена операция умножения чисел из $P$ и элементов множества $L$, ставящая в соответствие любой паре элементов $\alpha\epsilon P$, $x\epsilon L$ однозначно определенный элемент из $L$, называемый их произведением и обозначаемый $\alpha x$;

**3)** введенные операции должны удовлетворять следующим аксиомам:

**1.** $x+y=y+x$;

**2.** $(x+y)+z=x+(y+z)$;

**3.** Существует нулевой элемент $0\epsilon L$: $x+0=x$;

**4.** Для каждого элемента $x\epsilon L$ существует противоположный элемент $-x\epsilon L$:

$x+(-x)=0$;

**5.** $1\cdot x=x$;

**6.** $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$;

**7.** $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$;

**8.** $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

В аналитической геометрии перечисленными свойствами обладают векторы, поэтому часто элементы любого линейного пространства называют векторами. В алгебре это строки, столбцы или целые матрицы. В математическом анализе это непрерывные на отрезке функции.

**Замечание:** если линейное пространство рассматривается над полем $P=R$, то оно называется вещественным линейным (векторным) пространством, если же линейное пространство рассматривается над полем $P = C$, то оно называется комплексным линейным (векторным) пространством.

**Пример 2.1.** Проверить, являются ли следующие множества линейными пространствами: **а)** Множество $n$ -мерных (арифметических) векторов $R^n$;**б)** Множество $M_{m\times n}$- множество матриц размера $m\times n$ с вещественными элементами; **в)** Множество всех многочленов (полиномов) $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$.

Решение.

**а)** Пространство $R^n$ состоит из всех вектор-столбцов с $n$ вещественными элементами. Поскольку вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно представить в виде матрицы-столбца $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$,то операции в $R^n$введены как обычные матричные операции:

$$X + Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \cdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \alpha X = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \cdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что есть возможность складывать элементы (векторы), умножать на число с выполнением свойств (аксиом) линейных операций над векторами 1)-8).

Таким образом, множество $n$ -мерных (арифметических) векторов $R^n$ является линейным пространством.

**б)** Обозначим через $M_{m\times n}(R)$-множество всех матриц размеров $m\times n$ с вещественными элементами и обычными матричными операциями сложения и умножения на вещественное число:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\alpha A = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Непосредственно исходя из свойств действий над матрицами, убеждаемся, что аксиомы 1)-8) выполняются, следовательно, множество $M_{m\times n}$ с рассмотренными операциями является линейным пространством.

**Замечания**: для линейного пространства всех квадратных матриц вместо $M_{n\times n}(R)$-будем использовать обозначение $M_n(R)$.

**в)** Множество всех многочленов (полиномов) $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ с естественным образом введенными для них операциями сложения и умножения на число образуют линейное пространство.

Действительно, при сложении двух многочленов степень многочлена, полученного в результате, не превосходит наибольшей из степеней $n$ исходных многочленов, и полученный многочлен принадлежит множеству $P_n(x)$,то есть операция сложения определена на $P_n(x)$. Заметим, что и операция умножения многочлена на число не превосходит наибольшей из степеней $n$. Роль нуля при этом играет полином, все коэффициенты которого равны нулю $P_0(x) = 0$,а в качестве противоположного к многочлену $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ выступает многочлен $-P_n(x) = -a_0x^n - a_1x^{n-1}-\ldots-a_n$.

**Замечание:** для простоты изложения, в дальнейшем, пространство всех многочленов степени не больше $n$ от одной неизвестной $x$ с вещественными коэффициентами будем обозначать $R[x^n]$.

Таким образом, элементы линейных пространств могут быть совершенно различной природы: векторы, матрицы, многочлены и так далее.

**Теорема 2.1 (простейшие свойства линейных пространств)**:

**1)**В любом линейном пространстве существует единственный нулевой элемент;

**2)**В любом линейном пространстве существует единственный противоположный элемент;

**3)**$-0 = 0$;

**4)** $-(-x) = x$;

**5)** $0 \cdot x = 0$;

**6)** $-1 \cdot x = -x$;

**7)** $\forall \alpha \epsilon R \, , \alpha \cdot 0 = 0$.

Доказательство.

Данные свойства вытекают из определения линейного пространства.

Докажем, например, свойство 6):

$$-1 \cdot x = -1 \cdot x + 0 = -1 \cdot x + x - x = (-1+1)x - x =$$
$$= 0 \cdot x - x = 0 - x = -x.$$

**Подпространства линейного пространства.**

Нередко возникает необходимость разбиения линейного(векторного) пространства на части, называемые подпространствами. В рамках определенного подпространства решение частной задачи может оказаться более рациональным.

Пусть $P = R$ – поле вещественных чисел, либо $P = C$ -поле комплексных чисел, $L$ – линейное пространство над полем $P$.

**Линейным подпространством** линейного пространства $L$ называется непустое множество $L_1$ векторов из $L$, обладающее следующими свойствами:

**1)** из того, что $\vec{a}, \vec{b} \epsilon L_1$, следует что $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \epsilon L_1$;

**2)** из того, что $\vec{a} \in L_1$, а число $\alpha \epsilon P$, следует что $\alpha\vec{a} \in L_1$.

Любое линейное подпространство является линейным пространством.

**Обозначение:** $L_1 \subset L$.

Размерность любого подпространства не превосходит размерности всего пространства: в подпространстве не может быть больше линейно независимых векторов, чем во всем пространстве.

**Замечание:** из определения линейного подпространства следует, что любое подпространство обязательно содержит нулевой вектор и противоположный к каждому входящему в него вектору.

**Размерностью** линейного подпространства $L_1$ называется число векторов в базисе данного подпространства.

**Обозначение:** $\boldsymbol{dimL_1}$ .

9

**Пример 2.2.** Является ли множество $L_1$ всех векторов с положительными действительными координатами линейным пространством.

Решение.

Введём обозначение:

$L_1 = \{x : x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \epsilon R, x_i > 0, i = 1,2, \dots, n\}$- множество всех векторов с положительными действительными координатами. Данное множество не является линейным пространством, так как это множество не выдерживает операцию умножения вектора на отрицательное число.

Так, например,если $\alpha = -1 \epsilon R, x = (1,1, \dots ,1) \epsilon L_1$,
$\alpha x = (-1, -1, \dots , -1, -1) \notin L_1$.

**Пример 2.3.** Является ли подпространством множество векторов, параллельных прямой, проходящей через начало координат.

Решение.

Пусть для наглядности $L = R^2$. Фиксированную прямую обозначим через $l$ .

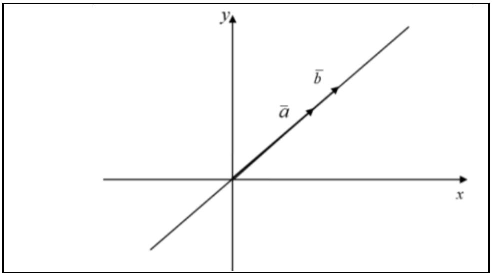


Рис.1

Очевидно, что $\vec{a} + \vec{b} \, \epsilon l, \quad \alpha \vec{a} \epsilon l$ и выполняются аксиомы (1–8).

Следовательно множество векторов, параллельных прямой, проходящей через начало координат, является подпространством.

**Пример 2.4.** Является ли подпространством линейного пространства $L = M_n(R)$ множество вырожденных квадратных матриц $n$ -го порядка?

Решение.

Обозначим через $L_1$ множество всех вырожденных (определитель которых равен нулю) квадратных матриц $n$ -го порядка. Это подмножество не пусто, так как содержит, например, нулевую матрицу порядка $n$.

Множество вырожденных квадратных матриц $n$ -го порядка $L_1$ не является подпространством линейного пространства $L = M_n(R)$, так как сумма двух вырожденных матриц может оказаться невырожденной матрицей.

Разберем данную ситуацию на конкретном примере.

Пусть $n = 2$, рассмотрим множество вырожденных матриц второго порядка. Пусть $A, B \in L_1$, возьмем, например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, |A| = 0, |B| = 0$:

$A+B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, |A+B|=1\neq 0$,следовательно сумма матриц $A+B$ является невырожденной матрицей, то есть $A+B\notin L_1$.

**Пример 2.5.** Является ли множество диагональных квадратных матриц $n$ -го порядка с различными элементами на главной диагонали подпространством линейного пространства $L=M_n(R)$.

Решение.

Напомним, что диагональная матрица — это квадратная матрица, все элементы которой, стоящие вне главной диагонали, равны нулю.

Обозначим через $L_1$ множество всех диагональных квадратных матриц $n$ -го порядка с различными элементами на главной диагонали.

Для примера возьмём $n=2,\ , A_1=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0\\ 0 & \beta_1\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}\alpha_2 & 0\\ 0 & \beta_2\end{pmatrix}$, $A_1, A_2\in L_1$.

Пусть $\alpha=0, \alpha\epsilon R, \alpha_1=1, \beta_1=2, \alpha_2=3, \beta_2=4$:

$A_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}, A_1+A_2=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}\epsilon L_1$,

$\alpha A_1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\epsilon L_1$, так как нулевая матрица является частным случаем диагональной матрицы.

Аксиомы (1–8) выполняются, поэтому множество диагональных квадратных матриц $n$-го порядка с различными элементами на главной диагонали является подпространство линейного пространства $L=M_n(R)$.

**Пример 2.6.** Является ли подпространством линейного пространства множество векторов, у которых второй элемент в два раза больше первого ($n\geq 2$).

Решение.

Пусть для наглядности $n=2, \alpha\epsilon R, L_1=\{\vec{x}: \vec{x}=(x_1, 2x_1), x_i\epsilon R\}$,тогда рассмотрим следующие векторы с координатами $(x_1; x_2)$, где $x_2=2x_1$, возьмем, например, $\vec{a}=(1;2), \vec{b}=(2;4), \vec{a}, \vec{b}\ \epsilon L_1$ . Очевидно, что

$\vec{a}+\vec{b}=(3;6)\ \epsilon\ L_1$, при $\alpha=0, \alpha\vec{a}=(0;0), \alpha\vec{a}\notin L_1$, следовательно данное множество не является подпространством линейного пространства.

**Пример 2.7.** Является ли множество $L_1$ всех векторов, у которых сумма первого и второго элемента равна нулю подпространством линейного пространства.

Решение.

Пусть для наглядности $n = 2$.

Рассмотрим следующие векторы с координатами $(x_1; x_2)$,где $x_2 = -x_1$,возьмем, например, $\vec{a} = (1; -1), \vec{b} = (-2; 2), \vec{a}, \vec{b} \epsilon\, L_1$,очевидно, что $\vec{a} + \vec{b}\, \epsilon L_1$, $\alpha\vec{a} \epsilon L_1$, аксиомы (1–8) выполняются, следовательно данное множество является подпространством линейного пространства $L = R^n$.

**Пример 2.8.** Является ли множество$L_1$ всех векторов пространства $R^2$ с координатами, делящимися на $k \in N$ нацело, подпространством линейного пространства $L = R^2$.

Решение.

В определение подпространства входит умножение векторов на любое действительное число $\alpha$, а не только на целые числа. Пусть $k = 3$ , возьмём для примера вектор $\vec{a} = (3; 0)$ . Умножим вектор $\vec{a}$ на число $\alpha = \frac{1}{3}$, получим вектор $\vec{b} = (1; 0)$, который не делится нацело на $3$ .Таким образом, множество $L_1$не является линейным подпространством. Для того, чтобы это стало возможным, необходимо, чтобы умножение векторов проводилось только на целые числа.

**2.Задания для самостоятельного решения.**

**1.**Является ли линейным подпространством в пространстве матриц порядка $n$ подмножество невырожденные матриц.

**2.** Является ли линейным подпространством в пространстве матриц порядка $n$ подмножество матриц с нулевой последней строкой.

**3.** Является ли линейным подпространством в пространстве матриц порядка $n$ подмножество матриц с нулевой диагональю.

**4.** Является ли линейным подпространством в пространстве матриц порядка $n$ подмножество диагональных матрицы.

**5.** Является ли линейным подпространством в пространстве матриц порядка $n$ подмножество верхне-треугольных матрицы.

**6.** Является ли линейным подпространством множество векторов, все три координаты которых равны.

**7.** Является ли линейным подпространством множество векторов, первые две координаты которых равны.

**8.** Является ли линейным подпространством множество векторов, первые две координаты которых равны 0.

**9.** Является ли линейным подпространством множество, состоящее только из нулевого вектора.

**10.** Является ли линейным подпространством множество векторов, сумма координат которых равна 1.

**11.** Множество n-мерных векторов, у которых координаты с четными номерами равны нулю.

**12.** Является ли линейным пространством пустое множество.

**13.** Является ли линейным пространством множество, состоящее из одного -нулевого элемента.

**14.** Выяснить, является ли линейным пространством множество векторов, все координаты которых равны между собой.

**15.** Выяснить, является ли линейным пространством множество векторов, первая координата которых равна $0$;

**16.** Выяснить, является ли линейным пространством множество векторов, сумма координат которых равна $0$.

**Ответы:**

**2.1.** нет, так как сумма невырожденных матриц может быть матрицей вырожденной.**2.2.** да.**2.3.**да.**2.4.**да.**2.5.**да.**2.6.** да.**2.7.** нет, так как сумма невырожденных матриц может быть матрицей вырожденной.**2.8.** нет, так как в определение подпространства входит умножение векторов на любое действительное число, при $\alpha = 0$, $\alpha\vec{a} \notin L_1$.

**2.9.**да.**2.10.**нет, так как$\vec{a} + \vec{b} \notin L_1$.**2.11.**да. **2.12.**нет, так как не содержит ни одного элемента. **2.13** да. **2.14.** да.**2.15.** да.**2.16.** нет.

## 2.2. Линейная комбинация. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис.

**Линейной комбинацией** системы векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называют вектор, определяемый равенством

$$\boldsymbol{\vec{x} = \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \dots + \alpha_n\overrightarrow{a_n}} \quad \textbf{(2.1)},$$

где $\alpha_i (i = 1,2, \dots, n)$ — некоторые числа.

**Пример 2.9.** Найти линейную комбинацию векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ в $R^3$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:**а)** $\overrightarrow{a_1} = (3; -1; 2), \overrightarrow{a_2} = (5; 2; -3)$, $\overrightarrow{a_3} = (-4; 1; -1)$, $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = -3, \alpha_3 = 4$;**б)** $\overrightarrow{a_1} = (0; 1; 4)$, $\overrightarrow{a_2} = (5; 0; -1), \overrightarrow{a_3} = (0; 1; 0)$, $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = -1$;
**в)** $\overrightarrow{a_1} = (-1; 0; 5), \overrightarrow{a_2} = (2; 0; -4), \overrightarrow{a_3} = (-1; 1; 3)$, $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -3, \alpha_3 = 0$.

Решение.

**а)** В соответствии с определением, линейная комбинация векто ров $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ является вектор, определяемый равенством:

$\vec{x} = \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \alpha_3\overrightarrow{a_3} = 2(3; -1; 2) + (-3)(5; 2; -3) +$
$+4(-4; 1; -1) = (6; -2; 4) + (-15; -6; 9) + (-16; 4; -4) =$
$= (-25; -4; 9)$.

**б)** $\vec{x} = \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \alpha_3\overrightarrow{a_3} = 0(0; 1; 4) + 2(5; 0; -1) +$
$+(-1)(0; 1; 0) = (10; 0; -2) + (0; -1; 0) = (10; -1; -2)$.

**в)** $\vec{x} = \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \alpha_3\overrightarrow{a_3} = (-1; 0; 5) - 3(2; 0; -4) +$
$+0(-1; 1; 3) = (-1; 0; 5) - (6; 0; -12) = (-7; 0; 17)$.

**Пример 2.10.** Является ли вектор $\vec{x}$ линейной комбинацией векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_4}$: **а)** $\vec{x} = (6; 8; 4)$, $\overrightarrow{a_1} = (1; -2; 3), \overrightarrow{a_2} = (1; -1; 2)$, $\overrightarrow{a_3} = (1; 4; -1)$;**б)** $\vec{x} = (1; 0; 1)$, $\overrightarrow{a_1} = (1; 2; 1), \overrightarrow{a_2} = (2; 4; 2)$, $\overrightarrow{a_3} = (-1; 1; 5), \overrightarrow{a_4} = (2; 0; 2)$;**в)** $\vec{x} = (8; 7; 1)$, $\overrightarrow{a_1} = (4; 3; 5)$, $\overrightarrow{a_2} = (-3; -2; -3), \overrightarrow{a_3} = (2; 1; 1), \overrightarrow{a_4} = (-1; -3; -8)$;
**г)**$\vec{x} = (-1; -1; -1; -2)$, $\overrightarrow{a_1} = (2; 1; 3; -1)$, $\overrightarrow{a_2} = (-4; -2; -6; 2)$, $\overrightarrow{a_3} = (2; 5; 8; -5), \overrightarrow{a_4} = (-1; -1; -1; -2)$.

Решение.

**а)** Составляем линейную комбинацию векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$:

$\vec{x} = \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \alpha_3\,\overrightarrow{a_3}$, после подстановки элементов в это векторное уравнение получим:

$$\begin{pmatrix}6\\8\\4\end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix}\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\\ -2\alpha_1 - \alpha_2 + 4\alpha_3\\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\8\\4\end{pmatrix},$$

учитывая, что две матрицы равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие элементы, получим систему уравнений $\begin{cases}\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 6\\ -2\alpha_1 - \alpha_2 + 4\,\alpha_3 = 8\\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 4\end{cases}$,решая её методом Гаусса имеем:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1} & 1 & 1 & 6\\ -2 & -1 & 4 & 8\\ 3 & 2 & -1 & 4\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ c_2 + 2c_1\\ c_3 - 3c_1\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 6\\ 0 & \boxed{1} & 6 & 20\\ 0 & -1 & -4 & -14\end{array}\right)\begin{array}{c}c_1 - c_2\\ \sim\\ c_3 + c_2\end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-5&-14\\0&1&6&20\\0&0&2&6\end{array}\right)\underset{\frac{c_3}{2}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-5&-14\\0&1&6&20\\0&0&\boxed{1}&3\end{array}\right)\begin{array}{c}c_1+5c_3\\c_2-6c_3\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{array}\right),$$

$r(A)=r(A|B)=3$, система совместна и определена, то есть имеет единственное решение $\begin{cases}\alpha_1=1\\\alpha_2=2.\\\alpha_3=3\end{cases}$

Значит, вектор $\vec{x}$ является линейной комбинацией векторов системы $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}$, то есть представим в виде $\vec{x}=\overrightarrow{a_1}+2\overrightarrow{a_2}+3\overrightarrow{a_3}$. Поскольку система имеет единственное решение, то полученное разложение вектора $\vec{x}$ в линейную комбинацию единственно.

**б)** Вектор $\vec{x}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов данной системы, если имеет место равенство $\vec{x}=\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\overrightarrow{a_2}+\alpha_3\overrightarrow{a_3}+\alpha_4\overrightarrow{a_4}$ :

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}-1\\1\\5\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}\text{ или}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3+2\alpha_4\\2\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3\\\alpha_1+2\alpha_2+5\alpha_3+2\alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Учитывая, что две матрицы равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие элементы, получим систему уравнений $\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3+2\alpha_4=1\\2\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3=0\\\alpha_1+2\alpha_2+5\alpha_3+2\alpha_4=1\end{cases}$, решая её относительно неизвестных $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\alpha_4$, имеем:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}\boxed{1}&2&-1&2&1\\2&4&1&0&0\\1&2&5&2&1\end{array}\right)\underset{\begin{array}{c}c_2-2c_1\\c_3-c_1\end{array}}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&2&1\\0&0&3&-4&-2\\0&0&6&0&0\end{array}\right)\underset{\frac{c_3}{6}}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&2&1\\0&0&3&-4&-2\\0&0&1&0&0\end{array}\right)\underset{c_3\leftrightarrow c_2}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&2&1\\0&0&\boxed{1}&0&0\\0&0&3&-4&-2\end{array}\right)\underset{c_3-3c_2}{\overset{c_1+c_2}{\sim}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&0&2&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&-4&-2\end{array}\right)\underset{\frac{c_3}{(-4)}}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&0&2&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&\boxed{1}&0,5\end{array}\right)\overset{c_1-2c_3}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}\underline{1}&2&0&0&0\\0&0&\underline{1}&0&0\\0&0&0&\underline{1}&0,5\end{array}\right),\ r(A)=r(A|B)=3<n=4\text{ -}$$ система совместна и неопределенна.

Система уравнений совместна, значит, вектор $\vec{x}$ является линейной комбинацией векторов системы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_4}$ и неопределенна -имеет бесконечно множество решений, то есть разложение вектора $\vec{x}$ в линейную комбинацию не единственно, чтобы найти коэффициенты линейной комбинации $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \alpha_4$, достаточно найти какое-нибудь частное решение системы.

Записываем систему, соответствующую приведенной матрице системы, и получаем выражение главных неизвестных $\alpha_1,\ \alpha_3, \alpha_4$через свободный $\alpha_2$:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0{,}5 \end{cases}, \begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha_2 \\ \alpha_2 - \text{св. н.} \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0{,}5 \end{cases} \text{,пусть } \alpha_2 = c\text{,тогда} \begin{cases} \alpha_1 = -2c \\ \alpha_2 = c \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0{,}5 \end{cases}$$

-общее решение системы, чтобы найти частное решение, положим $\alpha_2 = 0$, тогда

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0{,}5 \end{cases}.$$

Таким образом, $\vec{x} = 0 \cdot \overrightarrow{a_1} + 0 \cdot \overrightarrow{a_2} + 0 \cdot \overrightarrow{a_3} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{a_4} = 0{,}5\,\overrightarrow{a_4}$.

Поскольку разложение вектора $\vec{x}$ в линейную комбинацию не единственно, можно выбрать и другое частное решение системы уравнений, положив, например,

$$\alpha_2 = 1, \text{ тогда} \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0{,}5 \end{cases} \text{,то } \vec{x} = \overrightarrow{a_2} + 0{,}5\overrightarrow{a_4}.$$

**в)** $\vec{x} = \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \alpha_3\overrightarrow{a_3} + \alpha_4\overrightarrow{a_4},$ ,

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix},$$ запишем

расширенную матрицу системы и найдем её решение:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & 2 & -1 & 8 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 5 & -3 & 1 & -8 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} c_1 - c_3 \\ \sim \\ \phantom{x} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{-1} & 0 & 1 & 7 & 7 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 5 & -3 & 1 & -8 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \phantom{x} \\ c_2 + 3c_1 \sim \\ c_3 + 5c_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & -2 & 4 & 18 & 28 \\ 0 & -3 & 6 & 27 & 36 \end{array}\right) \begin{array}{l} c_3 \cdot (-1) \\ c_3 : (-2) \sim \\ c_3 : (-3) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -7 & -7 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -9 & -14 \\ 0 & 1 & -2 & -9 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \phantom{x} \\ \sim \\ c_3 - c_2 \end{array}$$

$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} \underline{1} & 0 & -1 & -7 & -7 \\ 0 & \underline{1} & -2 & -9 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{2} \end{array}\right)$, $r(A)=2\neq r(A|B)=3$,система несовместна, то есть не имеет решение, следовательно, вектор $\vec{x}$ не является линейной комбинацией системы векторов $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3},\overrightarrow{a_4}$.

