ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Высшая математика»

Учебное пособие

по дисциплине

«Математический анализ» (часть 1)

Авторы
Ермилова О.В.,
Артамонова Е.А.

Ростов-на-Дону, 2025

Аннотация

«Учебное пособие» предназначено для студентов очной формы обучения, технических направлений и специальностей. Может быть использовано для аудиторной и самостоятельной работы по дисциплине «Математический анализ».

Авторы

Старший преподаватель
каф. «Прикладная математика»
Ермилова О. В.
Старший преподаватель
каф. «Прикладная математика»
Артамонова Е. А.

Оглавление

ГЛАВА1. ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ.

1.1. Числовые последовательности, основные понятия.

Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число a_n , $n \epsilon N$, то говорят, что задана бесконечная числовая последовательность $\{a_n\}$: $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \epsilon R$.

Таким образом, числовая последовательность – это функция натурального аргумента:

$$\boldsymbol{a_n = f(n)} \quad \textbf{(1.1)}$$

Другими словами, множество занумерованных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ называется **числовой последовательностью** или просто последовательностью.

Обозначение:$\{\boldsymbol{a_n}\}$

Числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$будем называть **элементами последовательности** или членами последовательности, таким образом, a_1 –первый член (элемент) последовательности,a_2-второй, ⋯, a_n −общий или n −ый член последовательности.

Чаще всего последовательность задается формулой её общего члена $a_n = f(n)$, данная формула позволяет вычислить любой член последовательности по номеру n .

Последовательность, все члены которой равны одному и тому же числу, называется **постоянной,** то есть $a_n = c = const$ ($a_1 = a_2 = \cdots = a_n = c$).

Последовательность считается заданной, если указан способ получения любого её элемента.

Способы задания последовательностей.

1)Аналитический способ — это когда последовательность задается формулой её общего члена $a_n = f(n)$, которая позволяет вычислить любой член последовательности.

Так, равенства $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = n + 1, z_n = (-1)^n, a_n = \frac{n}{n+1}$ задают соответственно последовательности:

$x_n: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots;$

$y_n: 2,3,4, \dots, n + 1, \dots;$

$z_n: -1,1, -1, \dots, (-1)^n, \dots;$

$a_n: \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$

Пример 1.1. Последовательность задана формулой её общего члена $a_n = 3^n$. Найти первые три члена последовательности.

Решение.

При $n = 1$ получим первый член последовательности $a_1 = 3^1 = 3$; при $n = 2$ второй $a_2 = 3^2 = 9$;при $n = 3$ третий $a_3 = 3^3 = 27$.

2)Рекуррентный способ-такой способ, при котором любой член последовательности, начиная с некоторого номера, выражают через предыдущие члены.

Например, если $a_n = -\frac{1}{2}a_{n-1}$, тогда $a_2 = -\frac{1}{2}a_1$,при этом если $a_1 = 3$,то $a_2 = -\frac{3}{2}$, и так далее.

Числовая последовательность называется **ограниченной сверху (снизу)**, если существует число M такое, что любой элемент a_nэтой последовательности удовлетворяет неравенству $a_n \le M$ $(a_n \ge M)$.

Например, последовательность $v_n = n$ ограничена снизу, так как $v_n \ge 1$.

Числовая последовательность называется **ограниченной**, если она ограничена и сверху, и снизу, то есть если выполняется неравенство $|a_n| < M$ или, что тоже самое $-M < a_n < M$,другими словами все члены последовательности принадлежат промежутку$(-M; M)$.

В противном случае последовательность называется **неограниченной**, то есть$|a_n| > M$.

Числовая последовательность называется **возрастающей(убывающей)**, если

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots, (a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots).$$

Все такие последовательности объединяют общим названием **монотонные последовательности**.

Таким образом, если $a_{n+1} - a_n < 0$,то последовательность $\{a_n\}$монотонно убывает; если $a_{n+1} - a_n > 0$,то последовательность $\{a_n\}$ монотонно возрастает.

Так, последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$,$\{a_n\}$ из примера выше монотонные, а $\{z_n\}$- не монотонная.

В частности, $\{x_n\}$-убывающая последовательность, $\{a_n\}$, $\{y_n\}$- возрастающие последовательности.

Пример 1.2. Выяснить какой является последовательность возрастающей или убывающей: **а)** $y_n = \frac{n}{3^n}$;**б)** $x_n = \frac{n}{2n+1}$.

Решение.

а) Найдем $y_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$. Найдем разность $y_{n+1} - y_n$:
$y_{n+1} - y_n = \frac{n+1}{3^{n+1}} - \frac{n}{3^n} = \frac{n+1}{3 \cdot 3^n} - \frac{n}{3^n} = \frac{1-2n}{3 \cdot 3^n} < 0$, так как $1 - 2n < 0, n\epsilon N$, то есть $y_{n+1} < y_n$.

Таким образом, последовательность $y_n = \frac{n}{3^n}$ монотонно убывает;

б) Найдём $x_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1} = \frac{n+1}{2n+3}$.

Найдем разность $x_{n+1} - x_n$:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{2n+3} - \frac{n}{2n+1} = \frac{(n+1)(2n+1) - n(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)} =$$

$$= \frac{2n^2 + n + 2n + 1 - 2n^2 - 3n}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{1}{(2n+3)(2n+1)} > 0.$$

Следовательно, $x_{n+1} - x_n > 0$,то есть $x_n < x_{n+1}$.Таким образом, последовательность $x_n = \frac{n}{2n+1}$-возрастающая.

1.2. Числовые последовательности, основные понятия.

Определение предела последовательности.

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного $\varepsilon > 0$, как бы мало оно ни было, существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ выполняется неравенство:$|x_n - a| < \varepsilon$.

Коротко определение предела можно записать так:

$$(\forall \boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}, \exists \boldsymbol{N}: \forall \boldsymbol{n} > \boldsymbol{N}, |\boldsymbol{x_n} - \boldsymbol{a}| < \boldsymbol{\varepsilon}) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x_n} = \boldsymbol{a} \quad \textbf{(1.2)}$$

Последовательность, пределом которой является конечное число a называется **сходящейся**. В этом случае говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу a при $n \to \infty$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Если предел последовательности не существует или бесконечен, то последовательность называется **расходящейся**.

Геометрический смысл предела последовательности.

Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ эквивалентное неравенству $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ или $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, показывает, что элемент x_n находится в ε - окрестности точки a (рис.1).

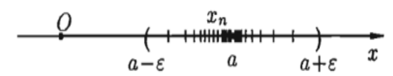


Рис.1

Если число a является пределом последовательности $\{x_n\}$, то геометрически это означает, что начиная с некоторого номера все точки $\{x_n\}$ попадут внутрь интервала $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, где ε – произвольно взятое положительное число, а за пределами интервала лежит конечное число элементов последовательности. Можно заметить, что точка a-точка сгущения (рис.1), то есть члены последовательности по мере увеличения номера n неограниченно приближаются к числу a.

Замечание: число a не является пределом последовательности, если можно выбрать такую ε - окрестность точки a за пределами которой будет находиться бесконечное число элементов последовательности.

Например, последовательность $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ -сходящаяся и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, так как по мере увеличения n все элементы приближаются к единице;
последовательность $b_n = (-7)^n$ -расходящаяся, так как элементы последовательности при $n \to \infty$ не стремятся ни к одному определённому значению ($(-7)^1 = -7, (-7)^2 = 49, (-7)^3 = -343$,...- значения прыгают), то есть $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \nexists$.

Замечание: операция $[a]$, которую в скором времени мы будем рассматривать, означает выделение целой части числа a, не превышающей самого числа a.

Например, $[2{,}47] = 2, [-5{,}23] = -6, [7] = 7$ и так далее.

Пример 1.3. Используя определения предела последовательности, доказать, что: **а)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$;**б)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{2n+1} = \frac{1}{2}$.

Решение.

а) Используя определение предела последовательности (1.2), покажем, что для произвольного сколь угодно малого действительного числа $\varepsilon > 0$ можно указать порядковый номер N элемента последовательности $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$,начиная с которого выполняется условие$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon$или $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon$,то есть

$$\left(\forall\varepsilon > 0, \exists N: \forall n > N, \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon\ \right) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Рассмотрим неравенство:

$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon$,

$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$, так как $n > 0$, а$|(-1)^n| = 1$,то $\frac{1}{n} < \varepsilon$,

следовательно, $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Таким образом, для всех $n > N$,где $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, выполняется условие $\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon$,а это по определению предела числовой последовательности означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Итак, $\forall\varepsilon > 0$ указано соответствующее значение N. Это и доказывает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Проанализируем ситуацию и заметим, что число N зависит от ε ,то есть $N = N(\varepsilon)$. Так, если $\varepsilon = 0{,}01$, $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] = \left[\frac{1}{0{,}01}\right] = [100] = 100$,то есть, начиная с a_{100},все члены последовательности отличаются от 0 меньше, чем на 0,01.

При $\varepsilon = 0{,}001$, $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] = \left[\frac{1}{0{,}001}\right] = [1000] = 1000$,то есть, начиная с a_{1000},все члены последовательности отличаются от 0 меньше, чем на 0,001.

б) Покажем, что для произвольного сколь угодно малого действительного числа $\varepsilon > 0$ можно указать порядковый номер N элемента последовательности $x_n = \frac{n+2}{2n+1}$, начиная с которого выполняется условие $\left|\frac{n+2}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$, то есть

$$\left(\forall\varepsilon > 0, \exists N: \forall n > N, \left|\frac{n+2}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon\right) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2n+1} = \frac{1}{2};$$

Рассмотрим неравенство:

$$\left|\frac{n+2}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon,$$

$$\left|\frac{2n+4-2n-1}{2(2n+1)}\right| < \varepsilon,$$

$\left|\frac{3}{4n+2}\right| < \varepsilon,$ поскольку $n > 0$ и $\frac{3}{4n+2} > 0,$

то $\left|\frac{3}{4n+2}\right| = \frac{3}{4n+2},$

Таким образом $\frac{3}{4n+2} < \varepsilon,$

$$3 < \varepsilon(4n+2),$$

$$\frac{3}{\varepsilon} < 4n+2,$$

$$4n > \frac{3}{\varepsilon} - 2,$$

$$4n > \frac{3-2\varepsilon}{\varepsilon},$$

$$n > \frac{3-2\varepsilon}{4\varepsilon} (= N).$$

Таким образом, для всех $n > N$,где $N = \left[\frac{3-2\varepsilon}{4\varepsilon}\right]$, выполняется условие $\left|\frac{n+2}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon,$ а это по определению предела числовой последовательности означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{2n+1} = \frac{1}{2}$.

Последовательность$\{\alpha_n\}$, предел которой равен нулю $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ называется **бесконечно малой**.

Например, последовательность $\alpha_n = \frac{2}{n+1}$ бесконечно малая, так как$\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Последовательность $\{\beta_n\}$ называется **бесконечно большой**, если $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \infty$.

Например, последовательность $\beta_n = n$ бесконечно большая, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \infty$.

Свойства пределов последовательностей.

Пусть существуют конечные пределы последовательностей $\{x_n\}, \{y_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

1. Если последовательность имеет предел, то он единственный.

2. Если последовательность имеет предел, то она является ограниченной.

3. Предел суммы(разности) последовательностей равен сумме (разности) пределов последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n = a \pm b;$$

4. Предел произведения последовательностей равен произведению пределов последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = a \cdot b.$$

В частности, для постоянной последовательности $\{a_n\}$, имеем:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} C = C$ -предел постоянной последовательности равен постоянной,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} C \cdot y_n = C \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = C \cdot b$ -постоянный множитель можно выносить за знак предела.

5. Предел частного последовательностей равен частному пределов последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{a}{b}, b \neq 0.$$

Все свойства пределов вытекают из определения предела последовательности, докажем, например 3) свойство:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b.$$

Доказательство.

Как $\forall \varepsilon > 0$ так и для

$\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \ \exists N_1 \colon \forall n > N_1, |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \ (1)$

$\exists N_2 \colon \forall n > N_2, |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \ (2)$.

Оценим $|(a_n + b_n) - (a + b)|$:

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq$$
$$\leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, $a+b$-является пределом последовательности $\{x_n+y_n\}$.

Замечание: если у последовательности добавить, отбросить или изменить первые k элементов, то это не повлияет на ее сходимость.

1.3. Предельный переход в неравенствах.

Рассмотрим последовательности $\{x_n\}, \{y_n\}$и $\{z_n\}$.

Теорема 1.1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ и, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $x_n \le y_n$,то $a \le b$.

Доказательство.

Допустим, что $a > b$. Из равенств $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ будут выполняться неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ и $|y_n - b| < \varepsilon$,то есть $a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$ и $b-\varepsilon < y_n < b+\varepsilon$.

Возьмем $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$. Тогда: $x_n > a-\varepsilon = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$,то есть $x_n > \frac{a+b}{2}$ и$y_n < b+\varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$, то есть $y_n < \frac{a+b}{2}$.

Теорема 1.2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ и справедливо неравенство $x_n \le z_n \le y_n$(начиная с некоторого номера), то$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.(Примем без доказательства.)

1.4. Предел функции в точке.

Пусть функция $y = f(x)$определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0.Число A называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$, найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \ne x_0$, удовлетворяющих условию$|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство$|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A.$

Краткая запись определения предела функции на языке ε, δ:

$$(\forall\varepsilon > 0\,\exists\,\delta > 0\,\forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = A \ (1.3)$$

Геометрический смысл предела функции.

Неравенство $|x - x_0| < \delta$ эквивалентно неравенству $-\delta < x - x_0 < \delta$ или $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, а неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ эквивалентно неравенству $-\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon$, или $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

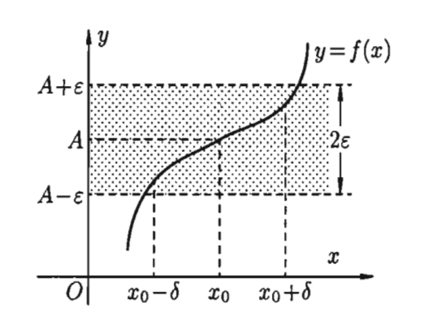


Рис. 2

Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если по мере того, как x приближается к x_0 (то есть x попадает в интервал $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, значение функции $f(x)$ неограниченно приближается к A, то есть $f(x)$ попадает в интервал $(A - \varepsilon; A + \varepsilon)$. Иными словами, точки графика функции $y = f(x)$ лежат внутри полосы 2ε, ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon, y = A + \varepsilon$ (рис.2).

Замечание: величина δ зависит от выбора ε, поэтому пишут $\delta = \delta(\varepsilon)$, при $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$ и наоборот $\delta \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

Пример 1.4. Показать, что функция $f(x) = 3x - 5$ имеет в точке $x = 2$ предел равный единице. Каково должно быть δ, если $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{100}$.

Решение.

Фиксируем любое $\varepsilon > 0$. Поэтому ε находим такие $\delta > 0$ при котором из неравенства $|x - 2| < \delta$ следовало бы неравенство $|(3x - 5) - 1| < \varepsilon$.

Решаем неравенство $|(3x - 5) - 1| < \varepsilon$, $|3x - 6| < \varepsilon$,

$|3(x - 2)| < \varepsilon$,

$3\,|x - 2| < \varepsilon$,

$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$,

взяв $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ видим, что для всех x удовлетворяющих неравенству $|x - 2| < \delta\left(= \frac{\varepsilon}{3}\right)$ выполняется неравенство:

$|(3x-5)-1|<\varepsilon$, следовательно, $\lim\limits_{x\to1}(3x-5)=1.$

Если $\varepsilon=1$, то $\delta=\frac{\varepsilon}{3}=\frac{1}{3}$; $\varepsilon=\frac{1}{2}$, то $\delta=\frac{\frac{1}{2}}{3}=\frac{1}{6}$;

$\varepsilon=\frac{1}{100}$, то $\delta=\frac{\frac{1}{100}}{3}=\frac{1}{300}$.

1.5. Бесконечно большие, бесконечно малые функции и их свойства.

Функция $y=f(x)$ называется **бесконечно малой (б.м.)** при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ ($f(x)$ неограниченно уменьшается, когда $x\to x_0$),из определения предела следует, что $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0\ \forall x\neq x_0: |x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)|<\varepsilon$.

Бесконечно малые функции часто называют бесконечно малыми величинами или бесконечно малыми; обозначают обычно греческими буквами α,β и так далее.

Примерами бесконечно малых функций являются, например, функция $y=x$ при $x\to0$(рис.3);

Действительно, по мере того как $x\to0$,$y=x\to0$,то есть $\lim\limits_{x\to0}x=0$;

Аналогично, $y=sinx$, при $x\to0$ и при $x\to\pi$ является бесконечно малой функцией.

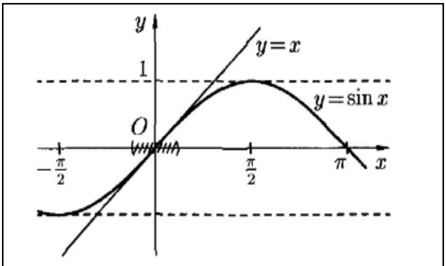


Рис.3

Функция $y=f(x)$ называется **бесконечно большой (б.б.)** при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ ($f(x)$неограниченно растёт, когда $x\to x_0$),то есть $\forall\varepsilon>0\exists\,\delta>0\ \forall x\neq x_0: |x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)|>\varepsilon$.

Бесконечно большие функции часто называют бесконечно большими величинами.

Замечание: нужно иметь в виду, что ∞ это только символ для обозначения бесконечно большой величины, в частности, если $f(x)$стремится к бесконечности и принимает лишь положительные значения (уходит вверх), то пишут$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$,если лишь отрицательные (уходит вниз), то пишут$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$.

Примерами бесконечно больших функций служат: функция $y = x$, при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$, так как $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$;

$y = \ln x$ при $x \to 0+0$, так как $\lim\limits_{x\to0+0} \ln x = -\infty$;

$y = e^x$, при $x \to +\infty$, так как $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ (рис.4).

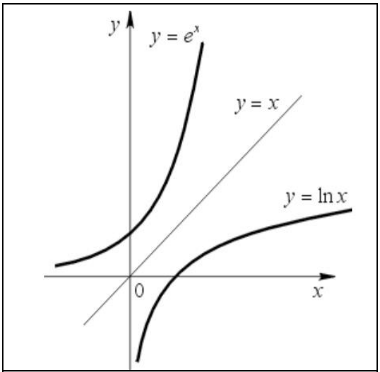


Рис. 4

Свойства бесконечно больших и бесконечно малых функций.

1.Если $f(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$, то функция $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ является бесконечно большой при $x \to x_0$ и наоборот: если $g(x)$ –бесконечно большая функция при $x \to x_0$, то функция $f(x) = \frac{1}{g(x)}$ является бесконечно малой при $x \to x_0$.

2.Сумма и разность конечного числа бесконечно малых функций при $x \to x_0$ является бесконечно малой функцией.

3.Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию является бесконечно малой функцией.

Следствие 1. Произведение двух бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.

Следствие 2. Произведение бесконечно малых функций на число есть функция бесконечно малая.

4.Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, имеющую отличный от нуля предел, есть функция бесконечно малая, то есть если $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{f(x)} = \frac{0}{a} = 0$;

Свойства бесконечно малых и больших функций вытекают из определения предела функции, докажем, например 2) свойство: сумма конечного числа бесконечно малых функций при $x \to x_0$) является бесконечно малой функцией.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$- две б. м. функции при $x \to x_0$. Это значит, что $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, то есть для любого $\varepsilon>0$, а значит, и $\frac{\varepsilon}{2}>0$ найдется число $\delta_1>0$ такое, что для всех $x\neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta_1$, выполняется неравенство $|\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ (1);

Аналогично, если $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$, то

$(\forall\varepsilon>0\,\exists\,\delta>0\,\forall x\neq x_0{:}\,|x-x_0|<\delta_2)\Rightarrow|\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$;

Пусть δ - наименьшее из чисел δ_1 и δ_2. Тогда для всех $x\neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta$, выполняются оба неравенства (1) и (2). Следовательно, имеет место соотношение:

$$|\alpha(x)+\beta(x)|\leq|\alpha(x)|+|\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Таким образом,

$(\forall\varepsilon>0\,\exists\,\delta>0\,\forall x\neq x_0{:}\,|x-x_0|<\delta)\Rightarrow|\alpha(x)+\beta(x)|<\varepsilon.$

.

Это значит, что $\lim\limits_{x\to x_0}\big(\alpha(x)+\beta(x)\big)=0,$ то есть $\alpha(x)+\beta(x)$ –б. м. ф.

Аналогично проводится доказательство для любого конечного числа б. м. функций.

Замечание: в дальнейшем будем использовать следующие очевидные соотношения

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}\frac{C}{\infty}=0\\ \frac{C}{0}=\infty\\ \frac{0}{C}=0\end{cases}.$$

1.6. Связь между функцией её пределом, и бесконечно малой функцией.

Теорема 1.3. Если функция $f(x)$ имеет предел, равный A, то ее можно представить как сумму числа A и бесконечно малой функции $\alpha(x)$, то есть если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, то $f(x)=A+\alpha(x)$.

Доказательство.

Так как $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.Следовательно,

$(\forall\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$,
то есть $|f(x) - A - 0| < \varepsilon$.

Это означает, что функция $f(x) - A$ имеет предел, равный нулю, то есть является бесконечно малой функцией, которую обозначим через $\alpha(x)$: $f(x) - A = \alpha(x)$.

Отсюда $f(x) = A + \alpha(x)$.

1.7. Свойства пределов функций.

Заметим, что отыскание предела функции по определению – это довольно трудоемкий процесс. Поэтому на практике удобнее пользоваться следующими свойствами, которые могут быть доказанны с использованием определения предела функции.

Пусть существуют конечные пределы функций $f(x), g(x)$в точке x_0, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$,тогда:

1. Предел постоянной функции равен самой постоянной: $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to x_0} C = C}$;

2. Предел суммы (разности) конечного числа функций равен сумме (разности) пределов этих функций: $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A \pm B}$;

3. Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций: $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A\cdot B}$;

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to x_0} C\cdot f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} C\cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = C \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = C\cdot A}$;

Следствие 2. Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^n = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^n}.$$

4. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{A}{B}}, \quad \boldsymbol{(B \neq 0)}.$$

Все свойства пределов вытекают из определения предела функции, докажем, например 3) свойство, аналогично доказываются остальные свойства.

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$.Тогда по теореме 1.3 о связи функции, ее предела и б. м. ф. можно записать $f(x) = A + \alpha(x)$, и $g(x) = B + \beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - б. м. ф. Следовательно,

$$f(x)g(x) = \big(A + \alpha(x)\big)\big(B + \beta(x)\big) = AB + (A\beta(x) + B\alpha(x) + \\ +\alpha(x)\beta(x)).$$

Выражение в скобках есть б.м.ф., поэтому

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = AB.$$

Отметим, что теорема справедлива для произведения любого конечного числа функций.

Практическое вычисление пределов.

Чтобы найти предел любого типа и вида нужно подставить предельное значение x, в функцию, стоящую под знаком предела и вычислить его, учитывая свойства пределов.

Пример 1.5. Найти предел:

а)$\lim\limits_{x\to 2}(2x^2 - 3x + 4)$;**б)** $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-1}{3x^2-5x+1}$;**в)** $\lim\limits_{x\to -2}\frac{4-x^2}{x^2+2x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{-2}}{x^{-3}+3}$.

Решение.

Применяя свойства пределов и подставляя предельное значение, имеем:

а) $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2 - 3x + 4) = 2\lim\limits_{x\to 2}x^2 - 3\lim\limits_{x\to 2}x + \lim\limits_{x\to 2}4 = 2\cdot 2^2 - 3\cdot 2 + 4 = 6;$

б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-1}{3x^2-5x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to -1}(x^2-x-1)}{\lim\limits_{x\to -1}(3x^2-5x+1)} = \frac{(-1)^2-(-1)-1}{3(-1)^2-5(-1)+1} = \frac{1}{9};$

в) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{4-x^2}{x^2+2x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to -2}(4-x^2)}{\lim\limits_{x\to -2}(x^2+2x+1)} = \frac{4-(-2)^2}{(-2)^2+2(-2)+1} = \frac{0}{1} = 0;$

г)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{-2}}{x^{-3}+3} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^3}+3} = \frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}+3} = \frac{0}{3} = 0.$

При вычислении пределов часто сталкиваются с ситуациями, которые называются неопределенностями. Различают 7 основных видов неопределенностей:

Для раскрытия неопределенностей используются специальные правила:

$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $\left[\frac{0}{0}\right]$, $[\infty-\infty]$, $[\infty\cdot\mathbf{0}]$, $[\mathbf{1}^{\infty}]$, $[\infty^{\mathbf{0}}]$, $[\mathbf{0}^{\mathbf{0}}]$.

Правило I. Чтобы раскрыть **неопределенность вида** $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, возникающую в пределах $\lim\limits_{x\to a}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, $Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m$ – многочлены степени n,m соответственно, необходимо числитель и знаменатель разделить на самую высокую входящую в них степень, после сокращения неопределённость уйдёт.

Правило II. Чтобы раскрыть **неопределенность вида** $\left[\frac{0}{0}\right]$, возникающую в пределах $\lim\limits_{x\to a}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, $Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m$-многочлены, необходимо числитель и знаменатель разложить на множители, после сокращения неопределённость уйдёт.

Замечание: для того, чтобы раскрыть неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, в которой числитель или знаменатель, или числитель и знаменатель иррациональны, следует числитель и знаменатель умножить на выражение, сопряженное иррациональному.

Пример 1.6. Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x-8}{4x+2}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^2-6x+1}{2x^3-5x^2+8}$; **в)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-7x+1}{2x-5}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+n-4}{4n^3+1}$; **д)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; **е)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n-3^n}{4\cdot5^n+2^n}$;

ё) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$; **ж)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[6]{n^3+3n^2+1}}{\sqrt[4]{2n^2-4n+2}}$;

з) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$; **и)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}$;

й) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\cdots+2n-1}{1+2+\cdots+n}$.

Решение.