**г)** $\vec{x}=\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\overrightarrow{a_2}+\alpha_3\overrightarrow{a_3}+\alpha_4\overrightarrow{a_4}$,

$\alpha_1\begin{pmatrix}2\\1\\3\\-1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}-4\\-2\\-6\\2\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}5\\2\\8\\-5\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\\1\end{pmatrix}$, запишем расширенную матрицу системы и найдем её решение:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -6 & 8 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -5 & -2 & 2 \end{array}\right) \overset{c_1-c_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -6 & 8 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -5 & -2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ c_2-c_1 \sim \\ c_3-3c_1 \\ c_4+c_1 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ c_2\cdot(-1) \sim \\ c_3:2 \\ c_4:(-2) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} c_1-3c_2 \\ \sim \\ c_3-c_2 \\ c_4-c_2 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \underline{1} & -2 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 1 & -1 \end{array}\right), r(A)=r(A|B)=2<n=4,$$

следовательно, разложение вектора $\vec{x}$ в виде линейной комбинации не единственно, решив систему, найдем это представление:

$$\begin{cases} \alpha_1-2\alpha_2-3\alpha_4=2 \\ \alpha_3+\alpha_4=-1 \\ \alpha_{2,4}-\text{св. н.} \end{cases}, \begin{cases} \alpha_1=2+2\alpha_2+3\alpha_4 \\ \alpha_2-\text{св. н.} \\ \alpha_3=-1-\alpha_4 \\ \alpha_4-\text{св. н.} \end{cases}$$

,тогда $\begin{cases} \alpha_1=2+2c_2+3c_4 \\ \alpha_2=c_2 \\ \alpha_3=-1-c_4 \\ \alpha_4=c_4 \end{cases}$ -общее решение системы, чтобы найти частное решение, положим $\alpha_2=0$, $\alpha_4=0$, тогда $\begin{cases} \alpha_1=2 \\ \alpha_2=0 \\ \alpha_3=-1 \\ \alpha_4=0 \end{cases}$.

Таким образом, $\vec{x}=2\overrightarrow{a_1}-\overrightarrow{a_3}$ .

**Линейная зависимой, независимость векторов.**

Система $n$ -мерных векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ называется **линейно независимой** если из равенства линейной комбинации нулю $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + +\alpha_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = 0$, следует, что все коэффициенты равны нулю $\alpha_i = 0, i = 1,2, \dots, n$ $(\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0)$ ,в противном случае, система векторов называется **линейно зависимой**, то есть если найдутся такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, из которых хотя бы одно $\alpha_i$ отлично от нуля $(\alpha_i \neq 0)$.

**Теорема 2.2(о линейной зависимости векторов).** Система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ называется линейно зависимой, тогда и только тогда, когда один из этих векторов может быть представлен как линейная комбинация остальных.

Доказательство.

Если система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ линейно зависима, то по определению линейной зависимости, из линейной комбинации равной нулю

$\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = 0$, следует, что существуют хотя бы одно $\alpha_i \neq 0$.

Пусть $\alpha_1 \neq 0$ ,тогда $\alpha_1\overrightarrow{a_1} = -\alpha_2\overrightarrow{a_2} - \ldots - \alpha_n\overrightarrow{a_n}$, разделим обе части последнего равенства на $\alpha_1$, имеем: $\overrightarrow{a_1} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\overrightarrow{a_2} - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\overrightarrow{a_n}$.

Вектор $\overrightarrow{a_1}$ есть линейная комбинация векторов $\overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ с коэффициентами $-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\alpha_1}$.

Таким образом, если система векторов линейно зависима, то хотя бы один из векторов линейно выражается через остальные, а если линейно независима, то не выражается.

**Геометрический смысл линейной зависимости и линейной независимости векторов.**

Система, состоящая из одного вектора $\vec{e}$, линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой $\vec{e} = 0$.

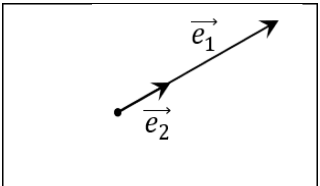


Рис.2

Для того, чтобы два вектора $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$, были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы они были коллинеарные, это означает, что один вектор выражается через другой $\overrightarrow{e_1} = \alpha\overrightarrow{e_2}$ (рис.2), в случае линейно независимости векторы неколлинеарные.

Для того, чтобы три вектора $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ были линейно зависимы, необходимо чтобы один из них, например $\overrightarrow{e_3}$, выражается через два других $\overrightarrow{e_3} = \alpha_1 \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \overrightarrow{e_2}$ , а это означает компланарность векторов $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ (рис.3) или, что то же самое, векторы лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

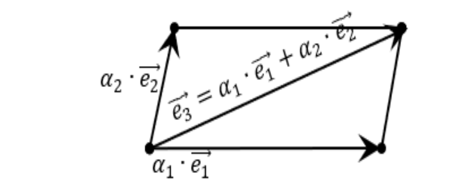

Рис.3

**Пример 2.11.** Являются ли линейно зависимыми элементы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ пространства $R^3$ и найти эту линейную зависимость:

**а)** $\overrightarrow{a_1} = (1;1;1), \overrightarrow{a_2} = (1;2;3), \overrightarrow{a_3} = (1;4;5)$; **б)** $\overrightarrow{a_1} = (1;2;3)$, $\overrightarrow{a_2} = (3;5;1), \overrightarrow{a_3} = (5;9;7)$;**в)** $\overrightarrow{a_1} = (3;2;3), \overrightarrow{a_2} = (1;-2;0)$, $\overrightarrow{a_3} = (-6;4;-3)$; **г)** $\overrightarrow{a_1} = (2;2;-2), \overrightarrow{a_2} = (-2;-1;-2)$, $\overrightarrow{a_3} = (-3;-1;3)$.

Решение.

**а)**Исходя из определения система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ линейно зависима, если из равенства $\alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \overrightarrow{a_2} + \alpha_3 \overrightarrow{a_3} = 0$,следует, что хотя бы одно из $\alpha_i \neq 0, i = 1,2,3$, подставляя значения векторов в линейную комбинацию, учитывая, что вектор является матрицей-столбцом имеем: $\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, полученное матричное равенство эквивалентно однородной системе уравнений $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0. \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \end{cases}$

Решая полученную однородную систему методом Гаусса, найдем $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ c_2 - c_1 \\ c_3 - c_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ c_3 - 2c_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, r = n = 3 \text{-ранг}$$

матрицы системы равен числу неизвестных, следовательно система имеет только нулевое решение, то есть $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . Таким образом, из линейной комбинации равной нулю, получили, что все коэффициенты равны нулю, следовательно, система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ линейно независима, то есть ни один из векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ линейно не выражается через остальные;

**б)** Система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ линейно зависима, если из равенства $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \alpha_3\overrightarrow{a_3} = 0$, следует, что хотя бы одно из $\alpha_i \neq 0$, $i = 1,2,3$, подставляя значения векторов в линейную комбинацию имеем:

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}5\\9\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$\begin{cases}\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0\\ 2\alpha_1 + 5\,\alpha_2 + 9\,\alpha_3 = 0,\\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + 7\alpha_3 = 0\end{cases}$ находим решение СУ методом полного исключения неизвестных:

$$\begin{pmatrix}\boxed{1} & 3 & 5\\ 2 & 5 & 9\\ 3 & 1 & 7\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ c_2 - 2c_1\\ c_3 - 3c_1\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & -8 & -8\end{pmatrix}\begin{matrix}(-1)c_2\\ \dfrac{c_3}{-8}\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 0 & \boxed{1} & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}c_1 - 3c_2\\ \sim\\ c_3 - c_2\end{matrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}, r = 2 < n = 3,$$ следовательно, система совместна и неопределенна (имеет бесконечное множество решений), то есть элементы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ линейно зависимы. Найдем эту линейную зависимость, выражая главные неизвестные $\alpha_1, \alpha_2$ через свободный

$\alpha_3 = c$ получим общее решение системы:

$$\begin{cases}\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0\\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0\end{cases}, \begin{cases}\alpha_1 = -2\alpha_3\\ \alpha_2 = -\alpha_3\end{cases}, \begin{cases}\alpha_1 = -2c\\ \alpha_2 = -c\\ \alpha_3 = c\end{cases}$$ -общее решение.

Подставляя полученное решение в линейную комбинацию, получим линейную зависимость векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$:

$$\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \alpha_3\overrightarrow{a_3} = 0,$$

$$-2c\overrightarrow{a_1} - c\overrightarrow{a_2} + c\overrightarrow{a_3} = 0 | : (-c \neq 0),$$

$2\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_3} = 0$- линейная зависимость, из которой любой из векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ можно выразить через два других.

Например, выразим вектор $\overrightarrow{a_3}$ через векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$, , получим $\overrightarrow{a_3} = 2\overrightarrow{a_1}$.

**в)** Подставляя значения векторов в линейную комбинацию $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \alpha_3\overrightarrow{a_3} = 0$ имеем:

$\alpha_1\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}-6\\4\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{cases}3\alpha_1+\alpha_2-6\alpha_3=0\\2\alpha_1-2\alpha_2+4\alpha_3=0\\3\alpha_1-3\alpha_3=0\end{cases}$, находим решение СУ методом полного исключения неизвестных:

$$\begin{pmatrix}3&1&-6\\2&-2&4\\3&0&-3\end{pmatrix}\begin{matrix}\\c_2:2\\c_3:3\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}3&1&-6\\1&-1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}\underset{\sim}{c_1\leftrightarrow c_2}\begin{pmatrix}\boxed{1}&-1&2\\3&1&-6\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{matrix}\sim\\c_2-3c_1\\c_3-c_1\end{matrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&4&-12\\0&1&-3\end{pmatrix}c_2:4\sim\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&\boxed{1}&-3\\0&1&-3\end{pmatrix}\begin{matrix}c_1+c_2\\\sim\\c_3-c_2\end{matrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&\boxed{1}&-3\\0&0&0\end{pmatrix}\sim$$

$\sim\begin{pmatrix}\underline{1}&0&-1\\0&\underline{1}&-3\end{pmatrix}$, $r=2<n=3$, система имеет бесконечное множество решений, $\begin{cases}\alpha_1-\alpha_3=0\\\alpha_2-3\alpha_3=0\end{cases}$, $\begin{cases}\alpha_1=\alpha_3\\\alpha_2=3\alpha_3\end{cases}$, $\begin{cases}\alpha_1=c\\\alpha_2=3c\\\alpha_3=c\end{cases}$-общее решение.

Пусть $c=1$, $\begin{cases}\alpha_1=1\\\alpha_2=3\\\alpha_3=1\end{cases}$.

Таким образом, получим линейную зависимость $\overrightarrow{a_1}+3\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}=0$.

**г)** $\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\overrightarrow{a_2}+\alpha_3\overrightarrow{a_3}=0$,

$\alpha_1\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}-2\\-1\\-2\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}-3\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$,

$\begin{cases}2\alpha_1-2\alpha_2-3\alpha_3=0\\2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=0\\-2\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3=0\end{cases}$, находим решение СУ методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix}2&-2&-3\\2&-1&-1\\-2&-2&3\end{pmatrix}\begin{matrix}\\c_2-c_1\\c_3+c_1\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}2&-2&-3\\0&\underline{1}&2\\0&-4&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\sim\\c_3+4c_2\end{matrix}\begin{pmatrix}\underline{2}&-2&3\\0&\underline{1}&2\\0&0&\underline{8}\end{pmatrix},$$

$r=n=3$, система имеет единственное (нулевое) решение.

Таким образом, система векторов $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}$ линейно независима.

**Пример 2.12.** В линейном пространстве $R[x^2]$ исследовать на линейную зависимость систему многочленов: **а)** $f_1(x)=x^2+5, f_2(x)=x^2, f_3(x)=1$;**б)**$f_1(x)=x^2-2x-3, f_2(x)=x^2-x, f_3(x)=-x^2-2x+1$; **в)** $f_1(x)=-x^2-x-1, f_2(x)=2x^2+2x+2, f_3(x)=x^2+x+1, f_4(x)=-x^2+3x+1, f_5(x)=-2x^2+2x$.

Решение.

**а)** Заметим, что $f_1(x) = f_2(x) + 5f_3(x)$, то есть многочлен $f_1(x)$ является линейной комбинацией остальных многочленов, тогда по теореме 2.2 система многочленов $f_1(x) = x^2 + 5, f_2(x) = x^2, f_3(x) = 1$ – линейно зависима.

**б)** В данном случае напрямую сложно увидеть линейную (не)зависимость, поэтому воспользуемся определением линейной (не)зависимости -запишем линейную комбинацию системы многочленов и приравняем ее к нулю: $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0,\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \epsilon R$.

Подставим в данное равенство многочлены исходной системы получим: $\alpha_1(x^2 - 2x - 3) + \alpha_2(x^2 - x) + \alpha_3(-x^2 - 2x + 1) = 0$, раскроем скобки и приведем подобные слагаемые (относительно степеней $x$),

$$(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)x^2 + (-2\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3)x^1 + (-3\alpha_1 + \alpha_3)x^0 = \\ = 0x^2 + 0x^1 + 0x^0;$$

Два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты этих многочленов при одинаковых степенях $x$:

$x^2: \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0,$

$x^1: -2\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0,$

$x^0: -3\alpha_1 + \alpha_3 = 0.$

Таким образом, получим однородную систему уравнений $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \\ -3\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$ и найдем общее решение:

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{c_2 + 2c_1 \\ c_3 + 3c_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & \underline{1} & -4 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \underset{c_3 - 3c_2}{\sim} \begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & -1 \\ 0 & \underline{1} & -4 \\ 0 & 0 & \underline{10} \end{pmatrix},$$

$r = n = 3$, система уравнений имеет единственное (нулевое) решение, $\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$. Следовательно, система многочленов $f_1, f_2, f_3$ линейно независима.

**в)** Запишем линейную комбинацию системы многочленов $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$ и приравняем ее к нулю (нулевому многочлену) и подставим в полученное равенство исходные данные:

$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 + \alpha_4 f_4 + \alpha_5 f_5 = 0,$

$\alpha_1(-x^2 - x - 1) + \alpha_2(2x^2 + 2x + 2) + \alpha_3(x^2 + x + 1) +$
$+ \alpha_4(-x^2 + 3x + 1) + \alpha_5(-2x^2 + 2x) = 0,$

$(-\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 - 2\alpha_5)x^2 + (-\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5)x^1 +$

$+(-\alpha_1 + 2\,\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)x^0 = 0x^2 + 0x^1 + 0x^0;$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$,получим однородную систему уравнений $\begin{cases} -\alpha_1 + 2\,\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 - 2\alpha_5 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\,\alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\,\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases}$ и найдем её решение:

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & 2 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ c_2 - c_1 \\ c_3 - c_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ c_2 : 4 \sim \\ c_3 : 2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_1 + c_2 \\ \sim \\ c_3 - c_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-1) \cdot c_1 \\ \sim \\ \end{matrix}$$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, r = 2 < n = 5,$ система уравнений имеет бесконечное множество решений, то есть

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_5 = 0 \\ \alpha_4 + \alpha_5 = 0 \\ \alpha_{2,3,5} - \text{св. н.} \end{cases}; \begin{cases} \alpha_1 = 2c_2 + c_3 - c_5 \\ \alpha_4 = -c_5 \\ \alpha_{2,3,5} = c_{2,3,5} \end{cases}.$$

Таким образом, система многочленов $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$ –линейно зависима. Найдем саму линейную зависимость, для этого, выберем, например, $c_2 = c_3 = c_5 = 1$, тогда $\begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = 1 \\ \alpha_4 = -1 \\ \alpha_5 = 1 \end{cases}$. Подставляя полученные значения для $\alpha_{1,2,3,4,5}$ в равенство $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 + \alpha_4 f_4 + \alpha_5 f_5 = 0$, получим линейную зависимость $2f_1 + f_2 + f_3 - f_4 + f_5 = 0$.

**Пример 2.13.** Являются ли линейно зависимыми матрицы $A_1, A_2, A_3$ в линейном пространстве $M_2(R)$ в случае линейной зависимости найти эту линейную зависимость: **а)** $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; **б)** $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

**а)** Исходя из определения линейной зависимости система матриц $A_1, A_2, A_3$ линейно зависима, если из равенства линейной комбинации нулю $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = 0$,следует, что хотя бы один из коэффициентов $\alpha_i \neq 0$.

В нашем случае, имеем:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 2\,\alpha_1 \\ \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\,\alpha_2 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_3 & -\,\alpha_3 \\ 0 & 2\,\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 & 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2 + 2\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что две матрицы равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие элементы, получим систему уравнений $\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$,решая её относительно неизвестных $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$, имеем:

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ c_2 - 2c_1 \\ c_3 - c_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ c_2 : (-3) \\ c_3 \cdot (-1) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ c_3 - c_2 \\ c_4 - c_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$r = n = 3$, система уравнений имеет единственное решение, то есть $\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$. Таким образом, матрицы $A_1, A_2, A_3$линейно независимыми.

**б)** Запишем линейную комбинацию системы матриц и приравняем ее к нулевой матрице:

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = 0,$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 2\,\alpha_1 \\ \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\,\alpha_2 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_3 & -\,\alpha_3 \\ 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 & 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что две матрицы равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие элементы, получим систему уравнений $\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$ относительно неизвестных $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, решая её имеем:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{c_2 - 2c_1 \\ c_3 - c_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{c_2 : (-3) \\ c_3 \cdot (-1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{c_3 - c_2 \\ c_3 - c_2}}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix} \sim^{c_1 - 2c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, r = 2 < n = 3,$$

система уравнений имеет бесконечное множество решений, то есть общее решение имеет вид:

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 - \text{св. н.} \end{cases}; \begin{cases} \alpha_1 = -2 + c \\ \alpha_2 = -c \\ \alpha_3 = c. \end{cases}$$

Таким образом, матрицы $A_1, A_2, A_3$линейно зависимыми.

Найдем саму линейную зависимость, для этого, выберем, например, $\alpha_3 = 1$,тогда$\begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = 1. \end{cases}$

Подставляя полученные значения для $\alpha_{1,2,3}$в линейную комбинацию $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = 0$, получим линейную зависимость $-A_1 - A_2 + A_3 = 0$.

## Базис пространства.

**Базисом** называется максимально возможная в данном пространстве линейно независимая система векторов.

В пространстве $R^n$ существует система $n$ линейно независимых векторов. Любая система из $n+1$ векторов (и больше) линейно зависима.

Иначе говоря, векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ линейного пространства образуют его базис, если выполняются следующие условия:

1) $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ –линейно независимы;

2) $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}, \vec{x}$ – линейно зависимы для любого вектора $\vec{x}$ этого линейного пространства.

Если в линейном пространстве $L$ существует базис из $n$ векторов, то пространство называют **конечномерным**.

Число $n$ называют **размерностью** пространства $L$.

Другими словами, размерность пространства равна максимальному числу содержащихся в нем линейно независимых векторов.

**Обозначение:** $\boldsymbol{dim\, L = n}$ **-** размерность пространства $L$ равна $n$.

Если в пространстве можно найти сколь угодно много линейно независимых векторов, то такое пространство называется **бесконечномерным**.

Очевидно, что базис можно выбрать не единственным образом.

Например, если $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$– базис, то для любого $\alpha \neq 0$ векторы $\alpha\overrightarrow{a_1}, \alpha\overrightarrow{a_2}, \dots, \alpha\overrightarrow{a_n}$ так же образуют базис.

Любые два базисы в одном пространстве имеют одинаковое число элементов.

**Стандартный базис** — это последовательность ортогональных (перпендикулярных) единичных векторов.

**Обозначение:** $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ – стандартный базис в $R^n$.

**Примеры конечномерных пространств и их стандартных базисов:**

**1)** Арифметическое линейное пространство $R^n$ является конечномерным, его размерность $dim\ R^n = n$.

Стандартным базисом пространства $R^n$ являются, например, векторы $\overrightarrow{e_1} = (1; 0; \dots; 0), \overrightarrow{e_2} = (0; 1; \dots; 0), \dots, \overrightarrow{e_n} = (0; 0; \dots; 1)$.

Действительно, $|\overrightarrow{e_1}| = |\overrightarrow{e_2}| = \dots = |\overrightarrow{e_n}| = 1, \overrightarrow{e_1} \perp \overrightarrow{e_2} \perp \dots \perp \overrightarrow{e_n}$.

В частности, при $n = 2$ получим стандартный базис на плоскости $R^2$, то есть упорядоченную пару $\overrightarrow{e_1} = (1; 0), \overrightarrow{e_2} = (0; 1)$ неколлинеарных векторов этой плоскости.

При $n = 3$ получим базис в пространстве $R^3$, то есть упорядоченную тройку $\overrightarrow{e_1} = (1; 0; 0), \overrightarrow{e_2} = (0; 1; 0), \overrightarrow{e_3} = (0; 0; 1)$ некомпланарных векторов плоскости $R^3$.

**2)** Линейное пространство $M_2(R)$ матриц второго порядка с элементами из $R$ является конечномерным, имеет размерность

$dim\, M_2(R) = 2 \times 2 = 4$ со стандартным базисом $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Действительно,

1)$E_1, E_2, E_3, E_4$ –линейно независимы, так как из линейной комбинации равной нулю $a_{11}E_1 + a_{12}E_2 + a_{21}E_3 + a_{22}E_4 = 0$,следует,что $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$.

2) $E_1, E_2, E_3, E_4, A$ –линейно зависимы для любой матрицы $A \epsilon M_2(R)$, так как $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}E_1 + a_{12}E_2 + a_{21}E_3 + a_{22}E_4$.

**3)** $R[x^n]$ – пространство всех многочленов степени не больше $n$ от одной неизвестной $x$ с вещественными коэффициентами является конечномерным, имеет размерность $dim\, R[x^n] = n$, со стандартным базисом$e_1(x) = 1, e_2(x) = x, e_2(x) = x^2, \ldots, e_n(x) = x^{n-1}$.

**Замечание:** фундаментальную систему решений (ФСР) однородной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) можно интерпретировать как координатные столбцы векторов линейного пространства. Более того, в силу линейной независимости ФСР она может выступать в роли базиса линейного пространства, которое образуют все решения системы уравнений.

**Теорема 2.3 (о разложении вектора по базису).** Если $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ – базис линейного пространства, то любой вектор $\vec{x}$ этого пространства можно единственным образом разложить по базисным векторам $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$,то есть представить в виде

$$\boldsymbol{\vec{x} = \alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \overrightarrow{a_2} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{a_n}} \quad \textbf{(2.2)}$$

Доказательство.

Так как система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ является максимальной линейно независимой системой векторов (базисом), то после добавления к ней произвольного вектора мы получаем уже линейно зависимую систему векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}, \vec{x}$. Другими словами, найдётся такая равная нулю линейная комбинация этих векторов $\alpha\vec{x} + \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{a_n} = 0$, в которой хотя бы один из коэффициентов $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$отличен от нуля. Очевидно, что коэффициент $\alpha$ не может равняться нулю, так как иначе система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}, \vec{x}$ будет линейно независимой, что противоречит предположению о том, что у данной линейной комбинации есть хотя бы один отличный от нуля коэффициент. Таким образом, мы показали, что коэффициент $\alpha \neq 0$.

Разделим обе части равенства $\alpha\vec{x} + \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = 0$ на $\alpha$,тогда $\vec{x} + \frac{\alpha_2}{\alpha}\overrightarrow{a_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha}\overrightarrow{a_2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{\alpha}\overrightarrow{a_n} = 0$, найдем $\vec{x}$:

$$\vec{x} = -\frac{\alpha_1}{\alpha}\overrightarrow{a_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha}\overrightarrow{a_2} - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha}\overrightarrow{a_n},$$

$\vec{x} = \beta_1\overrightarrow{a_1} + \beta_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \beta_n\overrightarrow{a_n}$, где

$\beta_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha}, \beta_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha}, \ldots, \beta_n = -\frac{\alpha_n}{\alpha}$-некоторые числа.

Таким образом, вектор $\vec{x}$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$.

Покажем теперь, что это представление единственно. Действительно, пусть имеется два представления для вектора $\vec{x}$:

(1) $\vec{x} = \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{a_n}$,

(2) $\vec{x} = \beta_1\overrightarrow{a_1} + \beta_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \beta_n\overrightarrow{a_n}$.

Вычитая из первого равенства второе, получим равную нулю линейную комбинацию линейно независимых векторов:

$(\alpha_1 - \beta_1)\overrightarrow{a_1} + (\alpha_2 - \beta_2)\overrightarrow{a_2} + \ldots (\alpha_n - \beta_n)\overrightarrow{a_n} = 0$, из определения линейной независимости следует, что все коэффициенты этой линейной комбинации равны нулю, то есть $\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \ldots = \alpha_n - \beta_n = 0$, а это означает, что

$\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_n = \beta_n$. Следственно, представление вектора $\vec{x}$ в виде линейной комбинации векторов базиса $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ единственно. Доказано.

Таким образом, базис — это упорядоченное множество векторов (называемых базисными векторами), обладающее тем свойством, что любой другой вектор этого пространства может быть единственным образом представлен в виде их линейной комбинации.

Формула (2.2) называется **разложением вектора $\vec{x}$ по базису** $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называются **координатами вектора** в этом базисе. В этом случае говорят, что вектор $\vec{x}$ разложен по векторам $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$.

Вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in R^n$ называется **координатным вектором вектора $\vec{x}$** в базисе $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$.

**Обозначение**: $\overrightarrow{\boldsymbol{x}_a} = (\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \ldots, \boldsymbol{\alpha_n})$ или

$\boldsymbol{\vec{x} = \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{a_n}}$ .

Таким образом, координатный вектор — это упорядоченный набор чисел (коэффициентов), который соответствует конкретному вектору в заданном базисе.

**Замечание:** координатный вектор зависит от выбора базиса. При смене базиса координаты того же самого вектора изменятся.

**Свойства координатных векторов:**

**1)** $(\vec{\boldsymbol{x}}+\vec{\boldsymbol{y}})_{\boldsymbol{a}}=\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{a}}$ для любых $\vec{x},\vec{y}\epsilon L$;

**2)** $(\boldsymbol{\alpha}\vec{\boldsymbol{x}})_{\boldsymbol{a}}=\boldsymbol{\alpha}\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{a}}$ для любых $\vec{x}\epsilon L$ и $\alpha\epsilon P$ .

**3)**Система векторов $\overrightarrow{b_1},\overrightarrow{b_2},\dots,\overrightarrow{b_n}$ линейного пространства $L$ линейно независима тогда и только тогда, когда линейно независима система координатных векторов$\left(\overrightarrow{b_1}\right)_a,\left(\overrightarrow{b_2}\right)_a,\dots,\left(\overrightarrow{b_n}\right)_a$ линейного пространства $L$.

Например, матрица $A=\begin{pmatrix}1&-2\\-3&4\end{pmatrix}$ имеет в стандартном базисе $E_1,E_2,E_3,E_4$ линейного пространства $M_2(R)$ координаты 1,-2,-3,4. Действительно, $\begin{pmatrix}1&-2\\-3&4\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+(-2)\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+$
$+(-3)\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$,то есть $A=E_1-2E_2-3E_3+4E_4$.

**Пример 2.14.** Найти координаты вектора $\vec{x}=(5;0;-3)\ \in R^3$:

**а)** в стандартном базисе данного пространства;

**б)** в базисе $\overrightarrow{b_1}=(0;0;15),\overrightarrow{b_2}=(0;3;0),\overrightarrow{b_3}=(7;0;0)$.

Решение.

**а)** Стандартный базис пространства $R^3$ образуют векторы $\overrightarrow{e_1}=(1;0;0),\overrightarrow{e_2}=(0;1;0),\overrightarrow{e_3}\ =(0;0;1)$,тогда разложением вектора $\vec{x}$ по базису $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\dots,\overrightarrow{e_n}$ будет иметь вид:

$\vec{x}=(5;0;3)=5(1;0;0)+0(0;1;0)+(-3)(0;0;1)=5\overrightarrow{e_1}-3\overrightarrow{e_2}$, то есть координатами в стандартном базисе являются $5{,}0,-3$.

Таким образом, координаты вектора в стандартном базисе совпадают с его компонентами.

**б)** Разложим вектор $\vec{x}=(5;0;-3)$по базису $\overrightarrow{b_1}=(0;0;15)$, $\overrightarrow{b_2}=(0;3;0),\overrightarrow{b_3}=(7;0;0)$:

$$\vec{x}=(5;0;-3)=-\frac{1}{5}\cdot(0;0;15)+0\cdot(0;3;0)+\frac{5}{7}\cdot(7;0;0)=$$

$=-\frac{1}{5}\overrightarrow{b_1}+\frac{5}{7}\overrightarrow{b_3}$, то есть координатами вектора $\vec{x}$ в базисе $\overrightarrow{b_1}=(0;0;15),\overrightarrow{b_2}=(0;3;0),\overrightarrow{b_3}=(7;0;0)$являются $-\frac{1}{5},0,\frac{5}{7}$.

**Теорема 2.4.**(**критерий базиса в $R^n$**). Для того, чтобы система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ образовывала базис в $R^n$, необходимо и достаточно чтобы определитель, составленный из координат этих векторов, был отличен от нуля (примем без доказательства).

**Пример 2.15.** Показать, что следующие системы элементов образуют базис в линейном пространстве $L$: **а)** $\overrightarrow{a_1} = (2;1;1), \overrightarrow{a_2} = (-1;2;4), \overrightarrow{a_3} = (2;0;0), L = R^3$; **б)** $\overrightarrow{a_1} = (2;2;3), \overrightarrow{a_2} = (2;5;1), \overrightarrow{a_3} = (5;1;1)$;$L = R^3$;**в)** $\overrightarrow{a_1} = (3;6;3), \overrightarrow{a_2} = (1;2;1), \overrightarrow{a_3} = (-3;1;2) L = R^3$; **г)** $f_1(x) = 2x^2 + 3x + 1, f_2(x) = -3x^2 + 2x + 4, f_3(x) = x^2 - x - 5, L = R[x^2]$;**д)** $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $L = M_2(R)$.

Решение.

**а)** Система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ является базисом (линейно независима), если из равенства $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \alpha_3\overrightarrow{a_3} = 0$,следует,что все $\alpha_i = 0, i = 1,2,3$,подставляя значения векторов в их линейную комбинацию имеем:

$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, что равносильно однородной системе уравнений $\begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \end{cases}$.

Вычислим определитель основной матрицы полученной системы:

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(4-2) = 4 \neq 0$, то есть система имеет единственное (тривиальное) решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Следовательно, система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ линейно независима и образует базис линейного пространства $R^3$.

**б)** Вычислим определитель, составленный из координат данных векторов:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= 8 + 2 + 5(2 - 15) = 10 - 65 = -55 \neq 0$,из теоремы 2.4 следует, что система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ образует базис в пространстве $R^3$.

**в)** Размышляя аналогично, имеем:

$$\begin{vmatrix} \overbrace{3}^{l_1-3l_3} & 1 & -3 \\ 6 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$ следовательно, система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ линейно зависима, то есть не является базисом в пространстве $R^3$ .

**г)** Число многочленов в системе $f_1, f_2, f_3$ равно размерности линейного пространства $R[x^2], dimR[x^2] = 3$. Система многочленов является базисом, если она линейно независима. В этом случае необходимо проверить, что из равенства $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0$, следует, что $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$. После подстановки всех многочленов в это равенство получим:

$$\alpha_1(2x^2 + 3x + 1) + \alpha_2(-3x^2 + 2x + 4) + \alpha_3(x^2 - x - 5) = 0,$$

раскроем скобки и соберем коэффициенты при каждой из степеней $x^n$,

$$(2\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (3\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3)x^1 + (\alpha_1 + 4\alpha_2 - 5\alpha_3)x^0 =$$
$$= 0x^2 + 0x^1 + 0x^0;$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$, получим, что это уравнение для неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ равносильно однородной системе уравнений:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 - 5\alpha_3 = 0 \end{cases},$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$= -12 - 42 + 10 \neq 0$,следовательно система многочленов $f_1, f_2, f_3$ образует базис в пространстве $R[x^2]$.

**д)** Исходя из определения линейной (не)зависимости запишем линейную комбинацию системы матриц и приравняем ее к нулевой матрице:

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = 0,$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 2\alpha_1 \\ 2\alpha_1 & 3\alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 & 3\alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\alpha_3 & -2\alpha_3 \\ 0 & 2\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 & 2\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 & 3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что две матрицы равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие элементы, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$$, решая её имеем:

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ c_2 - 2c_1 \\ c_3 - 2c_1 \\ c_4 - 3c_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -8 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ c_2 \cdot (-1) \\ c_3 \cdot (-1) \\ c_4 \cdot (-1) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 8 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \sim \\ c_3 - c_2 \\ c_4 - 2c_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \sim \\ c_3 : (-2) \\ c_4 : (-9) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & \underline{1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \sim \\ \\ c_4 - c_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, r = n = 3,$$

система уравнений имеет единственное решение, то есть $\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$.

Таким образом, матрицы $A_1, A_2, A_3$ образует базис в пространстве $M_2(R)$.

**Пример 2.16.** Показать, что система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$образует базис в заданном пространстве и найти координаты вектора $\vec{x}$ в этом базисе:

**а)** $\overrightarrow{a_1} = (1;1;1), \overrightarrow{a_2} = (1;2;3), \overrightarrow{a_3} = (1;4;5), \vec{x} = (1;-1;2)$;

**б)** $\overrightarrow{a_1} = (3;1;4), \overrightarrow{a_2} = (2;1;-1), \overrightarrow{a_3} = (1;-1;5), \vec{x} = (5;0;3)$;

**в)** $\overrightarrow{a_1} = (1;1;1;1), \overrightarrow{a_2} = (1;0;1;1), \overrightarrow{a_3} = (1;1;0;1)$,
$\overrightarrow{a_4} = (1;1;1;0)$, $\vec{x} = (4;3;3;3)$.

Решение.

**а)** Согласно теореме 2.4, система векторов образует базис, тогда и только тогда, когда определитель, составленный из координат векторов, отличен от нуля, поэтому составим и вычислим этот определитель, раскладывая его по элементам первого столбца:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 - 2 + 2 = -2 \neq$$

$0$,следовательно система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ образует базис в данном пространстве. Найдём координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ ,другими словами разложим вектор $\vec{x}$ по базису $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$,то есть представить в виде $\vec{x} = \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \alpha_3\overrightarrow{a_3}$,подставляя значения $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ в полученное равенство найдем коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$ или (что то же самое) $\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1\\ \alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3=-1\\ \alpha_1+3\alpha_2+5\alpha_3=2\end{cases}$, решаем систему методом полного исключения неизвестных,

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&1&1&1\\1&2&4&-1\\1&3&5&2\end{array}\right)\begin{array}{c}\\c_2-c_1\\c_3-c_1\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&\boxed{1}&3&-2\\0&2&4&1\end{array}\right)\begin{array}{c}c_1-c_2\\\sim\\c_3-2c_2\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&3\\0&1&3&-2\\0&0&-2&5\end{array}\right)\begin{array}{c}\sim\\\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot c_3\end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&3\\0&1&3&-2\\0&0&\boxed{1}&-\frac{5}{2}\end{array}\right)\begin{array}{c}c_1+2c_3\\c_2-3c_3\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-2\\0&1&0&5{,}5\\0&0&1&-2{,}5\end{array}\right), r(A)=r(A|B)=$$

$= n = 3$-решение единственно, $\begin{cases}\alpha_1=-2\\ \alpha_2=5{,}5\\ \alpha_3=-2{,}5\end{cases}$.

Таким образом, разложение вектора $\vec{x}$ по базису $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}$ имеет вид: $\vec{x}=\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\overrightarrow{a_2}+\alpha_3\overrightarrow{a_3}=-2\overrightarrow{a_1}+5{,}5\overrightarrow{a_2}-2{,}5\,\overrightarrow{a_3}$.

**б)** Покажем, что векторы $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}$ образуют базис, для этого составим определитель из координат векторов:

$$\begin{vmatrix}3&2&1\\1&1&-1\\4&-1&5\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&1\\-1&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&1\\4&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1\\2&4\end{vmatrix}=$$

$=-11+11+2=2\neq 0$, следовательно система векторов $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}$ образует базис в данном пространстве.

Найдём координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}$:

$\vec{x}=\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\overrightarrow{a_2}+\alpha_3\overrightarrow{a_3}$,

$$\alpha_1\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix},$$

$$\begin{cases}3\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=5\\ \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0\\ 4\alpha_1-\alpha_2+5\alpha_3=3\end{cases},$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&1&5\\1&1&-1&0\\4&-1&5&3\end{array}\right)\begin{array}{c}c_1\leftrightarrow c_2\\\sim\\\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&1&-1&0\\3&2&1&5\\4&-1&5&3\end{array}\right)\begin{array}{c}\\c_2-3c_1\sim\\c_3-4c_1\end{array}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & | & 0\\ 0 & \boxed{-1} & 4 & | & 5\\ 0 & -5 & 9 & | & 3\end{pmatrix}\begin{matrix}c_1+c_2\\ \sim\\ c_3-5c_2\end{matrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & | & 5\\ 0 & -1 & 4 & | & 5\\ 0 & 0 & -11 & | & -22\end{pmatrix}\begin{matrix}c_2\cdot(-1)\sim\\ c_3:(-11)\end{matrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & | & 5\\ 0 & 1 & -4 & | & -5\\ 0 & 0 & \boxed{1} & | & 2\end{pmatrix}\begin{matrix}c_1-3c_3\\ c_2+4c_3\sim\end{matrix}\begin{pmatrix}\underline{1} & 0 & 0 & | & -1\\ 0 & \underline{1} & 0 & | & 3\\ 0 & 0 & \underline{1} & | & 2\end{pmatrix}, r(A)=r(A|B)=n=3\text{-}$$

решение единственно, $\begin{cases}\alpha_1=-1\\ \alpha_2=3\\ \alpha_3=2\end{cases}$.

Таким образом, разложение вектора $\vec{x}$ по базису $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}$ имеет вид: $\vec{x}=-\overrightarrow{a_1}+3\overrightarrow{a_2}+2\,\overrightarrow{a_3}$.

**в)** Найдём координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3},\overrightarrow{a_4}$ :

$\vec{x}=\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\overrightarrow{a_2}+\alpha_3\overrightarrow{a_3}+\alpha_4\overrightarrow{a_4}$,

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\\3\\3\end{pmatrix},$$

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=4\\ \alpha_1+\alpha_3+\alpha_4=3\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_4=3\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=3\end{cases}$$ ,решаем систему,

$$\begin{pmatrix}\boxed{1} & 1 & 1 & 1 & | & 4\\ 1 & 0 & 1 & 1 & | & 3\\ 1 & 1 & 0 & 1 & | & 3\\ 1 & 1 & 1 & 0 & | & 3\end{pmatrix}\begin{matrix}c_2-c_1\\ c_3-c_1\\ c_4-c_1\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & | & 4\\ 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 & | & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & | & -1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & -1\end{pmatrix}\begin{matrix}c_1+c_2\\ c_2\cdot(-1)\\ c_3\cdot(-1)\\ c_4\cdot(-1)\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & | & 3\\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1\\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & | & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}c_1-c_2\\ \sim\end{matrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & | & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1\\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & | & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}c_1-c_2\\ \sim\end{matrix}\begin{pmatrix}\underline{1} & 0 & 0 & 0 & | & 1\\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 & | & 1\\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 & | & 1\\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & | & 1\end{pmatrix},$$

$r(A)=r(A|B)=n=4$-система совместна и определена, то есть имеет единственное решение $\begin{cases}\alpha_1=1\\ \alpha_2=1\\ \alpha_3=1\\ \alpha_4=1\end{cases}$ следовательно векторы $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3},\overrightarrow{a_4}$ образует базис, разложение вектора $\vec{x}$ в базисе $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3},\overrightarrow{a_4}$ имеет вид $\vec{x}=\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}+\overrightarrow{a_4}$.

**Пример 2.17.** Найти все значения параметра $p$ , при которых вектор $\vec{x} = (-4; 5; 2)$является линейной комбинацией векторов $\overrightarrow{a_1} = (-2; 1; 1), \overrightarrow{a_2} = (p; -2; 2), \overrightarrow{a_3} = (-4; 1; 2)$.

Решение.

Вектор $\vec{x}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов, если имеет место равенство $\vec{x} = \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \alpha_3\,\overrightarrow{a_3}$,

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} p \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ или} \begin{cases} -2\alpha_1 + p\alpha_2 - 4\alpha_3 = -4 \\ \alpha_1 - 2\,\alpha_2 + \alpha_3 = 5 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\,\alpha_3 = 2 \end{cases},$$

чтобы данная система уравнений имела решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель основной матрицы системы был отличен от нуля , то есть $detA \neq 0$.

Найдем $detA$:

$$detA = \begin{vmatrix} -2 & p & -4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - p\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$= 12 - p - 16 = -4 - p$, $detA \neq 0$ при $p + 4 \neq 0, p \neq -4$.

Таким образом, вектор $\vec{x}$ является линейной комбинацией векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, при $p \neq -4$.

**Пример 2.18.** Проверить, что система векторов $\overrightarrow{a_1} = (2; 0; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (0; 2; -3), \overrightarrow{a_3} = (-4; 1; 1)$является базисом в линейном пространстве $R^3$ и найти координаты вектора $\vec{x} = (-8; 5; 2)$ в этом базисе. По известному координатному вектору $\vec{y}_a = (-1; 0; 3)$ найти вектор $\vec{y}$.

Решение.

Число векторов в системе $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ равно размерности линейного пространства $R^3$.Покажем, что система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ является базисом , то есть ,что из векторного уравнения $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \alpha_3\,\overrightarrow{a_3} = 0$, следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Подставим в это уравнение векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ ,тогда это уравнение с неизвестными $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ равносильно однородной системе уравнений

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - 4\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}.$$

Вычислим определитель основной матрицы системы:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 10 + 8 = 18 \neq 0,$$

следовательно система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ образует базис в пространстве $R^3$.

Для нахождения координат вектора $\vec{x}$ в базисе $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ нужно из векторного уравнения $\vec{x} = \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \alpha_3\overrightarrow{a_3}$ найти (единственные) неизвестные координаты $\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1$.После подстановки всех векторов получим

$$\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2\alpha_1 - 4\alpha_3 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$, что равносильно

системе $\begin{cases} 2\alpha_1 - 4\alpha_3 = -8 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 = 5 \\ \alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3 = 2 \end{cases}$,решим систему методом полного исключения неизвестных:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{c_1:2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{c_3 - c_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \end{array}\right) \underset{\frac{c_3}{(-3)}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \underset{c_3 \leftrightarrow c_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \underset{c_3 - 2c_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right) \underset{\frac{c_3}{3}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{c_1 + 2c_3}{c_2 + c_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right), r(A) = r(A|B) = 3,$$

система совместна и определена, то есть имеет единственное решение $\begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 1. \\ \alpha_3 = 3 \end{cases}$

Таким образом, $\vec{x} = 2\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + 3\overrightarrow{a_3}$ или кратко $\overrightarrow{x_a} = (2; 1; 3)$ – координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$.

Так как $\vec{y}_a = (-1; 0; 3)$,то по определению координатного вектора $\vec{y} = -\overrightarrow{a_1} + 3\overrightarrow{a_3} = -(2; 0; 1) + 3(-4; 1; 1) = (-14; 3; 2)$.

**Пример 2.19.** Проверить, что система многочленов $f_1(x) = 2x^2 + 4x + 4, f_2(x) = -2x^2 - 3, f_3(x) = x^2 - x - 1$ является базисом в линейном пространстве $R[x^2]$ и найти координаты многочлена $g(x) = 4x^2 - 4x + 5$ в этом базисе. По известному координатному вектору $h_f = (0; -1; 2)$ найти многочлен $h(x)$.

Решение.

Число многочленов в системе $f_1, f_2, f_3$ равно размерности линейного пространства $R[x^2]$. Система многочленов является базисом, если она линейно независима. В этом случае необходимо проверить, что из равенства $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0$, следует, что $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$. После подстановки всех многочленов в это равенство получим:

$$\alpha_1(2x^2 + 4x + 4) + \alpha_2(-2x^2 - 3) + \alpha_3(x^2 - x - 1) = 0,$$

,

$$(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (4\alpha_1 - \alpha_3)x^1 + (4\alpha_1 - 3\alpha_2 - \alpha_3)x^0 =$$
$$= 0x^2 + 0x^1 + 0x^0;$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$, получим, что это уравнение для неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ равносильно однородной системе уравнений:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 - 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases};$$

Решая систему, имеем:

$$\begin{pmatrix} \underline{2} & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ c_2 - 2c_1 \\ c_3 - 2c_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & \underline{4} & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} {}_{c_3 \leftrightarrow c_2} \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & \underline{1} & -3 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} {}_{c_3 - 4c_2} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \underline{2} & -2 & 1 \\ 0 & \underline{1} & -3 \\ 0 & 0 & \underline{9} \end{pmatrix}, r = n = 3,$$ система уравнений имеет единственное (нулевое) решение, $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$.

Следовательно, система многочленов $f_1, f_2, f_3$ линейно независима- базис в $R[x^2]$. Для нахождения координат многочлена $g(x)$ в базисе $f_1, f_2, f_3$ нужно из уравнения $g = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3$ найти (единственные) неизвестные коэффициенты $x_1, x_2, x_3$. Если теперь подставить исходные данные в это равенство и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях $x$, получим:

$$4x^2 - 4x + 5 = x_1(2x^2 + 4x + 4) + x_2(-2x^2 - 3) + x_3(x^2 - x - 1),$$
$$(2x_1 - 2x_2 + x_3)x^2 + (4x_1 - x_3)x^1 + (4x_1 - 3x_2 - x_3)x^0 =$$

$= 4x^2 - 4x^1 + 5x^0$,

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ 4x_1 - x_3 = -4 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 5 \end{cases};$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \underline{2} & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & -4 \\ 4 & -3 & -1 & 5 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ c_2 - 2c_1 \\ c_3 - 2c_1 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & \underline{4} & -3 & -12 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \sim \\ c_3 \leftrightarrow c_2 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & \underline{1} & -3 & -3 \\ 0 & 4 & -3 & -12 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \sim \\ c_3 - 4c_2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{c} \sim \\ \frac{c_3}{9} \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right)\begin{array}{c} c_1 - c_3 \\ c_2 + 3c_3 \sim \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{c} c_1 + 2c_2 \\ \sim \\ \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{c} \frac{c_1}{2} \\ \sim \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Таким образом, $x_1 = -1,\ x_2 = -3,\ x_3 = 0$,то есть $g = -f_1 - 3f_2$.