а) Предел частного найти не удаётся, так как предел числителя и знаменателя при $x\to\infty$ равны бесконечности, получим неопределённость вида бесконечность разделить на бесконечность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для избавления от данной неопределенности вынесем за скобки в числителе и знаменателе дроби переменную в старшей степени, то есть x,после сокращения в скобках останутся константы и слагаемые, которые стремятся к нулю:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x-8}{4x+2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x(5-\frac{8}{x})}{x(4+\frac{2}{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{8}{x}}{4+\frac{2}{x}}=\frac{5}{4};$$

б) Рассуждая, аналогично имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2-6x+1}{2x^3-5x^2+8}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(\frac{7}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(2-\frac{5}{x}+\frac{8}{x^3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{5}{x}+\frac{8}{x^3}}=\frac{0}{2}=0;$$

в) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-7x+1}{2x-5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}=\frac{1}{0}=\infty;$$

г) $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n-4}{4n^3+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{4}{n^3}\right)}{n^3\left(4+\frac{1}{n^3}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{4}{n^3}}{4+\frac{1}{n^3}}=\frac{0}{4}=0;$$

д) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2};$$

е) $$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-3^n}{4\cdot5^n+2^n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)}{5^n\left(4+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{4+\left(\frac{2}{5}\right)^n}=\frac{1}{4};$$

ё)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\left(3-\frac{2}{x^4}\right)}{\sqrt{x^8\left(1+\frac{3}{x^7}+\frac{4}{x^8}\right)}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\left(3-\frac{2}{x^4}\right)}{x^4\sqrt{1+\frac{3}{x^7}+\frac{4}{x^8}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x^4}}{\sqrt{1+\frac{3}{x^7}+\frac{4}{x^8}}}=\frac{3}{1}=3;$$

ж) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[6]{n^3+3n^2+1}}{\sqrt[4]{2n^2-4n-2}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[6]{n^3\left(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}}{\sqrt[4]{n^2\left(2-\frac{4}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt[6]{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}}}{\sqrt[4]{2\left(1-\frac{2}{n}-\frac{1}{n}\right)}}=$$

$$=\frac{\sqrt[6]{1}}{\sqrt[4]{2}}=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}=\frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}=\frac{2^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}\cdot2^{\frac{3}{4}}}=\frac{\sqrt[4]{8}}{2};$$

з) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(1+\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

и) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^4-\left(n\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^4}{\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^4+\left(n\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^4}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^4-\left(1-\frac{1}{n}\right)^4\right)}{n^4\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^4+\left(1-\frac{1}{n}\right)^4\right)}=\frac{0}{2}=0;$

й) В числителе и знаменателе наблюдается арифметическая прогрессия, как известно, её сумма вычисляется по формуле:
$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$,тогда

$$1+3+5+\dots+2n-1\Rightarrow S_n=\frac{(1+2n-1)n}{2}=n^2;$$

$$1+2+3\dots+n\Rightarrow S_n=\frac{(1+n)n}{2};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\dots+2n-1}{1+2+\dots+n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\frac{(1+n)n}{2}}=2\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=2.$$

Пример 1.7. Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}$;**б)** $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$;**в)** $\lim\limits_{x\to-1}\frac{6x^2+5x-1}{5x^2+3x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{x^3-8}$;**д)** $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2+x-6}$;**е)** $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$;

ё) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+3x+4}{x^3+1}$.

Решение.

а) Подставляя предельное значение, получим неопределённость$\left[\frac{0}{0}\right]$,чтобы устранить её, необходимо разложить числитель и знаменатель на множители, и после сокращения неопределённость уйдёт:

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)x}=\lim_{x\to3}\frac{x+3}{x}=\frac{6}{3}=2;$$

б) Подставляя предельное значение, получим неопределённость$\left[\frac{0}{0}\right]$, раскладывая числитель и знаменатель на множители имеем:

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-5)}=\lim_{x\to3}\frac{x-2}{x-5}=-\frac{1}{2};$$

в) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{6x^2+5x-1}{5x^2+3x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to-1}\frac{6\left(x-\frac{1}{6}\right)(x+1)}{5\left(x-\frac{2}{5}\right)(x+1)}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{6x-1}{5x-2}=\frac{-7}{-7}=1;$

г) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{x^3-8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{1}{12};$

д) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2+x-6}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to2}\frac{x(x^2-3x+2)}{(x-2)(x+3)}=$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+3)}=\lim_{x\to2}\frac{x(x-1)}{x+3}=\frac{2}{5}=0{,}4;$$

е) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^2(x+1)-(x+1)}=$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2-1)}{(x+1)(x^2-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{0}{2}=0;$$

ё) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+3x+4}{x^3+1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x^3+1)+3(x+1)}{x^3+1^3}=$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)+3(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2-x+4)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x+4}{x^2-x+1}=\frac{6}{3}=2.$$

Пример 1.8. Вычислить**:**

а) $\lim\limits_{x\to6}\frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$;**б)** $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$; **в)**$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$; **г)**$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$.

Решение.

а) Подставляя предельное значение, получим неопределённость$\left[\frac{0}{0}\right]$, содержащую иррациональность в числителе, поэтому для начала избавляемся от иррациональности- числитель и знаменатель умножить на выражение, сопряженное числителю, то есть на$\sqrt{x-2}+2$, приводим подобные и после сокращения неопределённость уйдёт:

$$\lim_{x\to6}\frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to6}\frac{(\sqrt{x-2}-2)(\sqrt{x-2}+2)}{(x-6)(\sqrt{x-2}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to6}\frac{\left(\sqrt{x-2}\right)^2-2^2}{(x-6)\left(\sqrt{x-2}+2\right)}=\lim_{x\to6}\frac{x-2-4}{(x-6)\left(\sqrt{x-2}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to6}\frac{x-6}{(x-6)\left(\sqrt{x-2}+2\right)}=\lim_{x\to6}\frac{1}{\sqrt{x-2}+2}=\frac{1}{4};$$

б) Рассуждая, аналогично имеем:

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1})(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}{(x^2-9)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} =$$
$$= \lim_{x\to 3}\frac{x+13-4(x+1)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} =$$
$$= \lim_{x\to 3}\frac{-3(x-3)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} =$$
$$= \lim_{x\to 3}\frac{-3}{(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} = -\frac{1}{16};$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(x^2+1-1)(\sqrt{x^2+16}+4)}{(x^2+16-16)(\sqrt{x^2+1}+1)} =$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{x^2+16}+4)}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{8}{2} = 4;$$

г) Для того, чтобы исключить иррациональность в числителе воспользуемся формулой

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$,учитывая, что

$x-1=(\sqrt[3]{x})^3-1^3=(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)$ умножим и разделим исходную дробь на $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} =$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} = \frac{1}{3}.$$

Правило III. Чтобы раскрыть **неопределенности вида** $[\infty-\infty]$**,** $[\infty\cdot 0]$ необходимо при помощи алгебраических преобразований перейти к пределам типа $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$,а далее воспользоваться правилом избавления от полученного вида неопределённости.

Пример 1.9. Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x-1}\cdot x^2$;**б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)$; **в)** $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2}{x-2}-\frac{8}{x^2-4}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$;**д)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x-3}\right)$.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x-1}\cdot x^2 = [\infty\cdot 0] = 5\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1} =$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 5\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} = 5\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= 5 \cdot \frac{1}{0} = 5 \cdot (+\infty) = +\infty;$$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1} - x\right) = [\infty - \infty] = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3 - x(x^2+1)}{x^2+1} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3 - x^3 - x}{x^2+1} = -\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= -\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = -\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = -\frac{1}{\infty} = 0;$$

в) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2}{x-2} - \frac{8}{x^2-4}\right) = [\infty - \infty] = \lim\limits_{x\to 2}\frac{2(x+2)-8}{x^2-4} =$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{2x+4-8}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{x^2-4} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{2}{x+2} = \frac{1}{2};$$

г) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right) = [\infty - \infty] = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x+1-3}{(1-x)(x^2+x+1)} =$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(1-x)(x^2+x+1)} = \left[\frac{0}{0}\right] = -\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)} =$$

$$= -\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+x+1} = -1;$$

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x}\right) = [\infty - \infty] =$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2-x}\right)^2}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1-x^2+x}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)} + \sqrt{x^2\left(1-\frac{x}{x^2}\right)}} =$$

Поскольку, $\sqrt{t^2} = |t| = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ -t, & t < 0 \end{cases}$ и

$$\sqrt{x^2\left(1+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)} + \sqrt{x^2\left(1-\frac{x}{x^2}\right)} = |x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + |x|\sqrt{1-\frac{1}{x}} =$$

$= |x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)$,получим предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}$;

Рассмотрим два случая: 1) поведение функции при $x \to +\infty$;2) при $x \to -\infty$;

$$1)\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=\frac{2}{2}=1;$$

$$2)\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}=$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=-\frac{2}{2}=-1;$$

Таким образом,

при $x \to +\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)=1$;

при $x \to -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)=-1$.

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x-3}\right)=[\infty-\infty]=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+5x-3}\right)\left(x+\sqrt{x^2+5x-3}\right)}{x+\sqrt{x^2+5x-3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-\left(\sqrt{x^2+5x-3}\right)^2}{x+\sqrt{x^2+5x-3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2-5x+3}{x+\sqrt{x^2+5x-3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x+3}{x+\sqrt{x^2+5x-3}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right];$$

Поскольку $\sqrt{x^2+5x-3}=|x|\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}\right)$,

рассмотрим два случая 1) поведение функции при $x \to +\infty$;2) при $x \to -\infty$:

$$1)\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x+3}{x+|x|\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-5+\frac{3}{x}\right)}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}\right)}=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-5+\frac{3}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}} = \frac{-5}{2} = -2{,}5;$$

$$2) \lim_{x\to-\infty} \frac{-5x+3}{x+|x|\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(-5+\frac{3}{x}\right)}{x\left(1-\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-5+\frac{3}{x}}{1-\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}} = \frac{-5}{0} = -\infty;$$

Таким образом,

при $x \to +\infty, \lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x-3}\right) = -2{,}5;$

при $x \to -\infty, \lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x-3}\right) = -\infty.$

Задания для самостоятельного решения.

1.Вычислить пределы:

1.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2-x}$	**16.**	$\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^3-27}$
2.	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\cdot5^n-3^n}{2\cdot5^n+2^n}$	**17.**	$\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$
3.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-5x-4}{2x-5}$	**18.**	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^4+n^3}-\sqrt[3]{n^4-n^3}\right)$
4.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-x+1}{6x^5-5x-5}$	**19.**	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}$
5.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x-1}{2^x+1}$	**20.**	$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$
6.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}-x}{3x+5}$	**21.**	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)$
7.	$\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^3+x-4}{x^2-1}$	**22.**	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{5x^2+1}-\frac{x^2}{5x-3}\right)$
8.	$\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^3-4x^2-5x+6}{x^3+x-2}$	**23.**	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$
9.	$\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+2}}{x^2-4}$	**24.**	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)$

10.	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5x+1}-\sqrt{3x+5}}{x^3-8}$	**25.**	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-3}-x\right)$
11.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9-x^2}-3}{\sqrt{16-x^2}-4}$	**26.**	$\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$
12.	$\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{5-\sqrt{2x+7}}$	**27.**	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^3+x-4}{x^2-1}$
13.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[6]{n}+\sqrt[5]{32n^{10}+1}}{\left(n+\sqrt[4]{n}\right)\sqrt[3]{n^3-1}}$	**28.**	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3-x+1}+\sqrt{2x^3+1}}{5\cdot\sqrt[4]{x^6+x+2}-x}$
14.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-10^n}{2+10^{n+1}}$	**29.**	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5\cdot 3^{2x}+1}{4-3^{2x}}$
15.	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+6x-16}{x^2-4}$	**30.**	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$

Ответы:

1.1.1.**1.2.** $\frac{3}{2}$.**1.3.** ∞. **1.4.**0. **1.5.** при $x\to+\infty\Rightarrow 1$;
при $x\to-\infty\Rightarrow -1$. **1.6.** при $x\to+\infty\Rightarrow\frac{1}{3}$,при $x\to-\infty\Rightarrow -1$.**1.7.**5.
1.8. -1.**1.9.** $\frac{1}{8}$. **1.10.** $\frac{\sqrt{11}}{132}$. **1.11.** $\frac{4}{3}$. **1.12.** $\frac{5}{6}$.**1.13.**2 . **1.14.**- $\frac{1}{10}$. **1.15.**
$\frac{5}{2}$.**1.16.** $\frac{1}{27}$. **1.17.**24. **1.18.** ∞.**1.19.**1. **1.20.** $\frac{1}{2}$**1.21.**1.**1.22.**$-\frac{3}{25}$.
1.23. 0.**1.24.**0.**1.25.**0.**1.26.** $\frac{1}{2}$.**1.27.**5.**1.28.** $\frac{\sqrt{2}}{5}$.**1.29.** при
$x\to+\infty\Rightarrow -5$; при $x\to-\infty\Rightarrow\frac{1}{4}$.**1.30.** $\frac{1}{2}$.

1.8. Первый замечательный предел и его следствия.

Замечательных пределов существует несколько, но самыми известными являются первый и второй замечательные пределы. Замечательность этих пределов состоит в том, что они имеют широкое применение и с их помощью можно найти другие пределы, встречающиеся в многочисленных задачах. Этим мы и будем заниматься на практике, а сейчас рассмотрим первый замечательный предел.

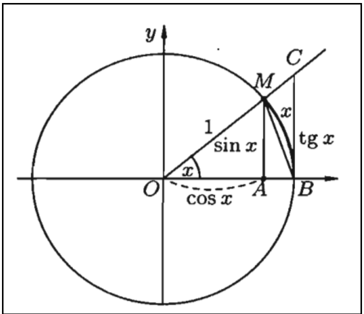


Рис. 5

При вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто используют предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \quad (1.4)$$

Предел вида (1.4) называется **первым замечательным пределом.**

Замечание: так как $\sin x \to 0$ при $x \to 0$, то имеет место неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Разберемся, как выводится данная формула.

Рассмотрим ΔOAM(рис.5):

$\sin x = \frac{AM}{OM}$, $\cos x = \frac{OA}{OM}$, то есть $\sin x = AM, \cos x = OA$;

$tg x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{AM}{OA} = BC$.

Возьмем круг радиуса 1, обозначим радианную меру $< MOB$ через x (рис. 5).

Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Очевидно, что $S_{\Delta MOB} < S_{\text{сектора}MOB} < S_{\Delta COB}$.

Очевидно, что $S_{\Delta MOB} < S_{\text{сек.}MOB} < S_{\Delta COB}$. На основании соответствующих формул геометрии $S_{\Delta} = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$, $S_{\text{сектора}} = \frac{1}{2}R^2\alpha$, получаем:

$$S_{\Delta MOB} = \frac{1}{2}OM\cdot OB = \frac{1}{2}\sin x,$$

$$S_{\Delta COB} = \frac{1}{2}OB\cdot BC = \frac{1}{2}tgx,$$

$S_{\text{сек.}MOB} = \frac{1}{2}x$,следовательно, выполняется неравенство:

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}tgx \,\Big|\cdot\frac{2}{\sin x},$$

$1 < \frac{x}{sinx} < \frac{1}{cosx}$, то есть, с одной стороны,
$\frac{x}{sinx} < \frac{1}{cosx}$ или $cosx < \frac{sinx}{x}$;
С другой, $1 < \frac{x}{sinx}$ или$\frac{sinx}{x} < 1$.

Таким образом,$cosx < \frac{sinx}{x} < 1$,переходя к пределу в данном неравенстве при $x \to 0$ и учитывая, что $\lim\limits_{x\to 0} cosx = 1, \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$ по теореме (о пределе промежуточной функции) имеем:

$$\lim_{x\to 0} cosx < \lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} < \lim_{x\to 0} 1,$$
$$1 < \lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} < 1,$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1.$$

Следствия из первого замечательного предела.

Из первого замечательного предела $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1$ несложно вывести следующие пределы:

$$\mathbf{1)}\ \lim_{x\to 0} \frac{tgx}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1;$$
$$\mathbf{2)}\ \lim_{x\to 0} \frac{arcsinx}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1;$$
$$\mathbf{3)}\ \lim_{x\to 0} \frac{arctgx}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1;$$
$$\mathbf{4)}\ \lim_{x\to 0} \frac{1 - cosx}{\frac{x^2}{2}} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1.$$

Опираясь на первый замечательный предел, докажем каждое из этих равенств:

$$1)\ \lim_{x\to 0} \frac{tgx}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{sinx}{cosx}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{cosx} = 1;$$
$$2)\ \lim_{x\to 0} \frac{arcsinx}{x} = \left| \begin{matrix} t = arcsinx \\ x = sint \\ \text{при} x \to 0, t \to 0 \end{matrix} \right| = \lim_{t\to 0} \frac{t}{sint} = 1;$$
$$3)\ \lim_{x\to 0} \frac{arctgx}{x} = \left| \begin{matrix} t = arctgx \\ x = tgt \\ \text{при} x \to 0, t \to 0 \end{matrix} \right| = \lim_{t\to 0} \frac{t}{tgt} = 1;$$
$$4)\ \lim_{x\to 0} \frac{1 - cosx}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{2sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1.$$

Пример 1.10. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$;**б)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg5x}{tg3x}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin^2 3x}{5x^2}$;**г)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)x}{arctg5x}$.

Решение.

а) Подставляя предельное значение, получим неопределённость $\left[\frac{0}{0}\right]$,чтобы устранить её, учитывая, что в пределе находится тригонометрическая функция- $\sin 3x$, построим первый замечательный предел для этого числитель и знаменатель дроби умножим и разделим на 3:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3;$$

б) Учитывая, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg5x}{tg3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x}\cdot\frac{tg5x}{5x}\cdot\frac{3x}{tg3x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{tg5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{tg3x}=\frac{5}{3};$$

в) Так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=1$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin^2 3x}{5x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{9}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{3x}=\frac{9}{5};$$

г) Так как $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=1$,

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=1$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)x}{arctg5x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{5x}{arctg5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}\cdot$$
$$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2}=1\cdot 1\cdot 0=0.$$

Замечание: при расчете некоторых пределов $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$,когда переменная в пределе не стремится к нулю, удобно переходить к новой переменной $t=x-x_0$.

Пример 1.11. Вычислить:

а)$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{2x-4}$;**б)** $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot tg\frac{\pi x}{2}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{arctg(x-2)}$;

г)$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot tgx$.

Решение.

а) Подставляем предельное значение, получаем неопределённость$\left[\frac{0}{0}\right]$,поскольку переменная, относительно которой вычисляется предел, не стремится к нулю, для удобства сделаем подстановку $t = x - 2 \to 0$,предварительно преобразовав выражение под знаком предела, имеем:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{2x-4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x-2\to 0}\frac{\sin(x-2)}{2(x-2)} =$$
$$= \begin{vmatrix} t = x-2 \\ x = t+2 \end{vmatrix} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{2t} = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = \frac{1}{2};$$

б) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2} = [0\cdot\infty]$, поскольку мы имеем дело с неопределённость$[0\cdot\infty]$,то согласно правилу избавления от данного вида неопределённости, с помощью алгебраического преобразования перейдём к пределу вида$\left[\frac{0}{0}\right]$,далее сделав замену $t = x - 1$, учитывая, что $ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -tg\alpha$ получим:

$$\lim_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2} = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{ctg\frac{\pi x}{2}} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$
$$= -\lim_{x-1\to 0}\frac{x-1}{ctg\frac{\pi x}{2}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \begin{vmatrix} t = x-1 \\ x = t+1 \end{vmatrix} =$$
$$= -\lim_{t\to 0}\frac{t}{ctg\frac{\pi(t+1)}{2}} = -\lim_{t\to 0}\frac{t}{ctg\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi t}{2}\right)} =$$
$$= -\lim_{t\to 0}\frac{t}{-tg\frac{\pi t}{2}} = \frac{2}{\pi}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi t}{2}}{tg\frac{\pi t}{2}} = \frac{2}{\pi};$$

в) Сделаем подстановку $t = x - 2 \to 0$, предварительно преобразовав выражение под знаком предела и учитывая, что $arctgt \sim t$,при $t \to 0$ имеем:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{arctg(x-2)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{arctg(x-2)} =$$
$$= \begin{vmatrix} t = x-2 \\ x = t+2 \end{vmatrix} = \lim_{t\to 0}\frac{t((t+2)^2+2(t+2)+4)}{arctgt} =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{t((t+2)^2+2(t+2)+4)}{t} = \lim_{t\to 0}((t+2)^2+2(t+2)+4) = 12;$$

г) Сделаем подстановку $t = x - \frac{\pi}{2} \to 0$, предварительно преобразовав выражение под знаком предела и учитывая, что $tg\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = -ctgt$ имеем:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot tgx = [0\cdot\infty] = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot tgx =$$

$$= \begin{vmatrix} t = x - \frac{\pi}{2} \to 0 \\ x = t + \frac{\pi}{2} \end{vmatrix} = -\lim_{t\to 0} t \cdot tg\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\lim_{t\to 0} t \cdot (-ctgt) =$$

$$= \lim_{t\to 0} t \cdot ctgt = [0 \cdot \infty] = \lim_{t\to 0} \frac{t}{tgt} = 1.$$

1.9. Второй замечательный предел и его следствия.

Предел вида $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e\ (1.5)$
называется **вторым замечательным пределом.**

Примем эту формулу без доказательств, в силу их громоздкости.
Замечания:
1) так как $\frac{1}{x} \to 0$ при $x \to \infty$, то имеем неопределенность вида $[1^\infty]$;
2) $e = 2{,}71828\ldots$ – число Непера, основание натуральных логарифмов;
3)при $x \to 0$ формула второго замечательного предела принимает вид (1.6): $\lim\limits_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = [1^\infty] = e\ (1.6)$

Пример 1.12. Вычислить:
а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1 + 2x}$;**в)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$;
г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-1}{2x^2+8}\right)^{5x}$;**д)**$\lim\limits_{x\to 0}(1 + sin2x)^{\frac{1}{sin3x}}$.

Решение.

а) Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$,очевидно, что имеет место неопределённость $[1^\infty]$, поэтому воспользуемся вторым замечательным пределом $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = [1^\infty] = e$,предварительно построив его- умножив и разделив показатель степени на 3 имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = [1^\infty] = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^3 = e^3;$$

б) Поскольку имеем неопределённость вида $[1^\infty]$,при этом $x \to 0$.Построим второй замечательный предел, применяя формулу $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=[1^\infty]=e$:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1+2x}=\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=[1^\infty]=\lim_{x\to 0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^2=e^2;$$

в) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}=[1^\infty]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x-2)+3}{x-2}\right)^{2x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{3}}\right]^{\frac{3(2x-1)}{x-2}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3(2x-1)}{x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3\left(2-\frac{1}{x}\right)}{1-\frac{2}{x}}}=e^6;$$

г) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-1}{2x^2+8}\right)^{5x}=[1^\infty]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(2x^2+8)-9}{2x^2+8}\right)^{5x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(-9)}{2x^2+8}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{(-9)}{2x^2+8}\right)^{\frac{2x^2+8}{-9}}\right]^{\frac{-45x}{2x^2+8}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-45x}{2x^2+8}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-45x}{x^2\left(2+\frac{8}{x^2}\right)}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-45}{x\left(2+\frac{8}{x^2}\right)}}=e^0=1;$$

д) $$\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 3x}}=[1^\infty]=\lim_{x\to 0}\left[(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}}\right]^{\frac{\sin 2x}{\sin 3x}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{3x}}=e^{\frac{2}{3}}.$$

Следствия из второго замечательного предела.

Разберём те формулы, которые можно получить, используя второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, а именно следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=1$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\dfrac{1}{\ln a};\ a>0;\ a\neq 1$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=1$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\ln a$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^k-1}{x}=k;\ k\epsilon R$.

Докажем каждое из этих равенств:

1)Учитывая, что $lnx^p = plnx$ и $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot ln(1+x) = \lim_{x\to 0} ln(1+x)^{\frac{1}{x}} =$$
$$= ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = lne = 1;$$

2) Учитывая, что$log_a b = \frac{lnb}{lna}$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{lna\cdot x} = \lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{lna} = \frac{1}{lna};$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left|\begin{matrix} t = e^x - 1 \\ t+1 = e^x \\ ln(t+1) = lne^x \\ ln(t+1) = xlne \\ ln(t+1) = x \\ \text{при } x\to 0, t\to 0\end{matrix}\right| = \lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{ln(1+t)} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{\frac{ln(1+t)}{t}} = 1;$

4)Учитывая, что $a^{log_a b} = b$, то есть $e^{log_e a^x} = e^{lna^x} = a^x$, отсюда имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{lna^x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{xlna}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{xlna}-1}{xlna}\cdot$$
$$\cdot\lim_{x\to 0} lna = lna;$$

$$5)\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{ln(1+x)^k}-1}{x} = k\lim_{x\to 0}\frac{e^{kln(1+x)}-1}{kln(1+x)}\cdot$$
$$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x} = k.$$

Пример 1.13. Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot ln(1+2x)$;**б)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{5x}$;**в)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{x}$;**г)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$.

Решение.

а) При подстановки предельного значения имеем дело с неопределённостью$[0\cdot\infty]$,с помощью алгебраических преобразований перейдём к пределу вида$\left[\frac{0}{0}\right]$ и учитывая, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1$ получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot ln(1+2x) = [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to 0}\frac{ln(1+2x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+2x)}{2x} = 2;$$

б) Учитывая, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{5x} = \frac{4}{5}\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{4x} = \frac{4}{5};$$

в) Зная, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}(e^x-1)}{x} = \lim_{x\to 0} e^{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} =$$
$$= e^0\cdot 1 = 1;$$

г) Так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = lna$ получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{(a^x-1)-(b^x-1)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} -$$
$$-\lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x} = lna - lnb = ln\frac{a}{b}.$$

1.10. Сравнение бесконечно малых функций.

Пусть $\alpha = \alpha(x)$ и $\beta = \beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$,то есть $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x) = 0$.

Эти бесконечно малые функции можно сравнивать по быстроте их убывания, то есть по быстроте их стремления к нулю.

Например, функция $\alpha(x) = x^5$ стремится к нулю быстрее, чем функция $\beta(x) = x$.

Запишем следующие определения:

1) Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой более высокого порядка**, чем функция $\beta(x)$.

   Обозначение: $\alpha(x) = \bar{\bar{0}}(\beta(x))$.

Например, если $\alpha(x) = x^5, \beta(x) = x$ бесконечно малые функции при $x \to 0$,то $\alpha(x) = x^5$ – бесконечно малая функция более высокого порядка, чем $\beta(x)$,так как

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^5}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x^4 = 0$,то есть $\alpha(x)$ стремится к нулю быстрее, чем функция $\beta(x)$.

2) Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то **функция $\alpha(x)$** называется **бесконечно малой более низкого порядка**, чем функция $\beta(x)$.

Например, $\alpha(x) = tgx, \beta(x) = x^3$ -бесконечно малые функции при $x \to 0$,вычислим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = 1\cdot\frac{1}{0} = \infty$,следовательно,

$\alpha(x) = tgx$ бесконечно малая функция более низкого порядка, чем $\beta(x) = x^3$,то есть стремится к нулю медленнее, чем функция$\beta(x)$.

3) Если $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \neq 0}$,то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **бесконечно малыми функциями одного порядка.**

Например, $\alpha(x) = x^3 - 2x$ и $\beta(x) = x^3 + 2x^2 + x$ -бесконечно малые функции при $x \to 0$,

вычислим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-2x}{x^3+2x^2+x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x^3-2x}{x^3+2x^2+x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^3-2x}{x^3+2x^2+x} = \lim_{x\to 0}\frac{x(x^2-2)}{x(x^2+2x+1)} =$$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-2}{x^2+2x+1} = -2 \neq 0$,следовательно, функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми функциями одного порядка.

4)Если $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1}$,то функции $\boldsymbol{\alpha(x)}$ и $\boldsymbol{\beta(x)}$ называются **эквивалентными бесконечно малыми функциями**.

Обозначение: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Например, $\alpha(x) = sinx, \beta(x) = x$ эквивалентные бесконечно малые функции, так как

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1$, то $sinx \sim x$, при $x \to 0$.

Замечание: если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \nexists$,то $\alpha(x), \beta(x)$ называют несравнимыми бесконечно малыми функциями.

Пример 1.14. Сравнить порядок бесконечно малых функций:

а) $\alpha(x) = x^3, \beta(x) = x^2 - x, x \to 0$;

б)$\alpha(x) = sinx, \beta(x) = x^4, x \to 0$;

в) $\alpha(x) = sin^2x, \beta(x) = 2x^2, x \to 0$;

г) $\alpha(x) = tgx, \beta(x) = x, x \to 0$.

Решение.