По определению координатного вектора $h_f = (0; -1; 2)$ имеем:

$$h = -f_2 + 2f_3 = -(-2x^2 - 3) + 2(x^2 - x - 1) = 4x^2 - 2x + 1.$$

## 3. Задания для самостоятельного решения.

**1.** Являются ли линейно зависимыми элементы линейного пространства и найти линейную зависимость:

**а)** $\overrightarrow{a_1} = (2; -1), \overrightarrow{a_2} = (1; 3)$; **б)** $\overrightarrow{a_1} = (1; 1), \overrightarrow{a_2} = (-2; -2)$;

**в)** $\vec{a}_1 = (1; 2; 3), \overrightarrow{a_2} = (3; 5; 1), \overrightarrow{a_3} = (5; 9; 7)$;

**г)** $\overrightarrow{a_1} = (1; 1; 3), \overrightarrow{a_2} = (2; 1; -1), \overrightarrow{a_3} = (3; 2; 1)$;

**д)** $\overrightarrow{a_1} = (1; -1; 3), \overrightarrow{a_2} = (2; -1; 4), \overrightarrow{a_3} = (2; 0; 2)$;

**е)** $\vec{a} = (3; -2; 1), \vec{b} = (4; 1; -3), \vec{c} = (2; -3; -1)$ ;

**ё)** $\vec{a} = (1; 1; 1), \vec{b} = (1; 2; 0), \vec{c} = (0; -1; 1)$;

**ж)** $\vec{p} = (2; 0; 1), \vec{q} = (1; -1; 1), \vec{r} = (1; -1; -2)$;

**з)** $\vec{u}_1 = (1; 1; 1; 1),\ \vec{u}_2 = (1; 0; 1; 1),\ \vec{u}_3 = (1; 1; 0; 1),\ \vec{u}_4 = (1; 1; 1; 0)$.

**2.** Будет ли вектор $\vec{x}$ линейной комбинацией векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$: **а)** $\vec{x} = (3; 1; 4), \overrightarrow{a_1} = (1; 1; 1), \overrightarrow{a_2} = (1; -1; 2), \overrightarrow{a_3} = (1; -3; 3)$;

**б)** $\vec{x} = (1; -1; -2), \overrightarrow{a_1} = (1; 2; 1),\ \overrightarrow{a_2} = (2; 1; -1), \overrightarrow{a_3} = (-4; -5; -1)$;

**в)** $\vec{x} = (22; -1; -11),\ \overrightarrow{a_1} = (1; 6; 4), \overrightarrow{a_2} = (-1; -2; -7), \overrightarrow{a_3} = (5; 1; 2)$;

**г)** $\vec{x} = (-4; 0; 3), \overrightarrow{a_1} = (1; 1; -2), \overrightarrow{a_2} = (1; 2; 0), \overrightarrow{a_3} = (-1; -3; -2)$;

**д)** $\vec{x} = (-9; 5; 5), \overrightarrow{a_1} = (4; 1; 1), \overrightarrow{a_2} = (2; 0; -3), \overrightarrow{a_3} = (-1; 2; 1)$;

**е)** $\vec{x} = (6;7;3), \overrightarrow{a_1} = (1;3;2), \overrightarrow{a_2} = (1;2;-5), \overrightarrow{a_3} = (2;1;3)$;
**ё)** $\vec{x} = (1;-1;1), \overrightarrow{a_1} = (1;-1;1), \overrightarrow{a_2} = (-1;4;0), \overrightarrow{a_3} = (1;0;1)$.

**3.** Показать, что векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{x}$ в этом базисе:
**а)** $\overrightarrow{a_1} = (1;1;0), \overrightarrow{a_2} = (0;1;2), \overrightarrow{a_3} = (1;0;2), \vec{x} = (4;5;3)$;
**б)** $\overrightarrow{a_1} = (5;1;0),\ \overrightarrow{e_2} = (2;-1;3), \overrightarrow{a_3} = (1;0;-1), \vec{x} = (13;2;7)$;
**в)** $\overrightarrow{a_1} = (2;3;-1), \overrightarrow{a_2} = (4;1;5),\ \overrightarrow{a_3} = (0;2;-2), \vec{x} = (12;10;-2)$;
**г)** $\overrightarrow{a_1} = (2;-1;2), \overrightarrow{a_2} = (-3;1;-1), \overrightarrow{a_3} = (1;-2;-3), \vec{x} = (17;-15;-7)$;
**д)** $\overrightarrow{a_1} = (3;-2;1), \overrightarrow{a_2} = (-1;1;-2),\ \overrightarrow{a_3} = (2;1;-3), \vec{x} = (11;-6;-5)$;
**е)** $\overrightarrow{a_1} = (2;3;1), \overrightarrow{a_2} = (3;7;2), \overrightarrow{a_3} = (5;4;3), \vec{x} = (1;-1;2)$;
**ё)** $\overrightarrow{a_1} = (0;-1;2), \overrightarrow{a_2} = (1;0;-1), \overrightarrow{a_3} = (-1;2;4), \vec{x} = (-2;0;9)$;
**ж)** $\overrightarrow{a_1} = (1;-3;0), \overrightarrow{a_2} = (1;-1;1), \overrightarrow{a_3} = (0;-1;2), \vec{x} = (5;-12;-1)$;
**з)** $\overrightarrow{a_1} = (2;1;1), \overrightarrow{a_2} = (-2;0;-3), \overrightarrow{a_3} = (-1;2;1), \vec{x} = (-1;5;5)$;
**и)** $\overrightarrow{a_1} = (-2;2;1), \overrightarrow{a_2} = (2;0;1), \overrightarrow{a_3} = (1;1;1), \vec{x} = (-3;7;4)$.

**4.** Найти все значения параметра $p$, при которых вектор
$\vec{x} = (2;3;-1)$является линейной комбинацией векторов
$\overrightarrow{a_1} = (-2;0;2), \overrightarrow{a_2} = (p;-1;-4), \overrightarrow{a_3} = (0;-3;3)$.

**5.** Являются ли линейно зависимыми матрицы $A_1, A_2, A_3$ в линейном пространстве $M_2(R)$, в случае линейной зависимости, найти эту линейную зависимость:

**а)** $A_1 = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$;

**б)** $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

**в)** $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$;

**г)** $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**6.** Проверить, будут ли следующие системы многочленов $f_1, f_2, f_3$линейно независима в линейном пространстве $R[x^2]$ , в случае линейной зависимости, найти линейную зависимость:

**а)** $f_1 = 4x^2 - 3x + 2, f_2 = -3x^2 + 2x + 3, f_3 = 7x^2 - 5x - 1$;

**б)** $f_1 = 2x^2 - x + 1, f_2 = -3x^2 + 3x + 2, f_3 = -x^2 + 2x + 3$;

**в)** $f_1 = -x^2 + 2x + 3, f_2 = x^2 - x + 2, f_3 = 2x^2 + 3x + 1$.

**7.** Проверить, что система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ является базисом в линейном пространстве и найти координаты вектора $\vec{x}$ в этом базисе. По известному координатному вектору $\overrightarrow{y_a}$ найти вектор $\vec{y}$.
**а)** $\overrightarrow{a_1} = (2;1;-1), \overrightarrow{a_2} = (-4;-1;2), \overrightarrow{a_3} = (7;2;3), \vec{x} = (7;1;3)$,
$\overrightarrow{y_a} = (-1;3;2)$; **б)** $\overrightarrow{a_1} = (-1;1;-1), \overrightarrow{a_2} = (4;2;2), \overrightarrow{a_3} = (-4;1;2)$,

$\vec{x} = (-5; 5; 7), \overrightarrow{y_a} = (1; 2; 2)$.

**8.** Проверить, что система многочленов $f_1 = x^2 + 3x + 2$, $f_2 = 2x^2 + 5x + 3, f_3 = x^2 + 5x - 2$ является базисом в линейном пространстве $R[x^2]$ и найти координаты многочлена $g = x^2 + 6x - 1$ в этом базисе. По известному координатному вектору $h_f = (2; -2; 1)$ найти многочлен $h(x)$.

**9.**Проверить, что система матриц $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$является базисом в линейном пространстве $M_2(R)$ и найти в этом базисе координаты матрицы $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$. По известному координатному вектору $y_A = (1; 2; -1; 0)$ найти матрицу $Y$.

**Ответы:**

**3.1. а)** $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ -линейно независимы; **б)** $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$- линейно зависимы, $\overrightarrow{a_2} = -2\,\overrightarrow{a_1}$; **в)** $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ - линейно зависимы , $2\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_3} = 0$,при с=-1; **г)** $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$-линейно независимы; **д)**$2\,\overrightarrow{a_1} - 2\overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} = 0$, при с=1;

**е)** $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ -линейно независимы; **ё)** $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = 0$, при с=1;**ж)**$\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$-линейно независимы; **з)** $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, $\vec{u}_4$-линейно независимы.

**3.2.а)** да,будет,разложение не единственно, при $c = 0$ имеем: $\vec{x} = 2\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}$; **б)** да, будет, разложение не единственно, при $c = 0$ имеем:$\vec{x} = -\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}$; **в)** да, будет, разложение единственно $\vec{x} = 3\overrightarrow{a_2} + 5\overrightarrow{a_3}$;**г)** нет, система несовместна; **д)** да, будет, разложение единственно $\vec{x} = -\overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{a_2} + 3\overrightarrow{a_3}$; **е)** да, будет, разложение единственно $\vec{x} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + 2\overrightarrow{a_3}$; **ё)** $\vec{x} = \overrightarrow{a_1}$.**3.3. а)** $\vec{x} = \frac{15}{4}\overrightarrow{a_1} + \frac{5}{4}\overrightarrow{a_2} + \frac{1}{4}\overrightarrow{a_3}$; **б)** $\vec{x} = 3\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} - 4\overrightarrow{a_3}$;**в)** $\vec{x} = 10\overrightarrow{a_1} - 2\overrightarrow{a_2} - 9\overrightarrow{a_3}$;**г)** $\vec{x} = 3\overrightarrow{a_1} - 2\overrightarrow{a_2} + 5\overrightarrow{a_3}$;**д)** $\vec{x} = 5{,}75\overrightarrow{a_1} + 5{,}75\overrightarrow{a_2} - 0{,}25\overrightarrow{a_3}$;**е)** $\vec{x} = -\frac{17}{3}\overrightarrow{a_1} + \frac{4}{3}\overrightarrow{a_2} + \frac{5}{3}\overrightarrow{a_3}$;**ё)** $\vec{x} = 2\overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3}$;**ж)** $\vec{x} = 4\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_3}$;**з)** $\vec{x} = -\overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{a_2} + 3\overrightarrow{a_3}$;**и)** $\vec{x} = 2\overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{a_2} + 3\overrightarrow{a_3}$.**3.4.** $p \neq 5$. **3.5.а)** матрицы $A_1, A_2, A_3$ линейно независимы; **б)** матрицы $A_1, A_2, A_3 -$ линейно зависимы,$-2A_1 + A_2 + A_3 = 0$; **в)** матрицы $A_1, A_2, A_3 -$ линейно зависимы,$2A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0$; **г)** матрицы $A_1, A_2, A_3, A_4 -$ линейно независимы;**3.6. а)**многочлены $f_1, f_2, f_3 -$ линейно зависимы, $f_1 - f_2 - f_3 = 0 -$ линейная зависимость; **б)** многочлены $f_1, f_2, f_3 -$ линейно зависимы, $f_1 + f_2 - f_3 = 0 -$ линейная зависимость; **в)** $f_1, f_2, f_3 -$ линейно независимы.**3.7. а)** $\overrightarrow{x_a} =$

$(-2;-1;1), \vec{y} = (0;0;13);$**б)** $\overrightarrow{x_a} = (1;1;2), \vec{y} = (-1;7;9)$.**3.8.** $g_f = (2;-1;1)$, $h(x) = -x^2 + x - 4$.

**3.9.** $x_A = (1;-1;2;0), Y = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$.

## 2.3. Матрица перехода. Связь координат вектора в разных базисах.

Пусть $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ и $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_n}$базисы в $n$ – мерном линейном пространстве $L$. Матрицей перехода от базиса $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ к базису $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_n}$называется матрица $P_{a\to b} \epsilon M_n(P)$, у которой $i$ – й столбец состоит из координат вектора $\overrightarrow{b_i}$ в базисе $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$, $i = 1,2, \dots, n$. Иными словами, столбцы матрицы перехода от первого базиса ко второму состоят из координатных вектор-столбцов векторов второго базиса в первом базисе: $P_{a\to b} = ((b_1)_a, (b_2)_a, \dots, (b_n)_a)$.

Для того, чтобы записать все элементы матрицы перехода, разложим векторы второго базиса в линейные комбинации векторов первого базиса:

$$\overrightarrow{b_1} = p_{11}\overrightarrow{a_1} + p_{21}\overrightarrow{a_2} + \dots + p_{n1}\overrightarrow{a_n},$$
$$\overrightarrow{b_2} = p_{12}\overrightarrow{a_1} + p_{22}\overrightarrow{a_2} + \dots + p_{n2}\overrightarrow{a_n},$$

..............................................

$$\overrightarrow{b_n} = p_{1n}\overrightarrow{a_1} + p_{2n}\overrightarrow{a_2} + \dots + p_{nn}\overrightarrow{a_n},$$

Записывая коэффициенты линейных комбинаций по столбцам, получим матрицу перехода

$$\boldsymbol{P_{a\to b}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p_{11}} & \boldsymbol{p_{12}} & \cdots & \boldsymbol{p_{1n}} \\ \boldsymbol{p_{21}} & \boldsymbol{p_{22}} & \cdots & \boldsymbol{p_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{p_{n1}} & \boldsymbol{p_{n2}} & \cdots & \boldsymbol{p_{nn}} \end{pmatrix} \textbf{(2.3)}.$$

### Свойства матрицы перехода.

**1)** $\vec{x}_a = P_{a\to b}\vec{x}_b$ для любого вектора $\vec{x} \epsilon L$.

**2)** $P_{a\to a} = E$ (единичная матрица).

**3)** $P_{a\to b}P_{b\to u} = P_{a\to u}$.

**4)** Матрица $P_{a\to b}$ обратима и$P_{a\to b}^{-1} = P_{b\to a}$.

**5)** Матрица $P_{a\to b}$ невырожденная, то есть $P_{a\to b} \neq 0$.

**6)** Пусть $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ и $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_n}$базисы в $n$ – мерном линейном пространстве $L$ и квадратные матрицы$A$ , $B$соответственно построены по столбцам из элементов векторов этих базисов, то есть $A = (\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n})$ и $B = (\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_n})$. Тогда $AP_{a\to b} = B$.

**Пример 2.20.** Найти матрицу перехода $P_{a\to b}$от базиса $\overrightarrow{a_1} = (-2; 1; -1), \overrightarrow{a_2} = (1; -1\,; 3), \overrightarrow{a_3} = (1; 2; -1)$ к базису $\overrightarrow{b_1} = (-1; 2; 3), \overrightarrow{b_2} = (2; 1; 2), \overrightarrow{b_3} = (0; 2; 1)$. По известному координатному вектору $\overrightarrow{x_b} = (0; -2; 1)$ найти координатный вектор $\overrightarrow{x_a}$. По известному координатному вектору $\overrightarrow{y_a} = (1; 1; -1)$ найти координатный вектор $\overrightarrow{y_b}$.

Решение.

Опираясь на определение матрицы перехода имеем:

$$P_{a\to b} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{32} \end{pmatrix}, \text{где} \quad \overrightarrow{b_1} = p_{11}\overrightarrow{a_1} + p_{21}\overrightarrow{a_2} + p_{31}\overrightarrow{a_3},$$

$$\overrightarrow{b_2} = p_{12}\overrightarrow{a_1} + p_{22}\overrightarrow{a_2} + p_{32}\overrightarrow{a_3},$$

$$\overrightarrow{b_3} = p_{13}\overrightarrow{a_1} + p_{23}\overrightarrow{a_2} + p_{33}\overrightarrow{a_3}.$$

Действительно, первый столбец матрицы перехода $P_{a\to b}$ является решением векторного уравнения

$$\overrightarrow{b_1} = p_{11}\overrightarrow{a_1} + p_{21}\overrightarrow{a_2} + p_{31}\overrightarrow{a_3},$$

данное векторное уравнение равносильно системе уравнений со следующей расширенной матрицей:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right).$$

Аналогично, второй и третий столбец матрицы перехода $P_{a\to b}$являются решениями векторных уравнений $\overrightarrow{b_2} = p_{12}\overrightarrow{a_1} + p_{22}\overrightarrow{a_2} + p_{32}\overrightarrow{a_3}$,

$\overrightarrow{b_3} = p_{13}\overrightarrow{a_1} + p_{23}\overrightarrow{a_2} + p_{33}\overrightarrow{a_3}$ соответственно, которые равносильны СУ с расширенными матрицами:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Эти три системы уравнений можно решать одновременно. Для этого запишем объединенную расширенную матрицу и найдем решение методом последовательных исключений неизвестных:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{c_1 \leftrightarrow c_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \sim \\ c_2 + 2c_1 \\ c_3 + c_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 3 & 3 \end{array}\right) \overset{\sim}{(-1)c_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -5 & -3 & -4 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} c_1 + c_2 \\ \sim \\ c_3 - 2c_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & -3 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 \end{array}\right) \overset{\sim}{\frac{c_3}{11}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & -3 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} c_1 + 3c_3 \\ c_2 + 5c_3 \\ \sim \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \underbrace{1 \quad 1 \quad 1}_{P_{a\to b}} \end{array}\right).$$

Мы преобразовали основную матрицу к единичной. Значит, справа от черты стоит сама матрица перехода от первого базиса ко второму $P_{a\to b} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдём координатный вектор $\overrightarrow{x_a}$ по известному координатному вектору $\overrightarrow{x_b} = (0; -2; 1)$, для этого воспользуемся первым свойством матрицы перехода $\vec{x}_a = P_{a\to b}\vec{x}_b$.

Значит, чтобы найти $\vec{x}_a$ достаточно умножить матрицу $P_{a\to b}$ на вектор $\vec{x}_b$:

$$X_a = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},$$ то есть $\vec{x}_a = (1; -2; -1)$.

Найдем координатный вектор $\overrightarrow{y_b}$ по известному координатному вектору $\overrightarrow{y_a} = (1; 1; -1)$, для этого снова воспользуемся первым свойством матрицы перехода $\vec{y}_a = P_{a\to b}\vec{y}_b$. Подставляя наши данные и переходя к матричной форме записи имеем:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} Y_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$ найдём решение полученного матричного уравнения, то есть матрицу $Y_b$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{\sim}{c_1 \leftrightarrow c_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \sim \\ c_2 - 2c_1 \\ c_3 - 2c_1 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&-1\\0&-1&-2&3\\0&-2&-1&3\end{array}\right)\begin{array}{c}\sim\\(-1)c_2\\(-1)c_3\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&-1\\0&\boxed{1}&2&-3\\0&2&1&-3\end{array}\right)\begin{array}{c}c_1-c_2\\\sim\\c_3-2c_2\end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&2\\0&1&2&-3\\0&0&-3&3\end{array}\right)\begin{array}{c}\sim\\\dfrac{c_3}{(-3)}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&2\\0&1&2&-3\\0&0&\boxed{1}&-1\end{array}\right)\begin{array}{c}c_2+c_3\\c_2-2c_3\\\sim\end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\end{array}\right).$$

Таким образом, координатный вектор $\overrightarrow{y_b}=(1;-1;-1)$.

**Пример 2.21.** Найти матрицу перехода от базиса $f_1(x)=-2x^2+x+1, f_2(x)=-x^2+x, f_3(x)=2x^2-2x-2$ к базису $g_1(x)=3x^2-2x-3, g_2(x)=-x^2+x+2, g_3(x)=-2x^2-x+1$ линейного пространства $R[x^2]$.

Решение.

Пусть, как обычно, $e_1(x)=1, e_2(x)=x, e_3(x)=x^2$есть стандартный базис линейного пространства $R[x^2]$.В этом базисе легко найти

координаты (обратите внимание на порядок их следования) всех данных в условии многочленов: $f_1=e_1+e_2-2e_3$ или что то же самое

$(f_1)_e=(1;1;-2)$, аналогично рассуждая имеем:
$(f_2)_e=(0;1;-1), (f_3)_e=(-2;-2;2)$ , $(g_1)_e=(-3;-2;3)$,
$(g_2)_e=(2;1;-1), (g_3)_e=(1;-1;-2)$.

Отсюда, по определению матрицы перехода, не составляет труда выписать следующие две матрицы перехода:

$$P_{e\to f}=\begin{pmatrix}1&0&-2\\1&1&-2\\-2&-1&2\end{pmatrix}, P_{e\to g}=\begin{pmatrix}-3&2&1\\-2&1&-1\\3&-1&-2\end{pmatrix}.$$

Эти две матрицы связаны между собой соотношением

$P_{e\to f}P_{f\to g}=P_{e\to g}(P_{a\to b}P_{b\to u}=P_{a\to u}$- третье свойство матрицы перехода), которое можно рассматривать как матричное уравнение относительно неизвестной матрицы $P_{f\to g}$:

$$\begin{pmatrix}1&0&-2\\1&1&-2\\-2&-1&2\end{pmatrix}P_{f\to g}=\begin{pmatrix}-3&2&1\\-2&1&-1\\3&-1&-2\end{pmatrix};$$

Найдем его решение. Для этого запишем расширенную матрицу и применим метод последовательных исключений неизвестных:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & -2 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & 3 & -1 & -2 \end{array}\right) \underset{\substack{c_2 - c_1 \\ c_3 + 2c_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1` & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{c_3 + c_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1` & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right) \underset{\frac{c_3}{-2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1` & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{c_1 + 2c_3}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} -1 & 0 & 3 \\ 1` & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix}}_{P_{f\to g}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right).$$

Таким образом, матрицу перехода от базиса $f$ к базису $g$ имеет вид:

$$P_{f\to g} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1` & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Пример 2.22.** Найти матрицу перехода $P_{v\to u}$, если известны координатные векторы $\overrightarrow{a_v} = (-1; 3)$, $\overrightarrow{b_v} = (1; -1)$, $\overrightarrow{a_u} = (-2; 3)$, $\overrightarrow{b_u} = (0; 1)$.

Решение.

Воспользуемся первым свойством матрицы перехода:
$\vec{x}_a = P_{a\to b}\vec{x}_b$.
По этому свойству:
$\overrightarrow{a_v} = P_{v\to u}\ \overrightarrow{a_u}$, $\overrightarrow{b_v} = P_{v\to u}\ \overrightarrow{b_u}$.
В эти равенства можно подставить соответствующие векторы. Тогда

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = P_{v\to u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = P_{v\to u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

эти векторные равенства можно записать как одно матричное равенство $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = P_{v\to u}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Последнее равенство можно рассматривать как матричное уравнение $XA = B$,где $X = P_{v\to u}, A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

После транспонирования $(XA)^T = B^T$ получим равносильное уравнение $A^T X^T = B^T$ или$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, которое решается стандартно -методом последовательных исключений:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{c_1 \leftrightarrow c_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & -3 \end{array}\right) \underset{c_2 + 2c_1}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & -5 \end{array}\right) \underset{c_2 : 5}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{\sim}{c_1 - c_2}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$, следовательно, $X^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Таким образом, $X = (X^T)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,то есть

$$P_{v\to u} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Пример 2.23.** Найти матрицу перехода от базиса

$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ к базису $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ линейного пространства $M_2(R)$.

Решение.

Пусть, как обычно, $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$- стандартный базис линейного пространства $M_2(R)$.В этом базисе легко найти координаты всех данных в условии матриц:

$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} +$
$+(-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,то есть $A_1 = -2E_1 - E_2 - E_3 - 2E_4$ или, что то же самое $(A_1)_e = (-2; -1; -1; -2)$.

Таким образом, оставшиеся матрицы в этом базисе будут иметь следующие координатные векторы: $(A_1)_e = (-2; -1; -1; -2)$,
$(A_2)_e = (2; 0; 1; -2), (A_3)_e = (3; -2; 0; -2), (A_4)_e = (1; 1; 1; 3)$,
$(B_1)_e = (1; -2; -2; 0), (B_2)_e = (-2; 0; -2; 2), (B_3)_e = (1; -2; 0; -3)$,
$(B_4)_e = (1; 1; 1; 0)$.

Но тогда можно записать следующие матрицы перехода от базиса $E$ к базису $A$ и от базиса $E$ к базису $B$ соответственно:

$$P_{E\to A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, P_{E\to B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эти две матрицы связаны между собой соотношением

$P_{E\to A}P_{A\to B} = P_{E\to B}$ (свойство 3матрицы перехода), которое можно рассматривать как матричное уравнение относительно неизвестной матрицы$P_{A\to B}$. Найдем решение этого матричного уравнения. Для этого запишем расширенную матрицу для этого матричного уравнения и с помощью метода последовательных исключений ее основную матрицу приведем к единичному виду, тогда справа от черты будет стоять искомое решение:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 2 & 3 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & 3 & 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} c_1 \leftrightarrow (-1)c_2 \\ \sim \\ \\ (-1)c_4 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 & 0 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \sim \\ c_2 + 2c_1 \\ c_3 + c_1 \\ c_4 - 2c_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 7 & -1 & 5 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \sim \\ c_2 \leftrightarrow c_3 \\ \sim \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & -1 & 5 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \sim \\ c_3 - 2c_2 \\ c_4 - 2c_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{3} & -1 & 5 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & 0 & 2 & -5 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \sim \\ \\ c_4 + 2c_3 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{3} & -1 & 5 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 6 & -3 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{c} \sim \\ c_4:(-3) \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 5 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{c} c_1+c_4 \\ \sim \\ c_3+c_4 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{c} \sim \\ c_3:3 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 5/3 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{c} c_1-2c_3 \\ c_2-2c_3 \\ \sim \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{array}\underbrace{\begin{array}{cccc} -4/3 & -2 & 5/3 & -1/3 \\ -10/3 & -2 & 2/3 & 2/3 \\ 5/3 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}}_{P_{A\to B}}\right).$$

Таким образом,

$$P_{A\to B}=\begin{pmatrix} -4/3 & -2 & 5/3 & -1/3 \\ -10/3 & -2 & 2/3 & 2/3 \\ 5/3 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**4.Задания для самостоятельного решения.**

**1.**Найти матрицу перехода $P_{a\to b}$от базиса $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ к базису $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$,где $\overrightarrow{a_1} = (1; 1; 1), \overrightarrow{a_2} = (2; 1\ ; 1)$, $\overrightarrow{a_3} = (1; 1; 3)$; $\overrightarrow{b_1} = (0; 1; 1), \overrightarrow{b_2} = (1; 0; 1), \overrightarrow{b_3} = (1; 0; 2)$.

**2.** Найти матрицу перехода $P_{a\to b}$от базиса $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ к базису $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$.По известному координатному вектору $\overrightarrow{x_b}$ найти координатный вектор $\overrightarrow{x_a}$. По известному координатному вектору $\overrightarrow{y_a}$ найти координатный вектор $\overrightarrow{y_b}$:**а)** $\overrightarrow{a_1} = (-2; 3; 2), \overrightarrow{a_2} = (-2; 2\ ; 1)$, $\overrightarrow{a_3} = (-1; 1; 1)$; $\overrightarrow{b_1} = (-2; 1; -1), \overrightarrow{b_2} = (0; 2; 3), \overrightarrow{b_3} = (1; 0; 1)$, $\overrightarrow{x_b} = (2; -1; 3), \overrightarrow{y_a} = (2; 1; -1)$;**б)** $\overrightarrow{a_1} = (-2; 0; -3), \overrightarrow{a_2} = (-2; 1\ ; -1)$, $\overrightarrow{a_3} = (2; -1; 1)$; $\overrightarrow{b_1} = (-4; 1; 2), \overrightarrow{b_2} = (6; -5; -5), \overrightarrow{b_3} = (4; -1; 4)$, $\overrightarrow{x_b} = (1; -1; 0), \overrightarrow{y_a} = (1; 1; 1)$.

**3.**Найти матрицу перехода от базиса$A_1, A_2, A_3, A_4$ к базису $B_1, B_2, B_3, B_4$ линейного пространства $M_2(R)$:

**а)** $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ к базису $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$;

**б)** $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ к базису $B_1 = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

**4.** Найти матрицу перехода от базиса $f_1, f_2, f_3$ к базису $g_1, g_2, g_3$:**а)** $f_1(x) = 2x + 1, f_2(x) = -x^2 - x, f_3(x) = -2x^2 + 2x + 1$, $g_1(x) = -6x^2 + 1, g_2(x) = 4x^2 - 4x - 3, g_3(x) = x^2 + x + 1$ линейного пространства $R[x^2]$;**б)**$f_1(x) = x^2 - 2x + 1, f_2(x) = x^2 - x - 1$, $f_3(x) = -x^2 + x - 2, g_1(x) = -3x^2 + 2x - 1, g_2(x) = -x^2 + 3x + 3$, $g_3(x) = -x^2 - x - 1$ линейного пространства $R[x^2]$.

**5.**Найти матрицу перехода $P_{e\to u}$, если известны координатные векторы: **а)** $\overrightarrow{a_e} = (-4; 6; 4)$, $\overrightarrow{b_e} = (1; -5; -1)$, $\overrightarrow{c_e} = (2; -5; 4)$, $\overrightarrow{a_u} = (-2; -2; 2)$, $\overrightarrow{b_u} = (0; 1; -1)$, $\overrightarrow{c_u} = (-3; -1-; 1)$;**б)**$\overrightarrow{a_e} = (-1; 3; 2), \overrightarrow{b_e} = (2; 0; 1)$, $\overrightarrow{c_e} = (3; 1; 2)$, $\overrightarrow{a_u} = (-1; 0; 3)$, $\overrightarrow{b_u} = (-1; -1; 1)$, $\overrightarrow{c_u} = (-1; -2; 1)$.

**Ответы:**

**4.1.** $P_{a\to b} = \begin{pmatrix} 2 & -3/2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.**4.2.а)** $P_{a\to b} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{x_a} = (-1;3;-3)$, $\overrightarrow{y_b} = (3;2;1)$; **б)** $P_{a\to b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{x_a} = (-1;1;-5)$, $\overrightarrow{y_b} = \left(-\frac{5}{21};\frac{1}{7};-\frac{20}{21}\right)$.**4.3.а)** $P_{A\to B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

**б)** $P_{A\to B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.**4.4. а)** $P_{f\to g} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

**б)** $P_{f\to g} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. **4.5. а)** $P_{e\to u} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

**б)** $P_{e\to u} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

## 2.4. Линейная оболочка её размерность и базис.

Рассмотрим систему векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ из векторного пространства $L$.

Множество всевозможных линейных комбинаций векторов системы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ называется **линейной оболочкой** или линейным подпространством, натянутым на систему векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ .

Иными словами, линейная оболочка — это набор векторов, которые задают линейное пространство.

**Обозначение:** $\boldsymbol{l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k})}$.

Таким образом, согласно определению линейной оболочкой

$$\boldsymbol{l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}) = \{\vec{x} \in L : \vec{x} = \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \dots + \alpha_k\overrightarrow{a_k}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in P\}} \quad \textbf{(2.4)}$$

**Замечание:** ранг системы векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ будем обозначать $r(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k})$.

**Размерность линейной оболочки $l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k})$ равна рангу системы векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ ,то есть**

$$\boldsymbol{dim\ l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}) = r(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k})}.$$

Любая максимальная линейно независимая подсистема системы векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ является базисом линейной оболочки

$l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k})$, по которой можно разложить всякий вектор из линейной оболочки.

**Пример 2.24.** Найти размерность и базис линейной оболочки векторов: **а)** $\vec{a}_1 = (5; 2; -4)$, $\vec{a}_2 = (0; -1; 2)$, $\vec{a}_3 = (2; 1; -2)$;**б)** $\vec{a}_1 = (3; -2; 1)$, $\vec{a}_2 = (4; 1; -3)$, $\vec{a}_3 = (2; 3; 1)$; **в)**$\vec{a}_1 = (1; -1; -2; -3)$, $\vec{a}_2 = (-2; 2; 4; 6)$, $\vec{a}_3 = (-1; -1; 2; 1)$,$\vec{a}_4 = (1; 3; -2; -3)$; **г)** $\vec{a}_1 = (0; 1; 1; -1)$, $\vec{a}_2 = (1; 2; 0; 1)$, $\vec{a}_3 = (2; 3; -1; 3)$, $\vec{a}_4 = (-1; 0; 2; -3)$; **д)** $\vec{a}_1 = (2; -1; -2; 1)$, $\vec{a}_2 = (3; -2; -1; 1)$, $\vec{a}_3 = (1; -1; -1; 0)$, $\vec{a}_4 = (4; -5; -3; -1)$, $\vec{a}_5 = (-1; 2; 1; 2)$; **е)** $\vec{a}_1 = (2; -1; -2; 1)$, $\vec{a}_2 = (3; -2; -1; 1)$, $\vec{a}_3 = (1; -1; -1; 0)$, $\vec{a}_4 = (4; -5; -3; -1)$, $\vec{a}_5 = (-1; 2; 1; 1)$.

Решение.

**а)** Любая максимальная линейно независимая подсистема системы векторов является базисом линейной оболочки. Следовательно, для нахождения базиса достаточно выделить максимальную линейно независимую подсистему из данной системы векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Найдем такую подсистему, для этого составим матрицу из векторов данной системы, соответствующую линейной комбинации данных векторов $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \alpha_3\overrightarrow{a_3}$, подставив числовые значения векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ и приравняв эту линейную комбинацию к нулевому вектору пространства

$R^3$ , получим:

$\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \alpha_3\overrightarrow{a_3} = 0,$

$\alpha_1\begin{pmatrix}5\\2\\-4\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$,данное равенство эквивалентно следующей системе линейных однородных уравнений$\begin{cases} 5\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -4\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$.

Будем решать эту систему методом Гаусса, приводя матрицу коэффициентов к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix}5&0&2\\2&-1&1\\-4&2&-2\end{pmatrix} \underset{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot c_1}{\overset{c_1+c_3}{\sim}} \begin{pmatrix}1&2&0\\2&-1&1\\2&-1&1\end{pmatrix} \underset{\substack{c_3-2c_1\\c_3-c_2}}{\sim} \begin{pmatrix}1&2&0\\0&-5&1\\0&0&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}\underline{1}&2&0\\0&\underline{-5}&1\end{pmatrix}.$$

Неизвестные $\alpha_1, \alpha_2$ являются главными, а неизвестная $\alpha_3$ является свободной. Следовательно вектор $\overrightarrow{a_3}$ представляется в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2$. Тогда максимальной линейно независимой подсистемой в системе векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ являются векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2$,которые и составляют базис линейной оболочки ,при этом её размерность равна 2- рангу матрицы, составленной из векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

Таким образом, $r = dim\ \ l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}) = 2$. Базис линейной оболочки состоит из двух векторов $\vec{a}_1 = (5; 2; -4)$, $\vec{a}_2 = (0; -1; 2)$.

**б)** Составим матрицу системы из векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, и при помощи элементарных преобразований приведем матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} \underline{1} & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{c_2 + 2c_1 \\ c_3 - 3c_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 13 & -1 \end{pmatrix} \overset{\sim}{\frac{c_2}{-5}}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & \underline{1} & -1 \\ 0 & 13 & -1 \end{pmatrix} \underset{c_3 - 13c_2}{\sim} \begin{pmatrix} \underline{1} & -3 & 1 \\ 0 & \underline{1} & -1 \\ 0 & 0 & \underline{12} \end{pmatrix}.$$

Все три неизвестные $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ являются главными (базисными), следовательно система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2$, $\overrightarrow{a_3}$ образует базис линейной оболочки. Размерность линейной оболочки равна трём-рангу матрицы, составленной из векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

**в)** Составим матрицу системы из векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ и при помощи элементарных преобразований приведем её к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 2 & -2 \\ -3 & 6 & 1 & -3 \end{pmatrix} \underset{\substack{c_2 + c_1 \\ c_3 + 2c_1 \\ c_4 + 3c_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{-2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \underset{c_4 - c_1}{\sim} \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{-2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{-4} \end{pmatrix}.$$

Максимальная линейно независимая подсистема состоит из трех векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{a}_4$,которые и составляют базис линейной оболочки. Размерность линейной оболочки, порожденной системой векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_4}$ равна трем, так как ранг матрицы системы равен трем (количеству ненулевых строк ступенчатой матрицы).

**г)** Составим матрицу из векторов данной системы и найдем её ранг:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \underset{\substack{c_3 - c_1 \\ c_4 + c_1}}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \underset{\substack{c_3 : (-2) \\ c_4 : 3}}{\sim} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{c_3 - c_2 \\ c_4 - c_2}}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Базис состоит из двух векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2$, следовательно, размерность линейной оболочки, порожденной системой векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ равна двум.

**д)** Составим матрицу из векторов данной системы и найдем её ранг:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & -5 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{c_1 + c_2}{\sim} \begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -5 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{c_2 + c_1 \\ c_3 + 2c_1 \\ c_4 - c_1}}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \underline{-1} & -1 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{c_3 + c_2}{\sim} \begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \underline{-1} & -1 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & \underline{-2} & -11 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, размерность линейной оболочки векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5$ равна 4, базис состоит из векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2$, $\vec{a}_3, \vec{a}_5$ соответствующих базисным неизвестным.

**е)** $$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & -5 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{c_1 + c_2}{\sim} \begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -5 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{c_2 + c_1 \\ c_3 + 2c_1 \\ c_4 - c_1}}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \underline{-1} & -1 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{c_3 + c_2}{\sim} \begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \underline{-1} & -1 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & \underline{-2} & -11 & 6 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, размерность линейной оболочки векторов равна трём, базис состоит из векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

**Свойства линейной оболочки.**

**1) Линейная оболочка элементов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ линейного пространства является подпространством линейного пространства $L$.**

Доказательство.

Покажем, что $L \neq \emptyset$.Вектор $\bar{0} = (0,0, \dots ,0) \in L$, следовательно $L \neq \emptyset$.

Покажем, что для любых $\vec{a}, \vec{b} \epsilon L, \beta \epsilon P$ выполняются условия:

1) $\vec{a} + \vec{b} \epsilon L$; 2)$\beta \vec{a} \epsilon L$.

1)$\vec{a} + \vec{b} \epsilon L$:

$\vec{a} = \alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \overrightarrow{a_2} + \dots + \alpha_k \overrightarrow{a_k}$, $\vec{b} = \beta_1 \overrightarrow{a_1} + \beta_2 \overrightarrow{a_2} + \dots + \beta_k \overrightarrow{a_k}$,

$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\overrightarrow{a_1} + (\alpha_2 + \beta_2) \overrightarrow{a_2} + \dots + (\alpha_k + \beta_k)\overrightarrow{a_k}$, следовательно, $\vec{a} + \vec{b} \epsilon L$;

2)$\beta \vec{a} \epsilon L$: $\vec{a} = \alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \overrightarrow{a_2} + \dots + \alpha_k \overrightarrow{a_k}$, тогда $\beta \vec{a} = \beta(\alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \overrightarrow{a_2} + \dots + \alpha_k \overrightarrow{a_k}) = \beta\alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \beta\alpha_2 \overrightarrow{a_2} + \dots + \beta\alpha_k \overrightarrow{a_k}$,

следовательно, $\beta \vec{a} \epsilon L$.

Итак, линейная оболочка системы векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ является подпространством линейного пространства.

**2) Если какой-либо вектор порождающей системы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ является линейной комбинацией остальных векторов, то его можно удалить из порождающей системы, не изменив линейной оболочки.**

Доказательство.

Пусть $L_1$ подпространство линейного пространства $L$.

Если же из порождающей системы векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ удалить те, что линейно зависят от остальных (если такие есть), то получится максимальная система линейно независимых векторов, которую можно рассматривать как базис подпространства пространства $L$. Очевидно, что такая операция не может изменить подпространство $L_1$ ,то есть линейную оболочку порождающей системы$\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}$. В связи с этим любое подпространство $L_1$ пространства $L$ можно рассматривать как линейную оболочку своего базиса. Следовательно, любое подпространство $L_1$ пространства $L$ является подпространством, натянутым на свой базис.

**3) Если векторы $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_m} \in l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k})$, то линейная оболочка $l(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_m}) \subset l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k})$.**

Доказательство.

Так как векторы $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_m}$принадлежат подпространству $l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k})$, то и любая их линейная комбинация $\alpha_1\overrightarrow{b_1} + \alpha_2\overrightarrow{b_2} + \dots +$
$+\alpha_m\overrightarrow{b_m}$ принадлежит подпространству $l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k})$, то есть$l\left(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_m}\right) \subset l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k})$.

**Теорема 2.5.** Пусть имеется система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ векторного пространства $L$ и система векторов $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_m}$ полученная из $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ с помощью элементарных преобразований, тогда линейные оболочки этих систем векторов совпадают, то есть

$$\boldsymbol{l}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{b_1}}, \overrightarrow{\boldsymbol{b_2}}, \dots, \overrightarrow{\boldsymbol{b_m}}\right) = \boldsymbol{l}(\overrightarrow{\boldsymbol{a_1}}, \overrightarrow{\boldsymbol{a_2}}, \dots, \overrightarrow{\boldsymbol{a_k}}).$$

Доказательство.

При выполнении элементарных преобразований (перестановка векторов, умножение на ненулевое число, прибавление к одному вектору другого, умноженного на число) каждый новый вектор остается линейной комбинацией исходных, и наоборот. Поскольку все векторы одной системы выражаются через другую, их линейные оболочки (множества всех возможных линейных комбинаций) полностью идентичны.

Рассмотрим систему векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}$. Заметим, что если вектор $\overrightarrow{b_\iota}$ получен из этой системы с помощью элементарных преобразований, то он является линейной комбинацией исходных векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}$. Тогда в силу свойства 3 линейная оболочка $l\left(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_m}\right) \subset l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k})$. Поскольку каждое элементарное преобразование обратимо, то, получаем, что и система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ получается из системы $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_m}$ при помощи элементарных преобразований. Поэтому применив предыдущие рассуждения к системе векторов $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_m}$, получаем $l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}) \subset l\left(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_m}\right)$. Из этих двух вложений имеем: $l\left(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_m}\right) = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k})$. Доказано.

**5. Задания для самостоятельного решения.**

Найти размерность и базис линейной оболочки векторов:

**1.** $\overrightarrow{a_1} = (1;-1;-2;-3), \overrightarrow{a_2} = (-2;4;2;-2), \overrightarrow{a_3} = (-1;2;-1;3)$, $\overrightarrow{a_4} = (-3;6;1;-3)$;
**2.** $\overrightarrow{a_1} = (1;-1;1), \overrightarrow{a_2} = (2;-2;2), \overrightarrow{a_3} = (2;1;0)$, $\overrightarrow{a_4} = (3;0;1)$;
**3.** $\overrightarrow{a_1} = (0;0;0;0), \overrightarrow{a_2} = (0;1;-1;-2), \overrightarrow{a_3} = (0;-2;2;4)$, $\overrightarrow{a_4} = (0;2;-2;-4), \overrightarrow{a_5} = (1;-2;1;0), \overrightarrow{a_6} = (3;-3;0;-6)$;
**4.** $\overrightarrow{a_1} = (1;2;3;-1), \overrightarrow{a_2} = (0;4;4;-1), \overrightarrow{a_3} = (-2;0;-2;1)$, $\overrightarrow{a_4} = (1;-6;-5;1), \overrightarrow{a_5} = (-1;4;1;-2), \overrightarrow{a_6} = (3;2;5;-2)$;
**5.** $\overrightarrow{a_1} = (1;2;1), \overrightarrow{a_2} = (1;3;2), \overrightarrow{a_3} = (1;1;0)$, $\overrightarrow{a_4} = (0;2;2)$;
**6.** $\overrightarrow{a_1} = (1;0;1;-1), \overrightarrow{a_2} = (2;0;1;-1), \overrightarrow{a_3} = (1;0;0;0)$, $\overrightarrow{a_4} = (0;-1;1;0), \overrightarrow{a_5} = (0;-1;0;1)$.
**7.** $\overrightarrow{a_1} = (1;-1;-2;1), \overrightarrow{a_2} = (2;2;-1;-1), \overrightarrow{a_3} = (1;-1;-1;1)$, $\overrightarrow{a_4} = (1;-5;-3;4), \overrightarrow{a_5} = (-1;-2;1;1)$;
**8.** $\overrightarrow{a_1} = (4;-7;1;-2;1), \overrightarrow{a_2} = (-4;3;1;2;-1), \overrightarrow{a_3} = (1;4;-2;-1;0)$.
**9.** $\overrightarrow{a_1} = (0;1;0;1), \overrightarrow{a_2} = (-1;3;0;1), \overrightarrow{a_3} = (1;-2;0;1)$, $\overrightarrow{a_4} = (2;-4;0;1)$.
**10.** $\overrightarrow{a_1} = (1;3;2;1), \overrightarrow{a_2} = (0;-2;2;-2), \overrightarrow{a_3} = (2;0;10;-4)$, $\overrightarrow{a_4} = (-1;-4;-1;5)$.

**Ответы:**
**5.1.** $dim\, l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_4}) = 3, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ –базис;
**5.2.** $dim\, l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_4}) = 2, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_3}$ –базис;
**5.3.** $dim\, l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_4}, \overrightarrow{a_5}, \overrightarrow{a_6}) = 2, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_5}$ –базис;
**5.4.** $dim\, l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_4}, \overrightarrow{a_5}, \overrightarrow{a_6}) = 3, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_5}$ –базис;
**5.5.** $dim\, l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_4}) = 2, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ –базис;
**5.6.** $dim\, l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_4}, \overrightarrow{a_5}) = 3, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_4}$ –базис;
**5.7.** $diml(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_4}, \overrightarrow{a_5}) = 4, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_5}$ –базис.
**5.8.** $dim\, l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}) = 3, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ –базис;
**5.9.** $dim\, l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}) = 3, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ –базис;
**5.10.** $dim\, l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_4}) = 3, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_4}$ –базис.

## 2.5. Способы задания подпространств.

Основной способ задания подпространства в линейном пространстве использует понятие линейной оболочки, но подпространство можно также задавать с помощью однородной системы линейных уравнений, поэтому желательно уметь переходить от одного способа задания подпространства к другому.

Таким образом, имеется два способа задания подпространств:

**1)** как множество решений некоторой однородной системы линейных уравнений, то есть $L_1 = \{\vec{x} \in R^n: A\vec{x} = 0\}$;

**2)** как линейную оболочку, некоторой порождающей это подпространство системы векторов, то есть

$$L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}) = \{\vec{x} \in U: \vec{x} = \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\,\overrightarrow{a_2} + \dots + \alpha_k\overrightarrow{a_k}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in P\}.$$

**Переход от подпространства, заданного однородной системой уравнений к линейной оболочке.**

Если подпространство задано с помощью однородной системы уравнений $L_1 = \{\vec{x} \in R^n: A\vec{x} = 0\}$, то ФСР (фундаментальная система решений) порождает линейную оболочку, совпадающую с исходным пространством $L_1$.

**Пример 2.25.** Найти линейную оболочку соответствующую ОСУ задающей линейное подпространство: **а)** $L_1: \begin{cases} 9x_1 - 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$;

**б)** $L_1: \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2\,x_2 - 3\,x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2\,x_3 = 0 \end{cases}$; **в)** $L_1: \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3\,x_3 + 4\,x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6\,x_2 + 12\,x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4\,x_2 + 6\,x_3 + 8\,x_4 = 0 \end{cases}$;

**г)** $L_1: \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3\,x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 + 2\,x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - 3\,x_4 = 0 \end{cases}$; **д)** $L_1: \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2\,x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 2\,x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$.

Решение.

**а)** Так как ФСР порождает линейную оболочку, совпадающую с исходным пространством, выпишем матрицу, соответствующую данной системе, и найдём ФСР:

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & -3 & 0 \\ 6 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \frac{c_1}{3} \\ \phantom{x} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \phantom{x} \\ c_2 - c_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-1)\cdot c_1 \\ \phantom{x} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} l_1 \leftrightarrow l_3 \\ l_2 \leftrightarrow l_4 \end{matrix};$$

Поменяем первый столбец с третьим, а второй столбец с четвертый, с учетом их порядка, получим:

$$\begin{pmatrix} \overbrace{\boxed{1}}^{x_3} & 0 & -3 & 0 \\ 0 & \underbrace{\boxed{1}}_{x_4} & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Главными неизвестными являются $x_3$ и $x_4$ , значит, $x_1$ и $x_2$ — свободные неизвестные. Выразив главные неизвестные через свободные -получим общее решение системы: $\begin{cases} x_3 = 3\,x_1 \\ x_4 = x_2 - 3x_1; \\ x_{1,2} = \text{св. н.} \end{cases}$

Найдем фундаментальную систему решений:

$k = n - r = 4 - 2 = 2$ –ФСР состоит из 2 векторов;

Для первого частного решения возьмем $x_1 = 1, x_2 = 0$, из общего решения получим, что $x_3 = 3$ и $x_4 = -3$.

Для второго частного решения возьмем $x_1 = 0, x_2 = 1$,то $x_3 = 0$ и $x_4 = 1$.