а) Вычислим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x-1}=\frac{0}{-1}=0,$$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$,следовательно, $\alpha(x)=x^3$ –бесконечно малая функция более высокого порядка, чем $\beta(x)=x^2-x$,то есть стремится к нулю быстрее, чем функция$\beta(x)$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}=1\cdot\frac{1}{0}=\infty$, следовательно, $\alpha(x)=sinx$ –бесконечно малая функция более низкого порядка, чем $\beta(x)=x^4$,то есть стремится к нулю медленнее, чем функция $\beta(x)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin^2x}{2x^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=\frac{1}{2}\neq 0$, следовательно, $\alpha(x)=sin^2x$,$\beta(x)=2x^2$ –бесконечно малые функции одного порядка;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$,следовательно, функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми функциями, то есть $tgx\sim x, x\to 0$.

Эквивалентные бесконечно малых функции.

Как мы заметили ранее, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$,то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми функциями. Эквивалентные — значит равносильные.

Приведём примеры эквивалентных бесконечно малых функций:

$sinx\sim x, x\to 0$, $tgx\sim x, x\to 0, arcsinx\sim x, x\to 0$,

$arctgx\sim x, x\to 0, 1-cosx\sim\frac{x^2}{2}, x\to 0$;

Действительно, так как мы показывали ранее, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1, \lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1, \lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsinx}{x}=1$,

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1, \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cosx}{\frac{x^2}{2}}=1$(см. первый замечательный предел и его следствия).

Теорема 1.4. Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой.

Доказательство.

Пусть $\alpha\sim\alpha'$и $\beta\sim\beta'$ при $x\to x_0$.Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha'}{\alpha'}\cdot\frac{\beta'}{\beta'}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\alpha'}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\beta'}{\beta}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha'}{\beta'}=$$

$=1\cdot 1\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha'}{\beta'}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha'}{\beta'}$,то есть $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha'}{\beta'}$.

Понятно, что $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha'}{\beta}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta'}$.

Теорема 1.5. Разность двух эквивалентных бесконечно малых функций есть бесконечно малая более высокого порядка, чем каждая из них.

Доказательство.

Пусть $\alpha\sim\beta$ при $x\to x_0$.Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha-\beta}{\alpha}=\lim_{x\to x_0}\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)=1-\lim_{x\to x_0}\frac{\beta}{\alpha}=1-1=0,$$

аналогично, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha-\beta}{\beta}=0$.

Заметим, что обратное утверждение так же верно.

Теорема 1.6. Сумма конечного числа бесконечно малых функций разных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка.

Доказательство.

Докажем теорему для двух функций.

Пусть $\alpha\to 0,\beta\to 0$ при $x\to x_0$, причем α - б.м.ф. высшего порядка, чем β, то есть $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=0$.

Тогда $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}+1=0+1=1$.

Следовательно, $\alpha+\beta\sim\beta$ при $x\to x_0$.

Слагаемое, эквивалентное сумме бесконечно малых, называется **главной частью этой суммы**. Замена суммы б.м.ф. ее главной частью называется отбрасыванием бесконечно малых высшего порядка.

Практическое применение бесконечно малых функций к вычислению пределов.

Во многих задачах на вычисление пределов можно заменить некоторую бесконечно малую функцию, эквивалентной бесконечно малой функцией, так как предел их отношения при этом не изменится. Данное действие значительно упрощает решение задачи.

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций.

Пусть $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x\to x_0$.Запишем основные эквивалентные бесконечно малые функции в таблицу, которой очень удобно пользоваться при нахождении пределов. Замена производится на основе таблицы эквивалентных бесконечно малых функций:

$sin(\alpha(x))$	$\sim$	$\alpha(x)$
$tg(\alpha(x))$	$\sim$	$\alpha(x)$
$arctg(\alpha(x))$	$\sim$	$\alpha(x)$
$arcsin(\alpha(x))$	$\sim$	$\alpha(x)$
$1-cos(\alpha(x))$	$\sim$	$\frac{\alpha^2(x)}{2}$
$log_a(1+\alpha(x))$	$\sim$	$\frac{\alpha(x)}{lna}$
$ln(1+\alpha(x))$	$\sim$	$\alpha(x)$
$e^{\alpha(x)}-1$	$\sim$	$\alpha(x)$
$a^{\alpha(x)}-1$	$\sim$	$\alpha(x)lna$
$(1+\alpha(x))^k-1$	$\sim$	$k\alpha(x)$

Эквивалентность всех функций, указанных в таблице, доказывается, основываясь на равенстве $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=1.$

Замечание: если в таблице в качестве $\alpha(x)$ взять x,то есть $\alpha(x)=x$, $x\to 0$получим:

$sin\ x$	$\sim$	x
tgx	$\sim$	x
$arctgx$	$\sim$	x
$arcsinx$	$\sim$	x
$1-cosx$	$\sim$	$\frac{x^2}{2}$
$log_a(1+x)$	$\sim$	$\frac{x}{lna}$
$ln(1+x)$	$\sim$	x
e^x-1	$\sim$	x
a^x-1	$\sim$	$xlna$
$(1+x)^k-1$	$\sim$	kx

Пример 1.15. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin7x}{x}$;**б)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg4x}{arctg3x}$;**в)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)}{\arcsin\frac{x}{5}}$;**г)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{x+4x^2}{\sin4x}$.

Решение.

а)<u>1 способ </u>(строим первый замечательный предел)

Учитывая, что $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ имеем:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin7x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=7\lim_{x\to0}\frac{\sin7x}{7x}=7;$$

<u>2 способ </u>(используем таблицу эквивалентных бесконечно малых функций)

Учитывая, что $\sin7x\sim7x,$ при $x\to0$ имеем:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin7x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{7x}{x}=7.$$

б)<u> 1 способ </u>(воспользуемся следствием первого замечательного предела)

Учитывая, что $\lim\limits_{x\to0}\frac{tgx}{x}=1$,$\lim\limits_{x\to0}\frac{arctgx}{x}=1$имеем:

$$\lim_{x\to0}\frac{tg4x}{arctg3x}=\lim_{x\to0}\frac{4x}{3x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{tg4x}{4x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{3x}{arctg3x}=\frac{4}{3};$$

<u>2 способ </u>(используем таблицу эквивалентных бесконечно малых функций)

Учитывая, что $tg4x\sim4x,\ arctg3x\sim3x$при $x\to0$ имеем:

$$\lim_{x\to0}\frac{tg4x}{arctg3x}=\lim_{x\to0}\frac{4x}{3x}=\frac{4}{3}.$$

в) <u>1 способ</u>

Учитывая, что $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=1,$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1$имеем:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)}{\arcsin\frac{x}{5}}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)}{\frac{x}{3}}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x}{3}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{5}}{\arcsin\frac{x}{5}}\cdot\lim_{x\to0}\frac{5}{x}=$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{3}\cdot\frac{5}{x}=\frac{5}{3};$$

<u>2 способ</u>

Учитывая, что $\arcsin\frac{x}{5}\sim\frac{x}{5},x\to0\quad \ln\left(1+\frac{x}{3}\right)\sim\frac{x}{3}$при $x\to0$ имеем:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)}{\arcsin\frac{x}{5}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{3}}{\frac{x}{5}}=\frac{5}{3}.$$

г) <u>1 способ:</u>

Учитывая, что $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=1$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+4x^2}{sin4x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+4x^2)4x}{4xsin4x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+4x^2}{4x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+4x)}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+4x}{4}=\frac{1}{4}.$$

2 способ

Учитывая, что $sin4x\sim 4x$,при $x\to 0$;$x+4x^2\sim x$, при $x\to 0$,так как x –б.м.ф. более низкого порядка,чем $4x^2$, действительно, $\lim_{x\to 0}\frac{x}{4x^2}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$,поэтому имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+4x^2}{sin4x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{4x}=\frac{1}{4}.$$

Практическое вычисление пределов по теме: первый замечательный предел и его следствия.

Пример 1.16. Вычислить пределы, заменяя бесконечно малые функции эквивалентными:

а)$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 10x}$;**б)** $\lim_{x\to 0}\frac{arctg\frac{x}{2}}{x}$;**в)**$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}$;**г)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3-\sqrt{2x+9}}$;
д) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{tg^2 2x}$; **е)**$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos2x+tg^2 x}{xsinx}$;**ё)** $\lim_{x\to 0}\frac{1+sinx-cos2x}{sin^2 x}$.

Решение.

а) Так как $sint\sim t$, при $t\to 0$,то
$sin10x\sim 10x, sin3x\sim 3x,$ при $x\to 0$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 10x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{10x}=\frac{3}{10};$$

б) Так как $tgt\sim t$, при $t\to 0$,то
$arctg\frac{x}{2}\sim\frac{x}{2}$, при $x\to 0$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg\frac{x}{2}}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2};$$

в) Так как $1-cost\sim\frac{t^2}{2}$, при $t\to 0$,то

$1-\cos 3x\sim\frac{(3x)^2}{2}=\frac{9x^2}{2}$,

$1-\cos 5x\sim\frac{(5x)^2}{2}=\frac{25x^2}{2}$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{25x^2\cdot 2}{2\cdot 9x^2}=\frac{25}{9};$$

г) Так как $sint\sim t$, при $t\to 0$,то
$sin3x\sim 3x$, при $x\to 0$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3-\sqrt{2x+9}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{3-\sqrt{2x+9}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3x\left(3+\sqrt{2x+9}\right)}{\left(3-\sqrt{2x+9}\right)\left(3+\sqrt{2x+9}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{3x(3+\sqrt{2x+9})}{9-2x-9}=$$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{3x(3+\sqrt{2x+9})}{2x}=-\frac{3}{2}\lim_{x\to0}\left(3+\sqrt{2x+9}\right)=-9;$$

д) Учитывая, что $cos\alpha-cos\beta=-2sin\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, $tg^2 2x\sim(2x)^2=4x^2$, при $x\to0$ имеем:

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos 3x-\cos x}{tg^2 2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{-2sin\frac{4x}{2}sin\frac{2x}{2}}{4x^2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{sin2xsinx}{x^2}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{2x\cdot x}{x^2}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{2x^2}{x^2}=-1;$$

е) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-cos2x+tg^2x}{xsinx}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{2sin^2x+tg^2x}{xsinx}=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2sin^2x+\dfrac{sin^2x}{cos^2x}}{xsinx}=\lim_{x\to0}\frac{sin^2x(2cos^2x+1)}{cos^2x\cdot xsinx}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2(2cos^2x+1)}{x^2cos^2x}=\lim_{x\to0}\frac{2cos^2x+1}{cos^2x}=3;$$

ё) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+sinx-cos2x}{sin^2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{sin^2x+cos^2x+sinx-cos^2x+sin^2x}{sin^2x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2sin^2x+sinx}{sin^2x}=\lim_{x\to0}\left(2+\frac{1}{sinx}\right)=\infty.$$

Пример 1.17. Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to1}\frac{sin(x-1)}{x^2-3x+2}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot ctg2x$; **в)** $\lim\limits_{x\to1}\frac{sin\pi x}{sin3\pi x}$;

г) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+1}{arcsin(x+1)}$; **д)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{cosx-sinx}{x-\frac{\pi}{4}}$; **е)** $\lim\limits_{\alpha\to\beta}\frac{sin^2\alpha-sin^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}$.

Решение.

а) Подставляем предельное значение, получаем неопределённость $\left[\frac{0}{0}\right]$,поскольку переменная относительно которой вычисляется предел, не стремится к нулю для удобства сделаем подстановку $t=x-1\to0$, предварительно преобразовав выражение под знаком предела имеем:

$$\lim_{x\to1}\frac{sin(x-1)}{x^2-3x+2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x-1\to0}\frac{sin(x-1)}{(x-1)(x-2)}=$$

$$=\begin{vmatrix}t=x-1\to0\\ x=t+1\end{vmatrix}=\lim_{t\to0}\frac{sint}{t(t+1-2)}=\lim_{t\to0}\frac{sint}{t(t-1)}=$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{sint}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{t-1} = -1;$$

б) Так, как под знаком предела неопределённость $[0\cdot\infty]$,с помощью алгебраических преобразований перейдём к пределу вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ и сделаем подстановку $t = x - \frac{\pi}{2} \to 0$ учитывая, что $ctg(\pi+\alpha) = ctg\alpha$, и $tg2t \sim 2t$, при $t \to 0$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)ctg2x = [0\cdot\infty] = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)ctg2x =$$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{tg2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left|\begin{matrix} t = x - \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} + t\end{matrix}\right| = -\lim_{t\to 0}\frac{t}{tg2\left(\frac{\pi}{2}+t\right)} =$$

$$= -\lim_{t\to 0}\frac{t}{tg(\pi+2t)} = \left[\frac{0}{0}\right] = -\lim_{t\to 0}\frac{t}{tg2t} = -\lim_{t\to 0}\frac{t}{2t} = -\frac{1}{2};$$

в) Преобразуем выражение под знаком предела и сделаем подстановку $t = x - 1$ и учитывая, что $sin(\pi+\alpha) = -sin\alpha;\ sin\pi t \sim \pi t, sin3\pi t \sim 3\pi t$,при $t \to 0$ имеем:

$$\lim_{x\to 1}\frac{sin\pi x}{sin3\pi x} = \lim_{x-1\to 0}\frac{sin\pi x}{sin3\pi x} = \left|\begin{matrix} t = x-1 \\ x = t+1\end{matrix}\right| =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{sin\pi(t+1)}{sin3\pi(t+1)} = \lim_{t\to 0}\frac{sin(\pi t+\pi)}{sin(3\pi t+3\pi)} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{-sin\pi t}{-sin3\pi t} = \lim_{t\to 0}\frac{sin\pi t}{sin3\pi t} = \lim_{t\to 0}\frac{\pi t}{3\pi t} = \frac{1}{3};$$

г) Преобразуем выражение под знаком предела и сделаем подстановку $t = x + 1$ и учитывая, что $arcsint \sim t, t \to 0$,и $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ имеем:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{arcsin(x+1)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x+1\to 0}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{arcsin(x+1)} =$$

$$= \left|\begin{matrix} t = x+1 \to 0 \\ x = t-1\end{matrix}\right| = \lim_{t\to 0}\frac{t((t-1)^2-(t-1)+1)}{arcsint} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t((t-1)^2-(t-1)+1)}{t} = \lim_{t\to 0}((t-1)^2-(t-1)+1) = 3;$$

д) Сделаем подстановку $t = x - \frac{\pi}{4}$ и учитывая, что

$cos(\alpha+\beta) = cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta,$
$sin(\alpha+\beta) = sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta$, имеем:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{cosx-sinx}{x-\frac{\pi}{4}}=\left|\begin{matrix}t=x-\frac{\pi}{4}\\ x=t+\frac{\pi}{4}\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{costcos\frac{\pi}{4}-sintsin\frac{\pi}{4}-(sintcos\frac{\pi}{4}+costsin\frac{\pi}{4})}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(cost-sint-sint-cost)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(-2sint)}{t}=$$

$$=-\sqrt{2}\lim_{t\to 0}\frac{sint}{t}=-\sqrt{2};$$

е) Преобразуем выражение под знаком предела и сделаем подстановку $t=\alpha-\beta$ и учитывая, что $sin\alpha-sin\beta=2sin\frac{\alpha-\beta}{2}cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, $sin\alpha+sin\beta=2sin\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, а $sin\frac{t}{2}\sim\frac{t}{2}$, при $t\to 0$имеем:

$$\lim_{\alpha\to\beta}\frac{sin^2\alpha-sin^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{\alpha-\beta\to 0}\frac{(sin\alpha-sin\beta)(sin\alpha+sin\beta)}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}=$$

$$=\lim_{\alpha-\beta\to 0}\frac{2sin\frac{\alpha-\beta}{2}cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot 2sin\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}=$$

$$=\left|\begin{matrix}t=\alpha-\beta\to 0\\ \alpha=t+\beta\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{2sin\frac{t}{2}cos\frac{t+2\beta}{2}\cdot 2sin\frac{t+2\beta}{2}cos\frac{t}{2}}{t(t+2\beta)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2tcos\frac{t+2\beta}{2}sin\frac{t+2\beta}{2}cos\frac{t}{2}}{t(t+2\beta)}=2\lim_{t\to 0}\frac{cos\frac{t+2\beta}{2}sin\frac{t+2\beta}{2}cos\frac{t}{2}}{t+2\beta}=$$

$$=\frac{2sin\beta cos\beta}{2\beta}=\frac{sin2\beta}{2\beta}.$$

Практическое вычисление пределов по теме: второй замечательный предел и его следствия.

Пример 1.18. Вычислить:

а) $\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{ctg^2x}$;**б)** $\lim_{x\to\infty}x\cdot ln\left(1-\frac{3}{x}\right)$;**в)**$\lim_{x\to 0}\frac{ln(x+4)-ln\,4}{x}$;

г) $\lim_{x\to 0}\frac{sin^2 3x}{ln^2(1+2x)}$;**д)** $\lim_{x\to 0}\frac{ln(cos\,x)}{ln(1+x^2)}$; **е)**$\lim_{n\to\infty}\frac{sin^2\left(\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right)}{ln\left(\frac{n+10}{n}\right)}$.

Решение.

а) Учитывая, что $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=[1^\infty]=e$ и $sin^2x\sim x^2$,при $x\to 0$, имеем:

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{ctg^2x}=[1^\infty]=\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{cos^2x}{sin^2x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{cos^2x}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left[(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\right]^{cos^2x}=$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0} cos^2 x} = e^1 = e;$$

б) Учитывая, что $ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}$,при $x \to \infty$ имеем:

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot ln\left(1-\frac{3}{x}\right) = [\infty \cdot 0] = \lim_{x\to\infty} \frac{ln\left(1+\left(-\frac{3}{x}\right)\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}} = -3;$$

в)$\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(x+4)-ln\,4}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{ln\left(\frac{x+4}{4}\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{ln\left(\frac{x}{4}+1\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{x}{4}}{x} = \frac{1}{4};$

г) Так как $ln^2(1+2x) \sim (2x)^2$,
$sin^2 3x \sim (3x)^2$ при $x \to 0$,имеем:
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin^2 3x}{ln^2(1+2x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(3x)^2}{(2x)^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{9x^2}{4x^2} = \frac{9}{4};$
д) Так как $ln(1+(cosx-1)) \sim cosx - 1$,
$ln(1+x^2) \sim x^2$, при $x \to 0$;

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(cos\,x)}{ln(1+x^2)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{ln(1+(cosx-1))}{ln(1+x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{cos\,x-1}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = -\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x^2} = -\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2};$$

е) Для начала избавимся от неопределённости $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ в аргументах синуса и логарифма, для этого вынесем старшие степени:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 0;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+10}{n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{10}{n}\right) = 1;$$

Таким образом, мы имеем дело с неопределённостью$\left[\frac{0}{0}\right]$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{sin^2\left(\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right)}{ln\left(\frac{n+10}{n}\right)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)}{ln\left(1+\frac{10}{n}\right)};$$

Так как

$sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right) \sim \left(\frac{1}{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^2$, при $n \to \infty$;

$ln\left(1+\frac{10}{n}\right) \sim \frac{10}{n}$,при $n \to \infty$ имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)}{ln\left(1+\frac{10}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^2}{\frac{10}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}}{\frac{10}{n}} =$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\cdot 10}=\frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{1}{10}.$$

Задания для самостоятельного решения.
2.Вычислить пределы от тригонометрических функций:

1.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin^2(3x)}{sin^2(2x)}$	**16.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,x-sinx}{x^3}$
2.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2}$	**17.**	$\lim\limits_{x\to \pi}\frac{1-sin\,\frac{x}{2}}{\pi-x}$
3.	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{sin\,(6\pi x)}{sin\,(\pi x)}$	**18.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos\,3x}{x^2}$
4.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{sin\;5x}$	**19.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^2\frac{x}{2}}{1-cosx}$
5.	$\lim\limits_{x\to 0}x\cdot ctgx$	**20.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos2x}{1-cos3x}$
6.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{cos5x-cos\;3x}{x^2}$	**21.**	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{sin\pi x}{sin5\pi x}$
7.	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{sin\;2x}{tg4x}$	**22.**	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{tg(x^2-9)}{x^3+2x^2-9x-18}$
8.	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{sin(x-3)}{x^2-4x+3}$	**23.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+5x}{ctgx(1-cos^2 4x)}$
9.	$\lim\limits_{x\to \pi}\frac{sinx}{\pi^2-x^2}$	**24.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{cos\,x-cos3\,x}{x^2}$
10.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2si\,n\,x-sin2x}{4x^2tgx}$	**25.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2-5x}{sin3x}$
11.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\,tg\,x-sin2x}{\sqrt{x+1}-1}$	**26.**	$\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{arcsin\,(1-2x)}{4x^2-1}$

12.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg4x}{sinx}$	**27.**	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sqrt{3}-2cosx}{cos3x}$
13.	$\lim\limits_{x\to 0}x\cdot ctg5x$	**28.**	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{sin2x-cos2x-1}{sinx-cosx}$
14.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{1-cosx}$	**29.**	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-sin2x}{x+sin3x}$
15.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{1-cos2x}$	**30.**	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin(x^3+2x)}{2x-x^4}$

Ответы:

2.1.2,25.**2.2.** 0,5.**2.3.**-6.**2.4.** 0,4.**2.5.**1. **2.6.** -8.**2.7.** – 0,5.**2.8.** $\frac{1}{2}$.**2.9.** $\frac{1}{2\pi}$.**2.10.** $\frac{1}{4}$.**2.11.**0.**2.12.**4 .**2.13.** $\frac{1}{5}$. **2.14.10** .**2.15.** ∞ .**2.16.** $\frac{1}{2}$. **2.17.**.0.**2.18.**$\frac{9}{2}$.**2.19.**$\frac{1}{2}$.**2.20.**$\frac{4}{9}$.**2.21.**$\frac{1}{5}$.**2.22.**$\frac{1}{5}$.**2.23.**$\frac{5}{16}$.**2.24.**4.**2.25.**$-\frac{5}{3}$. **2.26.**- $\frac{1}{2}$.**2.27.** $-\frac{1}{3}$. **2.28.** $\sqrt{2}$.**2.29.** $-\frac{1}{4}$.**2.30.**1.

3. Вычислить пределы:

1.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x$	**16.**	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+1}{3x^2-2}\right)^{5x^2+1}$
2.	$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+5x}$	**17.**	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+2}{3n-1}\right)^{2n+1}$
3.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5-x}{6-x}\right)^{x+2}$	**18.**	$\lim\limits_{x\to 0}(1-sin3x)^{ctg2x}$
4.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2-2}\right)^{x^2}$	**19.**	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{ln(3-x)}{x-2}$
5.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+8}{x-2}\right)^x$	**20.**	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{ln(1-x)}$

6.	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n-1}$	**21.**	$\lim\limits_{x\to\infty}x[ln(x+1)-lnx]$
7.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$	**22.**	$\lim\limits_{x\to\infty}(4x+9)ln\left(\frac{3x-5}{3x+2}\right)$
8.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x}\right)^{4x-1}$	**23.**	$\lim\limits_{x\to 0}(1-2x^3)^{\frac{1}{x^3}}$
9.	$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$	**24.**	$\lim\limits_{x\to 0}(cosx)^{\frac{1}{x^2}}$
10.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{7^x-1}{4^x-1}$	**25.**	$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+tg\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}$
11.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^x}{x}$	**26.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(x+a)-ln\,a}{x}$
12.	$\lim\limits_{x\to 0}(1+sin2x)^{\frac{1}{x}}$	**27.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+x^2)}{tg^2 8x}$
13.	$\lim\limits_{x\to 0}(1+tgx)^{ctgx}$	**28.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(e^x-1)}{1-cosx}$
14.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin\,4x}{ln(1+3x)}$	**29.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{ln(1-4x)}$
15.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{sin5x}-e^{sinx}}{ln(1+2x)}$	**30.**	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin^2 5x}{xln(1+x)}$

Ответы:

3.1. e^5.**3.2.** e^5.**3.3.** e.**3.4.** e^4. **3.5.** e^{10}**3.6.** $\frac{1}{e^2}$.**3.7.** $\frac{1}{e^2}$.**3.8.** $\frac{1}{e^6}$. **3.9.** $\frac{1}{e}$.**3.10.** $log_4 7$.**3.11.** 1.**3.12.** e^2.**3.13** e. **3.14.** $\frac{4}{3}$.**3.15.**2 .**3.16.** e^5.**3.17.** e^2.**3.18.**$\frac{1}{e\sqrt{e}}$.**3.19.**-1.**3.20.**-1.**3.21.**1.**3.22.**$-\frac{28}{3}$.**3.23.** e^{-2}. **3.24.**$\frac{1}{\sqrt{e}}$.**3.25.**$e^{\frac{3}{2}}$.**3.26.**$\frac{1}{a}$.**3.27.**$\frac{1}{64}$.**3.28.**2. **3.29.** $-\frac{1}{2}$. **3.30.**25.

1.11. Односторонние пределы. Непрерывность функции и точки разрыва.

Если $f(x) \to A_1$ при $x \to x_0$ только при $x < x_0$ (рис.6), то $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ называется пределом функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ слева.
Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$.
Если $f(x) \to A_2$ при $x \to x_0$ только при $x > x_0$ (рис.6), то $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$ называется пределом функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ справа.
Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$.

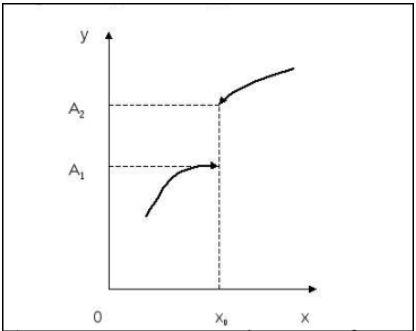


Рис. 6

Таким образом, под односторонним пределом функции подразумевают «приближение» к предельной точке с одной стороны.

Пределы функции слева и справа называются также **односторонними пределами** функции $f(x)$ в точке $x = x_0$.

Непрерывность функции в точке.

Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0, если она определена в некоторой двусторонней окрестности этой точки, включая и саму эту точку, и при этом

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \quad (1.7)$$

Равенство (1.7) равносильно равенству (1.8)

$$f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \quad (1.8)$$

Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной на промежутке**, если она непрерывна во всех точках этого промежутка.

Другими словами, когда мы слышим термин «непрерывная функция», мы представляют себе линию, которую можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги. Примером, может служить график обычной параболы.

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются **точками разрыва функции.**

Все точки разрыва функции разделяются на точки разрыва первого и второго рода.

Точка разрыва x_0 называется **точкой разрыва первого рода** функции $y = f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа (односторонние пределы), то есть $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A_1$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A_2$.

При этом:

1) если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$, то точка x_0 называется **точкой устранимого разрыва**, то есть

функция имеет устранимый разрыв первого рода в точке x_0, когда

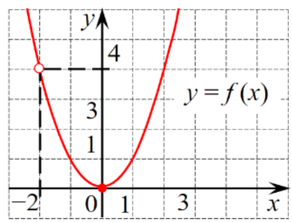


Рис. 7

пределы справа и слева равны, но не равны значению функции в точке x_0. Например, парабола, но с выколотой точкой (рис.7).

Таким образом, функция в точке устранимого разрыва или не определена, или не равна предельному значению.

Замечание: разрыв «устраним» в том смысле, что достаточно изменить (доопределить или переопределить) функцию, и функция станет непрерывной в точке x_0.