Занесем данные в таблицу:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $\overrightarrow{a_1}$ | 1 | 0 | 3 | -3 |
| $\overrightarrow{a_2}$ | 0 | 1 | 0 | 1 |

Таким образом, фундаментальная система решений состоит из векторов $\vec{a}_1 = (1; 0; 3; -3), \vec{a}_2 = (0; 1; 0; 1)$.Следовательно, $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})$.

**б)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underset{\frac{c_3}{-2}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ c_2 - c_1 \sim \\ c_3 - c_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_1 - c_2 \\ \sim \\ c_3 + c_2 \end{matrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 \end{pmatrix}, \begin{cases} x_1 = -\,x_3 \\ x_2 = 2\,x_3 \\ x_3 = \text{св. н.} \end{cases}$-общее решение системы,$k = n - r = 3 - 2 = 1$ –ФСР состоит из одного вектора:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| $\vec{a}$ | -1 | 2 | 1 |

Следовательно, $L_1 = l(\vec{a})$,где $\vec{a} = (-1; 2; 1)$.

**в)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 12 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ c_2 : 3 \sim \\ c_3 : 2 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ c_2 - c_1 \\ c_3 - c_1 \end{matrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -4 \end{pmatrix} \underset{\sim}{c_2 - 3c_1} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -4 \end{pmatrix},$

$$\begin{cases} x_1 = -2\,x_2 - 16\,x_4 \\ x_3 = 4\,x_4 \\ x_{2,4} = \text{св. н.} \end{cases}$$ -общее решение системы,

$k = n - r = 4 - 2 = 2$ –ФСР состоит из двух векторов.

Построим ФСР:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $\overrightarrow{a_1}$ | -2 | 1 | 0 | 0 |
| $\overrightarrow{a_2}$ | -16 | 0 | 4 | 1 |

Таким образом, фундаментальная система решений состоит из векторов

$\vec{a}_1 = (-2; 1; 0; 0), \vec{a}_2 = (-16; 0; 4; 1)$.Следовательно, $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})$.

**г)** $$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \sim \\ c_3 - c_1 \\ c_4 + c_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} c_1 - 2c_2 \\ \sim \\ c_3 + 2c_2 \\ c_4 - 3c_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & -1 & 2 \\ 0 & \underline{1} & 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{cases} x_1 = x_3 - 2\,x_4 \\ x_2 = -2\,x_3 + x_4, \\ x_{3,4} = \text{св. н.} \end{cases}$$

$k = n - r = 4 - 2 = 2$ –ФСР состоит из двух векторов.

Построим ФСР:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $\overrightarrow{a_1}$ | 1 | -2 | 1 | 0 |
| $\overrightarrow{a_2}$ | -2 | 1 | 0 | 1 |

Таким образом, фундаментальная система решений состоит из векторов $\vec{a}_1 = (1; -2; 1; 0), \vec{a}_2 = (-2; 1; 0; 1)$.

Следовательно, $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})$.

**д)**

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \sim \\ c_3 - c_1 \\ c_4 - c_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \sim \\ c_3 : (-2) \\ c_4 : (-1) \end{array}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} c_1+2c_2 \\ c_3-c_2 \\ c_4-c_2 \end{matrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} c_1+2c_2 \\ c_3-c_2 \\ c_4-c_2 \end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\begin{cases} x_1=-x_3-4x_4-2x_5 \\ x_2=-x_3-x_4-x_5, \\ x_{3,4,5}=\text{св. н.} \end{cases}$$

$k=n-r=5-2=3$ –ФСР состоит из трех векторов.

Построим ФСР:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\overrightarrow{a_1}$ | -1 | -1 | 1 | 0 | 0 |
| $\overrightarrow{a_2}$ | -4 | -1 | 0 | 1 | 0 |
| $\overrightarrow{a_3}$ | -2 | -1 | 0 | 0 | 1 |

Таким образом, фундаментальная система решений состоит из векторов $\vec{a}_1=(-1;-1;1;0;0),\vec{a}_2=(-4;-1;0;1;0),\overrightarrow{a_3}=(-2;-1;0;0;1)$.

Следовательно, $L_1=l(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3})$.

**Переход от линейной оболочки к подпространству решений однородной системы уравнений.**

Рассмотрим алгоритм нахождения однородной системы уравнений, подпространство решений которой совпадает с линейной оболочкой $l(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\dots,\overrightarrow{a_k})$.

Вектор $\vec{x}=(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_k)\in(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\dots,\overrightarrow{a_k})$,тогда и только тогда, когда этот вектор является линейной комбинацией векторов системы $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\dots,\overrightarrow{a_k}$.

Если подпространство задано линейной оболочкой, порожденной некоторой системой векторов $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\dots,\overrightarrow{a_k}$, то есть

$$\vec{x}=\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\,\overrightarrow{a_2}+\dots+\alpha_k\overrightarrow{a_k}\ (2.5),$$

где $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k\in P$,$\overrightarrow{a_1}=(a_{11},a_{21},\dots,a_{n1})$, $\overrightarrow{a_2}=(a_{12},a_{22},\dots,a_{n2})$, …, $\overrightarrow{a_k}=(a_{1k},a_{2k},\dots,a_{nk})$.

Данное векторное равенство можно рассматривать как систему уравнений для неизвестных $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k$ ,то есть,

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1k}\alpha_k = x_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2k}\alpha_3 = x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + a_{nk}\alpha_k = x_n \end{cases} \quad (2.6)$$

Расширенная матрица этой системы уравнений имеет вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{12} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & x_n \end{array}\right) (2.7);$$

Вектор $\vec{x}$ представим в виде $\vec{x} = \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\,\overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_k\overrightarrow{a_k}$, тогда и только тогда, когда система уравнений(2.6) имеет решение. По теореме Кронекера-Капелли система уравнений имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы уравнений совпадает с рангом расширенной матрицы.

Пусть основная матрица системы уравнений имеет ступенчатую форму. Тогда расширенную матрицу системы уравнений можно записать в следующем виде:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \underline{\widetilde{a_{11}}} & \widetilde{a_{12}} & \ldots & \widetilde{a_{1k}} & c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n \\ 0 & \underline{\widetilde{a_{22}}} & \ldots & \widetilde{a_{2k}} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \underline{\widetilde{a_{nk}}} & \underline{c_{p1}x_1 + c_{p2}x_2 + \ldots + c_{pn}x_n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{(p+1)1}x_1 + c_{(p+1)2}x_2 + \ldots + c_{(p+1)n}x_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \ldots + c_{nn}x_n \end{array}\right) (2.8)$$

Если основная матрица системы уравнений с расширенной матрицей (2.8) содержит n – p нулевых строк, то векторное уравнение (2.5) имеет решение тогда и только тогда, когда элементы в правой части, соответствующие нулевым строкам основной матрицы, равны нулю:

$$\begin{cases} c_{(p+1)1}x_1 + c_{(p+1)2}x_2 + \ldots + c_{(p+1)n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \ldots + c_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Таким образом, вектор $\vec{x} \epsilon l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k})$ , тогда и только тогда, когда его элементы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ удовлетворяют однородной системе уравнений (2.9). Следовательно, система уравнений (2.9) является искомой.

**Пример 2.26.** Найти однородную систему линейных алгебраических уравнений (ОСАУ), подпространство решений которой совпадает с линейной оболочкой, порожденной системой векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}$:

**а)**$L_1 = l(\vec{a}), \vec{a} = (2; 0; 5; -4)$;

**б)** $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}),\ \vec{a}_1 = (1; 1; 1; 1), \vec{a}_2 = (1; 3; 1; 3)$;

**в)** $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}), \overrightarrow{a_1} = (-1; 1; -3; 1), \overrightarrow{a_2} = (1; 2; 1; 3), \overrightarrow{a_3} = (1; -4; 5; -5)$;

**г)** $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_4}),\ \vec{a}_1 = (-2; 3; 1; 3), \vec{a}_2 = (0; 1; 1; 3)$, $\vec{a}_3 = (-1; 2; 1; -1)$; $\vec{a}_4 = (-2; 1; -1; -5)$;

**д)** $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}), \vec{a}_1 = (1; -3; 3; -1; 1), \vec{a}_2 = (1; -2; 3; 1; -2), \vec{a}_3 = (1; 2; 1; 1; 1)$.

Решение.

**а)** Исходя из определения линейной оболочки и следуя алгоритму, изложенному выше, составим основную матрицу системы уравнений из элементов исходных векторов, записав их по столбцам, и приведем ее к ступенчатому виду:

$l(\vec{a}) \Leftrightarrow \vec{x} = \alpha\vec{a}$,

$$\alpha\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases} 2\alpha = x_1 \\ 0 = x_2 \\ 5\alpha = x_3 \\ -4\alpha = x_4 \end{cases};$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 2 & x_1 \\ 0 & x_2 \\ 5 & x_3 \\ -4 & x_4 \end{array}\right) c_3 + c_4 \sim \left(\begin{array}{c|c} 2 & x_1 \\ 0 & x_2 \\ 1 & x_3 + x_4 \\ -4 & x_4 \end{array}\right) c_1 \leftrightarrow c_3 \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{} & x_3 + x_4 \\ 0 & x_2 \\ 2 & x_1 \\ -4 & x_4 \end{array}\right) \begin{matrix} c_3 - 2c_1 \sim \\ c_4 + 4c_1 \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{c|c} 1 & x_3 + x_4 \\ 0 & x_2 \\ 0 & x_1 - 2x_3 - 2x_4 \\ 0 & 5x_4 + 4x_3 \end{array}\right).$$

Нулевым строчкам полученной ступенчатой матрицы соответствуют уравнения: $x_2 = 0,\ x_1 - 2x_3 - 2x_4 = 0,\ 4x_3 + 5x_4 = 0$.

Таким образом, получим однородную систему линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$, подпространство решений которой совпадает с линейной оболочкой, порожденной вектором $\vec{a}$.

**б)** $l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}) \Leftrightarrow \vec{x} = \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\,\overrightarrow{a_2}$,

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\3\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\text{ или}\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=x_1\\ \alpha_1+3\alpha_2=x_2\\ \alpha_1+\alpha_2=x_3\\ \alpha_1+3\alpha_2=x_4\end{cases};$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}\underline{1}&1&x_1\\1&3&x_2\\1&1&x_3\\1&3&x_4\end{array}\right)\begin{matrix}c_2-c_1\\c_3-c_1\\c_4-c_1\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cc|c}1&1&x_1\\0&\underline{2}&x_2-x_1\\0&0&x_3-x_1\\0&2&x_4-x_1\end{array}\right)\begin{matrix}\sim\\c_4-c_2\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|c}\underline{1}&1&x_1\\0&\underline{2}&x_2-x_1\\ \hline 0&0&x_3-x_1\\0&0&x_4-x_2\end{array}\right);$$

Нулевым строчкам ступенчатой матрицы соответствует система уравнений: $\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_2-x_4=0\end{cases}$.

**в)** $L_1=l(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3})\Leftrightarrow\vec{x}=\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\,\overrightarrow{a_2}+\alpha_3\overrightarrow{a_3}$ , то есть

$$\alpha_1\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1\\-4\\5\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},$$

$$\begin{cases}-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=x_1\\ \alpha_1+2\alpha_2-4\alpha_3=x_2\\ -3\alpha_1+\alpha_2+5\alpha_3=x_3\\ \alpha_1+3\alpha_2-5\alpha_3=x_4\end{cases};$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\underline{-1}&1&1&x_1\\1&2&-4&x_2\\-3&1&5&x_3\\1&3&-5&x_4\end{array}\right)\begin{matrix}c_2+c_1\\c_3-3c_1\\c_4+c_1\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&1&x_1\\0&3&-3&x_2+x_1\\0&-2&2&x_3-3x_1\\0&4&-4&x_4+x_1\end{array}\right)\begin{matrix}c_2+c_3\\ \sim\\ c_4+2c_3\end{matrix}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&1&x_1\\0&\underline{1}&-1&-2x_1+x_2+x_3\\0&-2&2&x_3-3x_1\\0&0&0&x_4+x_1+2(x_3-3x_1)\end{array}\right)\begin{matrix}\sim\\c_3+2c_2\end{matrix}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&1&x_1\\0&1&-1&-2x_1+x_2+x_3\\0&0&0&x_3-3x_1+2(-2x_1+x_2+x_3)\\0&0&0&x_4-5x_1+2x_3\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&1&x_1\\0&1&-1&-2x_1+x_2+x_3\\ \hline 0&0&0&-7x_1+2x_2+3x_3\\0&0&0&-5x_1+2x_3+x_4\end{array}\right).$$

Нулевым строчкам ступенчатой матрицы соответствует система уравнений $\begin{cases}7x_1-2x_2-3x_3=0\\5x_1-2x_3-x_4=0\end{cases}$, подпространство решений которой совпадает с линейной оболочкой, порожденной системой векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$.

**г)**

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & -1 & -2 & x_1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & x_3 \\ 3 & 3 & -1 & -5 & x_4 \end{array}\right) \begin{array}{c} c_1 + c_2 \\ \sim \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \underline{1} & 1 & 1 & -1 & x_1 + x_2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & x_3 \\ 3 & 3 & -1 & -5 & x_4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \sim \\ c_2 - 3c_1 \\ c_3 - c_1 \\ c_4 - 3c_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & x_1 + x_2 \\ 0 & -2 & -1 & 4 & x_2 - 3x_1 - 3x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 - x_1 - x_2 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & x_4 - 3x_1 - 3x_2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \sim \\ c_2 - 3c_1 \\ c_3 - c_1 \\ c_4 - 3c_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & x_1 + x_2 \\ 0 & -2 & -1 & 4 & -3x_1 - 2x_2 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & x_4 - 3x_1 - 3x_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 - x_1 - x_2 \end{array}\right).$$

Однородная система, определяющая подпространство $U$ имеет вид:

$\{x_3 - x_1 - x_2 = 0$ или $\{x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

**д)** $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}) \Leftrightarrow \vec{x} = \alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \overrightarrow{a_2} + \alpha_3 \overrightarrow{a_3}$ , то есть

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix};$$

Получим систему: $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = x_1 \\ -3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = x_2 \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = x_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = x_4 \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = x_5 \end{cases}$;

Приведём расширенную матрицу системы с помощью элементарных преобразований к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \underline{1} & 1 & 1 & x_1 \\ -3 & -2 & 2 & x_2 \\ 3 & 3 & 1 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 & x_4 \\ -1 & -2 & 1 & x_5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \sim \\ c_2 + 3c_1 \\ c_3 - 3c_1 \\ c_4 - c_1 \\ c_5 + c_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 5 & x_2 + 3x_1 \\ 0 & 0 & -2 & x_3 - 3x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 - x_1 \\ 0 & -1 & 2 & x_5 + x_1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \sim \\ \\ c_5 + c_3 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & \underline{1} & 5 & x_2+3x_1 \\ 0 & 0 & -2 & x_3-3x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_4-x_1 \\ 0 & -1 & 0 & x_5-2x_1+x_3 \end{array}\right) \underset{c_5+c_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 5 & x_2+3x_1 \\ 0 & 0 & -2 & x_3-3x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_4-x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1+x_2+x_3+x_5 \end{array}\right).$$

Однородная система, определяющая подпространство имеет вид:

$$L_1\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_5=0 \\ x_1-x_4=0 \end{cases}.$$

**6.Задания для самостоятельного решения.**

**1.**Найти линейную оболочку соответствующую ОСУ задающей линейное подпространство:

**а)** $L_1\colon\begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_3-2x_4+4x_5=0 \\ 3x_1+4x_2+4x_3-3x_4+6x_5=0 \end{cases};$

**б)**$L_1\colon\begin{cases} x_1-x_2+x_4=0 \\ 2x_2+x_3+x_4=0 \end{cases};$

**в)** $L_1\colon\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-5x_4=0 \\ x_1+2x_2+3x_3-2x_4=0 \\ 3x_1+6x_2+10x_3-9x_4=0 \end{cases};$

**г)** $L_1\colon\begin{cases} -2x_1+4x_2-x_3+x_4+3x_5=0 \\ 3x_1-5x_2+2x_3-3x_4-4x_5=0 \\ -2x_1+6x_2-2x_4+4x_5=0 \\ x_1-x_2+x_3-2x_4-x_5=0 \end{cases};$

**д)** $L_1\colon\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3-x_4=0 \\ x_1-2x_2+2x_3-x_4=0 \\ 3x_1-6x_2+8x_3-x_4=0 \\ -x_1+2x_2-5x_3-2x_4=0 \end{cases};$

**е)** $L_1\colon\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5=0 \\ 2x_2+3x_2+4x_3+5x_4+x_5=0 \\ 3x_1+4x_2+5x_3+x_4+2x_5=0 \\ x_1+3x_2+5x_3+12x_4+9x_5=0 \end{cases};$

**ё)** $L_1\colon\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4+x_5=0 \\ x_1+3x_2-x_3-x_4+x_5=0 \\ 3x_1+6x_2-2x_3+x_4-2x_5=0 \end{cases};$

**ж)** $L_1\colon\begin{cases} -2x_2-3x_3-2x_4=0 \\ x_1+x_2+3x_3+3x_4=0 \end{cases};$

**з)** $L_1\colon\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+x_4=0 \\ 3x_1+4x_2+2x_3+2x_4=0 \end{cases};$

**и)** $L_1: \begin{cases} x_1 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_4 = 0. \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

**2.** Найти однородную систему линейных алгебраических уравнений (ОСАУ), подпространство решений которой совпадает с линейной оболочкой, порожденной системой векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}$:

**а)** $L_1 = l(\vec{a}), \vec{a} = (1; 2; 1; -3)$;

**б)** $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ), \overrightarrow{a_1} = (3; -3; 1; -3), \overrightarrow{a_2} = (-6; 6; -2; 6)$;

**в)** $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}), \overrightarrow{a_1} = (1; -2; 2; 3)$, $\overrightarrow{a_2} = (3; -5; 4; 1), \overrightarrow{a_3} = (1; -1; 0; 7)$;

**г)** $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}), \overrightarrow{a_1} = (1; -3; -1; -2)$, $\overrightarrow{a_2} = (0; 1; -3; 1)$, $\overrightarrow{a_3} = (1; -4; 2; -3)$;

**д)** $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}), \overrightarrow{a_1} = (1; -1; 2; 0), \overrightarrow{a_2} = (1; 0; 1; -1), \overrightarrow{a_3} = (1; -3; 4; 2)$;

**е)** $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}), \overrightarrow{a_1} = (1; 2; 5), \overrightarrow{a_2} = (-2; 3; -3)$, $\overrightarrow{a_3} = (-3; 1; 8)$;

**ё)** $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_4}), \overrightarrow{a_1} = (2; 8; 4; 3), \overrightarrow{a_2} = (1; -3; -4; 1), \overrightarrow{a_3} = (1; 11; 8; 2)$, $\overrightarrow{a_4} = (3; 19; 12; 5)$;

**ж)** $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3})$, $\overrightarrow{a_1} = (1; 2; 0; 2), \overrightarrow{a_2} = (1; 2; 1; 2)$, $\overrightarrow{a_3} = (3; 1; 3; 1)$;

**з)** $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3})$, $\overrightarrow{a_1} = (1; 1; 1; 1), \overrightarrow{a_2} = (-4; 3; 1; -1)$;

**и)** $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}), \overrightarrow{a_1} = (1; 1; 1; 1), \overrightarrow{a_2} = (1; 2; 1; 3)$, $\overrightarrow{a_3} = (3; 4; 3; 5)$;

**й)** $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3})$, $\vec{a}_1 = (1; 0; 1; -1), \vec{a}_2 = (2; 0; 1; -1)$.

**Ответы:**

**6.1.а)** $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}), \vec{a}_1 = (8; -7; 1; 0; 0), \vec{a}_2 = (1; 0; 0; 1; 0)$, $\overrightarrow{a_3} = (-2; 0; 0; 0; 1)$;**б)** $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}) = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}), \vec{a}_1 = (1; 1; -2; 0), \vec{b}_2 = (-1; 0; -1; 1)$;**в)** $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}), \vec{a}_1 = (1; -2; 1; 0; 0), \vec{a}_2 = (15; -12; 0; 1; 1)$;
**г)** $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}), \vec{a}_1 = (3; 1; -2; 0; 0), \vec{a}_2 = (-1; 0; 3; 1; 0)$; $\vec{a}_3 = (2; 0; -1; 0; 1)$;**д)** $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}), \vec{a}_1 = (2; 1; 0; 0), \vec{a}_2 = (3; 0; -1; 1)$.
**е)** $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}), \vec{a}_1 = (-2; 1; 0; 0), \vec{a}_2 = (-7; 0; 3; 1)$;
**ё)** $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}), \vec{a}_1 = (0; 1; 3; 0; 0), \vec{a}_2 = (-8; 0; -11; 4; 1)$;
**ж)** $L_1 = l(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}), \overrightarrow{b_1} = \left(1; 1; -\frac{2}{3}; 0\right), \overrightarrow{b_2} = \left(-1; 0; -\frac{2}{3}; 1\right)$;
**з)** $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}) = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})$, $\overrightarrow{a_1} = (-6; 4; 1; 0), \overrightarrow{a_2} = (-2; 1; 0; 1)$;
**и)** $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}) = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})$, $\overrightarrow{a_1} = (2; 5; 1; 1; 0), \overrightarrow{a_2} = (-1; -3; 0; 0; 1)$.

**6.2.а)** $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}): \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$;**б)** $L_1: \begin{cases} x_1 - 3x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$;

**в)** $L_1: \{2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$;**г)** $L_1: \begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$;

**д)** $L_1$: $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$; **е)** $L_1$: $\{3x_1 + x_2 - x_3 = 0$;

**ё)** $L_1$: $\begin{cases} 8x_1 + x_3 - 12x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 14x_4 = 0 \end{cases}$; **ж)** $L_1$: $\{x_2 - x_4 = 0$;

**з)** $L_1$: $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$, **и)** $L_1$: $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$;

**й)** $L_1$: $\begin{cases} x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$.

## 2.6. Сумма и пересечение подпространств их базис и размерность.

**Суммой двух линейных подпространств** $L_1$ и $L_2$ линейного пространства $L$ называется совокупность $L_1 + L_2$ всех векторов из $L$, каждый из которых представляется в виде $x = (x_1 + x_2) \epsilon L$, где $x_1 \epsilon L_1, x_2 \epsilon L_2$.

**Теорема 2.6.** Если $L_1$ и $L_2$ подпространства векторного пространства $L$, то сумма $L_1 + L_2$ является подпространством.

Доказательство.

Для начала вспомним определение линейного подпространства.

Линейным подпространством линейного пространства $L$ называется непустое множество $L_1$ векторов из $L$, обладающее следующими свойствами: 1) из того, что $\vec{a}, \vec{b} \epsilon L_1$, следует что $(\vec{a} + \vec{b}) \epsilon L_1$;

2) из того, что $\vec{a} \in L_1$, а число $\alpha \epsilon P$, следует что $\alpha\vec{a} \in L_1$.

И покажем, что для непустого множества $L_1 + L_2$ выполняются условия 1) – 2).

Итак, $L_1 + L_2 \neq \emptyset$, так как $0 \in L_1 + L_2$.

1)Пусть $\vec{c_1}, \vec{c_2} \in L_1 + L_2$, тогда $\vec{c_1} = \vec{a_1} + \vec{b_1}$, а $\vec{c_2} = \vec{a_2} + \vec{b_2}$, где $\vec{a_1}, \vec{a_2} \epsilon L_1$ и $\vec{b_1}, \vec{b_2} \in L_2$. Найдём сумму $\vec{c_1} + \vec{c_2} = (\vec{a_1} + \vec{b_1}) +$ $+(\vec{a_2} + \vec{b_2}) = (\vec{a_1} + \vec{a_2}) + (\vec{b_1} + \vec{b_2}) = \vec{a_3} + \vec{b_3}$, где

$\vec{a_3} = \vec{a_1} + \vec{a_2} \in L_1$, а $\vec{b_3} = \vec{b_1} + \vec{b_2} \in L_2$.

Поэтому $\vec{c_1} + \vec{c_2} = \vec{a_3} + \vec{b_3} \in L_1 + L_2$.