2) если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, то точка x_0

называется **точкой конечного разрыва,** то есть функция имеет

неустранимый (конечный) разрыв I рода в точке x_0 , если пределы

справа и слева не являются равными. Величину $|A_1 - A_2|$ называют

скачком функции в точке разрыва I рода.

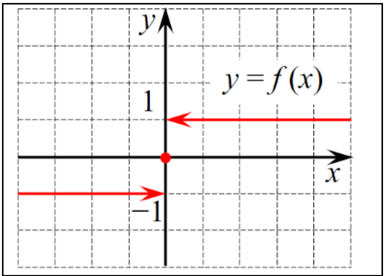


Рис. 8

Например, функция может быть определена на всей числовой прямой — и всё равно иметь точку разрыва (рис.8), в точке $x_0 = 0$ происходит скачкообразное изменение, скачок функции равен 2.

Точка разрыва x_0 называется **точкой разрыва** второго рода

функции $y = f(x)$, если хотя бы

один из односторонних пределов (слева или справа) не существует или равен бесконечности. Например,

классическая гипербола $y = \frac{1}{x}$, которая не определена в точке $x_0 = 0$, а график «уходит» в бесконечность в окрестности этой точки (рис.9).

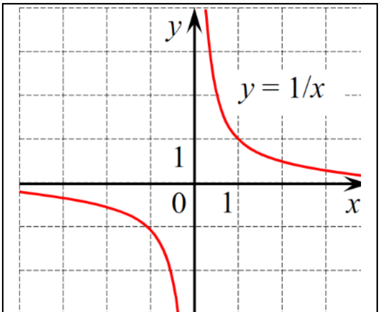


Рис. 9

Таким образом, проблемы с непрерывностью возникают там, где функция «уходит» в бесконечность, либо меняется скачкообразно, либо вообще не определена.

Пример 1.19. Найти точки разрыва функций и исследовать их характер:

а) $f(x)=\begin{cases} x+4, & x\le -1 \\ x^2+2, & -1<x<1 \\ 2x, & x\ge 1 \end{cases}$; **б)** $f(x)=\frac{x^2-5x+4}{x-4}$;

в) $f(x)=e^{\frac{1}{x-1}}$.

Решение.

а) Для наглядности построим график заданной функции (рис.10). По определению функции непрерывной в точке:

$f(x_0)=f(x_0-0)=f(x_0+0)$;

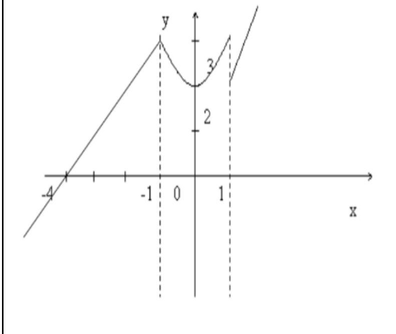


Рис.10

Функция непрерывна всюду, за исключением, возможно, точек $x=\pm 1$, в которых происходит смена значений функции.

Проверим на непрерывность точки $x=\pm 1$-точки предполагаемого разрыва.

1) $x=1$,найдем значение функции в данной точке и односторонние пределы:

$f(1)=2$;

$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}(x^2+2)=3$;

$\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0} 2x=2$;

Таким образом,$f(1-0)\ne f(1+0)$,следовательно, функция имеет конечный разрыв I рода в точке $x=1$.

2) $x=-1$;

$\lim\limits_{x\to -1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to -1-0}(x+4)=3$;

$\lim\limits_{x\to -1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to -1+0}(x^2+2)=3$;

$f(-1)=3$.

Таким образом, $f(-1)=f(-1-0)=f(-1+0)$,следовательно, функция непрерывна в точке $x=-1$.

б) Функция $f(x)=\frac{x^2-5x+4}{x-4}$ не определена в точке $x=4$.

Рассмотрим поведение функции в окрестности точки $x = 4$:

$$\lim_{x\to 4-0} \frac{x^2-5x+4}{x-4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 4-0} \frac{(x-1)\cdot(x-4)}{x-4} =$$
$$= \lim_{x\to 4-0}(x-1) = 3,$$ то есть $f(4-0) = 3$;

$$\lim_{x\to 4+0} \frac{x^2-5x+4}{x-4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 4+0} \frac{(x-1)\cdot(x-4)}{x-4} =$$
$$= \lim_{x\to 4+0}(x-1) = 3,$$ то есть $f(4+0) = 3$;

Таким образом, $f(4-0) = f(4+0) \neq f(4)$, следовательно, $x = 4$-точка разрыва I рода, точка устранимого разрыва.

в) Функция $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$ не определена в точке $x = 1$.

Рассмотрим поведение функции в окрестности точки $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1-0} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{\frac{1}{1-0-1}} = e^{-\frac{1}{0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = 0;$$

$$\lim_{x\to 1+0} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{\frac{1}{1+0-1}} = e^{+\frac{1}{0}} = e^{+\infty} = +\infty;$$

Так как $f(1+0) = +\infty$, следовательно, $x = 1$-точка разрыва II рода.

Пример 1.20. Найти, при каком значении A функция $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+x-1}{x+1}, & x \neq -1 \\ A, & x = -1 \end{cases}$ будет непрерывна?

Решение.

Функция непрерывна всюду, за исключением точки $x = -1$, в которой она не определена.

Рассмотрим поведение функции в окрестности точки $x = -1$: $\lim_{x\to -1-0} \frac{2x^2+x-1}{x+1} = \left[\frac{0}{0}\right]$;

Поскольку, мы имеем дело с неопределённостью $\left[\frac{0}{0}\right]$, то для её раскрытия, раскладываем числитель и знаменатель функции под знаком предела на множители:

$$2x^2 + x - 1 = 0, D = 1 - 4\cdot 2\cdot(-1) = 9;$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm 3}{4};$$

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -1;$$

$$2x^2 + x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\cdot(x+1) = (2x-1)\cdot(x+1);$$

$$\lim_{x\to -1-0} \frac{2x^2+x-1}{x+1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to -1-0} \frac{(2x-1)\cdot(x+1)}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to -1-0}(2x-1) = -3,$$ то есть $f(-1-0) = -3$;

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{2x^2+x-1}{x+1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to -1+0}\frac{(2x-1)\cdot(x+1)}{x+1} =$$

$= \lim_{x\to -1+0}(2x-1) = -3$, то есть $f(-1+0) = -3$.

Для того, чтобы функция была непрерывна необходимо, чтобы $f(x_0) = f(x_0-0) = f(x_0+0)$;

В нашем случае, $f(-1-0) = f(-1+0) = f(-1)$, следовательно, $A = -3$.

Таким образом, при $A = -3$ функция непрерывна и имеет вид: $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+x-1}{x+1}, & x \neq -1 \\ -3, & x = -1 \end{cases}$.

Пример 1.21. Найти, при каком значении A, B функция

$$f(x) = \begin{cases} ln(x^2+1), & x \le 0 \\ Asinx + B, & 0 < x \le \frac{\pi}{2} \\ -2, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$ непрерывна.

Решение.

Функция непрерывна при $x < 0$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $x > \frac{\pi}{2}$.

Исследуем точки $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2}$.

1) $x = 0$,

$\lim_{x\to 0-0} ln(x^2+1) = 0$;

$\lim_{x\to 0+0}(Asinx + B) = B$;

$f(0) = ln(0^2+1) = 0$, для того, чтобы исходная функции была непрерывности в точке $x = 0$ должно выполняться равенство:

$f(0) = f(0-0) = f(0+0)$, следовательно, условие непрерывности функции в точке $x = 0$ имеет вид: $\underline{B = 0.}$

2) $x = \frac{\pi}{2}$,

$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0}(Asinx + B) = Asin\frac{\pi}{2} + B = A + B$;

$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0}(-2) = -2$;

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = Asin\frac{\pi}{2} + B = A + B$;

Для того, чтобы исходная функции была непрерывна в точке $x = \frac{\pi}{2}$ должно выполняться равенство

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = f\left(\frac{\pi}{2} + 0\right)$, следовательно, условие непрерывности функции в точке $x = \frac{\pi}{2}$ имеет вид: $\underline{A + B = -2.}$

Получаем следующую систему: $\begin{cases} A + B = -2 \\ B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 0 \end{cases}.$

Таким образом, искомая функция имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} ln(x^2 + 1), & x \le 0 \\ -2sinx, & 0 < x \le \frac{\pi}{2}. \\ -2, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Задания для самостоятельного решения.

4.Найти точки разрыва функций и исследовать их характер (1)-(10); найти, при каком выборе параметров функция $f(x)$ будет непрерывной (12)-(15).

1.	$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$
2.	$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^2 - 2x, & 0 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$
3.	$f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$
4.	$f(x) = \frac{sinx}{x}$
5.	$f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$
6.	$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$
7.	$f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}$
8.	$f(x) = 3^{x+\frac{1}{x}}$
9.	$f(x) = 3^{x-\frac{1}{x^2}}$
10.	$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 + x - 2}$

11.	$f(x)=\begin{cases} cosx, & x\le 0\\ x^2+1, & 0<x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$
12.	$f(x)=\begin{cases} -2sinx, & x\le -\frac{\pi}{2}\\ Asinx+B, & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ cosx, & x\ge \frac{\pi}{2}\end{cases}$
13.	$f(x)=\begin{cases} Ax, & x\epsilon[-1;2]\\ \frac{6}{x}, & x\epsilon(2;+\infty)\end{cases}$
14.	$f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 1\\ Ax^2-2, & x>1\end{cases}$
15.	$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1}, & x\ne 1\\ A, & x=1\end{cases}$

Ответы:

4.1. $x=1$ - точка разрыва II рода. **4.2.** $x=2$ -точка разрыва I рода, точка конечного разрыва. **4.3.** $x=0, x=1$ - точки разрыва II рода . **4.4.** $x=0$-точка разрыва I рода, точка устранимого разрыва. **4.5.** $x=0$ -точка разрыва I рода, точка конечного разрыва. **4.6.** $x=0$ -точка разрыва I рода, точка устранимого разрыва. **4.7.** $x=-1$ - точка разрыва II рода. **4.8.** $x=0$ - точка разрыва II рода. **4.9.** $x=0$-точка разрыва I рода, точка устранимого разрыва. **4.10.** $x=1$-точка разрыва I рода, точка устранимого разрыва; $x=-2$ - точка разрыва II рода. **4.11.** $x=1$ -точка разрыва I рода, точка конечного разрыва. **4.12.** $A=-1, B=1$. **4.13.** $A=1{,}5$. **4.14.** $A=2$. **4.15.** $A=3$.

ГЛАВА 2. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ.

В дифференциальном исчислении изучаются понятия производной и дифференциала, и способы их применения к исследованию функций. Понятие производной широко используется при решении целого ряда задач физики, математики и других наук, в особенности при изучении скорости разных процессов.

2.1. Определение производной, её геометрический и физический смысл. Уравнение касательной и нормали к графику функции.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется конечный предел отношения приращения функции $\triangle y$ к приращению аргумента $\triangle x$, при условии, что приращение аргумента стремится к нулю (рис.11), то есть

$$f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} \quad (2.1)$$

Обозначение: $f'(x)$

Наряду с обозначением $f'(x)$ для производной употребляются и другие обозначения, например, $y', y'_x, \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}$.

Процесс нахождения производной будем называть **дифференцированием.**

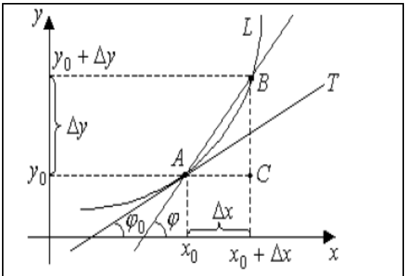


Рис. 11

Геометрический смысл производной.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, которая определена и непрерывна на некотором интервале, зафиксируем точку $A(x_0; f(x_0))$ (рис.11).

Зададим аргументу x функции $f(x)$ приращение $\triangle x$ в точке x_0, то есть $x_0 + \triangle x$, получим точку $B(x_0 + \triangle x; f(x_0 + \triangle x))$.

Приращение аргумента $\triangle x$ повлекло за собой приращение функции:

$\triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)$, $\triangle y > 0$ (функция, возрастающая на данном промежутке). Через точки A, B проведём секущую AB, угол наклона секущей к оси Ox обозначим через φ:

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC и угол $\varphi =< BAC$, $tg\ \varphi = \frac{BC}{AC} = \frac{\triangle y}{\triangle x}$.

Если $\triangle x \to 0$ (медленно двигаемся к точке x_0, уменьшая приращение $\triangle x$,при этом$\triangle y \to 0$)точка B будет приближаться к точке A, в результате секущая AB будет стремится занять положение касательной AT , угол наклона φ секущей AB будет стремиться к углу наклона касательной φ_0,следовательно $\lim\limits_{\triangle x \to 0} tg\varphi = tg\varphi_0$.

Таким образом,

$$f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} tg\varphi = tg\varphi_0 = k.$$

Итак, **производная функции $f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в точке с абсциссой x_0**,то есть

$$\boldsymbol{f'(x_0) = tg\varphi_0 = k\ (2.2)}$$

Равенство (2.2) отражает геометрический смысл производной.

Уравнение касательной и нормали к графику функции.

Напишем уравнение касательной к графику функции. Если точка касания M имеет координаты $M(x_0; y_0)$ (рис.12), то угловой коэффициент касательной равен$k = tg\alpha = f'(x_0)$.

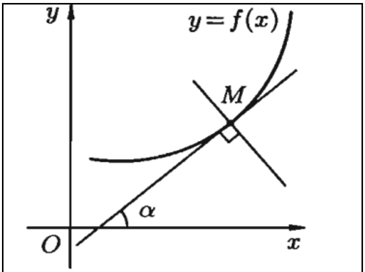


Рис.12

Используя уравнением прямой, проходящей через заданную точку $M(x_0; y_0)$ с угловым коэффициентом k($y - y_0 = k(x - x_0)$), можно записать уравнение касательной:

$$\boldsymbol{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)} \ \mathbf{(2.3)}$$

Напишем уравнение нормали:

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется **нормалью** графика.

Так как нормаль перпендикулярна касательной, то ее угловой коэффициент имеет вид:

$$k_{\text{кас.}} \cdot k_{\text{норм.}} = -1;$$

$$k_{\text{норм.}} = -\frac{1}{k_{\text{кас.}}} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Поэтому уравнение нормали имеет вид (2.4):

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)\quad(2.4)$$

Пример 2.1. Исходя из определения, найти производную функции $f(x)=x^2$.

Решение.

Функция $y=x^2$определена и непрерывна в любой точке числовой прямой.

Придадим аргументу функции в точке x_0 приращение $\triangle x$. Тогда соответствующее приращение величины y имеет вид:

$\triangle y=f(x_0+\triangle x)-f(x_0)=(x_0+\triangle x)^2-x_0^2=$

$=x_0^2+2x_0\triangle x+\triangle x^2-x_0^2=2x_0\triangle x+\triangle x^2$,

то есть $\triangle y=2x_0\triangle x+\triangle x^2$,разделив обе части полученного равенства на$\triangle x$ и переходя к пределу при$\triangle x\to 0$,учитывая, что$f'(x_0)=\lim\limits_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}$ имеем:

$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{2x_0\triangle x+\triangle x^2}{\triangle x}=2x_0+\triangle x,$

$\lim\limits_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=\lim\limits_{\triangle x\to 0}(2x_0+\triangle x)=2x_0,$

$f'(x_0)=2x_0.$

Таким образом, $f'(x)=2x.$

Пример 2.2. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=x^2$ в точке с абсциссой $x_0=1.$

Решение.

Чтобы справиться с поставленной задачей, найдём значение исходной функции и её производной в точке $x_0=1$:

$y(1)=1^2=1;$

$y'=(x^2)'=2x;$

$y'(1)=2\cdot 1=2;$

Уравнение касательной имеет вид:

$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$, или, что то же самое

$y=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0);$

В нашем случая, имеем:

$y=1+2(x-1);$

$y=2x-1$ или $2x-y-1=0$- уравнение касательной к кривой $y=x^2$ в точке с абсциссой $x_0=1.$

Уравнение нормали имеет вид:

$y=f(x_0)-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$, или, что то же самое

$$y = y(x_0) - \frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0);$$

$$y = 1 - \frac{1}{2}(x-1)|\cdot 2;$$

$$2y = 2 - (x-1);$$

$2y = 3 - x$ или $x + 2y - 3 = 0$- уравнение нормали к кривой $y = x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Физический смысл производной.

Рассмотрим задачу о скорости движения. Пусть точка движется вдоль прямой и известна зависимость $s = s(t)$ пройденного пути от времени t (рис. 13).

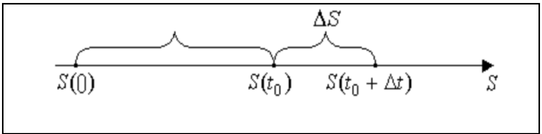


Рис. 13

Средняя скорость движения на интервале времени$[t_0;\ t_0 + \triangle t]$, равна отношению пройденного за это время пути $\triangle s$ к промежутку времени $\triangle t$:

$V_{cp.} = \frac{\triangle s}{\triangle t}$.

Чем меньше $\triangle t$, тем лучше средняя скорость характеризует движение. Мгновенной скоростью в момент времени t_0 называется предел средней скорости за промежуток от t_0 до $t_0 + \triangle t$ при $\triangle t \to 0$:

$$v(t_0) = \lim_{\triangle t \to 0} v_{cp.} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle s}{\triangle t} = s'(t)(2.5)$$

Учитывая, что $\triangle s = s(t_0 + \triangle t) - s(t_0)$ равенство (2.5) можно записать в виде (2.6):

$$v(t_0) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{s(t_0 + \triangle t) - s(t_0)}{\triangle t} \quad (2.6)$$

Таким образом, скорость движения точки в момент времени t_0 – это предел отношения приращения пути $\triangle s$ (функции) к приращению времени$\triangle t$ (аргумента), при стремлении приращения времени $\triangle t$ (аргумента) к нулю.

То есть, первая производная функции — это мгновенная скорость изменения любого процесса.

Замечание: выше было установлено, что если точка движется прямолинейно по закону $s = s(t)$, (где s – путь, t – вре-

мя), то $s'(t_0)$ – скорость изменения пути в момент времени t_0. Следовательно,
$s''(t_0) = \left(s'(t_0)\right)' = \left(v(t_0)\right)'$– скорость изменения скорости или ускорение точки в момент времени t_0.

Пример 2.3. Найти скорость движения точки в момент времени $t = 3$ при прямолинейном движении точки $S = t^2$.

Решение.

Исходя из физического смысла производной понимаем, что скорость движения точки в момент времени t равна производной от пути, то есть вычисляется по формуле:

$V(t) = S'(t) = (t^2)' = 2t.$

При $t = 3$ имеем: $V(3) = 2 \cdot 3 = 6.$

2.2. Дифференцируемость функции. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции.

Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0 , то есть если существует предел (2.1), то будем говорить, что функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0.

Теорема 2.1. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в ней.

Доказательство

Пусть функция $y = f(x)$дифференцируема в некоторой точке x. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.Отсюда, по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции (если функция имеет предел, то разность между функцией и значением предела этой функции есть функция бесконечно малая), имеем:

если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$,то$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \alpha$, то есть,

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$,где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Умножив обе части полученного равенства на Δx и переходя к пределу в обеих частях равенства, при$\Delta x \to 0$ получим:

$\Delta y = f'(x) \Delta x + \alpha \Delta x,$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f'(x) \Delta x + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha \Delta x = 0.$

Таким образом, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. А это и означает, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x.

Замечание: обратная теорема неверна, то есть непрерывная функция может и не иметь производной в точке. Дифференцируемость сильнее свойства непрерывности. Рассмотрим эту ситуацию на примере 2.4.

Пример 2.4. Существует ли производная в точке $x_0 = 0$ для функции $y = |x|$, при $x \epsilon (-1; 1)$.

Решение.

Хорошо известно, что данная функция $y = |x| = \begin{cases} -x, x < 0 \\ x, \ x \geq 0 \end{cases}$ (рис.14) является непрерывной в точке $x_0 = 0, \lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$.

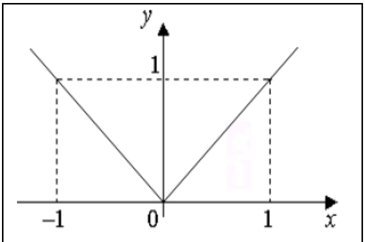


Рис. 14

Вычислим левый и правый односторонний пределы данной функции при $x \to x_0, x_0 = 0$:

$$\lim_{x\to 0-0} y = \lim_{x\to 0-0} (-x) = 0,$$
$$\lim_{x\to 0+0} y = \lim_{x\to 0+0} x = 0.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0+0} y = \lim\limits_{x\to 0-0} y = 0$, убеждаемся, что функция $y = |x|$ непрерывна в точке $x_0 = 0$.

Покажем, что в точке $x_0 = 0$ производная не существует:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, & \Delta x > 0 \\ -\frac{\Delta x}{\Delta x} = -1, & \Delta x < 0 \end{cases};$$

Предел слева и справа различны, поэтому $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ не существует, следовательно производная функции $y = |x|$ в точке $x_0 = 0$ не существует.

2.3. Основные правила дифференцирования.

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции, тогда справедливы следующие утверждения:

1) Производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных, то есть

$$(\boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}' \pm \boldsymbol{u}';$$

Замечание: данное правило справедливо для любого конечного числа слагаемых, то есть $(u_1 \pm u_2 \pm \ldots \pm u_n)' = u_1{}' \pm u_2{}' \pm \ldots \pm u_n{}'$

2)Производная произведения двух функций равна произведению первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго, то есть

$$(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{u};$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак производной, то есть $(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{u})' = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{u}'$.

Действительно, если $y = C \cdot u(x)$,где $C = const$,то учитывая, что $(C)' = 0$ и правило дифференцирования произведения функций имеем:

$$(C \cdot u)' = (C)' \cdot u(x) + C \cdot u'(x) = C \cdot u'(x);$$

3)Производная частного двух функций $\frac{u(x)}{v(x)}$, если $v(x) \neq 0$ равна дроби, числитель которой есть разность произведений знаменателя дроби на производную числителя и числителя дроби на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат исходного знаменателя, то есть

$$\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}\right)' = \frac{\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}^2}, \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0};$$

Все эти правила вытекают из определения производной. Докажем, например, первое и второе утверждение.

Обозначим через $\triangle u, \triangle v$ приращение функции $u(x)$ и $v(x)$ при переходе от точки x к близкой точке $x + \triangle x$.

1) $(u + v)' = u' + v'$;

Если $y = u + v$,то значению x соответствует значение $y(x) = u(x) + v(x)$, а значению $x + \triangle x$ соответствует значение $y(x + \triangle x) = u(x + \triangle x) + v(x + \triangle x)$, тогда

$$\triangle y = y(x + \triangle x) - y(x) = u(x + \triangle x) + v(x + \triangle x) - \\ -\big(u(x) + v(x)\big) = [u(x + \triangle x) - u(x)] + \\ +[v(x + \triangle x) - v(x)] = \triangle u + \triangle v.$$

Следовательно,

$$(u + v)' = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle u + \triangle v}{\triangle x} = \\ = \lim_{\triangle x \to 0} \left(\frac{\triangle u}{\triangle x} + \frac{\triangle v}{\triangle x}\right) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle u}{\triangle x} + \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle v}{\triangle x} = u' + v'.$$

2)$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$;

$y(x) = u(x) \cdot v(x)$,

$y(x + \triangle x) = u(x + \triangle x) \cdot v(x + \triangle x)$,тогда

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u(x)+\Delta u)\cdot(v(x)+\Delta v) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot\Delta v + \Delta u v(x) + \Delta u\cdot\Delta v - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(v(x)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x)\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) =$$
$$= v(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\Delta v\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} =$$
$$= u'(x)\cdot v(x) + v'(x)\cdot u(x) + 0\cdot u'(x) = u'\cdot v + v'\cdot u.$$

Аналогично доказываются остальные утверждения.

2.4. Производная обратной функции.

Теорема 2.2. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна (возрастает или убывает) на некотором множестве X. Если функция $y = f(x)$ имеет в точке $x \in X$ отличную от нуля производную $f'(x) \neq 0$, то и обратная ей функция $x = x(y)$ имеет в соответствующей точке y производную $x'(y)$, причем:

$$\boldsymbol{y'_x = \frac{1}{x'_y}} \quad \textbf{(2.7)}$$

Доказательство.

Так как функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна, то обратная ей функция $x = x(y)$ непрерывна и строго монотонна. Дадим переменной y приращение Δy. Соответствующее приращение Δx обратной функции также не равно нулю вследствие строгой монотонности и $\Delta x \to 0$ при $\Delta y \to 0$.

вследствие чего, имеем:

$$x'(y) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'(x)}, y'(x) \neq 0,$$

то есть $y'(x) = \frac{1}{x'(y)}$.

Данную формулу можно записать в виде $y'_x = \frac{1}{x'_y}$.

Пример 2.5. Пользуясь правилом дифференцирования обратной функции, показать, что:

а) $(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; **б)** $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Решение.

а) Разрешим данное равенство $y = arcsinx$ относительно x: функция $x = siny$, где $y \epsilon \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$-является обратной функцией для функции $y = arcsinx$.

По теореме о производной обратной функции имеем:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(siny)'_y} = \frac{1}{cosy} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-sin^2y}};$$

Так как, $cosy > 0$,при $y\epsilon\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$,получим:

$$y'_x = \frac{1}{\sqrt{1-sin^2y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

Таким образом,$(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Аналогично доказывается, что$(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

б) Разрешим данное равенство $y = arctgx$ относительно x: функция $x = tgy$,где $y\epsilon\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$-является обратной функцией для функции $y = arctgx$.

По теореме о производной обратной функции имеем:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(tgy)'_y} = \frac{1}{\frac{1}{cos^2y}} = cos^2y = \frac{1}{1+tg^2y} = \frac{1}{1+x^2};$$

Таким образом,$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Аналогично доказывается, что $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Пример 2.6. Пользуясь правилом дифференцирования обратной функции, найти производнуюy'_x для функции $y = \sqrt[3]{x-1}$.

Решение.

Разрешим данное равенство относительно x:

$y^3 = \left(\sqrt[3]{x-1}\right)^3$;

$y^3 = x-1$;

$x = y^3+1$;

По теореме о производной обратной функции имеем:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(y^3+1)'_y} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2}.$$

2.5. Производные элементарных функций.

Запишем производные основных элементарных функций в таблицу.

Таблица основных элементарных функций.

1.	$(C)' = 0$
2.	$(x^n)' = nx^{n-1}$

3.	$(a^x)' = a^x \ln a, a > 0$
4.	$(e^x)' = e^x$
5.	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1, x > 0$
6.	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, x > 0$
7.	$(\sin x)' = \cos x$
8.	$(\cos x)' = -\sin x$
9.	$(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
10.	$(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}$
11.	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12.	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13.	$(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
14.	$(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Используя определение производной, найдем производные некоторых элементарных функций из таблицы, например,1),6),7).

1)$(C)' = 0$.

Значениям аргументов x_0 и $x_0 + \triangle x$ соответствует одно и то же значение функции $y = C$.Поэтому

$$y' = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} \lim_{\triangle x \to 0} \frac{C - C}{\triangle x} = 0.$$

6) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Покажем, что $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.Значениям аргументов x_0 и $x_0 + \triangle x$ соответствуют значение функции $y(x_0) = \ln x_0$, $y(x_0 + \triangle x) = \ln(x_0 + \triangle x)$, следовательно,

$$\triangle y = y(x_0 + \triangle x) - y(x_0) = \ln(x_0 + \triangle x) - \ln(x_0) =$$

$$= \ln \frac{x_0 + \triangle x}{x_0} = \ln\left(1 + \frac{\triangle x}{x_0}\right);$$

$$y' = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{ln\left(1 + \frac{\triangle x}{x_0}\right)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{1}{\triangle x} ln\left(1 + \frac{\triangle x}{x_0}\right) =$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} ln\left(1 + \frac{\triangle x}{x_0}\right)^{\frac{1}{\triangle x}} = ln \lim_{\triangle x \to 0} \left[\left(1 + \frac{\triangle x}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{\triangle x}}\right]^{\frac{1}{x_0}} =$$

$= lne^{\frac{1}{x_0}} = \frac{1}{x_0} lne = \frac{1}{x_0}$, то есть $(lnx)' = \frac{1}{x}$.

7) $(sinx)' = cosx.$

Так как $y(x) = sinx$,то значениям аргументов x_0 и $x_0 + \triangle x$ соответствуют значение функций $y(x_0) = sinx_0$ и $y(x_0 + \triangle x) = sin(x_0 + \triangle x)$, соответственно, учитывая, что $sin\alpha - sin\beta = 2sin\frac{\alpha-\beta}{2} cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ имеем:

$$\triangle y = y(x_0 + \triangle x) - y(x_0) = sin(x_0 + \triangle x) - sin(x_0) =$$

$$= 2sin\left(\frac{x_0 + \triangle x - x_0}{2}\right) cos\left(\frac{x_0 + \triangle x + x_0}{2}\right) =$$

$$= 2sin\left(\frac{\triangle x}{2}\right) cos\left(x_0 + \frac{\triangle x}{2}\right);$$

$$y' = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{2sin\left(\frac{\triangle x}{2}\right) cos\left(x_0 + \frac{\triangle x}{2}\right)}{\triangle x} =$$

$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{sin\left(\frac{\triangle x}{2}\right)}{\frac{\triangle x}{2}} \cdot \lim_{\triangle x \to 0} cos\left(x_0 + \frac{\triangle x}{2}\right) = cos(x_0)$, то есть

$(sinx)' = cosx$.

Пример 2.7. Доказать, что $(ctgx)' = -\frac{1}{sin^2 x}$ и $(tgx)' = \frac{1}{cos^2 x}$.

Решение.

$$(ctgx)' = \left(\frac{cosx}{sinx}\right)' = \frac{(cosx)'sinx - (sinx)'cosx}{sin^2 x} =$$

$$= \frac{-sinxsinx - cosxcosx}{sin^2 x} = -\frac{sin^2 x + cos^2 x}{sin^2 x} = -\frac{1}{sin^2 x};$$

$$(tgx)' = \left(\frac{sinx}{cosx}\right)' = \frac{(sinx)'cosx - (cosx)'sinx}{cos^2 x} =$$

$$= \frac{cosxcosx - (-sinx)sinx}{cos^2 x} = \frac{sin^2 x + cos^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x}.$$

Пример 2.8. Доказать, что $(log_a x)' = \frac{1}{xlna}$.

Решение.

Переходя к новому основанию по формуле $log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$ и учитывая, что $(lnx)' = \frac{1}{x}, x > 0$ имеем:

$$(log_a x)' = \left(\frac{log_e x}{log_e a}\right)' = \left(\frac{lnx}{lna}\right)' = \frac{1}{lna}(lnx)' = \frac{1}{xlna}.$$

Пример 2.9. Найти производную функции:

а) $y = \frac{1}{x^2} + \sqrt[3]{x^2}$; **б)** $y = \frac{1+x+3x^2}{x}$; **в)** $y = x^4 \cdot lnx$; **г)** $y = \frac{5-x^2}{e^x}$;

д) $y = sinx - \frac{x+1}{x-1}$.

Решение.

а) Функция представляет собой сумму функций, следовательно,

$$y' = \left(\frac{1}{x^2} + \sqrt[3]{x^2}\right)' = (x^{-2})' + \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = -2x^{-3} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} =$$
$$= -\frac{2}{x^3} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}};$$

б) Для упрощения решения преобразуем исходную функцию:

$$y = \frac{1 + x + 3x^2}{x} = \frac{1}{x} + 1 + 3x;$$

Найдём производную:

$$y' = \left(\frac{1}{x} + 1 + 3x\right)' = (x^{-1})' + (1)' + 3(x)' = -x^{-2} + 3 =$$
$$= 3 - \frac{1}{x^2};$$

в) Функция под знаком производной представляет собой произведение двух элементарных функций, поэтому применяя формулу производной произведения имеем:

$$y' = (x^4 \cdot lnx)' = (x^4)' \cdot lnx + x^4 \cdot (lnx)' = 4x^3 \cdot lnx +$$
$$+x^4 \cdot \frac{1}{x} = x^3(4lnx + 1).$$

г) Применяя формулу производной частного, имеем:

$$y' = \left(\frac{5 - x^2}{e^x}\right)' = \frac{(5 - x^2)'e^x - (5 - x^2)(e^x)'}{(e^x)^2} =$$
$$= \frac{-2xe^x - (5 - x^2)e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(x^2 - 2x - 5)}{e^{2x}} = \frac{x^2 - 2x - 5}{e^x};$$

д) $y' = \left(sinx - \frac{x+1}{x-1}\right)' = (sinx)' - \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' =$

$$= cosx - \frac{(x + 1)'(x - 1) - (x + 1)(x - 1)'}{(x - 1)^2} =$$
$$= cosx - \frac{x - 1 - x - 1}{(x - 1)^2} = cosx + \frac{2}{(x - 1)^2}.$$

2.6. Производная сложной функции.

Пусть $y = f(u)$,где $u = \varphi(x)$,тогда $y = f(\varphi(x))$-сложная функция с промежуточным аргументом u и независимым аргументом x .

Таким образом, сложная функция представляет собой композицию из нескольких простых функций , то есть функцию от функции. В нашем случае $u = \varphi(x)$-называется внутренней функцией, а $y = f(u)$-внешней функцией.

Например, $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$-сложная функция, где $u = 1 - x^2$-внутренняя функция, $f(u) = \sqrt[3]{u}$-внешняя функция.

Теорема 2.3. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную $\varphi'(x)$ в точке x,а функция $y = f(u)$ имеет производную $f'(u)$ в точке u,то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную $y'(x)$ в точке x,которая вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{y'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x)} \quad \textbf{(2.8)}$$

Доказательство.

По определению производной $y'(u) = \lim\limits_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}$.
По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции (если функция имеет предел, то разность между функцией и значением предела этой функции есть функция бесконечно малая), имеем:
$\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'(u) + \alpha, \alpha \to 0$ при$\Delta u \to 0$;
Умножим обе части данного равенства наΔu:
$\Delta y = y'(u) \Delta u + \alpha \Delta u$;

Учитывая, что$u'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$, следовательно $\frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x) + \beta$
или $\Delta u = u'(x) \Delta x + \beta \Delta x$,где $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Таким образом, имеем:

$\triangle y = y'(u)(u'(x)\triangle x + \beta \triangle x) + \alpha(u'(x)\triangle x + \beta \triangle x);$

$\triangle y = y'(u)u'(x)\triangle x + y'(u)\beta \triangle x + \alpha u'(x)\triangle x + \alpha\beta \triangle x | : \triangle x;$

$\frac{\triangle y}{\triangle x} = y'(u)u'(x) + y'(u)\beta + \alpha u'(x) + \alpha\beta;$

Переходя к пределу при $\triangle x \to 0$ получим:
$y'(x) = y'(u)u'(x)$.
Таким образом, **производная сложной функции равна произведению производной внешней функции на производную внутренней функции.**

Замечание: это правило может быть распространено на случай сложной функции, составленной из произвольного числа дифференцируемых функций.

Таблица производных сложных функций.

Используя формулу (2.8), то есть при $y = f(u)$,где $u = \varphi(x)$ таблицу производных основных элементарных функций (полученную ранее) можно переписать в следующем виде:

.

1.	$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$
2.	$(a^u)' = a^u lna \cdot u', a > 0$
3.	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
4.	$(log_a u)' = \frac{1}{ulna} \cdot u'$
5.	$(lnu)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
6.	$(sinu)' = cosu \cdot u'$
7.	$(cosu)' = -sinu \cdot u'$
8.	$(tgu)' = \frac{1}{cos^2 u} \cdot u'$
9.	$(ctgu)' = -\frac{1}{sin^2 u} \cdot u'$
10.	$(arcsinu)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
11.	$(arccosu)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
12.	$(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

13.	$(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Пример 2.10. Найти производную функции:

а)$y = sin^3 x$;**б)**$y = sinx^3$;**в)**$y = 3^{\frac{4}{x^3}}$;**г)** $y = e^{-\sqrt{x}}$;**д)** $y = ln\sqrt[4]{\frac{5-x}{5+x}}$.

Решение.

а) Функция $y = sin^3 x = (sinx)^3$ является сложной, где $u = sinx$ - внутренняя функция, для нахождения производной воспользуемся формулой $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$:

$y' = (sin^3 x)' = ((sinx)^3)' = 3(sinx)^2 \cdot (sinx)' = 3sin^2 xcosx;$

б) Функция сложная$y = sinx^3$,где $u = x^3$- внутренняя функция, воспользуемся формулой $(sinu)' = cosu \cdot u'$:

$$y' = (sinx^3)' = \left(sin(x^3)\right)' = cosx^3 \cdot (x^3)' = 3x^2cosx^3;$$

в) Применяя правило нахождения производной сложной-показательной функции$(a^u)' = a^u lna \cdot u', a > 0$ имеем:

$$y' = \left(3^{\frac{4}{x^3}}\right)' = 3^{\frac{4}{x^3}} ln3 \cdot \left(\frac{4}{x^3}\right)' = 3^{\frac{4}{x^3}} ln3 \cdot 4(x^{-3})' =$$

$$= -12ln3\ 3^{\frac{4}{x^3}} x^{-4} = -\frac{12ln3\ 3^{\frac{4}{x^3}}}{x^4};$$

г) Воспользуемся формулой $(e^u)' = e^u \cdot u'$:

$$y' = \left(e^{-\sqrt{x}}\right)' = e^{-\sqrt{x}} \cdot \left(-\sqrt{x}\right)' = -e^{-\sqrt{x}} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= -e^{-\sqrt{x}} \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x} e^{\sqrt{x}}};$$

д) Для упрощения решения преобразуем данную функцию, используя свойства логарифмов $lnx^\alpha = \alpha lnx$ и $ln\frac{x}{y} = lnx - lny$:

$$y = ln\sqrt[4]{\frac{5-x}{5+x}} = ln\left(\frac{5-x}{5+x}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}ln\left(\frac{5-x}{5+x}\right) = \frac{1}{4}\left(ln(5-x) - ln(5+x)\right);$$

Находим производную:

$$y' = \frac{1}{4}\left(\left(ln(5-x)\right)' - \left(ln(5+x)\right)'\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{(5-x)'}{5-x} - \frac{(5+x)'}{5+x}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{5-x} - \frac{1}{5+x}\right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5-x} + \frac{1}{5+x}\right) = -\frac{10}{4(25-x^2)}.$$

Пример 2.11. Найти производные первого порядка функций:

а)$y = 5x - \frac{2}{x^4} + 3\sqrt[5]{x^6}$;**б)**$z = \frac{1-3tg\,t}{arctg2t}$;**в)**$u = cos^3(3v+1)$;

г) $y = arctg^2\frac{1}{x}$;**д)** $y = ctgln^4 x$.

Решение.

а) $y' = \left(5x - \frac{2}{x^4} + 3\sqrt[5]{x^6}\right)' = 5(x)' - 2(x^{-4})' +$

$+3\left(x^{\frac{6}{5}}\right)' = 5 + 8x^{-5} + \frac{18}{5}x^{\frac{1}{5}} = 5 + \frac{8}{x^5} + \frac{18\sqrt[5]{x}}{5};$

б)

$$z' = \frac{(1-3tg\,t)'arctg2t - (1-3tg\,t)(arctg2t)'}{(arctg2t)^2} =$$

$$= \frac{\frac{-3}{cos^2t}arctg2t - (1-3tg\,t)\frac{2}{1+4t^2}}{arctg^2 2t} =$$

$$= -\frac{3}{cos^2 t arctg2t} - \frac{2-6tg\,t}{(1+4t^2)arctg^2 2t};$$

в) $u' = ((cos(3v+1))^3)' = 3cos^2(3v+1)(cos(3v+1))' =$

$= -3cos^2(3v+1)\,sin(3v+1)\,(3v+1)' =$

$= -9cos^2(3v+1)sin(3V+1);$

г)

$$y' = \left(arctg^2\frac{1}{x}\right)' = \left(\left(arctg\frac{1}{x}\right)^2\right)' = 2arctg\frac{1}{x}\left(arctg\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= 2arctg\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot(x^{-1})' = 2arctg\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= -\frac{2arctg\frac{1}{x}}{1+x^2};$$

д) $y' = (ctgln^4x)' = \left(ctg(ln^4x)\right)' = -\frac{1}{sin^2ln^4x}\cdot((lnx)^4)' =$

$$= -\frac{1}{sin^2ln^4x}\cdot 4ln^3x\cdot(lnx)' = -\frac{4ln^3x}{xsin^2ln^4x}.$$

2.7. Логарифмическое дифференцирование.

В ряде случаев для нахождения производной необходимо заданную функцию сначала прологарифмировать, а затем продифференцировать-такую операцию называют **логарифмическим дифференцированием**. К числу функций, производные которых находят, логарифмическим дифференцированием относятся степенно-показательные функции $y = u^v$,где $u = u(x), v = v(x)$,то есть функции основание и показатель степени которых зависят от x.Рассмотрим, как находить производную данной функции:

1)Логарифмируем обе части равенства $y = u^v$:

$$lny = lnu^v;$$

$$lny = vlnu.$$

2)Продифференцируем полученное равенство:

$$(lny)' = (vlnu)';$$

$$\frac{1}{y}y' = v'lnu + \frac{v}{u}u';$$

$$y' = y\left(v'lnu + \frac{v}{u}u'\right),$$

учитывая, что $y = u^v$имеем:

$$y' = u^v\left(v'lnu + \frac{v}{u}u'\right).$$

Пример 2.12. Найти y' ,если:

а)$y = (sinx)^{tgx}$;**б)**$y = (x^3 + 2x^2)^{\frac{1}{x^2}}$;**в)** $y = \frac{\sqrt{x+1}(2x+1)^2}{x-1}$.

Решение.

а) Основание и показатель степени функции $y = (sinx)^{tgx}$ зависят от x, поэтому применяем логарифмическое дифференцирование:

прологарифмируем обе части равенства $y = (sinx)^{tgx}$:

$$lny = ln(sinx)^{tgx},$$

$$lny = tgxln(sinx);$$

Продифференцируем полученное равенство по x, учитывая, что $y = y(x)$, то есть lny – сложная функция:

$$\frac{y'}{y} = (tgx)'ln(sinx) + tgx\frac{1}{sinx}(sinx)',$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{cos^2x}ln(sinx) + tgx\frac{cosx}{sinx},$$

$$y' = y\left(\frac{ln(sinx)}{cos^2x} + \frac{sinx}{cosx}\cdot\frac{cosx}{sinx}\right),$$

$$y' = (sinx)^{tgx}\left(\frac{ln(sinx)}{cos^2x} + 1\right),$$

$$y' = (sinx)^{tgx}\left(\frac{ln(sinx)}{cos^2x} + 1\right);$$

б) $y = (x^3 + 2x^2)^{\frac{1}{x^2}}$ - данная функция является степенно-показательной.

Найдем ее производную, для этого прологарифмируем обе части исходного равенства:

$$lny=ln(x^3+2x^2)^{\frac{1}{x^2}},$$
$$lny=\frac{1}{x^2}ln(x^3+2x^2);$$

Продифференцируем полученное равенство:

$$\frac{y'}{y}=(x^{-2})'ln(x^3+2x^2)+\frac{1}{x^2}\left(ln(x^3+2x^2)\right)',$$
$$\frac{y'}{y}=\left(-\frac{2}{x^3}ln(x^3+2x^2)+\frac{1}{x^2(x^3+2x^2)}(x^3+2x^2)'\right),$$
$$\frac{y'}{y}=\left(-\frac{2}{x^3}ln(x^3+2x^2)+\frac{3x^2+4x}{x^2(x^3+2x^2)}\right),$$
$$y'=y\left(-\frac{2}{x^3}ln(x^3+2x^2)+\frac{3x+4}{x(x^3+2x^2)}\right),$$
$$y'=(x^3+2x^2)^{\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{2}{x^3}ln(x^3+2x^2)+\frac{3x+4}{x^3(x+2)}\right);$$

Замечание: метод логарифмического дифференцирования полезно также применять в случаях, когда это приводит к упрощению вычислений, при нахождении производной функции.

в) Данную функцию (в силу громоздкости стандартного дифференцирования) удобно найти при помощи логарифмического дифференцирования.

Логарифмируем исходное равенство:

$$lny=ln\frac{\sqrt{x+1}(2x+1)^2}{x-1};$$

Упростим правую часть полученного равенства, используя свойства логарифмов $ln\frac{a}{b}=lna-lnb, ln(ab)=lna-lnb, lna^{\alpha}=\alpha lna;$

$$ln\frac{\sqrt{x+1}(2x+1)^2}{x-1}=ln\left(\sqrt{x+1}(2x+1)^2\right)-ln(x-1)=$$
$$=ln(x+1)^{\frac{1}{2}}+ln(2x+1)^2-ln(x-1)=$$

$=\frac{1}{2}ln(x+1)+2ln(2x+1)-ln(x-1)$, то есть

$$lny=\frac{1}{2}ln(x+1)+2ln(2x+1)-ln(x-1),$$

Продифференцируем полученное равенство по x:

$$(lny)'=\left(\frac{1}{2}ln(x+1)+2ln(2x+1)-ln(x-1)\right)';$$
$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2(x+1)}+\frac{4}{2x+1}-\frac{1}{x-1};$$
$$y'=\frac{\sqrt{x+1}(2x+1)^2}{x-1}\cdot\left(\frac{1}{2(x+1)}+\frac{4}{2x+1}-\frac{1}{x-1}\right).$$

2.8. Дифференциал функции и его связь с производной.

Пусть функция $y = f(x)$ определена и дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0.Следовательно, существует $f'(x_0)$, $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, Δx – приращение аргумента; Δy – приращение функции в точке x_0, соответствующее приращению аргумента Δx:

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

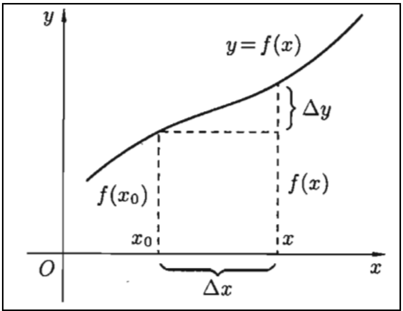


Рис.15

По теореме о связи между функцией, ее пределом и бесконечно малой функцией:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ –бесконечно малая функция при $x \to x_0$.Отсюда,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha,$$

$\alpha = \alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$,следовательно,

$$\boldsymbol{\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x \ (2.9)}$$

Таким образом, приращение функции Δy представляет собой сумму двух слагаемых $f'(x_0) \cdot \Delta x$ и $\alpha \cdot \Delta x$, являющихся бесконечно малыми при $\Delta x \to 0$. При этом первое слагаемое есть бесконечно малая функция одного порядка с Δx , так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0) \cdot \Delta x}{\Delta x} = f'(x_0) \neq 0$, а второе слагаемое $\alpha \cdot \Delta x$ есть бесконечно малая функция более высокого порядка, чем Δx ,так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$.

Поэтому первое слагаемое $f'(x_0) \cdot \Delta x$ называют **главной частью** приращения функции Δy.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется главная часть ее приращения, равная произведению производной функции на приращение аргумента.

Обозначение: dy.

Таким образом, выражение для дифференциала имеет вид:

$\boldsymbol{dy = f'(x) \cdot \Delta x}$ **(2.10),** где $dx = \Delta x$.

Поэтому формулу (2.10) можно записать в виде (2.11):

$\boldsymbol{dy = f'(x)dx}$ **(2.11).**

Итак, задача вычисления дифференциала функции сводится к задаче вычисления производной этой функции.

Свойства дифференциалов.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x,то их дифференциалы обладают следующими свойствами:

1) $d(C) = 0, C = const$;

2) $d(Cf(x)) = Cd(f(x))$;

3) $d(f(x) \pm g(x)) = d(f(x)) \pm d(g(x))$;

4) $d(f(x) \cdot g(x)) = d(f(x))g(x) + f(x)d(g(x))$;

5) $d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{d(f(x))g(x) - f(x)d(g(x))}{g^2(x)}$.

Пример 2.13. Найти дифференциал dy функции:

а) $y = x\sqrt{5-x}$;**б)** $y = 3^{ctg3x}$;**в)** $y = arctg\sqrt{x}$.

Решение.

а) Так как $dy = y'dx$ задача вычисления дифференциала функции сводится к вычислению y':

$$y' = \left(x\sqrt{5-x}\right)' = \left(\sqrt{5x^2 - x^3}\right)' = \left((5x^2 - x^3)^{\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}(5x^2 - x^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (5x^2 - x^3)' = \frac{10x - 3x^2}{2\sqrt{5x^2 - x^3}} =$$

$$= \frac{x(10-3x)}{2x\sqrt{5-x}} = \frac{10-3x}{2\sqrt{5-x}};$$

Таким образом,$dy = \frac{10-3x}{2\sqrt{5-x}}dx$.

б) $y' = (3^{ctg3x})' = 3^{ctg3x}ln3(ctg3x)' =$

$$= 3^{ctg3x}ln3 \cdot \left(-\frac{1}{sin^2(3x)}\right) \cdot (3x)' = -\frac{3^{ctg3x+1}ln3}{sin^2(3x)},$$

следовательно,

$$dy = -\frac{3^{ctg3x+1}ln3}{sin^2(3x)}dx;$$

в) $y' = \left(arctg\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{1+x} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' =$

$= \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$, следовательно,

$$dy = \frac{dx}{2(1+x)\sqrt{x}}.$$

Пример 2.14. Найти дифференциал функции

$y = \sqrt{x^2+1}$. Вычислить dy при $x = 1, dx = 0{,}2$.

Решение.

$y' = \left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \left((x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$,тогда $dy = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

Подставив $x = 1$ и $dx = 0{,}2$, получим:

$$dy|_{\substack{x=1\\ dx=0{,}2}} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1}} \cdot 0{,}2 = \frac{1}{5\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

2.9. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций.

Дифференцирование неявно заданных функций.

Если функция задана уравнением $y = f(x)$, разрешённым относительно y,то мы имеем дело с функцией, заданной в явном виде (явной функцией).

Под неявным заданием функции $y = f(x)$ понимают задание функции уравнением

$$\boldsymbol{F(x;y) = 0} \; \mathbf{(2.12)},$$

то есть уравнением не разрешённым относительно y.

Например, $y = x^3 + 1$-явно заданная функция,

$x^2 + y^2 = 4$-неявно заданная функция, где

$F(x;y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$.

Замечание: всякую явно заданную функцию $y = f(x)$можно записать как неявную, с помощью уравнения $y - f(x) = 0$,но не всегда можно сделать обратное действие. Например, от явного задания функции $y = x^2$ можно перейти к неявному заданию функции $y - x^2 = 0$; неявное уравнение $2^y - x + y = 0$ невозможно разрешить относительно y, то есть получить в явном виде.

Правило нахождения производной неявной функции.

Для нахождения производной неявной функции необходимо:

1)Продифференцировать обе части уравнения $F(x;y) = 0$ по x,учитывая, что $y = y(x)$:

$$\left(F(x;y)\right)'_x = 0;$$

3) Выразить y' из полученного уравнения, то есть найти $y' = f(x;y)$.

Пример 2.15. Найти y' для функций:

а) $x^3+y^3-3xy=7$;**б)** $e^{\frac{x}{y}}-yx+1=0$;
в) $cos(x+y)-x+y=0$.

Решение.

а) Функция задана неявно, уравнением $F(x;y)=0$, где $F(x;y)=x^3+y^3-3xy-7$, применяя правила нахождения производной неявной функции, имеем:
1)Дифференцируем обе части уравнения $F(x;y)$ по переменной x:

$$(x^3+y^3-3xy-7)'=0;$$

Учитывая, что $y=y(x)$, найдём производную y^3:

$$(y^3)'=\left(\left(y(x)\right)^3\right)'=3\left(y(x)\right)^2\cdot\left(y(x)\right)'=$$

$=3y^2(x)\cdot y'(x)=3y^2y'$,таким образом, имеем:

$$3x^2+3y^2y'-3(x'y+xy')=0|:3;$$

$$x^2+y^2y'-y-xy'=0;$$

2) Разрешим полученное уравнение относительно y':

$$x^2+y^2y'-y-xy'=0;$$

$$y'(y^2-x)=y-x^2;$$

$$y'=\frac{y-x^2}{y^2-x}.$$

б) Функция задана неявно, уравнением $F(x;y)=0$, где $F(x;y)=e^{\frac{x}{y}}-yx+1$.

1)Продифференцируем обе части уравнения $F(x;y)$ по переменной x:

$$\left(e^{\frac{x}{y}}-yx+1\right)'=0,$$

$$e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{x}{y}\right)'-(y'x+x'y)=0,$$

$$e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{x'y-xy'}{y^2}-y'x-y=0,$$

$$e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{y-xy'}{y^2}-y'x-y=0,$$

$$e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}y'\right)-y'x-y=0,$$

$$\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}-\frac{e^{\frac{x}{y}}x}{y^2}y'-y'x-y=0,$$

$$-y'\left(\frac{e^{\frac{x}{y}}x}{y^2}+x\right)=y-\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}|\cdot(-1),$$

$$y'\left(\frac{e^{\frac{x}{y}}x}{y^2}+x\right)=\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}-y,$$

$$y'=\frac{\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}-y}{\frac{e^{\frac{x}{y}}x}{y^2}+x},$$

$$y'=\frac{\frac{e^{\frac{x}{y}}-y^2}{y}}{\frac{e^{\frac{x}{y}}x+xy^2}{y^2}},$$

$$y'=\frac{y\left(e^{\frac{x}{y}}-y^2\right)}{x\left(e^{\frac{x}{y}}+y^2\right)}.$$

в) $(\cos(x+y)-x+y)'=0,$
$-\sin(x+y)(x+y)'-1+y'=0,$
$-(1+y')\sin(x+y)-1+y'=0|\cdot(-1),$
$(1+y')\sin(x+y)+1-y'=0,$
$\sin(x+y)+y'\sin(x+y)+1-y'=0,$
$y'(\sin(x+y)-1)=-\big(1+\sin(x+y)\big),$

$$y'=-\frac{1+\sin(x+y)}{\sin(x+y)-1},$$

$$y'=\frac{1+\sin(x+y)}{1-\sin(x+y)}.$$

Пример 2.16. Найти производную функции $\sqrt{x^2+y^2}=2y-x$ в точке $M_0(3;4)$.

Решение.