2)Пусть $\alpha\vec{c} \in L_1 + L_2$, а число $\alpha \in P$.Тогда $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, где $\vec{a} \in L_1$, $\vec{b} \in L_2$. Тогда $\alpha\vec{c} = \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$, причём $\alpha\vec{a} \in L_1$, $\alpha\vec{b} \in L_2$.

Следовательно, $\alpha\vec{c} = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} \in L_1 + L_2$. Теорема доказана.

**Теорема 2.7.** Если $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k})$и $L_2 = l(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_m})$ , то $L_1 + L_2 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_m})$.

Доказательство.

Пусть вектор$\vec{x} \in L_1 + L_2$, тогда он представим в виде$\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$ , где $\vec{a} \in L_1$, $\vec{b} \in L_2$. Поэтому

$\vec{a} = \lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \dots + \lambda_k\overrightarrow{a_k}$, $\vec{b} = \mu_1\overrightarrow{b_1} + \mu_2\overrightarrow{b_2} + \dots + \mu_m\overrightarrow{b_m}$ и

$\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} = \lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \dots + \lambda_k\overrightarrow{a_k} + \mu_1\overrightarrow{b_1} + \mu_2\overrightarrow{b_2} + \dots + \mu_m\overrightarrow{b_m}$,

$\vec{x} \in l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_m})$

Отсюда следует, что $L_1 + L_2 \subset l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_m})$.

Взяв вектор $\vec{y} \in l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_m})$, и рассуждая аналогично, получим $l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_m}) \subset L_1 + L_2$.

Следовательно,$L_1 + L_2 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_m})$.Доказано.

Таким образом, если подпространства $L_1$ и $L_2$заданы как линейные оболочки, то есть $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_m})$ , $L_2 = l(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_k})$, то суммой подпространств называют линейную оболочку их объединения, в неё входят векторы, являющиеся суммой векторов из подпространств $L_1$ и $L_2$, сумма этих подпространств $L_1 + L_2$ является подпространством линейного пространства и представляется линейной оболочкой заданных векторов

$$\boldsymbol{L_1 + L_2 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_m}, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_k})} \quad \textbf{(2.10)}$$

Максимальное число линейно независимых векторов из $L_1$ и $L_2$ образует базис суммы подпространств $L_1 + L_2$ и определяет её размерность как подпространства пространства $L$ . Очевидно, что эта размерность не превосходит размерности самого пространства $L$.

**Пример 2.26.** Найти размерность и базис суммы подпространств $L_1$ и $L_2$:**а)** $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}), \overrightarrow{a_1} = (-1; -2; 1; 1), \overrightarrow{a_2} = (-1; -9; 6; 1)$,

$L_2 = l(\vec{b},)$, $\vec{b} = (0; 7; -5; 0)$;**б)** $L_1$: $\begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

$L_2 = l(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}), \overrightarrow{b_1} = (2; 1; 2; -2), \overrightarrow{b_2} = (-2; 3; -3; 1)$.

Решение.

**а)** Учитывая, что $L_1 + L_2 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \vec{b})$ рассмотрим систему векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \vec{b}$ и проверим, являются ли эти векторы линейно независимыми. Составляем линейную комбинацию этих векторов, подставляя числовые значения данных векторов и приравнивая эту линейную комбинацию к нулевому вектору имеем:

$$\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\,\overrightarrow{a_2} + \alpha_3\vec{b} = 0,$$

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}-1\\-9\\6\\1\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}0\\7\\-5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$ данное равенство эквивалентно следующей системе линейных однородных уравнений $\begin{cases}\alpha_1 - \alpha_2 = 0\\ -2\alpha_1 - 9\alpha_2 + 7\alpha_3 = 0\\ \alpha_1 + 6\alpha_2 - 5\alpha_3 = 0\\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0\end{cases}$.

Будем решать эту систему методом Гаусса, приводя её матрицу коэффициентов к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix}\underline{-1} & -1 & 0\\ -2 & -9 & 7\\ 1 & 6 & -5\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\sim\\ c_2 - 2c_1\\ c_3 + c_1\\ c_4 + c_1\end{matrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -7 & 7\\ 0 & 5 & -5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\frac{c_2}{(-7)}\\ \frac{c_3}{5}\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & \underline{1} & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}_{c_3 - c_1}\sim$$

$\sim\begin{pmatrix}\underline{1} & -1 & 0\\ 0 & \underline{1} & -1\end{pmatrix}$. Последняя матрица имеет ступенчатую форму и ее ранг равен двум, неизвестные $\alpha_1, \alpha_2$ являются главными, а неизвестная $\alpha_3$- свободной. Учитывая, что максимальное число линейно независимых векторов из $L_1 + L_2 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \vec{b})$ образует базис суммы подпространств $L_1$ и $L_2$,и определяет ее размерность, имеем:

$dim(L_1 + L_2) = 2 -$ размерность суммы подпространств, вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ –базис суммы подпространств $L_1$, $L_2$.

**б)** Для того, чтобы найти базис суммы подпространств $L_1$, $L_2$. зададим подпространство $L_1$её линейной оболочкой, для этого найдем ФСР системы $L_1$ : $\begin{cases}-x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0\\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 5x_4 = 0,\\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0\end{cases}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 8 & -5 \\ 1 & -3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ c_2+3c_1 \\ c_3+c_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \underset{\frac{c_3}{(-2)}}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_1-c_2 \\ \sim \\ c_3-c_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{cases} x_1 = 2x_3 - 3x_4 \\ x_2 = x_3 + 2x_4 \\ x_{3,4} = \text{св. н.} \end{cases}$$ -общее решение системы,

$k = n - r = 4 - 2 = 2$ –ФСР состоит из двух векторов.

Построим ФСР:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $\overrightarrow{a_1}$ | 2 | 1 | 1 | 0 |
| $\overrightarrow{a_2}$ | -3 | 2 | 0 | 1 |

Таким образом, фундаментальная система решений состоит из векторов $\vec{a}_1 = (2;1;1;0), \vec{a}_2 = (-3;2;0;1)$.

Следовательно, $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})$.

Теперь размерность и базис суммы подпространств легко найти, так как $L_1 + L_2 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2})$и нужно лишь выделить максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}$.Для этого запишем по столбцам матрицу из элементов данных векторов и элементарными преобразованиями приведем её к ступенчатой форме:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_1 \leftrightarrow c_2 \\ \sim \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ c_2-2c_1 \\ c_3-c_1 \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & 0 & -8 \\ 0 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ c_2 \leftrightarrow c_4 \\ \sim \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \underline{1} & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & -7 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \sim \\ c_3+2c_2 \\ c_4+7c_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -14 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \sim \\ (-1)\cdot c_3 \\ c_4-5c_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 19 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \sim \\ c_3 \leftrightarrow c_4 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&1&-2&1\\0&0&\underline{1}&19\\0&0&3&4\end{pmatrix}\underset{c_4-3c_3}{\sim}\begin{pmatrix}\underline{1}&2&1&3\\0&\underline{1}&-2&1\\0&0&\underline{1}&19\\0&0&0&\underline{-53}\end{pmatrix}.$$

Последняя матрица имеет ступенчатую форму и ее ранг равен 4. Следовательно, $dim(L_1+L_2.)=4$,базис $L_1+L_2$ состоит из векторов $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{b_1},\overrightarrow{b_2}$.

**Пересечением двух линейных подпространств** $L_1$ и $L_2$ линейного пространства $L$ называется совокупность всех векторов из $L$, каждый из которых принадлежит как $L_1$, так и $L_2$. Таким образом, **пересечением подпространств** $L_1\cap L_2$ называется множество векторов, принадлежащих одновременно обоим подпространствам.

**Теорема 2.8.** Если $L_1$ и $L_2$ подпространства векторного пространства $L$, пересечение этих подпространств $L_1\cap L_2$является подпространством пространства $L$.

Доказательство.

Доказательство проведите самостоятельно.

Если $L_1$, $L_2$ подпространства векторного пространства $L$, то они могут быть заданы как подпространства решений однородных систем уравнений:

$$L_1=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}\in R^n:\begin{Bmatrix}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{p1}x_1+\cdots+a_{pn}x_n=0\end{Bmatrix}\right\},$$

$$L_2=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}\in R^n:\begin{Bmatrix}b_{11}x_1+\cdots+b_{1n}x_n=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\b_{q1}x_1+\cdots+b_{qn}x_n=0\end{Bmatrix}\right\}.$$

Тогда пересечение $L_1\cap L_2$ будет задаваться объединением этих систем, а фундаментальная система решений такой объединенной системы будет определять базис пересечения $L_1\cap L_2$ как некоторого подпространства $L_1\cap L_2$.

Иными словами,

$$\boldsymbol{L_1 \cap L_2} = \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \cdots \\ \boldsymbol{x_n} \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R^n}: \begin{cases} \boldsymbol{a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pn}x_n = 0} \\ \boldsymbol{b_{11}x_1 + \cdots + b_{1n}x_n = 0} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{b_{q1}x_1 + \cdots + b_{qn}x_n = 0} \end{cases} \right\} \quad (\mathbf{2.11}).$$

**Пример 2.27.** Найти размерность и базис пересечения подпространств $L_1$, $L_2$:

**а)** $L_1: \begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$, $L_2: \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0 \\ -x_2 + 14x_3 + 15x_4 = 0 \end{cases}$;

**б)** $L_1: \begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$, $L_2 = l(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3})$, $\overrightarrow{b_1} = (1;2;5)$, $\overrightarrow{b_2} = (-2;3;-3)$, $\overrightarrow{b_3} = (-3;1;8)$.

Решение.

**а)** Вектор $x \in L_1 \cap L_2$ тогда и только тогда, когда он является решением обеих систем уравнений $L_1: \begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ и $L_2: \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0 \\ -x_2 + 14x_3 + 15x_4 = 0 \end{cases}$.

Следовательно, пересечение данных подпространств совпадает с подпространством решений построенной из всех уравнений систем:

$$L_1 \cap L_2: \begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0 \\ -x_2 + 14x_3 + 15x_4 = 0 \end{cases}.$$

Для этого запишем расширенную матрицу однородной системы уравнений и выполним необходимые преобразования:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -5 & -7 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & 14 & 15 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ c_2 - 2c_1 \\ c_3 - 3c_1 \\ \phantom{0} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & -1 & 14 & 15 \\ 0 & -1 & 14 & 15 \\ 0 & -1 & 14 & 15 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_1 + c_2 \\ (-1)\cdot c_2 \\ c_3 - c_2 \\ c_4 - c_2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & -14 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & -14 & -15 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, общее решение системы уравнений можно записать в виде:

$$\begin{cases} x_1 = -9x_3 - 8x_4 \\ x_2 = 14x_3 + 15x_4, \\ \quad x_{3,4} - \text{св. н} \end{cases} \quad k = n - r = 4 - 2 = 2$$

-ФСР состоит из двух векторов, полагая $x_4 = 1$ имеем:

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $\overrightarrow{a_1}$ | -9 | 14 | 1 | 0 |
| $\overrightarrow{a_2}$ | -8 | 15 | 0 | 1 |

Таким образом, базис пересечения подпространств $L_1 \cap L_2$состоит из двух векторов $\overrightarrow{a_1} = (-9; 14; 1; 0)$, $\overrightarrow{a_2} = (-8; 15; 0; 1)$, $dim(L_1 \cap \ L_2) = 2$.

**б)** Для того, чтобы найти базис пересечения подпространств $L_1$ и $L_2$,найдем однородную систему линейных уравнений, соответствующую $L_2$:

$$L_2 = l(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}), \Leftrightarrow \vec{x} = \alpha_1 \overrightarrow{b_1} + \alpha_2 \overrightarrow{b_2} + \alpha_3 \overrightarrow{b_3}$$ , то есть

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3 = x_1 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = x_2 \\ 5\alpha_1 - 3\alpha_2 + 8\alpha_3 = x_3 \end{cases};$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \underline{1} & -2 & -3 & x_1 \\ 2 & 3 & 1 & x_2 \\ 5 & -3 & 8 & x_3 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ c_2 - 2c_1 \\ c_3 - 5c_1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & x_1 \\ 0 & \underline{7} & 7 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 7 & 7 & x_3 \end{array}\right) \begin{matrix} \sim \\ c_3 - c_2 \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & x_1 \\ 0 & 7 & 7 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - x_2 + 2x_1 \end{array}\right).$$

Однородная система, определяющая подпространство $V_2$ имеет вид: $L_2 \colon \{x_3 - x_2 + 2x_1 = 0$ или $L_2 \colon \{2x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

Теперь оба подпространства $L_1$ и $L_2$ можно рассматривать как подпространства решений, соответствующих однородных систем уравнений. Для того, чтобы найти пересечение подпространств $L_1$ и $L_2$нужно записать однородную систему уравнений

$$L_1 \cap L_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$ и решить её:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \underset{\frac{c_3}{2}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{c_2 - 2c_1 \\ c_3 - 2c_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\frac{c_2}{-3}}{\sim} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 3 \end{pmatrix} \underset{c_1 - c_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 3 \end{pmatrix}, \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = -3x_3 \\ x_3 = \text{св. н.} \end{cases}$$ -общее решение системы, $k = n - r = 3 - 2 = 1$ –ФСР состоит из одного вектора:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| $\vec{a}$ | -2 | -3 | 1 |

Таким образом, базис подпространства $V_1 \cap V_2$состоит из одного вектора $\vec{a} = (-2; -3; 1), dim(L_1 \cap L_2) = 1$.

**Теорема 2.7.** $dim(L_1 + L_2) = dimL_1 + dimL_2 - dim(L_1 \cap L_2)$.

Доказательство.

Выберем базис векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ в пересечении подпространств $L_1 \cap L_2$. Эта система векторов линейно независима, и её можно дополнить векторами $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_s}$ до базиса $L_1$:

$$\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_s}, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$$

Аналогично, её можно дополнить векторами $\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}, \ldots, \overrightarrow{c_r}$ до базиса $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ , $\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}, \ldots, \overrightarrow{c_r}$ в $L_2$. Покажем, что система векторов $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_s}, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}, \overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}, \ldots, \overrightarrow{c_r}$ является базисом в $L_1 + L_2$. Пусть $\vec{d} \in L_1 + L_2$тогда найдутся $\vec{b} \in L_1$, $\vec{c} \in L_2$, такие, что $\vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$. Так как $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_s}, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ – базис в$L_1$ , то вектор $\vec{b}$ можно разложить по базисным векторам:

$$\vec{b} = \alpha_1 \overrightarrow{b_1} + \alpha_2 \overrightarrow{b_2} + \ldots + \alpha_s \overrightarrow{b_s} + \beta_1 \overrightarrow{a_1} + \beta_2 \overrightarrow{a_2} + \ldots + \beta_k \overrightarrow{a_k}.$$

Аналогично,

$$\vec{c} = \gamma_1 \overrightarrow{a_1} + \gamma_2 \overrightarrow{a_2} + \ldots + \gamma_k \overrightarrow{a_k} + \delta_1 \overrightarrow{c_1} + \delta_2 \overrightarrow{c_2} + \ldots + \delta_r \overrightarrow{c_r}.$$

Тогда $\vec{d} = \vec{b} + \vec{c} = \alpha_1 \overrightarrow{b_1} + \alpha_2 \overrightarrow{b_2} + \cdots + \alpha_s \overrightarrow{b_s} + (\beta_1 + \gamma_1)\overrightarrow{a_1} +$
$+(\beta_2 + \gamma_2)\overrightarrow{a_2} + \ldots + (\beta_k + \gamma_k)\overrightarrow{a_k} + \delta_1 \overrightarrow{c_1} + \delta_2 \overrightarrow{c_2} + \ldots + \delta_r \overrightarrow{c_r}$.

Докажем линейную независимость системы

$\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_s}, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}, \overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}, \dots, \overrightarrow{c_r}$ . 5Приравняем к нулевому вектору линейную комбинацию данных векторов:
$\alpha_1\overrightarrow{b_1} + \alpha_2\overrightarrow{b_2} + \dots + \alpha_s\overrightarrow{b_s} + \beta_1\overrightarrow{a_1} + \beta_2\overrightarrow{a_2} + \dots + \beta_k\overrightarrow{a_k} + \delta_1\overrightarrow{c_1} + \delta_2\overrightarrow{c_2} + \dots + \delta_r\overrightarrow{c_r} = 0;$

Тогда
$\alpha_1\overrightarrow{b_1} + \alpha_2\overrightarrow{b_2} + \dots + \alpha_s\overrightarrow{b_s} + \beta_1\overrightarrow{a_1} + \beta_2\overrightarrow{a_2} + \dots + \beta_k\overrightarrow{a_k} = -\delta_1\overrightarrow{c_1} - \delta_2\overrightarrow{c_2} - \dots - \delta_r\overrightarrow{c_r}.$

Левая часть этого равенства — это вектор, принадлежащий $L_1$, а правая часть – вектор принадлежащий $L_2$, и поскольку они равны, то этот вектор принадлежит пересечению$L_1 \cap L_2$, а значит, он раскладывается по базису пересечения $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}$. То есть

$-\delta_1\overrightarrow{c_1} - \delta_2\overrightarrow{c_2} - \dots - \delta_r\overrightarrow{c_r} = \mu_1\overrightarrow{a_1} + \mu_2\overrightarrow{a_2} + \dots + \mu_k\overrightarrow{a_k}$ .

Поэтому $\gamma_1\overrightarrow{c_1} + \gamma_2\overrightarrow{c_2} + \dots + \gamma_r\overrightarrow{c_r} + \mu_1\overrightarrow{a_1} + \mu_2\overrightarrow{a_2} + \dots + \mu_k\overrightarrow{a_k} = 0$

Но так как система векторов$\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ $\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}, \dots, \overrightarrow{c_r}$ линейно независима (это базис в $L_2$) то все коэффициенты этой линейной комбинации равны 0,то есть $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_r = \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k = 0$. Но тогда и линейная комбинация $\alpha_1\overrightarrow{b_1} + \alpha_2\overrightarrow{b_2} + \dots + \alpha_s\overrightarrow{b_s} + \beta_1\overrightarrow{a_1} + \beta_2\overrightarrow{a_2} + \dots + \beta_k\overrightarrow{a_k} = 0$, и поскольку векторы$\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_s}, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ тоже линейно независимы (базис в $L_1$), то $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_s = \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$. Таким образом, показано, что все коэффициенты $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_s = \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = \gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_r = 0$. Что и означает линейную независимость системы $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_s}, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}, \overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}, \dots, \overrightarrow{c_r}$ . Таким образом, мы показали, что $dim(L_1 + L_2) = s + k + r$ . Кроме того, по условию $dim(L_1 \cap L_2.) = k$ , $dim\, L_1 = s + k$, $dim\, L_2 = k + r$. Отсюда следует справедливость теоремы, что и требовалось доказать.

**Пример 2.28.** Найти размерность и базис суммы и пересечения подпространств $L_1$ и $L_2$, если:

**а)** $L_1 : \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$, $L_2 = l(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2})$, $\overrightarrow{b_1} = (-4; 3; 1; -1)$, $\overrightarrow{b_2} = (1; 1; 1; 1)$;

**б)** $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}), \overrightarrow{a_1} = (1; 0; 1; -1), \overrightarrow{a_2} = (2; -1; -2; 2), V_2 = l(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}), \overrightarrow{b_1} = (0; 1; 0; 1), \overrightarrow{b_2} = (-1; 0; 0; 1), \overrightarrow{b_3} = (1; 1; 1; 0)$;

**в)** $L_1 : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 0 \end{cases}$; $L_2 = l\left(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\right)$, $\overrightarrow{b_1} = (1; 2; 1)$, $\overrightarrow{b_2} = (1; -1; 1)$;

**г)** $L_1 : \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$; $L_2 : \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$;

**д)** $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})$, $\overrightarrow{a_1} = (1; 0; 2; -2; 1)$, $\overrightarrow{a_2}(1; 1; -1; 2; 0)$,

$L_2 : \begin{cases} -7x_1 + x_2 + x_4 + 5x_5 = 0 \\ 7x_1 + x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 0 \end{cases}$.

Решение.

**а)** Так как сумма подпространств $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_m})$ и $L_2 = l\left(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_k}\right)$, представляется линейной оболочкой заданных векторов $L_1 + L_2 = l\left(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_m}, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_k}\right)$,найдем линейную оболочку, соответствующую подпространству $L_1 : \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$,для этого найдём ФСР данной системы:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{c_2 - 2c_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -4 & -1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{c_1 - c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \end{pmatrix},$$

общее решение системы имеет вид:

$\begin{cases} x_1 = -6x_3 - 2x_4 \\ x_2 = 4x_3 + x_4 \\ x_{3,4} - \text{св. н.} \end{cases}$, $k = n - r = 4 - 2 = 2$ -ФСР состоит из двух векторов:

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $\overrightarrow{a_1}$ | -6 | 4 | 1 | 0 |
| $\overrightarrow{a_2}$ | -2 | 1 | 0 | 1 |

Следовательно, $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})$, $\overrightarrow{a_1} = (-6; 4; 1; 0)$, $\overrightarrow{a_2} = (-2; 1; 0; 1)$.

Найдем размерность и базис суммы подпространств, учитывая, что максимальное число линейно независимых векторов из $L_1 + L_2 = l\left(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\right)$ образует базис суммы подпространств $L_1$ и $L_2$ и определяет её размерность, для этого составим матрицу из векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}$ и приведём её к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix}-6&-2&-4&1\\4&1&3&1\\1&0&1&1\\0&1&-1&1\end{pmatrix}\underset{\sim}{\begin{matrix}c_1\leftrightarrow c_3\\c_2\leftrightarrow c_4\end{matrix}}\begin{pmatrix}\underline{1}&0&1&1\\0&1&-1&1\\-6&-2&-4&1\\4&1&3&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\sim\\c_3+6c_1\\c_4-4c_1\end{matrix}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&\underline{1}&-1&1\\0&-2&2&7\\0&1&-1&-3\end{pmatrix}\begin{matrix}\sim\\c_3+2c_2\\c_4-c_2\end{matrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&1\\0&0&0&9\\0&0&0&-4\end{pmatrix}\begin{matrix}\sim\\\frac{c_3}{9}\\\frac{c_4}{(-4)}\end{matrix}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&1\\0&0&0&\underline{1}\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\sim\\c_4-c_3\end{matrix}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\underline{1}&0&1&1\\0&\underline{1}&-1&1\\0&0&0&\underline{1}\end{pmatrix}.$$

Последняя матрица имеет ступенчатую форму и ее ранг равен трем. Следовательно, $dim(L_1+L_2)=3$. Базис $L_1+L_2$состоит из векторов $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{b_2}$(базис определяется неоднозначно).

Для того, чтобы найти базис пересечения подпространств $L_1$ и $L_2$, найдем однородную систему линейных уравнений, подпространство решений которой совпадает с $L_2=l\left(\overrightarrow{b_1},\overrightarrow{b_2}\right)$, $\overrightarrow{b_1}=(-4;3;1;-1)$, $\overrightarrow{b_2}=(1;1;1;1)$:

$L_2=l\left(\overrightarrow{b_1},\overrightarrow{b_2}\right)\Leftrightarrow\vec{x}=\alpha_1\overrightarrow{b_1}+\alpha_2\,\overrightarrow{b_2}$ , то есть

$\alpha_1\begin{pmatrix}-4\\3\\1\\-1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$,откуда получим систему: $\begin{cases}-4\alpha_1+\alpha_2=x_1\\3\alpha_1+\alpha_2=x_2\\\alpha_1+\alpha_2=x_3\\-\alpha_1+\alpha_2=x_4\end{cases}$;

Приведём расширенную матрицу системы с помощью элементарных преобразований к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cc|c}-4&1&x_1\\3&1&x_2\\1&1&x_3\\-1&1&x_4\end{array}\right)\begin{matrix}c_1\leftrightarrow c_3\\\sim\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|c}\underline{1}&1&x_3\\3&1&x_2\\-4&1&x_1\\-1&1&x_4\end{array}\right)\begin{matrix}\sim\\c_2-3c_1\\c_3+4c_1\\c_4+c_1\end{matrix}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|c}1&1&x_3\\0&\underline{1}&x_2-3x_3\\0&1&x_1+4x_3\\0&1&x_4+x_3\end{array}\right)\begin{matrix}\sim\\c_3-c_2\\c_4-c_2\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|c}\underline{1}&1&x_3\\0&\underline{1}&x_2-3x_3\\0&0&x_1-x_2+7x_3\\0&0&-x_2+4x_3+x_4\end{array}\right).$$

Нулевым строчкам ступенчатой матрицы соответствует однородная система уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \\ -x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$.