Для начала найдём y', поскольку исходная функция задана неявно, уравнением $F(x;y)=\sqrt{x^2+y^2}+x-2y=0$, воспользуемся правилом дифференцирования неявных функций:

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'=(2y-x)';$$

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}(x^2+y^2)'=2y'-1;$$

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}(2x+2yy')\quad=2y'-1;$$

$$\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}=2y'-1;$$
$$x+yy'=(2y'-1)\sqrt{x^2+y^2};$$
$$x+yy'=2y'\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2+y^2};$$

$$yy'-2y'\sqrt{x^2+y^2}=-\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right);$$
$$y'\left(y-2\sqrt{x^2+y^2}\right)=-\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right);$$
$$y'=-\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y-2\sqrt{x^2+y^2}};$$

Найдём значение производной функции в точке $M_0(3;4)$:

$$y'|_{M_0}=-\frac{3+\sqrt{3^2+4^2}}{4-2\sqrt{3^2+4^2}}=-\frac{3+5}{4-10}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}.$$

Дифференцирование параметрически заданных функций.

Функция $y=f(x)$задана параметрически уравнениями $\begin{cases} y=y(t) \\ x=x(t) \end{cases}$, $t\in R, t$ –вспомогательная переменная-параметр.

Например, для функции заданной параметрически уравнениями$\begin{cases} y=t^2-5 \\ x=1-t \end{cases}$,найдём зависимость y от x.Из уравнения $x=1-t$,находим $t=1-x$, подставляем в уравнение $y=t^2-5$ получим $y=(1-x)^2-5$.

Найдём производную функции заданной параметрически y'_x,считая , что функции $x=x(t), y=y(t)$ имеют производные и что $x=x(t)$ имеет обратную функцию $t=\varphi(x)$, как известно, производная обратной функции равна $t'_x=\frac{1}{x'_t}$.

Функция $y=f(x)$- сложная, так как $y=y(t), t=\varphi(x)$, поэтому $y'_x=y'_t\cdot t'_x=y'_t\cdot\frac{1}{x'_t}=\frac{y'_t}{x'_t}$, то есть

$$\boldsymbol{y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}} \quad \textbf{(2.13)}$$

Замечание: формула (2.13) позволяет находить производную от функции, заданной параметрически, не находя непосредственной зависимости y от x.

Пример 2.17. Найти производную для функций:

а) $\begin{cases} x = \frac{t+1}{t} \\ y = ln^2 2t \end{cases}$;б) $\begin{cases} x = (t+1)^2 \\ y = \frac{t^3+2t^2}{t} \end{cases}$;в) $\begin{cases} x = cos^2 3t \\ y = sin^2 3t \end{cases}$.

Решение.

а) Функция задана параметрически, так как

$x = x(t), y = y(t)$,поэтому $y' = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$:

$$x'_t = \left(\frac{t+1}{t}\right)' = \left(1 + \frac{1}{t}\right)' = (t^{-1})' = -t^{-2} = -\frac{1}{t^2},$$

$$y'_t = ((ln2t)^2)' = 2ln2t(ln2t)' = 2ln2t\,\frac{1}{2t}(2t)' =$$

$= \frac{2ln2t}{t}$,следовательно,

$$y' = \frac{\frac{2ln2t}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = -\frac{2ln2t \cdot t^2}{t} = -2tln2t;$$

б) Учитывая, что $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ имеем:

$$x'_t = ((t+1)^2)' = 2(t+1)(t+1)' = 2(t+1),$$

$$y'_t = \left(\frac{t^3 + 2t^2}{t}\right)' = (t^2 + 2t)' = 2t + 2 = 2(t+1).$$

Таким образом,$y' = \frac{2(t+1)}{2(t+1)} = 1$;

в) $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$:

$x'_t = (cos^2 3t)' = ((cos3t)^2)' = 2cos3t(cos3t)' =$
$= -2cos3tsin3t(3t)' = -3sin6t$,
$y'_t = (sin^2 3t)' = ((sin3t)^2)' = 2sin3t(sin3t)' =$
$= 2sin3tcos3t(3t)' = 3sin6t$,следовательно,

$$y'_x = \frac{3sin6t}{-3sin6t} = -1.$$

Задания для самостоятельного решения.

5.Вычислить производную функции:

1.	$y = 2x^2 - \frac{3}{x} + \sqrt[4]{x^3}$	**11.**	$y = ln(1 + e^{10x}) + \sqrt{x^2+1}$
2.	$y = \frac{(\sqrt[5]{x} - \sqrt{x})^3}{x}$	**12.**	$y = e^{-\sqrt{x^2+1}}$
3.	$y = x^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[4]{x^3} \cdot sinx$	**13.**	$y = (sinx)^{x^2+1}$
4.	$y = ctg^3 lnx$	**14.**	$y = x^{x^2}$
5.	$y = tgln^3 x$	**15.**	$y = (2x)^{sin3x}$
6.	$y = xln^2 x$	**16.**	$y = x^{lnx}$

7.	$y = arctg^9(x^3+2x)$	**17.**	$y = x^{\sqrt{x}}$
8.	$y = ln(x^4+2x)$	**18.**	$y = ln\sqrt{\frac{1-sinx}{1+sinx}}$
9.	$y = 3^{\frac{4}{x^2}}$	**19.**	$y = (sinx-2cosx)^3$
10.	$y = ln\left(\sqrt[4]{\frac{3x+1}{x^3+1}}\right)$	**20.**	$y = cos(x^3-3)$

Ответы:

5.1.$y' = 4x + \frac{3}{x^2} + \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$.**5.2.**$y' = -\frac{2}{5x\sqrt[5]{x^2}} + \frac{3}{10x\sqrt[10]{x}} +$
$+\frac{3}{5\sqrt[5]{x^4}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$.**5.3.** $y' = sinx + xcosx$.**5.4.** $y' = -\frac{3ctg^2 lnx}{xsin^2 lnx}$.
5.5. $y' = \frac{3ln^2x}{xcos^2 ln^3x}$. **5.6.**$y' = lnx(lnx+2)$. **5.7.**$y' = \frac{9(3x^2+2)arctg^8(x^3+2x)}{1+(x^3+2x)^2}$.
5.8.$y' = \frac{4x^3+2}{x^4+2x}$.**5.9.**$y' = -\frac{8}{x^3}3^{\frac{4}{x^2}}ln3$. **5.10.** $y' = \frac{3(1-x^2-2x^3)}{4(3x+1)(x^3+1)}$.
5.11.$y' = \frac{10e^{10x}}{1+e^{10x}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.**5.12.**$y' = -\frac{xe^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}$.
5.13. $y' = (sinx)^{x^2+1}(2xln(sinx) + (x^2+1)ctgx)$.
5.14. $y' = x^{x^2+1}(2lnx+1)$.
5.15. $y' = (2x)^{sin3x}\left(3cos3xln2x + \frac{1}{x}sin3x\right)$.
5.16.$y' = 2x^{lnx-1}lnx$.**5.17.**$y' = \frac{(lnx+2)x^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.
5.18. $y' = -\frac{1}{cosx}$.**5.19.**$y' = 3(sinx-2cosx)^2(cosx+2sinx)$.
5.20. $y' = -3x^2 sin\,(x^3-3)$.

6. Вычислить производную функции:

1.	$x^2+y^2-4xy=0$	**11.**	$arcsin\frac{x}{y} = ylnx$
2.	$arctg\frac{y}{x} - xy = 0$	**12.**	$\begin{cases} x = e^t sint \\ y = e^t cost \end{cases}$
3.	$e^{xy}+y-3=0$	**13.**	$\begin{cases} x = a(t-sint) \\ y = a(1-cost) \end{cases}$
4.	$x^2+y^2-2axy=0$	**14.**	$\begin{cases} x = \frac{1+t}{t^3} \\ y = \frac{1}{2t} + \frac{3}{2t^2} \end{cases}$
5.	$e^{x+y}+xy+5=0$	**15.**	$\begin{cases} x = 2t+t^2 \\ y = t^2-2t^3 \end{cases}$

6.	$sin(xy) = -x^3y^2$	**16.**	$\begin{cases} x = \dfrac{t+1}{t} \\ y = \dfrac{t-1}{t} \end{cases}$
7.	$3x^2y^2 - 5x = 3y - 1$	**17.**	$\begin{cases} x = t - arctgt \\ y = \dfrac{t^3}{3} + 1 \end{cases}$
8.	$xy = e^x siny$	**18.**	$\begin{cases} x = t - 4 \\ y = t^2 - 16 \end{cases}$
9.	$sin(x^2 - y) - y^2 = 0$	**19.**	$\begin{cases} x = 3sint \\ y = 2cost \end{cases}$
10.	$x^3 + y^3 = sin(x - 2y)$	**20.**	$\begin{cases} x = cos^2t \\ y = sin^2t \end{cases}.$

Ответы:

6.1.$y' = \frac{2y-x}{y-2x}$.**6.2.**$y' = \frac{y(1+x^2+y^2)}{x(1-x^2-y^2)}$. **6.3.** $y' = \frac{y^2-3y}{x(3-y)+1}$.

6.4.$y' = \frac{ay-x}{y-ax}$.**6.5.**$y' = -\frac{e^{x+y}+y}{e^{x+y}+x}$.**6.6.**$y' = -\frac{ycos(xy)+3x^2y^2}{xcos(xy)+2x^3y}$.

6.7.$y' = \frac{6xy^2-5}{3-6x^2y}$.**6.8.**$y' = \frac{e^x siny-y}{x-e^x cosy}$.**6.9.**$y' = \frac{2xcos(x^2-y)}{cos(x^2-y)+2y}$.

6.10.$y' = \frac{cos(x-2y)-3x^2}{3y^2+2cos(x-2y)}$.**6.11.** $y' = \frac{y\left(x-y\sqrt{y^2-x^2}\right)}{x\left(ylnx\sqrt{y^2-x^2}+x\right)}$.

6.12. $y' = \frac{cost-sint}{sint+cost}$.**6.13.**$y' = ctg\frac{t}{2}$.**6.14.**$y' = \frac{t(t+6)}{2(2t+3)}$.

6.15. $y' = \frac{t(1-3t)}{1+t}$.**6.16.** $y' = -1$.**6.17.** $y' = t^2 + 1$.

6.18.$y' = 2t$.**6.19.** $y' = -\frac{2}{3}tgt$.**6.20.** $y' = -1$.

2.10. Производные и дифференциалы высших порядков.

Производные высших порядков — это производные порядка выше первого. Чтобы найти производные высших порядков, необходимо выполнять дифференцирование несколько раз.

Производные и дифференциалы высших порядков явно заданной функции.

Функция $y = f(x)$,x-независимая переменная,

$y' = f'(x)$-производная первого порядка или $y' = \frac{dy}{dx}$,где

$dy = f'(x)dx$ –дифференциал первого порядка;

Производная второго порядка (вторая производная) определяется как производная от первой производной, то есть$y'' = (y')'$ –производная второго порядка или$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, где
$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = d\big(f'(x)\big)dx =$
$= f''(x)dxdx = f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2$.
Таким образом, $\boldsymbol{d^2y = f''(x)dx^2}$**(2.14)-** дифференциал второго порядка для функции $y = f(x)$.

Рассуждая аналогично, получим формулу для вычисления производной и дифференциала n –го порядка:
$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$ - или $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$;

$\boldsymbol{d^ny = f^{(n)}(x)dx^n}$**(2.15)**-дифференциал n –го порядка.

Пример 2.18. Для следующих функций найти производные и дифференциалы первого и второго порядка:
а) $y = 5x - \frac{2}{x^4} + 3\sqrt[5]{x^6}$;**б)** $y = (2x+5)^6$;**в)** $y = arcsin\frac{1}{x}$;
г)$y = ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

Решение.

а) Для начала найдём первую производную функции
$y = 5x - \frac{2}{x^4} + 3\sqrt[5]{x^6}$:

$$y' = \left(5x - \frac{2}{x^4} + 3\sqrt[5]{x^6}\right)' = 5(x)' - 2(x^{-4})' +$$
$$+3\left(x^{\frac{6}{5}}\right)' = 5 + 8x^{-5} + \frac{18}{5}x^{\frac{1}{5}} = 5 + \frac{8}{x^5} + \frac{18\sqrt[5]{x}}{5};$$

Подставляя $y' = f'(x) = 5 + \frac{8}{x^5} + \frac{18\sqrt[5]{x}}{5}$ в формулу для вычисления дифференциала $dy = f'(x)dx$ первого порядка, получим:

$dy = \left(5 + \frac{8}{x^5} + \frac{18\sqrt[5]{x}}{5}\right)dx$ – дифференциал первого порядка функции $y = 5x - \frac{2}{x^4} + 3\sqrt[5]{x^6}$.

Найдём y'':

$$y'' = \left(5 + \frac{8}{x^5} + \frac{18\sqrt[5]{x}}{5}\right)' = -\frac{40}{x^6} + \frac{18}{25\sqrt[5]{x^4}}.$$

Подставляя $y'' = f''(x) = -\frac{40}{x^6} + \frac{18}{25\sqrt[5]{x^4}}$
в формулу $d^2y = f''(x)dx^2$,имеем:

$d^2y = \left(-\frac{40}{x^6} + \frac{18}{25\sqrt[5]{x^4}}\right)dx^2$- дифференциал второго порядка исходной функции.

б) Найдём y':
$y' = ((2x+5)^6)' = 6(2x+5)^5 \cdot (2x+5)' = 12(2x+5)^5$;
Подставляя $y' = f'(x) = 12(2x+5)^5$ в формулу для вычисления дифференциала $dy = f'(x)dx$,получим:
$dy = 12(2x+5)^5 dx$ –дифференциал первого порядка функции $y = (2x+5)^6$.

Найдём y'':
$y'' = 12((2x+5)^5)' = 60(2x+5)^4(2x+5)' = 120(2x+5)^4$.

Подставляя $y'' = f''(x) = 120(2x+5)^4$ в формулу $d^2y = f''(x)dx^2$,получим:

$d^2y = 120(2x+5)^4 dx^2$- дифференциал второго порядка исходной функции.

в) Найдём y' и dy:

$$y' = \left(arcsin\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} \cdot (x^{-1})' =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot (-x^{-2}) = -\frac{x}{x^2\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},$$ следовательно,

$$dy = y'dx = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx.$$

Для того, чтобы упростить вычисление второй производной преобразуем полученную производную первого порядка:

$$y' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2(x^2-1)}} = -\frac{1}{\sqrt{x^4-x^2}} =$$

$$= -(x^4-x^2)^{-\frac{1}{2}};$$

$$y'' = -\left((x^4-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(x^4-x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (x^4-x^2)' =$$

$$= \frac{4x^3-2x}{2(x^4-x^2)\sqrt{x^4-x^2}} = \frac{2x(2x^2-1)}{2x^2(x^2-1)x\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \frac{2x^2-1}{x^2(x^2-1)\sqrt{x^2-1}},$$ следовательно,

$$d^2y = y''dx^2 = \frac{2x^2-1}{x^2(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}dx^2.$$

г) $$y' = \left(ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(\left(x+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)\right)' =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(\left(x+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot$$

$$\cdot \left(1+\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}(x^2+1)'\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot$$

$$\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$dy=y'dx=\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$y''=\left((x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot(x^2+1)'=$$

$$=-\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}};$$

$$d^2y=y''dx^2=-\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}dx^2.$$

Пример 2.19. Для следующих функций найти производные и дифференциалы n –го порядка $y^{(n)}$:

а) $y=\frac{x^3}{3}+2x^2+5$;**б)** $y=2^x+2^{-x}$;**в)**$y=\frac{1}{x+1}$.

Решение.

а) $y'=\left(\frac{x^3}{3}+2x^2+5\right)'=x^2+4x;$

$y''=(x^2+4x)'=2x+4;$

$y'''=(2x+4)'=2;$

$y^{(4)}=y^{(5)}=\dots=y^{(n)}=0;$

Следовательно, $d^ny=y^{(n)}(x)dx^n=0dx^n$.

б)$y'=(2^x+2^{-x})'=2^x ln2-2^{-x}ln2=ln2(2^x-2^{-x});$

$$y''=\left(ln2(2^x-2^{-x})\right)'=ln2(2^x-2^{-x})'=$$

$$=ln2(2^x ln2-2^{-x}ln2(-x)')=ln2(2^x ln2+2^{-x}ln2)=$$

$$=ln^2 2(2^x+2^{-x});$$

$$y'''=ln^2 2(2^x+2^{-x})'=ln^2 2(2^x ln2+2^{-x}ln2(-x)')=$$

$$=ln^2 2(2^x ln2-2^{-x}ln2)=ln^3 2(2^x-2^{-x}).$$

Остановимся на вычислении первых трёх производных, так как уже можно выявить некоторую закономерность:

$$y^{(n)}=ln^n 2(2^x+(-1)^n\cdot 2^{-x});$$

Следовательно, $d^ny=y^{(n)}(x)dx^n=ln^n 2(2^x+(-1)^n\cdot 2^{-x})dx^n$.

Проверим правильность полученной формулы:

при $n=1$, получим

$dy=ln2(2^x-2^{-x})dx$ –верно;

при $n=2$,имеем $d^2y=ln^2 2(2^x+2^{-x})dx^2$ –верно и так далее.

в) $y'=\left(\frac{1}{x+1}\right)'=((x+1)^{-1})'=-(x+1)^{-2}(x+1)'=$

$$=-(x+1)^{-2}=-\frac{1}{(x+1)^2};$$

$$y''=-((x+1)^{-2})'=2(x+1)^{-3}(x+1)'=\frac{2}{(x+1)^3};$$

$y''' = 2((x+1)^{-3})' = -\dfrac{6}{(x+1)^4}$;

Учитывая, что $1! = 1, 2! = 1 \cdot 2 = 2, n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$,
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$, имеем: $y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$.

Следовательно, $d^n y = y^{(n)}(x) dx^n = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} dx^n$.

Правильность полученной формулы проверьте самостоятельно.

Производные высших порядков, неявно заданной функции.

Продифференцировав по x первую производную, получим вторую производную от неявной функции. В неё войдут x, y и y'. Подставляя найденное значение y' в выражение второй производной, находим выражение y'' через x, y.

Аналогично, находится третья производная и так далее.

Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно равенством $F(x; y) = 0$. Чтобы найти производную, продифференцируем обе части этого равенства: $\big(F(x; y)\big)'_x = (0)'_x$, считая, что y есть функция от x , используя правило дифференцирования сложной функции. Затем из получившегося равенства выразим производную $y' = f(x; y)$.

Для того, чтобы найти производную второго порядка, продифференцируем равенство $y' = f(x; y)$,

считая, что y есть функция, зависящая от переменной x ,получим $y'' = g(x; y; y')$.

Подставляя найденную ранее производную первого порядка $y' = f(x; y)$,в полученное равенство окончательно имеем:

$y'' = g\big(x; y; f(x; y)\big)$.

Аналогично, находится третья производная и так далее.

Пример 2.20. Найти первую и вторую производную функции: **а)**$x^2 + y^2 = 4y$;**б)**$ln(x + 2y) - y + 1 = 0$;**в)** $arctgy = x + y$.

Решение.

а) Функция задана неявно, уравнением$F(x; y) = 0$, где $F(x; y) = x^2 + y^2 - 4y$.

Продифференцируем обе части уравнения$x^2 + y^2 = 4y$ по переменной x и найдём y':

$(x^2 + y^2)' = (4y)'$,

$2x + 2yy' - 4y' = 0|: 2$,

$x + yy' - 2y' = 0$,

$y'(y - 2) = -x$,

$y' = -\dfrac{x}{y-2}$,

$$y' = \frac{x}{2-y}.$$

Для нахождения второй производной продифференцируем полученное равенство по x:

$$y'' = \left(\frac{x}{2-y}\right)',$$

$$y'' = \frac{2-y+xy'}{(2-y)^2},$$ исключая $y' = \frac{x}{2-y}$ из данного равенства, получим:

$$y'' = \frac{2-y+\dfrac{x^2}{2-y}}{(2-y)^2} = \frac{(2-y)^2-x^2}{(2-y)^3};$$

Таким образом, $y'' = \frac{(2-y)^2-x^2}{(2-y)^3}$;

б) Дифференцируя обе части уравнения $F(x;y) = 0$ по переменной x имеем:

$$(ln(x+2y) - y + 1)' = 0,$$

$$\frac{1+2y'}{x+2y} - y' = 0,$$

$$\frac{1+2y'}{x+2y} = y',$$

$$1 + 2y' = y'(x+2y),$$

$$1 + 2y' = xy' + 2y'y,$$

$$y'(2-x-2y) = 1,$$

$$y' = \frac{1}{2-x-2y},$$

$$y'' = \left(\frac{1}{2-x-2y}\right)',$$

$$y'' = ((2-x-2y)^{-1})' = -\frac{(2-x-2y)'}{(2-x-2y)^2} =$$

$= -\frac{-1-2y'}{(2-x-2y)^2} = \frac{1+2y'}{(2-x-2y)^2}$, учитывая, что $y' = \frac{1}{2-x-2y}$ имеем:

$$y'' = \frac{1+\dfrac{2}{2-x-2y}}{(2-x-2y)^2} = \frac{2-x-2y+2}{(2-x-2y)^3} = \frac{4-x-2y}{(2-x-2y)^3}.$$

в) $arctgy = x + y$,

$$(arctgy)' = (x+y)',$$

$$\frac{y'}{1+y^2} = 1 + y',$$

$$y' = (1+y')(1+y^2),$$

$$y' = 1 + y^2 + y' + y'y^2,$$

$$y'y^2 = -(1+y^2),$$
$$y' = -\frac{1+y^2}{y^2},$$
$$y' = -\left(\frac{1}{y^2}+1\right),$$
$$y'' = -\left(\frac{1}{y^2}+1\right)',$$
$$y'' = -(y^{-2})' = 2y^{-3}\cdot y' = \frac{2y'}{y^3},$$

$$y'' = \frac{2y'}{y^3} = \frac{2\left(-\frac{1+y^2}{y^2}\right)}{y^3} = -\frac{2(1+y^2)}{y^5}.$$

Производные высших порядков, параметрически заданной функции.

Пусть функция $y = f(x)$задана параметрически уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$,нам известно, что $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Найдем её производную, то есть вторую производную от функции, заданной параметрически, применяя правила дифференцирования сложной и обратной функций имеем:

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t \cdot t'_x = (y'_x)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

Аналогично, находится третья производная и так далее, то есть

$$y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}, \ldots,$$

$$\boldsymbol{y^{(n)}_x = \frac{(y^{(n-1)}_x)'_t}{x'_t}} \quad \textbf{(2.16)}$$

.

Пример 2.21. Найти первую, вторую и третью производную параметрически заданной функции $\begin{cases} x = \frac{1}{t} \\ y = lnt \end{cases}$.

Решение.

Функция задана параметрически, поэтому y' находим по соответствующей формуле $y' = \frac{y'_t}{x'_t}$:

$$x'_t = \left(\frac{1}{t}\right)' = (t^{-1})' = -t^{-2} = -\frac{1}{t^2},$$

$y'_t = (lnt)' = \frac{1}{t}$,следовательно, $y'_x = \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = -t;$

Найдём вторую производную:

$$y'' = y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-t)'_t}{-\frac{1}{t^2}} = t^2;$$

Найдём третью производную:

$$y''' = y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} = \frac{(t^2)'_t}{-\frac{1}{t^2}} = \frac{2t}{-\frac{1}{t^2}} = -2t^3.$$

Пример 2.22. Найти первую, вторую производную параметрически заданной функции:

а) $\begin{cases} x = 2t^2 + 2t + 8 \\ y = ln4t + 2t + 4 \end{cases}$;**б)**$\begin{cases} x = acos^3t \\ y = asin^3t \end{cases}$; **в)** $\begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2} \\ y = arcsin(1 - t) \end{cases}$.

Решение.

а) Функция задана параметрически, y'вычислим по формуле $y' = \frac{y'_t}{x'_t}$:

$x'_t = (2t^2 + 2t + 8)' = 4t + 2 = 2(2t + 1);$

$y'_t = (ln4t + 2t + 4)' = \frac{1}{4t}(4t)' + 2 = \frac{1}{t} + 2 = \frac{2t+1}{t}.$

Таким образом,

$$y' = y'_x = \frac{\frac{2t+1}{t}}{2(2t+1)} = \frac{1}{2t};$$

Найдём вторую производную$y'' = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$:

$$(y'_x)'_t = \left(\frac{1}{2t}\right)' = \frac{1}{2}(t^{-1})' = -\frac{1}{2t^2};$$

$$y'' = \frac{-\frac{1}{2t^2}}{2(2t+1)} = -\frac{1}{4t^2(2t+1)};$$

б) Вычислим y' :

$x'_t = (acos^3t)' = a((cost)^3)' = 3acos^2t(cost)' =$
$= -3acos^2tsint;$

$y'_t = (asin^3t)' = a((sint)^3)' = 3asin^2t(sint)' =$
$= 3asin^2tcost.$

Таким образом,

$$y' = \frac{3asin^2tcost}{-3acos^2tsint} = -\frac{sint}{cost} = -tgt;$$

Найдём вторую производную:

$$y'' = y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-tgt)'_t}{-3acos^2tsint} = \frac{\frac{1}{cos^2t}}{3acos^2tsint} =$$
$$= \frac{1}{3acos^4tsint};$$

в) Найдём y':

$$x'_t = \left(\sqrt{2t-t^2}\right)' = \left((2t-t^2)^{\frac{1}{2}}\right)' =$$
$$= \frac{1}{2}(2t-t^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2t-t^2)' = \frac{2-2t}{2\sqrt{2t-t^2}} = \frac{1-t}{\sqrt{2t-t^2}};$$
$$y'_t = \left(arcsin(1-t)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-(1-t)^2}}(1-t)' = -\frac{1}{\sqrt{2t-t^2}}.$$

Таким образом,

$$y' = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2t-t^2}}}{\frac{1-t}{\sqrt{2t-t^2}}} = -\frac{1}{1-t} = \frac{1}{t-1}.$$

Найдём вторую производную$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$, так как

$$(y'_x)'_t = \left(\frac{1}{t-1}\right)' = ((t-1)^{-1})' = -(t-1)^{-2} = -\frac{1}{(t-1)^2},$$ имеем:

$$y'' = \frac{-\frac{1}{(t-1)^2}}{\frac{1-t}{\sqrt{2t-t^2}}} = -\frac{1}{(t-1)^2} \cdot \frac{\sqrt{2t-t^2}}{1-t} = \frac{\sqrt{2t-t^2}}{(t-1)^3}.$$

Задания для самостоятельного решения.
7. Для данных функций найти:
(1)-(7) первую и вторую производные, и дифференциалы первого и второго порядка;(8) -(10) производную n -го порядка;(11) -(20) первую и вторую производные:

1.	$y = (x^2+1)^3$	**11.**	$y^2 = x$
2.	$y = sin^2x$	**12.**	$2x^2 + 3y^2 - 7 = 0$
3.	$y = e^{-x}cosx$	**13.**	$y = e^y + 4x$
4.	$y = \frac{x^2}{x+1}$	**14.**	$arctg(x+y) = x$

5.	$y=\sqrt[3]{x+3}$	**15.**	$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{t}} \\ y=\sqrt[3]{t} \end{cases}$
6.	$y=x(lnx-1)$	**16.**	$\begin{cases} x=t^3+3t^2+4 \\ y=sin^2t \end{cases}$
7.	$y=arctgx^2$	**17.**	$\begin{cases} x=\sqrt{t^3} \\ y=arctg\sqrt{t} \end{cases}$
8.	$y=ln(2x-1)$	**18.**	$\begin{cases} x=e^{-t} \\ y=t^3 \end{cases}$
9.	$y=cos3x$	**19.**	$\begin{cases} x=t^2 \\ y=2cost \end{cases}$
10.	$y=a^{5x}$	**20.**	$\begin{cases} x=cos2t \\ y=t^2 \end{cases}$.