Чтобы придать системе более удобную форму для дальнейшего решения у слагаемых второго уравнения системы можно поменять знак (умножив обе части равенства на -1):

$L_2\colon \begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$.

Вектор $x \epsilon L_1 \cap L_2$ тогда и только тогда, когда он является решением обеих систем уравнений $L_1 : \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$ и $L_2\colon \begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$.

Следовательно, пересечение данных подпространств совпадает с подпространством решений следующей однородной системы уравнений, построенной из всех уравнений систем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

Найдем базис $L_1 \cap L_2$, для нахождения базиса $L_1 \cap L_2$ необходимо найти фундаментальную систему решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

Для этого запишем расширенную матрицу однородной системы уравнений и выполним необходимые преобразования:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{c_2 - 2c_1 \\ c_3 - c_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -4 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{c_1 - c_2 \\ c_3 + 2c_2 \\ c_4 - c_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{c_3 : (-3)}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{c_1 - 6c_3 \\ c_2 + 4c_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, общее решение исходной системы уравнений можно записать в виде:

$$\begin{cases} x_1 = 4x_4 \\ x_2 = -3x_4 \\ x_3 = -x_4 \\ x_4 - \text{св. н.} \end{cases}, \; k = n - r = 4 - 3 = 1 \text{ -ФСР состоит из одного вектора,}$$

полагая $x_4 = 1$имеем:

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $\vec{c}$ | 4 | -3 | -1 | 1 |

Таким образом, базис подпространства $V_1 \cap V_2$состоит из одного вектора $\vec{c} = (-4;3;1;-1)$, $dim(L_1 \cap L_2) = 1$.

Проверим, полученные результаты опираясь на формулы:

$$dim(L_1 + L_2) = dimL_1 + dimL_2 - dim(L_1 \cap L_2),$$
$$dim(L_1 \cap L_2) = dimL_1 + dimL_2 - dim(L_1 + L_2).$$

Действительно,$dim(L_1 + L_2) = dimL_1 + dimL_2 - dim(L_1 \cap L_2) =$
$= 2 + 2 - 1 = 3$,
$dim(L_1 \cap L_2) = dimL_1 + dimL_2 - dim(L_1 + L_2) = 2 + 2 - 3 = 1$.

**б)** Для того, чтобы найти базис и размерность пересечения подпространств $L_1$ , $L_2$ найдем однородные системы линейных уравнений, подпространство решений которых совпадает соответственно с

$$L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}), L_2 = l(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}).$$

Рассмотрим для начала подпространство $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})$,
$\overrightarrow{a_1} = (1;0;1;-1), \overrightarrow{a_2} = (2;-1;-2;2)$:

$$L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}) \Leftrightarrow \vec{x} = \alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \overrightarrow{a_2},$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = x_1 \\ -\alpha_2 = x_2 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 = x_3 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 = x_4 \end{cases};$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \underline{1} & 2 & x_1 \\ 0 & -1 & x_2 \\ 1 & -2 & x_3 \\ -1 & 2 & x_4 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ c_3 - c_1 \\ c_4 + c_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & \underline{-1} & x_2 \\ 0 & -4 & x_3 - x_1 \\ 0 & 4 & x_4 + x_1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ c_3 - 4c_2 \\ c_4 + 4c_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} \underline{1} & 1 & x_1 \\ 0 & \underline{-1} & x_2 \\ 0 & 0 & -x_1 - 4x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & x_1 + 4x_2 + x_4 \end{array}\right);$$

Нулевым строчкам ступенчатой матрицы соответствует система уравнений $L_1$ : $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_4 = 0 \\ -x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.

Для подпространство $L_2 = l(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3})$, $\overrightarrow{b_1} = (0; 1; 0; 1)$, $\overrightarrow{b_2} = (-1; 0; 0; 1), \overrightarrow{b_3} = (1; 1; 1; 0)$ имеем:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases} -\alpha_2 + \alpha_3 = x_1 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = x_2 \\ \alpha_3 = x_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = x_4 \end{cases};$$

Приведём расширенную матрицу системы с помощью элементарных преобразований к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & x_1 \\ 1 & 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 1 & 1 & 0 & x_4 \end{array}\right) \underset{c_4 \leftrightarrow c_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \underline{1} & 1 & 0 & x_4 \\ 1 & 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & -1 & 1 & x_1 \end{array}\right) \underset{\sim}{c_2 - c_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_4 \\ 0 & \underline{-1} & 1 & x_2 - x_4 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & -1 & 1 & x_1 \end{array}\right) \underset{c_4 - c_1}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_4 \\ 0 & -1 & 1 & x_2 - x_4 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 - x_4 \end{array}\right).$$

Нулевым строчкам ступенчатой матрицы соответствует однородная система уравнений $L_2$: $\{x_1 - x_4 = 0$.

Найти размерность и базис пересечения подпространств $L_1$ и $L_2$,

$$L_1 \cap L_2: \begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_4 = 0 \\ -x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 4 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ c_2 + c_1 \\ c_3 - c_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underset{c_3 : (-2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \begin{matrix} c_1 - c_3 \\ c_2 - c_3 \\ \sim \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix},$$

$\begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_3 = 2x_2 \\ x_4 = -2x_2 \\ x_2 - \text{св. н.} \end{cases}$, $k = n - r = 4 - 3 = 1$ - ФСР состоит из одного вектора, полагая $x_2 = 1$ имеем:

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $\vec{c}$ | -2 | 1 | 2 | -2 |

Таким образом, базис подпространства $L_1 \cap L_2$ состоит из одного вектора $\vec{c} = (-2; 1; 2; -2)$, $dim(L_1 \cap L_2) = 1$.

Найдем размерность и базис суммы подпространств

$L_1 + L_2 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2})$ для этого составим матрицу из векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}$ и приведём её к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ (-1)c_2 \\ c_3 - c_1 \\ c_4 + c_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \underline{1} & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ c_3 + 4c_2 \\ c_4 - 4c_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ c_3 + 2c_2 \\ \frac{c_4}{5} \leftrightarrow c_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ \\ c_4 + 8c_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \underline{1} & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 4 \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица имеет ступенчатую форму и ее ранг равен четырём. Следовательно, $dim(L_1 + L_2) = 4$. Базис $L_1 + L_2$ состоит из векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}$.

**в)** Найдем линейную оболочку, соответствующую подпространству $L_1$: $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 0 \end{cases}$:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ c_2 + c_1 \\ c_3 - c_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -3 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_1 + c_2 \\ \sim \\ c_3 - 3c_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -3 \end{pmatrix}, \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 3\,x_3 \\ x_3 = \text{св. н.} \end{cases}$$ -общее решение системы,

$k = n - r = 3 - 2 = 1$ –ФСР состоит из одного вектора:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| $\vec{a}$ | 1 | 3 | 1 |

Таким образом, $L_1 = l(\vec{a})$, где $\vec{a} = (1; 3; 1)$.

Найдем однородную систему, соответствующую подпространству $L_2 = l(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}) \Leftrightarrow \vec{x} = \alpha_1 \overrightarrow{b_1} + \alpha_2 \overrightarrow{b_2}$ ,

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \text{ или} \begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=x_1\\2\alpha_1-\alpha_2=x_2,\\\alpha_2=x_3\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}\underline{1}&1&x_1\\2&-1&x_2\\1&1&x_3\end{array}\right)\underset{\substack{c_2-2c_1\\c_3-c_1}}{\sim}\left(\begin{array}{cc|c}1&1&x_1\\0&-3&x_2-2x_1\\0&1&x_3-x_1\end{array}\right)\underset{c_2\leftrightarrow c_3}{\sim}\left(\begin{array}{cc|c}1&1&x_1\\0&\underline{1}&x_3-x_1\\0&-3&x_2-2x_1\end{array}\right)\underset{c_3+3c_2}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|c}1&1&x_1\\0&1&x_3-x_1\\0&0&x_2-2x_1+3x_3-3x_1\end{array}\right).$$

Нулевым строчкам ступенчатой матрицы соответствует система уравнений $\{5x_1-x_2-3x_3=0$.

Таким образом, $L_2$: $\{5x_1-x_2-3x_3=0$.

Найдем размерность и базис суммы подпространств, учитывая, что максимальное число линейно независимых векторов из $L_1+L_2=(\vec{a},\overrightarrow{b_1},\overrightarrow{b_2})$:

$$\begin{pmatrix}\underline{1}&1&1\\3&2&-1\\1&1&1\end{pmatrix}\underset{\substack{c_2-3c_1\\c_3-c_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-4\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\underline{1}&1&1\\0&\underline{-1}&-4\end{pmatrix}.$$

Следовательно, $dim(L_1+L_2)=2$. Базис $L_1{+}L_{2_2}$ состоит из векторов $\vec{a},\overrightarrow{b_1}$.

Найти размерность и базис пересечения подпространств $L_1$ и $L_2$,

$$L_1\cap L_2:\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=0\\-x_1+2x_2-5x_3=0\\x_1+2x_2-7x_3=0\\5x_1-x_2-3x_3=0\end{cases}.$$

$$\begin{pmatrix}\boxed{1}&-1&2\\-1&2&-5\\1&2&-7\\5&-1&-3\end{pmatrix}\underset{\substack{c_2+c_1\\c_3-c_1\\c_4-5c_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&\boxed{1}&-3\\0&3&-9\\0&4&-13\end{pmatrix}\underset{\substack{c_3-3c_2\\c_4-4c_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-3\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\underset{(-1)c_4}{\sim}$$

$$\sim\begin{pmatrix}\underline{1}&0&-1\\0&\underline{1}&-3\\0&0&\underline{1}\end{pmatrix},\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\\x_3=0\end{cases}$$ система имеет только нулевое решение.

Таким образом, $dim(L_1\cap\ L_2)=0$.

**г)** Зададим линейные подпространства $L_1$ и $L_2$ как линейные оболочки своих образующих, для этого найдём ФСР данной системы:

$$L_1:\begin{cases}x_1+x_2-3x_4-x_5=0\\x_1-x_2+2x_3-x_4=0\end{cases},$$

$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{c_2 - c_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & \boxed{1} \end{pmatrix} \underset{\sim}{c_1 + c_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & \boxed{1} \end{pmatrix}$, общее решение системы имеет вид:

$\begin{cases} x_1 = -x_2 - 4x_3 - 3x_4 \\ x_5 = -2x_3 - 2x_4 \\ x_{2,3,4} - \text{св. н.} \end{cases}$, $k = n - r = 5 - 2 = 3$ -ФСР состоит из трёх векторов:

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\overrightarrow{a_1}$ | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $\overrightarrow{a_2}$ | -4 | 0 | 1 | 0 | -2 |
| $\overrightarrow{a_3}$ | -3 | 0 | 0 | 1 | -2 |

Следовательно, $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3})$, $\overrightarrow{a_1} = (-1; 1; 0; 0; 0)$, $\overrightarrow{a_2} = (-4; 0; 1; 0; -2)$, $\overrightarrow{a_3} = (-3; 0; 0; 1; -2)$.

Рассмотрим подпространство $L_2$: $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$

и найдем ФСР,

$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \underset{c_2 \leftrightarrow c_1}{\sim} \begin{pmatrix} \underline{2} & 4 & -2 & 4 & -7 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \end{pmatrix} \underset{c_2 - 2c_1}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \\ 0 & -10 & 10 & -5 & 10 \end{pmatrix} \overset{\sim}{\frac{c_2}{-5}}$

$\sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \\ 0 & 2 & -2 & \boxed{1} & -2 \end{pmatrix} \underset{\sim}{c_1 - 4c_2} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{c_2 + 2c_1}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 & \boxed{1} \\ 4 & -6 & 10 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix}$,

$\begin{cases} x_4 = -4x_1 + 6x_2 - 10x_3 \\ x_5 = -2x_1 + 4x_2 - 6x_3 \\ x_{1,2,3} - \text{св. н.} \end{cases}$, $k = n - r = 5 - 2 = 3$ -ФСР состоит из трёх векторов:

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\overrightarrow{b_1}$ | 1 | 0 | 0 | -4 | -2 |
| $\overrightarrow{b_2}$ | 0 | 1 | 0 | 6 | 4 |
| $\overrightarrow{b_3}$ | 0 | 0 | 1 | -10 | -6 |

Следовательно, $L_2 = l(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3})$,где $\overrightarrow{b_1} = (1; 0; 0; -4; -2)$, $\overrightarrow{b_2} = (0; 1; 0; 6; 4)$, $\overrightarrow{b_3} = (0; 0; 1; -10; -6)$.

Найдем базис и размерность пересечения подпространств $L_1$и$L_2$:

$$L_1 \cap L_2: \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \underset{\substack{c_2 - c_1 \\ c_3 - 4c_1 \\ c_4 - 2c_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 \end{pmatrix} \underset{c_3:3}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \underline{-2} & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 \end{pmatrix} \underset{\substack{c_3 - c_2 \\ c_3 + c_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4 \end{pmatrix} \underset{c_4:4}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \underset{c_4 - c_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{(-1)c_3}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & \boxed{1} \end{pmatrix} \underset{\substack{c_1 - c_3 \\ c_2 - c_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \underset{\frac{c_3}{2}}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & \boxed{1} & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \underset{c_1 - 2c_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \boxed{1} & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & \boxed{1} \end{pmatrix},$$

общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = -3x_2 + x_4, \\ x_3 = x_2 - \frac{5}{2}x_4 \\ x_5 = 3x_4 \\ x_{2,4} - \text{св. н.} \end{cases}$$ , $k = n - r = 5 - 3 = 2$ – -ФСР состоит из двух векторов:

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\overrightarrow{c_1}$ | -3 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $\overrightarrow{c_2}$ | 1 | 0 | -$\frac{5}{2}$ | 1 | 3 |

Следовательно, $dim(L_1 \cap L_2) = 2$,
$\overrightarrow{c_1} = (-3; 1; 1; 0; 0), \overrightarrow{c_2} = \left(1; 0; -\frac{5}{2}; 1; 3\right)$.

Для нахождения суммы подпространств

$L_1 + L_2 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3})$ необходимо составить матрицу из векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$ и привести её к ступенчатому виду, проведите эту работу самостоятельно.

**д)** Для нахождения суммы подпространств необходимо подпространство $L_1$и $L_2$ представить в виде линейных оболочек, так как

$L_1 + L_2 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_m}, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_k})$.

Найдем линейную оболочку, соответствующую подпространству

$L_2: \begin{cases} -7x_1 + x_2 + x_4 + 5x_5 = 0 \\ 7x_1 + x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 0 \end{cases}$, для этого найдём ФСР данной системы:

$\begin{pmatrix} -7 & \boxed{1} & 0 & 1 & 5 \\ 7 & 0 & \boxed{1} & -2 & -6 \end{pmatrix}$, получилось, что данная матрица уже является канонической, следовательно общее решение имеет следующий вид:

$\begin{cases} x_2 = 7x_1 - x_4 - 5x_5 \\ x_5 = -7x_1 + 2x_4 + 6\,x_5, \\ \quad x_{1,4,5} - \text{св. н.} \end{cases}$ $k = n - r = 5 - 2 = 3$ -ФСР состоит из трёх векторов:

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\overrightarrow{b_1}$ | 1 | 7 | $-7$ | 0 | 0 |
| $\overrightarrow{b_2}$ | 0 | $-1$ | 2 | 1 | 0 |
| $\overrightarrow{b_3}$ | 0 | $-5$ | 6 | 0 | 1 |

Следовательно, $L_2 = l(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3})$,где $\overrightarrow{b_1} = (1; 7; -7; 0; 0)$, $\overrightarrow{b_2} = (0; -1; 2; 1; 0), \overrightarrow{b_3} = (0; -5; 6; 0; 1)$.

Найдем размерность и базис суммы подпространств, учитывая, что $1L_1 + L_2 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3})$ для этого составим матрицу из векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$ приведём её к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -1 & -5 \\ 2 & -1 & -7 & 2 & 6 \\ -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ c_3 - 2c_1 \\ c_4 + 2c_1 \\ c_5 - c_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 7 & -1 & -5 \\ 0 & -3 & -9 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ c_3 + 3c_2 \\ c_4 - 4c_2 \\ c_5 + c_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 12 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -26 & 5 & 20 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ c_4 + 2c_3 \\ 2c_5 - c_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & \underline{12} & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ 6c_4 + c_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 12 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ c_5 \leftrightarrow c_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 12 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ c_5 + 17c_4 \end{matrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 7 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & \underline{12} & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{20} \end{pmatrix}$$, следовательно, $dim(L_1 + L_2) = 5$ – размерность суммы подпространств. Из линейной комбинации равной нулю, следует, что все коэффициенты равны нулю. Таким образом, векторы $\vec{a}_1, \overrightarrow{a_2}, \vec{b}_1, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$-линейно независимы, то есть служат базисом суммы подпространств $L_1 + L_2$ .

Для нахождения размерности и базис пересечение подпространств $L_1,\ L_2$ найдем соответствующую линейной оболочке $L_1 = l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})$, однородную систему уравнений:

$$l(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}) \Leftrightarrow \vec{x} = \alpha_1\, \vec{a}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{a_2},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 2 & -1 & x_3 \\ -2 & 2 & x_4 \\ 1 & 0 & x_5 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \sim \\ c_3 - 2c_1 \\ c_4 + 2c_1 \\ c_5 - c_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & -3 & x_3 - 2x_1 \\ 0 & 4 & x_4 + 2x_1 \\ 0 & -1 & x_5 - x_1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \sim \\ c_3 + 3c_2 \\ c_4 - 4c_2 \\ c_5 + c_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 - 2x_1 + 3x_2 \\ 0 & 0 & x_4 + 2x_1 - 4x_2 \\ 0 & 0 & x_5 - x_1 + x_2 \end{array}\right),$$

следовательно, ОСУ соответствующая подпространству $L_1$ имеет вид $\begin{cases} x_3 - 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_4 + 2x_1 - 4x_2 = 0 \\ x_5 - x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ или, что то же самое $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_5 = 0 \end{cases}$;

Находим размерность и базис пересечение подпространств $L_1 \cap L_2$:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_5 = 0 \\ -7x_1 + x_2 + x_4 + 5x_5 = 0 \\ 7x_1 + x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 0 \end{cases}$$ ,так как $L_1 \cap L_2$ совпадает с подпространством решений ОСУ, найдём ФСР полученной-для этого выпишем основную матрицу системы и приведём её при помощи

элементарных преобразований к каноническому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -7 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 7 & 0 & 1 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ c_3 \leftrightarrow c_1 \\ c_4 + c_5 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 7 & 0 & 1 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_2 - 2c_1 \\ c_3 - 2c_1 \\ \sim \\ c_5 - 7c_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ (-1)\, c_3 \leftrightarrow c_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_1 + c_2 \\ \sim \\ c_3 + 2c_2 \\ c_4 - c_2 \\ c_5 - 7c_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -2 & 15 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ c_4 + c_3 \\ c_5 + 2c_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_1 + 3c_4 \\ c_2 + 2c_4 \\ c_3 + 2c_4 \\ \sim \\ c_5 - 11c_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ \dfrac{c_5}{(-2)} \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_1 - c_5 \\ c_2 - c_5 \\ c_3 - 2c_5 \sim \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix},\ r = n = 5$$

,система имеет только нулевое решение, ФСР отсутствует, таким образом базис подпространства пересечения $dim(L_1 \cap L_2) = 0$.

## 7. Задания для самостоятельного решения.

Найти размерность и базис суммы и пересечения подпространств $L_1$и $L_2$

**1.** $L_1: \{x_1 - x_3 + 2x_4 = 0,\ L_2 = l(\vec{b}), \vec{b} = (1;1;1;0)$.

**2.** $L_1 = l(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}),\ L_2 = l(\vec{b_1}, \vec{b_2})$,где $\vec{a_1} = (1;1;2;1;2)$, $\vec{a_2} = (0;-1;-2;1;-1)$, $\vec{a_3} = (3;1;2;5;4)$, $\vec{b_1} = (1;0;1;1;1)$, $\vec{b_2} = (2;-1;-2;5;1)$.

**3.** $L_1: \begin{cases} -2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}, L_2: \{-x_1 + x_2 - x_4 = 0$.

**4.** $L_1 = l(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}), \vec{a_1} = (1;-3;-1;-2), \vec{a_2} = (0;1;-3;1)$, $\vec{a_3} = (1;-4;2;-3), L_2: \begin{cases} 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 3x_4 = 0 \end{cases}$.

**5.** $L_1 = l(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}), \vec{a_1} = (-1;1;-3;1), \vec{a_2} = (1;2;1;3)$, $\vec{a_3} = (1;-4;5;-5)$,$L_2: \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 8x_3 + 2x_4 = 0 \\ -3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$.

**6.** $L_1 = l(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}),\ L_2 = l(\vec{b_1}, \vec{b_2})$ , где $\vec{a_1} = (1;1;2;1;2)$, $\vec{a_2} = (0;-1;-2;1;-1)$, $\vec{a_3} = (3;1;2;5;4)$, $\vec{b_1} = (1;0;1;1;1)$, $\vec{b_2} = (2;-1;-2;5;1)$.

**7.** $L_1 = l(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}),\ L_2 = l(\vec{b_1}, \vec{b_2})$ ,где $\vec{a_1} = (4;-7;3;5)$, $\vec{a_2} = (1;-1;0;-4)$, $\vec{a_3} = (3;-5;2;2)$, $\vec{b_1} = (-5;3;2;-5)$, $\vec{b_2} = (-3;-1;4;1)$.

**8.** $L_1: \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}, L_2: \{x_2 + 7x_3 = 0$.

**9.** $L_1: \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}, L_2: \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0 \\ 2x_1 + 8x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$.

**Ответы:**

**7.1.** $dim(L_1 + L_2) = 3, dim(L_1 \cap L_2) = 1$;
**7.2.** $dim(L_1 + L_2) = 3, dim(L_1 \cap L_2) = 1$;
**7.3.** $dim(L_1 + L_2) = 3, dim(L_1 \cap L_2) = 2$;
**7.4.** $dim(L_1 + L_2) = 3, dim(L_1 \cap L_2) = 1$;
**7.5.** $dim(L_1 + L_2) = 3, dim(L_1 \cap L_2) = 1$;
**7.6.**$dim(L_1 + L_2) = 3, dim(L_1 \cap L_2) = 1$;
**7.7.** $dim(L_1 + L_2) = 3, dim(L_1 \cap L_2) = 1$;
**7.8.** $dim(L_1 + L_2) = 3, dim(L_1 \cap L_2) = 2$;
**7.9.** $dim(L_1 + L_2) = 3, dim(L_1 \cap L_2) = 1$;

# ПЕРЕЧЕНЬ ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ

1. Б. В. Соболь, Н. Т. Мишняков, В. М. Поркшеян. Практикум по высшей математике. 3-е изд. Ростов н \ Д: Феникс, 2010.

2. Т. Письменный. Конспект лекций по высшей математике (полный курс). 2-е изд. Москва: «Айрис-пресс», 2014.

3. В. Д. Кряквин, Линейная алгебра в задачах и упражнениях: Учебное пособие. — 3 е изд., испр. — СПб.: Издательство «Лань», 2016. — 592 с.

4. А. И. Шерстнёва, О.В. Янущик. Линейные пространства и линейные операторы. Учебное пособие. Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 92 с.