Ответы:

7.1. $y'=6x(x^2+1)^2$,$dy=6x(x^2+1)^2dx$;
$y''=6(5x^2+1)(x^2+1), d^2y=6(5x^2+1)(x^2+1)dx^2$.

7.2. $y'=sin2x$, $dy=sin2xdx$; $y''=2cos2x, d^2y=2cos2xdx^2$.

7.3.$y'=-e^{-x}(sinx+cosx)$,$dy=-e^{-x}(sinx+cosx)dx$;
$y''=2e^{-x}cosx, d^2y=2e^{-x}cosxdx^2$.**7.4.**$y'=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$, $dy=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}dx$;
$y''=\frac{2}{(x+1)^3}$,$d^2y=\frac{2}{(x+1)^3}dx^2$.**7.5**. $y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}}$,$dy=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}}dx$;
$y''=-\frac{2}{9(x+3)\sqrt[3]{(x+3)^2}}$, $d^2y=-\frac{2}{9(x+3)\sqrt[3]{(x+3)^2}}dx^2$.**7.6.**$y'=lnx$,$dy=lnxdx$;
$y''=\frac{1}{x}$, $d^2y=\frac{1}{x}dx^2$.**7.7.**$y'=\frac{2x}{1+x^4}$, $dy=\frac{2x}{1+x^4}dxy''=\frac{2(1-3x^4)}{(1+x^4)^2}$,
$d^2y=\frac{2(1-3x^4)}{(1+x^4)^2}dx^2$.**7.8.** $y^{(n)}=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!2^n}{(2x-1)^n}$.**7.9.** $y^{(n)}=3^ncos\left(3x+\frac{\pi n}{2}\right)$.

7.10.$y^{(n)}=a^{5x}ln^n a5^n$.**7.11.**$y'=\frac{1}{2y}$, $y''=-\frac{1}{4y^3}$.**7.12.**$y'=-\frac{2x}{3y}$, $y''=-\frac{4x^2+6y^2}{9y^3}$.

7.13. $y'=\frac{4}{1-e^y}$,$y''=\frac{16e^y}{(1-e^y)^3}$.**7.14.**$y'=(x+y)^2$,$y''=2(x+y)(1+(x+y)^2)$.

7.15.$y'=-\frac{2}{3}t^{\frac{5}{6}}$, $y''=\frac{10}{9}t\sqrt[3]{t}$.**7.16.**$y'=\frac{sint}{3t^2+6t}$,$y''=\frac{6(cos2t(t^2+2t)-sin2t(t+1))}{(3t^2+6t)^2}$.

7.17. $y'=\frac{1}{3t(1+t)}$,$y''=-\frac{2(2t+1)}{9t^2\sqrt{t}(1+t)^2}$.**7.18.**$y'=-\frac{3t^2}{e^{-t}}$, $y''=3e^{2t}t(2+t)$.

7.19. $y' = -\frac{sint}{t}, y'' = \frac{sint - tcost}{2t^3}$.**7.20.** $y' = -\frac{t}{sin2t}, y'' = \frac{sin2t - 2tcos2t}{2sin^3 2t}$.

2.11. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях.

Теорема 2.4.(Теорема Ферма): если функция $f(x)$ дифференцируема на $(a;b)$,$x_0 \in (a;b)$-точка экстремума, тогда $f'(x_0) = 0$.

Теорема Ферма имеет следующий геометрический смысл (рис.16): если во внутренней точке промежутка функция принимает наибольшее (наименьшее) значение и в этой точке существует касательная, то эта касательная параллельна оси Ox.

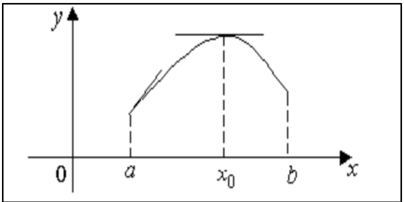


Рис.16

Теорема 2.5.(Теорема Ролля):пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$ и принимает на концах отрезка равные значения: $f(a) = f(b)$.Тогда найдется точка $c\epsilon(a;b)$, в которой $f'(c) = 0$.

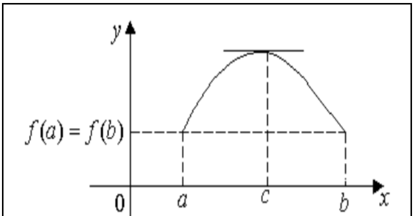


Рис. 17

Теорема Ролля имеет следующий геометрический смысл (рис.17): на графике функции, удовлетворяющей условиям теоремы, найдется точка, в которой касательная параллельна оси Ox.

Теорема 2.6.(**Теорема Лагранжа**): пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке$[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$. Тогда найдется точка $c\epsilon(a;b)$, в которой

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (2.17)$$

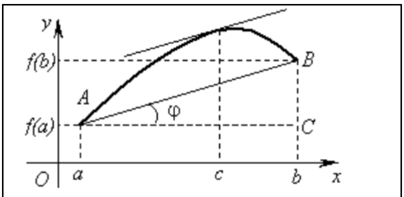


Рис. 18

Теорема Лагранжа имеет следующий геометрический смысл (рис.18): на графике дифференцируемой функции найдется точка, в которой касательная параллельна хорде AB. То есть, $f'(c)=k=tg\varphi$,где $k=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{BC}{AC}$– угловой коэффициент хорды AB. Имеет место формула:

$$\boldsymbol{f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)} \quad \textbf{(2.18)},$$

которая так же, как и формула (2.17), называется **формулой Лагранжа**, или формулой конечных приращений.

Теорема 2.7.(Теорема Коши): пусть функция f и g непрерывны на отрезке$[a;b]$ и дифференцируемы на интервале $(a;b)$. Тогда найдется точка $c\epsilon(a;b)$, для которой:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \quad \textbf{(2.19)}$$

Формула (2.19) называется формулой Коши.

Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши при $g(x)=x$.

2.12. Правило Лопиталя.

Правило Лопиталя применяется при вычислении пределов, для раскрытия неопределённостей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Теорема 2.8. (Теорема Лопиталя). Пусть функции f и g определены и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и обращаются в ноль в этой точке: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, причем, $g'(x)\neq 0$ в указанной окрестности. Тогда, если существует (конечный или бесконечный) предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$, то и $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A$,то есть

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \textbf{(2.20)}$$

Доказательство.

Рассмотрим случай, когда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$. Руководствуясь соображениями непрерывности, до определим функции f и g в точке x_0: $f(x_0)=g(x_0)=0$. Тогда эти функции будут непрерывны в точкеx_0 . Применяя теорему Коши, получим:

$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$, где $c\in(x_0;x)$.

Поскольку существует предел

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(c)}{g'(c)}$,то так как $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$ имеем:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема доказана.

Замечание: если при решении примера после применения правила Лопиталя попытка вычислить предел опять приводит к неопределенности, то правило Лопиталя может быть применено второй раз, третий и так далее пока неопределенность не уйдёт.

Пример 2.23. Используя правило Лопиталя вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+x+2}{2x^3-3x^2+x}$; **б)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$;**в)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi-2arctgx}{e^{\frac{3}{x}}-1}$;**г)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(tgx)}{ctg2x}$;**е)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{16x^2}-\cos x}{\sin x\cdot arctg4x}$.

Решение.

а) Подставляя предельное значение, получаем неопределенность вида$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Функции $f(x)=4x^3+x+2$,$g(x)=2x^3-3x^2+x$ входящие в числитель и знаменатель дроби удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя. Применяя правило Лопиталя, имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+x+2}{2x^3-3x^2+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{(4x^3+x+2)'}{(2x^3-3x^2+x)'}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2+1}{6x^2-6x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{(12x^2+1)'}{(6x^2-6x+1)'}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{24x}{12x-6}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{(24x)'}{(12x-6)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{24}{12}=2;$$

б) Вычисляя предел получаем неопределенность вида$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Функции $f(x)=\ln x$, $g(x)=x$ входящие в числитель и знаменатель дроби соответственно удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя: $f'(x)=\frac{1}{x}$,$g'(x)=1$.

Применяя правило Лопиталя имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0;$$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi-2arctgx}{e^{\frac{3}{x}}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\pi-2arctgx)'}{\left(e^{\frac{3}{x}}-1\right)'}=$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{-2}{1+x^2}}{-\dfrac{3e^{\frac{3}{x}}}{x^2}} = \frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(\dfrac{1+x^2}{x^2}\right)e^{\frac{3}{x}}} =$$

$$= \frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{3}{x}}} = \frac{2}{3};$$

г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sinx - xcosx}{sin^3 x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(sinx - xcosx)'}{(sin^3 x)'} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{cosx - cosx + xsinx}{3sin^2 xcosx} = \lim_{x\to 0} \frac{xsinx}{3sin^2 xcosx} =$$

$$= \frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{x}{2sinxcosx} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{x}{sin2x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{(x)'}{(sin2x)'} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{1}{2cos2x} = \frac{1}{3};$$

д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{ln(tgx)}{ctg2x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{ln(tgx)}{ctg2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(ln(tgx))'}{(ctg2x)'} =$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\dfrac{1}{tgx}\cdot\dfrac{1}{cos^2 x}}{\dfrac{2}{sin^2 2x}} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{2sinx}\cdot\frac{sin^2 2x}{cos^2 x} =$$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{sin^2 2x}{2sinxcosx} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{sin^2 2x}{sin2x} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} sin2x = 0;$$

е) Непосредственное использование правило Лопиталя привело бы к громоздким вычислениям, так как в знаменателе надо находить производную произведения. Значительно проще заменить бесконечно малые функции на эквивалентные (при $x\to 0$) $sinx \sim x, arctg4x \sim 4x$ и уже затем применять правило Лопиталя, в результате получим:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{16x^2} - cosx}{sinx\cdot arctg4x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{16x^2} - cosx\right)'}{(4x^2)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{32xe^{16x^2} + sinx}{8x} = \frac{1}{8}\left(32\lim_{x\to 0} e^{16x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}\right) = \frac{33}{8}.$$

Замечание:

1) В случае неопределённости вида $[0\cdot\infty]$ или $[\infty-\infty]$ необходимо с помощью тождественных преобразований перейти к пределам вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ и только потом применять правило Лопиталя;

2) В случае неопределённостей вида $[1^\infty], [\infty^0], [0^0]$,следует учитывая, что $f(x)^{g(x)} = e^{lnf(x)^{g(x)}}$,перейти от предела вида $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ к пределу $\lim\limits_{x\to x_0} e^{lnf(x)^{g(x)}}$, и найти предел степени(логарифма

$lnf(x)^{g(x)} = g(x)lnf(x))$, то есть

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{lnf(x)^{g(x)}} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)} \quad .$$

Пример 2.24. Используя правило Лопиталя вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to+0}\sqrt[3]{x}\,lnx$; **б)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\pi - 2arctgx)$;**в)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-ctg^2x\right)$;**д)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(sinx)^{tgx}$;**е)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{6}{1+2lnx}}$.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to+0}\sqrt[3]{x}\,lnx = [0\cdot\infty] = \lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{1}{3}}lnx =$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{lnx}{\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to+0}\frac{(lnx)'}{\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)'} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}} =$$

$$= -3\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^{-\frac{1}{3}}} = -3\lim_{x\to+0}\sqrt[3]{x} = 0;$$

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\pi - 2arctgx) = [\infty\cdot 0] =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\pi - 2arctgx}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\pi - 2arctgx)'}{(x^{-1})'} =$$

$$= 2\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{x^{-2}} = 2\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2)'}{(1+x^2)'} =$$

$$= 2\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x} = 2;$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right) = [\infty - \infty] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \left[\frac{0}{0}\right] =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-x)'}{\left(x(e^x-1)\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(e^x-1+xe^x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x} = \frac{1}{2};$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-ctgx\right) = [\infty - \infty] = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{cosx}{sinx}\right) =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{sinx - xcosx}{xsinx} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{(sinx - xcosx)'}{(xsinx)'} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{cosx - cosx + xsinx}{sinx + xcosx} = \lim_{x\to 0}\frac{xsinx}{sinx + xcosx} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{(xsinx)'}{(sinx + xcosx)'} = \lim_{x\to 0}\frac{sinx + xcosx}{cosx + cosx - xsinx} = \frac{0}{2} = 0;$$

д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(sinx)^{tgx} = [1^{\infty}] = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{ln(sinx)^{tgx}} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} ln(sinx)^{tgx}} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} tgxln(sinx)}$,

найдём предел степени:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} tgxln(sinx) = [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ln(sinx)}{\frac{1}{tgx}} =$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ln(sinx)}{ctgx} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(ln(sinx)\right)'}{(ctgx)'} =$$
$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{cosx}{sinx}}{\frac{1}{sin^2x}} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{cosx}{sinx}\cdot sin^2x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} cosxsinx = 0;$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(sinx)^{tgx} = e^0 = 1;$

е) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{6}{1+2lnx}} = [\infty^0] = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{lnx^{\frac{6}{1+2lnx}}};$

Найдем предел степени:

$$\lim_{x\to+\infty} lnx^{\frac{6}{1+2lnx}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{6lnx}{1+2lnx} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$
$$= 6\lim_{x\to+\infty}\frac{(lnx)'}{(1+2lnx)'} = 6\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{2}{x}} = 6\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2} = 3;$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{6}{1+2lnx}} = e^3$.

Задания для самостоятельного решения.

8.Используя правило Лопиталя вычислить пределы:

1.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx + e^{-x} - 1}{x^2}$	**11.**	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2xtgx}\right)$
2.	$\lim\limits_{x\to 0+0} x\cdot lnx$	**12.**	$\lim\limits_{x\to\pi}(\pi - x)\cdot tg\frac{x}{2}$
3.	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ln(1+3^x)}{ln(1+3^x)}$	**13.**	$\lim\limits_{x\to 0+0} sinx\cdot lnx$

4.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{lnx}{lnsinx}$	**14.**	$\lim\limits_{x\to 0}(cosx)^{ctgx}$
5.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{ln(1+x)}$	**15.**	$\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$
6.	$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{ln^3 x}$	**16.**	$\lim\limits_{x\to 0}x^x$
7.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-x}{x-sinx}$	**17.**	$\lim\limits_{x\to 0}(cosx)^{\frac{1}{x}}$
8.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{sinx}}{x-sinx}$	**18.**	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(tgx)^{sin2x}$
9.	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{sinx}-\dfrac{1}{x}\right)$	**19.**	$\lim\limits_{x\to +0}(1+x)^{lnx}$
10.	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{lnx}-\dfrac{x}{x-1}\right)$	**20.**	$\lim\limits_{x\to 0}(cos2x)^{\frac{3}{x^2}}$

Ответы:

8.1.$\frac{1}{2}$.**8.2.**0.**8.3.**$\frac{ln3}{ln2}$.**8.4.**1.**8.5.**2.**8.6.** $+\infty$.**8.7.**2.**8.8.**1.**8.9.**0.

8.10.$\frac{1}{2}$.**8.11.**$\frac{1}{6}$.**8.12.**2.**8.13.**∞.**8.14.**1.**8.15.**$\frac{1}{e}$.**8.16.**0.

8.17.1.**8.18.** 1.**8.19.**1.**8.20.**0.

2.13. Формула Тейлора.

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале$(a;b)$ и имеет в точке $x_0\epsilon(a;b)$ производные до порядка n включительно, тогда при$x\to x_0$ имеем:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2+\cdots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n+0((x-x_0)^n)$$ или кратко

$$\boldsymbol{f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k+0((x-x_0)^n)}\textbf{(2.21)}$$

Формулу (2.21) называют **формулой Тейлора n -го порядка с остаточным членом в форме Пеано.**

Если в формуле (2.21) положить $x_0=0$,то получим **формулу Маклорена** (2.22):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots +$$

$+\frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + 0(x^n)$ или кратко

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + 0(x^n)\ (2.22)}$$

Приведем разложения в ряды Маклорена (степенные ряды) элементарных функций с указанием области сходимости соответствующих рядов.

1) $\boldsymbol{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + 0(x^n) =}$

$\boldsymbol{= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + 0(x^n), x \epsilon (-\infty; +\infty)};$

Действительно, для функции $f(x) = e^x$имеем:
$f(0) = e^0 = 1;$
$f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x;$
$f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1;$
Поэтому по формуле Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + 0(x^n)$$

имеем:
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^n}{n!} + 0(x^n);$

2) $\boldsymbol{sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + 0(x^{2n+2}) =}$

$\boldsymbol{= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + 0(x^{2n+2}), x \epsilon (-\infty; +\infty)};$

Действительно, для функции $f(x) = sinx$:
$f(0) = sin0 = 0;$
$f'(x) = cosx, f'(0) = cos0 = 1;$
$f''(x) = -sinx, f''(0) = -sin0 = 0;$
$f'''(x) = -cosx, f'''(0) = -cos0 = -1;$
Заметим, что при четных $k = 2n + 2$ производная$f^{(k)}(0) = 0$, а при нечетных $k = 2n + 1, f^{(k)}(0) = (-1)^n$.

По формуле $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + 0(x^n)$, получим:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + 0(x^{2n+2});$$

Аналогично выводятся формулы, представленные ниже.

3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + 0(x^{2n+1}) =$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + 0(x^{2n+1}),\ x\epsilon(-\infty; +\infty);$$

4) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + 0(x^n) =$

$$= \sum_{k=0}^{n} x^k + 0(x^n),\ x\epsilon(-1; 1);$$

5) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + 0(x^n) =$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + 0(x^n),\ x\epsilon(-1; 1];$$

6) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 +$

$$+ \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot \ldots \cdot(\alpha-n+1)}{n!} x^n + 0(x^n) =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!} x^k + 0(x^n),\ x\epsilon(-1; 1);$$

7) $\mathrm{arctg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} +$

$$+ 0(x^{2n+2}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + 0(x^{2n+2}),\ x\epsilon[-1; 1].$$

Формула Тейлора и Маклорена имеют разнообразные приложения. Ограничимся применением их для раскрытия неопределённостей при вычислении пределов и приближённого расчёта значений функций.

Пример 2.25. Разложить функцию $f(x) = -3x^3 + 2x^2 - x + 1$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = -1$.

Решение.

Формула Тейлора имеет вид:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \cdots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + 0((x - x_0)^n);$$

В нашем случае $x_0 = -1$,для функции $f(x) = -3x^3 + 2x^2 - x + 1$имеем:

$f(-1) = -3(-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1) + 1 = 7;$

$f'(x) = -9x^2 + 4x - 1;\quad f'(-1) = -14;$

$f''(x) = -18x + 4;\quad f''(-1) = 22;$

$f'''(x) = -18;\quad f'''(-1) = -18;$

$f^{(n)}(x) = 0, n \geq 4$,подставляя полученные значения в формулу Тейлора

$$f(x) = f(-1) + \frac{f'(-1)}{1!}\cdot(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}\cdot(x+1)^2 + \cdots +$$

$$+\frac{f^{(n)}(-1)}{n!}\cdot(x+1)^n + 0((x+1)^n),$$ имеем:

$$-3x^3 + 2x^2 - x + 1 = 7 + \frac{-14}{1!}\cdot(x+1) + \frac{22}{2!}\cdot(x+1)^2 +$$

$$+\frac{-18}{3!}\cdot(x+1)^3;$$

Итак, разложение исходной функции в ряд Тейлора по степеням $x_0 = -1$ имеет вид:

$$-3x^3 + 2x^2 - x + 1 = 7 - 14(x+1) + 11(x+1)^2 - 3(x+1)^3.$$

Пример 2.26. Вычислить пределы, используя разложение в ряды Тейлора и Маклорена:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}$;**б)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx-x}{x^3}$;**в)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xe^{3x}}{arctgx}$.

Решение.

а) Воспользуемся следующим разложением:

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + 0(x^3)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + 0(x^2)\right) = 1;$$

б) Воспользуемся разложением:

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + 0(x^5) - x}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + 0(x^5)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{6} + \frac{x^3}{120} + 0(x^2)\right) = -\frac{1}{6};$$

в) $arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots;$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$, следовательно,

$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2} + \cdots,$

$xe^{3x} = x + 3x^2 + \frac{9x^3}{2} + \cdots,$

$$\lim_{x\to 0} \frac{xe^{3x}}{arctgx} = \lim_{x\to 0} \frac{x+3x^2+\frac{9x^3}{2}+0(x^3)}{x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+0(x^5)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(1+3x+\frac{9x^2}{2}+0(x^2)\right)}{x\left(1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+0(x^4)\right)} = 1.$$

Пример 2.27. Найти число e с точностью до 0,001.

Решение.

Выпишем формулу Маклорена для функции $f(x) = e^x$,

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$.

Положим $x = 1$:

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} + \frac{1^5}{5!} + \frac{1^6}{6!} + \frac{1^7}{7!} + \cdots =$$

$$= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \cdots;$$

Для нахождения e с точностью 0,001 определим количество слагаемых из условия, что остаточный член меньше 0,001, поскольку $\frac{1}{5040} < 0{,}001$, то

$$e \approx 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = 2 + 0{,}5 + 0{,}1667 +$$
$$+ 0{,}0417 + 0{,}0083 + 0{,}0014 = 2{,}7181 \approx 2{,}718.$$

2.14. Исследование функций и построение графиков.

Монотонность функции. Признаки монотонности.

Напомним определения монотонных функций.

Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей (убывающей)** на отрезке $[a; b]$, если для любых x_1 , $x_2 \epsilon [a; b]$, удовлетворяющих условию $x_1 > x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ $(f(x_1) < f(x_2))$.

Возрастающие, убывающие функции называются **монотон-**

ными.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a;b]$. В этом случае:

1)если $f'(x)>0$ для всех значений $x\epsilon[a;b]$,то функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[a;b]$;

2)если $f'(x)<0$ для всех значений $x\epsilon[a;b]$,то функция $f(x)$ убывает на отрезке $[a;b]$.

Замечание: в определении возрастающей и убывающей знаки неравенства между значениями функции могут быть нестрогими. При этом:

1)если при $x_1>x_2$справедливо $f(x_1)\geq f(x_2)$,то функция $f(x)$называется неубывающей;

если $f'(x)\geq 0$ для всех значений $x\epsilon[a;b]$,то $f(x)-$ неубывающая функция на отрезке $[a;b]$;

2)если при $x_1>x_2$справедливо $f(x_1)\leq f(x_2)$,то функция $f(x)$называется невозрастающей;

если $f'(x)\leq 0$ для всех значений $x\epsilon[a;b]$,то $f(x)$ –невозрастающая функция на отрезке $[a;b]$.

Исследование функций с помощью первой производной. Экстремумы функции

Функция $f(x)$ имеет в точке максимум (минимум), если она определена в интервале$(x_0-\delta;x_0+\delta)$ и для всех $x\epsilon(x_0-\delta;x_0+\delta)$, $x\neq x_0$выполнено неравенство $f(x)<f(x_0)\big(f(x)>f(x_0)\big)$.

Максимумы или минимумы функции называются **экстремумами** или экстремальными значениями.

Значения аргумента, при которых производная функции $f(x)$ обращается в ноль или не существует, называются **критическими точками**.

Теорема 2.9.(Необходимое условие экстремума) В точке экстремума производная $f'(x_0)$ равна нулю или не существует, то есть x_0 является критической точкой функции $f(x)$.

Теорема 2.10.(Достаточное условие экстремума)
Пусть функция определена и непрерывна в некоторой окрестности $(x_0-\delta;x_0+\delta)$, критической точки x_0 и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, быть может, самой точки x_0). Если при переходе слева направо через эту точку производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 –точка максимума, если ме-

няет знак с минуса на плюс, то x_0 –точка минимума.

Алгоритм исследование функций с помощью первой производной.

Для того, чтобы найти интервалы монотонности и экстремумы функции, необходимо:

1)вычислить производную заданной функции;

2)найти критические функции (нули производной $f'(x)=0$ - стационарные точки и точки, в которых производная не существует $f'(x)\nexists$);

3)нанести эти точки, а также точки разрыва функции на числовую ось;

4)определить знак производной на каждом из полученных интервалов;

5)по знаку производной определить характер монотонности функции, определить наличие экстремума и его характер в каждой критической точке, исключая точки разрыва функции.

Пример 2.28. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции:

а)$y=3x^5-5x^3$;**б)** $y=\sqrt[3]{(x-1)(x-3)}$;**в)** $y=\frac{x^2+3}{x-1}$.

Решение.

а) Область определения функции: $D(f)=(-\infty;+\infty)$.

$f'(x)=15x^4-15x^2=15x^2(x^2-1)$.

Найдем критические точки:

$f'(x)=0$, $15x^2(x^2-1)=0$,то есть $x_1=0, x_2=1, x_3=-1$;

$f'(x)\nexists$ таких точек нет, так как $f'(x)$ существует на всей числовой оси.

Исследуем методом интервалов знак производной функции и заносим данные в таблицу:

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$
	ф-я возр.	$(\cdot)$ка max	ф-я убыв.	$(\cdot)$ка min	ф-я возр.

Определяем промежутки монотонности и экстремумы функции:

$y'>0$,функция y возрастает$\nearrow$,при $x\epsilon(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$;

$y'<0$,функцияy убывает$\searrow$,при$x\epsilon(-1;1)$.

$x=-1$ –точка максимума,$y_{max}(-1)=2$,так как производная при переходе через эту точку меняет знак с «+» на «-»;

$x = 1$ –точка минимума,$y_{min}(1) = -2$,так как производная при переходе через эту точку меняет знак «-» на «+».

б) Область определения функции: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

Преобразуем исходную функцию, для упрощения нахождения производной

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-1)(x-3)} = \sqrt[3]{x^2 - 4x + 3} = (x^2 - 4x + 3)^{\frac{1}{3}};$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 4x + 3)^{-\frac{2}{3}}(x^2 - 4x + 3)' =$$

$$= \frac{2x - 4}{3\sqrt[3]{(x^2 - 4x + 3)^2}} = \frac{2(x-2)}{3\sqrt[3]{(x-1)^2(x-3)^2}};$$

$f'(x) = 0$, при $2(x-2) = 0$,то есть$x_1 = 2$;

$f'(x)\nexists$, при $x_2 = 1, x_3 = 3$.

Исследуем методом интервалов знак производной функции и заносим данные в таблицу:

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; 2)$	2	$(2; 3)$	3	$(3; +\infty)$
y'	$-$	не сущ.	$-$	0	$+$	не сущ.	$+$
y	↘	2	↘	-1	↗	0	↗
	ф-я убыв.	0	ф-я убыв.	$(\cdot)$ка min	ф-я возр.	0	ф-я возр.

Определяем промежутки монотонности и экстремумы функции:

$y' > 0$,функцияy возрастает↗,при$x \epsilon (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$;

$y' < 0$,функция y убывает↘,при$x \epsilon (-\infty; 2)$.

$x = 2$ –точка минимума,$y_{min}(2) = -1$,так как производная при переходе через эту точку меняет знак «-» на «+».

в) $f'(x) = \frac{2x(x-1)-(x^2+3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$;

$f'(x) = 0, \qquad (x+1)(x-3) = 0,$

$x_1 = -1, x_2 = 3,$

$f'(x)\nexists$ при $x_3 = 1$.

Методом интервалов исследуем знак производной и данные заносим в таблицу:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; 3)$	3	$(3; +\infty)$
y'	$+$	0	$-$	не сущ.	$-$	0	$+$
y	↗	-2	↘	не сущ.	↘	6	↗
	ф-я возр.	$(\cdot)$ка max	ф-я убыв.	не сущ.	ф-я убыв.	точка min	ф-я возр.

Таким образом, $y' > 0$,функцияy возраста-

ет↗,при$x\epsilon(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$;
$y'<0$,функцияy убывает↘,при $x\epsilon(-1;1)\cup(1;3)$.
$x=-1$ –точка максимума,$y_{max}(-1)=-2$;
$x=3$ –точка минимума,$y_{min}(3)=6$.

Исследование функций с помощью второй производной. Выпуклость, вогнутость функции. Точки перегиба.

Функция $f(x)$ называется **выпуклой вниз(вогнутой)** на интервале $(a;b)$,если её график лежит выше касательной к ней, проведённой в любой точке с абсциссой $x\epsilon(a;b)$(рис.19)

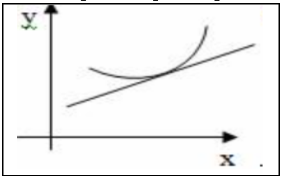


Рис. 19

Функция $f(x)$ называется **выпуклой вверх(выпуклой)** на интервале$(a;b)$,если её график лежит ниже касательной к ней, проведённой в любой точке с абсциссой $x\epsilon(a;b)$(рис.20)

Теорема 2.11.(Необходимые условия выпуклости и вогнутости графика функции)

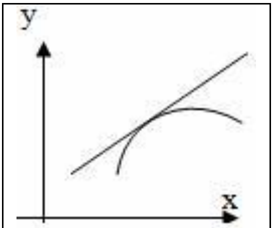


Рис. 20

1) Если графиком дважды дифференцируемой функции на $(a;b)$ является выпуклая кривая, то $f''(x)\leq 0$ на $(a;b)$;

2) Если графиком дважды дифференцируемой функции на $(a;b)$ является вогнутая кривая, то $f''(x)\geq 0$ на $(a;b)$.

Теорема 2.12. (Достаточные условия вогнутости и выпуклости графика функции).

Если функция $f(x)$дважды непрерывно дифференцируема на $(a;b)$ и

$f''(x)>0$для всех $x\epsilon(a;b)$, то график функции на этом интервале вогнутый.

Если$f''(x)<0$для всех $x\epsilon(a;b)$, то график на этом интервале выпуклый.

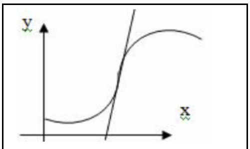


Рис. 21

Утверждение теоремы сохраняется, если вторая производная обращается в ноль $f''(x)=0$ или $f''(x)\nexists$ не существует.

Точки, в которых меняется направление выпуклости графика функции, называются **точками перегиба.**

Теорема 2.13. (Необходимое условие перегиба)
Для того чтобы функция $f(x)$ имела перегиб в точке$\left(x_0; f(x_0)\right)$, необходимо, чтобы либо вторая производная этой функции обращалась в ноль в точке x_0, либо чтобы вторая производная в точке x_0, не существовала.

Теорема 2.14.(Достаточное условие перегиба).
Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некоторой двусторонней окрестности точки x_0, включая и саму эту точку, и дважды непрерывно дифференцируема во всех точках этой окрестности, за исключением, быть может, самой точкиx_0. Если $f''(x_0)$ меняет свой знак при переходе через x_0 , то x_0 – точка перегиба.

Алгоритм исследование функций с помощью второй производной.

Для того, чтобы найти интервалы выпуклости, вогнутости функции, необходимо:

1)вычислить вторую производную заданной функции;

2) найти нули и точки разрыва второй производной: $f''(x) = 0, f''(x)\nexists$;

3)нанести эти точки, а также точки разрыва функции на числовую ось;

4)определить знак второй производной на каждом из полученных интервалов;

5)по знаку второй производной определить характер выпуклости функции и найти точки перегиба (точки, при переходе через которых вторая производная меняет знак).

Пример 2.29. Найти промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции:

а) $y = \sqrt[3]{x^5}$;**б)** $y = ln(1 + x^2)$;**в)** $y = \frac{x^4}{(1+x)^3}$.

Решение.

а) Область определения функции: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

$$y' = \left(\sqrt[3]{x^5}\right)' = \left(x^{\frac{5}{3}}\right)' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}};$$

$$y'' = \left(\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{5}{3}\left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}};$$

$y'' = 0$,таких точек нет;

$y''\nexists$,при $x = 0$.

Методом интервалов исследуем знак второй производной, данные заносим в таблицу:

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;+\infty)$
y''	$-$	не сущ.	$+$
y	$\cap$	0	$\cup$
	ф-я выпукла	$(\cdot)$ка перегиба	ф-я вогнута

Определяем промежутки выпуклости, вогнутости и точки: $y''>0$,функцияy выпукла $\cap$,при $x\epsilon(-\infty;0)$;
$y''<0$,функцияy вогнута $\cup$,при$x\epsilon(0;+\infty)$.
$x=0$ –точка перегиба,$y(0)=0$,так как вторая производная при переходе через эту точку меняет направление выпуклости.

б) Область определения функции: $D(f)=(-\infty;+\infty)$.

$$y'=\left(ln(1+x^2)\right)'=\frac{1}{1+x^2}\cdot(1+x^2)'=\frac{2x}{1+x^2};$$

$$y''=0,\quad 2(1-x)(1+x)=0,$$

$$x_1=1, x_2=-1;$$

$y''\nexists$, таких точек нет.

Методом интервалов исследуем знак второй производной, данные заносим в таблицу.

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;+\infty)$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\cap$	$ln2$	$\cup$	$ln2$	$\cap$
	ф-я выпукла	$(\cdot)$ка пе-региба	ф-я вогнута	$(\cdot)$ка перегиба	ф-я выпукла

Определяем промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба:
$y''>0$,функцияy выпукла $\cap$,при $x\epsilon(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$;
$y''<0$,функцияy вогнута $\cup$,при $x\epsilon(-1;1)$.
$x=\pm1$ –точки перегиба,$y(\pm1)=ln2$.

в) Область определения функции:

Область определения функции: $D(f)=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.

$$y'=\left(\frac{x^4}{(1+x)^3}\right)'=\frac{4x^3(1+x)^3-x^4\cdot3(1+x)^2}{(1+x)^6}=$$

$$=\frac{x^3(1+x)^2(4(1+x)-3x)}{(1+x)^6}=\frac{x^3(x+4)}{(1+x)^4}=\frac{x^4+4x^3}{(1+x)^4};$$

$$y''=\left(\frac{x^4+4x^3}{(1+x)^4}\right)'=\frac{(4x^3+12x^2)(1+x)^4-(x^4+4x^3)4(1+x)^3}{(1+x)^8}=$$

$$=\frac{4x^2(1+x)^3\big((x+3)(1+x)-(x^2+4x)\big)}{(1+x)^8}=$$

$$=\frac{4x^2(x^2+4x+3-x^2-4x)}{(1+x)^5}=\frac{12x^2}{(1+x)^5};$$

$$y''=0,\quad 12x^2=0,$$

$$x=0;$$

$$y''\nexists,\quad x=-1.$$

Методом интервалов исследуем знак второй производной, данные заносим в таблицу.

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;+\infty)$
y''	$-$	не сущ.	$+$
y	∩	не сущ.	∪
	ф-я выпукла		ф-я вогнута

Определяем промежутки выпуклости, вогнутости и экстремумы:
$y''>0$,функция y выпукла ∩,при $x\epsilon(-\infty;-1)$;
$y''<0$,функцияy вогнута ∪,при $x\epsilon(-1;+\infty)$.
Точек перегиба нет, так как точка$x=-1$
не входит в область определения функции.

Асимптоты графика функции.

Построение графика значительно облегчается, если знать его асимптоты.

Асимптота — это прямая к которой неограниченно близко приближается график функции при удалении его переменной точки в бесконечность. Различают вертикальные, наклонные и горизонтальные асимптоты:

1)прямая $x=a$ является **вертикальной асимптотой** графика функции $f(x)$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$. Вертикальные асимптоты проходят через точки бесконечного разрыва. Непрерывные функции вертикальных асимптот не имеют;

2)прямая$y=kx+b$ является **наклонной асимптотой** графика функции $f(x)$,если

существуют конечные пределы:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\quad \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=b,$$

При $x\to+\infty$ получают правостороннюю асимптоту, при $x\to-\infty$получают левосторон- нюю асимптоту.

Замечание: если $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k=0$, то уравнение наклонной асимптоты принимает вид $y=b$. Такая асимптота называется **горизонтальной.**

Пример 2.30. Найти асимптоты графика функции:
а) $y=\frac{x+5}{x-3}$; **б)** $y=\frac{x^3}{2x^2+3}$; **в)** $y=\sqrt{x^2-1}$.

Решение.

а) Область определения функции: $D(f)=(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$;
1) Вертикальные асимптоты:
$x=3$ – является точкой разрыва, так как в ней обращается в ноль знаменатель дроби.
Действительно, $\lim\limits_{x\to3}f(x)=\lim\limits_{x\to3}\frac{x+5}{x-3}=\pm\frac{8}{0}=\pm\infty$, тогда $x=3$ – вертикальная асимптота;
2) Горизонтальные и наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x+5}{x-3}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+5}{x^2-3x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}{1-\frac{3}{x}}=\frac{0}{1}=0,$$

так как $k=0$ наклонных асимптот нет.

Найдём горизонтальные асимптоты:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+5}{x-3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}=$$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{5}{x}}{1-\frac{3}{x}}=1$, следовательно, $y=1$ – горизонтальная асимптота.

б) Область определения функции: $D(f)=(-\infty;+\infty)$.

1) Вертикальные асимптот, так как нет точек разрыва.

2) Горизонтальные и наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^3}{2x^2+3}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{2x^3+3x}=$$

$$=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3\left(2+\frac{3}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2+\frac{3}{x^2}}=\frac{1}{2};$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2+3}-\frac{x}{2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3-x(2x^2+3)}{2(2x^2+3)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x}{2(2x^2+3)}=$$

$$= -\frac{3}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(2+\frac{3}{x^2}\right)} = -\frac{3}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x^2}} = 0, \text{ тогда}$$

$y = \frac{x}{2}$ – наклонная асимптота.

в) Область определения функции: $x^2 - 1 \geq 0$,то есть

$D(f) = (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$;

1) Вертикальные асимптоты нет, так как нет точек бесконечного разрыва.

2) Горизонтальные и наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x};$$

Учитывая, что $|x| = \begin{cases} -x, x < 0 \\ x, \ x \geq 0 \end{cases}$ имеем:

$\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = 1$,то есть при $x \to +\infty, k = 1$;

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} =$$

$= -\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = -1$, то есть при $x \to -\infty, k = -1$;

Найдём b:

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-1} - x\right) = [\infty - \infty] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}{\sqrt{x^2-1}+x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x} =$$

$$= -\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0;$$

Таким образом,$y = x$ – правосторонняя наклонная асимптота,

$y = -x$ – левосторонняя наклонная асимптота.

Горизонтальные асимптот нет, так как $k \neq 0$.

Общая схема анализа свойств функции и построения ее графика.

Рекомендуем следующую последовательность анализа свойств функции.

1) Область определения функции-множество значений аргумента x,при котором задана функция.

2)Координаты точек пересечения с осями координат:

с осью Ox: $\begin{cases} y = 0 \\ y = f(x) \end{cases}$ и Oy: $\begin{cases} x = 0 \\ y = f(x) \end{cases}$.

3)Исследование функции на четность, нечетность:

$f(-x) = f(x)$ –чётная функция, график функции симметричен относительно оси Oy;

$f(-x) = -f(x)$ –нечётная функция, график функции симметричен относительно оси Ox;

$f(-x) \neq f(x) \neq -f(x)$ – функция общего вида.

4)Исследование функции на периодичность:

$f(x \pm T) = f(x)$ –периодическая функция, где

T –период функции.

5)Исследование функции по первой производной:

— промежутки монотонности $y' > 0$ ⇒функция возрастает↗;

$y' < 0$ ⇒функция убывает;

—экстремумы функции⇒ $y' \begin{cases} (\cdot)min\ "-" \Rightarrow "+" \\ (\cdot)max\ "+" \Rightarrow "-" \end{cases}$.

6)Исследование функции по второй производной:

$-y'' < 0$промежутки выпуклости вверх ∩ (выпуклости);

$-y'' > 0$ промежутки выпуклости вниз ∪ (вогнутости);

- точки перегиба- точки, в которых происходит смена направления выпуклости функции.

7) Анализ области непрерывности. Анализ точек разрыва. Асимптоты графика функции:

прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой, если

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$;

прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой, если

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$;

прямая$y = kx + b$ является наклонной асимптотой, если существуют конечные пределы:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b;$$

8) Построение графика функции.

Расчет координат дополнительных точек для уточнения графика (если это необходимо).

Для того, чтобы построить график исследованной функции, необходимо:

1)ввести прямоугольную систему координат;

2)провести асимптоты (если они имеются);

3)отметить все характерные точки (точки экстремума, точки перегиба).

4)соединить характерные точки кривыми в соответствии с исследованием функции.

Пример 2.31. Провести полное исследование и построить график функции $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

Решение.

1) Область определения – вся числовая ось, кроме точки $x = -1$, в которой функция терпит разрыв, то есть $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$;

2) Координаты точек пересечения с осями координат:

с осью $Ox: \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{x^3}{2(x+1)^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^3}{2(x+1)^2} = 0,$ при $x = 0$,то есть$(0; 0)$ – точка пересечения с осью Ox;

с осью $Oy: \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{x^3}{2(x+1)^2} \end{cases} \Rightarrow y = 0$, то есть

$(0; 0)$ – точка пересечения с осью Oy;

3)$f(-x) = \frac{(-x)^3}{2(-x+1)^2} = -\frac{x^3}{2(x-1)^2} \neq f(x) \neq -f(x)$ –

функция не является ни четной, ни нечетной;

4)Функция не периодична.

5)Промежутки убывания и возрастания функции, экстремумы.

Найдем первую производную функции:

$$y' = \left(\frac{x^3}{2(x+1)^2}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{(x+1)^2}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{3x^2(x+1)^2 - 2x^3(x+1)}{(x+1)^4}\right) =$$

$$= \frac{x^2(x+1)(3(x+1) - 2x)}{2(x+1)^4} = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3} = \frac{x^3 + 3x^2}{2(x+1)^3};$$

Найдем критические точки функции:

$y' = 0, \quad x^2(x+3) = 0,$

$x_1 = 0, x_2 = -3;$

$y' \nexists, \quad x_3 = -1;$

Отметим точки на числовой прямой и исследуем знак первой производной при переходе через эти точки.

При $x \epsilon (-\infty; -3) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$ функция возрастает, на интервале $(-3; -1)$убывает. Следовательно, функция имеет максимум в точке $x = -3, y_{max}(-3) = -3\frac{3}{8}$.

x	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	не сущ.	$+$	0	$+$
y	$\nearrow$	$-3\frac{3}{8}$	$\searrow$	не сущ.	$\nearrow$	0	$\nearrow$
	ф-я возр.	$(\cdot)$ка max	ф-я убыв.	разры-ва	ф-я возр.	экстр. нет	ф-я возр.

6)Интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба.

Найдем вторую производную:

$$y'' = \left(\frac{x^3+3x^2}{2(x+1)^3}\right)' = \frac{(3x^2+6x)(x+1)^3 - 3(x^3+3x^2)(x+1)^2}{2(x+1)^6} =$$

$$= \frac{3x(x+1)^2\big((x+2)(x+1) - x^2 - 3x\big)}{2(x+1)^6} =$$

$$= \frac{3x(x^2+3x+2-x^2-3x)}{2(x+1)^4} = \frac{3x}{(x+1)^4};$$

$y'' = 0$, при $x = 0$;

$y''\nexists$, при $x = -1$.

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;+\infty)$
y''	$-$	не сущ.	$-$	0	$+$
y	$\cap$	не сущ.	$\cap$	0	$\cup$
	ф-я выпукла	точка раз-рыва	ф-я выпукла	точка переги-ба	ф-я вогнута

На интервалах$(-\infty;-1)\cup(-1;0)$ кривая выпукла, на интервале $(0;+\infty)$функция вогнута, тогда $x=0$ -является точкой перегиба графика функции. Найдем ординату этой точки:$y(0)=0$.

7)Вертикальные асимптоты:

так как, $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\frac{1}{0} = -\infty$,то $x=-1$ – вертикальная асимптота.

Горизонтальные и наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^3}{2(x+1)^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{2(x+1)^2} =$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{2x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{2};$$

$k\neq 0$,следовательно, горизонтальных асимптот нет;

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{2(x+1)^2}-\frac{x}{2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x(x+1)^2}{2(x+1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-(x^3+2x^2+x)}{2(x^2+2x+1)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+x}{x^2+2x+1} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = -\frac{1}{2}\cdot 2 = -1,$$ тогда

$y = \frac{x}{2} - 1$ – наклонная асимптота.

8) Построение графика функции:

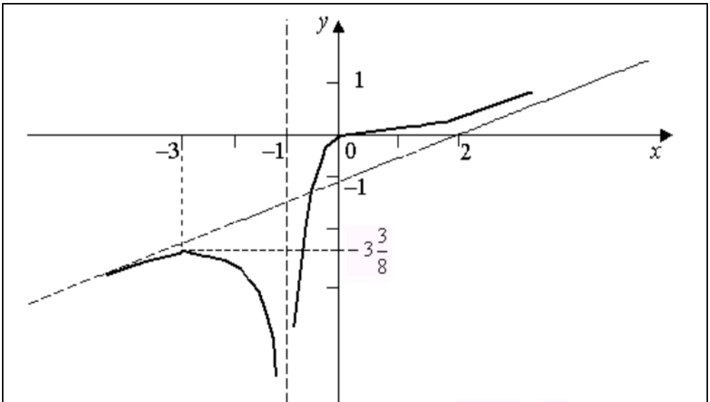


Рис. 22

Задания для самостоятельного решения.

9. (1), (2) Разложить функцию по формулам Тейлора в окрестности заданных точек;(3) -(6) Вычислить используя разложение в ряды Тейлора и Маклорена;(8) -(10). Найти экстремумы функций; (11)-(16) Найти точки перегиба интервалы выпуклости функций;
(17)-(20) Найти асимптоты графиков функций.

1.	$f(x)=x^3+3x^2+x-6, x_0=-1$	**11.**	$y=\dfrac{2x-1}{x+2}$
2.	$f(x)=ln(2x-1), x_0=1$	**12.**	$y=x^4-6x^2+4$
3.	$sin1^0$ с точностью до 0,0001	**13.**	$y=(x+1)^2\cdot(x-2)$
4.	$cos10^0$ с точностью до 0,001	**14.**	$y=xarctgx$
5.	$\lim_{x\to 0}\dfrac{x-sinx}{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}$	**15.**	$y=\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^2$
6.	$\lim_{x\to 0}\dfrac{ln(1+x)-x}{x^2}$	**16.**	$y=\dfrac{4x}{4+x}$

7.	$y=(x-5)^2\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}$	**17.**	$y=\dfrac{x^2+3}{x^2-9}$
8.	$y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$	**18.**	$y=\dfrac{x^2-2x-2}{1+3x}$
9.	$y=x-e^x$	**19.**	$y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$
10.	$y=\dfrac{x^2+1}{x}$	**20.**	$y=x+\dfrac{1}{x}$

Ответы:

9.1. $(x+1)^3-2(x+1)-5$. **9.2.** $2(x-1)-\frac{2^2(x-1)^2}{2}+\frac{2^3(x-1)^3}{3}+\dots+$ $+\frac{(-1)^{n+1}2^n(x-1)^3}{n}+0((x-1)^n)$. **9.3.** 0,0175 . **9.4.** 0,985. **9.5.** 1. **9.6.** $-\frac{1}{2}$. **9.7.** 2. **9.8.** на интервале $(-\infty;-\sqrt{12})\cup(\sqrt{12};+\infty)$ функция возрастает; на интервале $(-\sqrt{12};-2)\cup(-2;2)\cup(2;\sqrt{12})$ функция убывает, $x_{max}=-\sqrt{12}$, $y_{max}(-\sqrt{12})=-\frac{13\sqrt{12}}{12}$, $x_{min}=\sqrt{12}$, $y_{min}(\sqrt{12})=\frac{13\sqrt{12}}{12}$. **9.9.** на интервале $(-\infty;0)$ функция возрастает; на интервале $(0;+\infty)$ функция убывает, $x=0$ –точка максимума, $y_{max}(0)=-1$. **9.10.** на интервале $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ функция возрастает; на интервале $(-1;0)\cup(0;1)$ функция убывает, $x_{max}=-1$, $y_{max}(-1)=-2$, $x_{min}=1$, $y_{min}(1)=2$. **9.11.** на интервале $(-\infty;-2)$ функция выпукла; на интервале $(-2;+\infty)$ функция вогнута; точек перегиба нет. **9.12.** на интервале $(-1;1)$ функция выпукла; на интервале $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ функция вогнута; $(1;-4)$, $(-1;-4)$ –точки перегиба. **9.13.** на интервале $(-\infty;0)$ функция выпукла; на интервале $(0;+\infty)$ функция вогнута; $(0;-2)$ –точка перегиба. **9.14.** на интервале $(-\infty;+\infty)$ функция вогнута; точек перегиба нет . **9.15.** на интервале $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$ функция выпукла; на интервале $\left(\frac{1}{2};2\right)\cup(2;+\infty)$ функция вогнута; $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{9}\right)$ –точка перегиба. **9.16.** на интервале

$(-4;+\infty)$функция выпукла; на интервале $(-\infty;4)$ функция вогнута; точек перегиба нет.**9.17.** $x=\pm 3$ –вертикальные асимптоты; $y=1$ –горизонтальная асимптота.**9.18.**$x=-\frac{1}{3}$–вертикальная асимптота; $y=\frac{x}{3}-\frac{7}{9}$ –наклонная асимптота.**9.19.** $y=1$ - горизонтальная асимптота.**9.20.** $x=0$ –вертикальная асимптота; $y=x$ –наклонная асимптота.

Задания для самостоятельного решения.

10.Провести полное исследование и построить график функции.

1.	$y=\frac{2x+1}{x^2}$	**11.**	$y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$
2.	$y=\frac{1}{x^2-9}$	**12.**	$y=\frac{1-x^3}{x^2}$
3.	$y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$	**13.**	$y=\frac{x^2-x-6}{x-2}$
4.	$y=\frac{x^2+5}{x+2}$	**14.**	$y=\frac{16-x^2}{16+x^2}$
5.	$y=\frac{x^2}{x^2+1}$	**15.**	$y=x+\frac{4}{2+x}$
6.	$y=\frac{2}{x^2+2x}$	**16.**	$y=x-\frac{1}{x^3}$
7.	$y=\frac{(x-1)^2}{x^2}$	**17.**	$y=\frac{x^2+8}{4-x^2}$
8.	$y=\frac{2}{x^2-1}$	**18.**	$y=\frac{3}{x^2+9}$
9.	$y=\frac{x-1}{x^2-2x}$	**19.**	$y=\frac{1}{x(x-8)}$
10.	$y=\frac{x}{(x-1)^2}$	**20.**	$y=x+\frac{1}{x}$

ГЛАВА3. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Функции одной независимой переменной, например, $y = f(x)$ не охватывают всех зависимостей, существующих в природе. Поэтому нам придётся расширить известное понятие функциональной зависимости на случай функций нескольких переменных.

3.1. Функция двух переменных, область определения, график функции.

Переменная величина z называется **функцией двух независимых переменных** x и y :$z = f(x; y)$, заданной на множестве D, если по некоторому закону каждой паре $(x, y) \in D$ соответствует определенное значение Z .Функциональную зависимость z от x и y записывают в виде $z = f(x; y)$или $z = z(x; y)$.

Например, формула $V = \pi R^2 h$- выражающая объем цилиндра, является функцией двух переменных R и h, где R – радиус основания цилиндра и h – высота цилиндра.

Аналогично определяется функция n-переменных. Пусть D некоторое множество точек в n -мерном пространстве. Если задан закон f, в силу которого каждой точке $M(x_1; x_2; \dots; x_n) \in D$ ставится в соответствие некоторое действительное число u , то говорят, что на множестве D определена функция $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$.

Переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$называют независимыми переменными или аргументами функции u, а переменную u – зависимой переменной.

Функцию n переменных принято записывать в виде $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$,а функции трех переменных в виде $u = f(x; y; z)$.

Замечание: функции многих переменных можно записывать формулой $u = f(M)$, указывая размерность пространства, которому принадлежит точка M.

Множество точек $M(x_1; x_2; \dots; x_n)$, для которых функция $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ определена, называют **областью определения** этой функции.

Обозначение: $D(f)$.

Областью определения функции двух переменных является некоторое множество точек плоскости, а областью определения функции трех переменных – некоторое множество точек трехмерного пространства. Например, областью определения функции двух переменных $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ - множество точек плоскости R^2, а областью определения функции трех переменных $u = x + y + z$ - множество точек пространство R^3.

Множество всех чисел u вида $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$, где $(x_1; x_2; \dots; x_n) \in D(f)$ называют **множеством значений функции**.

Пример 3.1. Найти область определения функции: **а)** $z = 3 - x - 3y$; **б)** $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; **в)** $z = ln(x + y - 1)$.

Решение.

а) Так как, аргументы x, y, могут принимать любые значение, то областью определения данной функции является вся координатная плоскость, то есть $(x; y) \in R^2$;

б) Функция $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ определена, если $1 - x^2 - y^2 \geq 0$,

то есть $x^2 + y^2 \leq 1$. Таким образом, областью определения функции является множество точек, лежащих внутри и на границе круга радиуса $R = 1$, с центром в начале координат (рис.23);

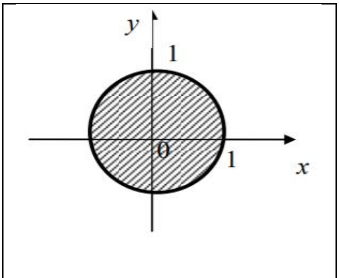


Рис. 23

в) Областью определения функции $z = ln(x+y-1)$ будет множество точек плоскости Oxy, для которых определена логарифмическая функция, то есть при $x+y-1>0$, $y>1-x$. Таким образом, областью определения данной функции является множество точек, лежащих выше прямой $y=1-x$(рис.24).

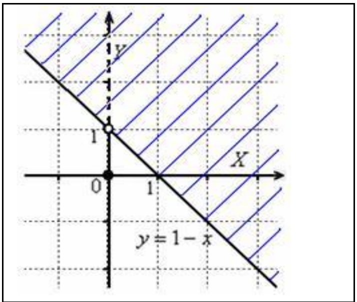


Рис. 24

Графиком функции двух переменных $z = f(x;y)$в прямоугольной системе координат Oxy называется геометрическое место точек в трехмерном пространстве, координаты которых$(x;y;z)$ удовлетворяют уравнению $z = f(x;y)$. Таким образом, если графиком функции одной переменной $y = f(x)$является некоторая линия

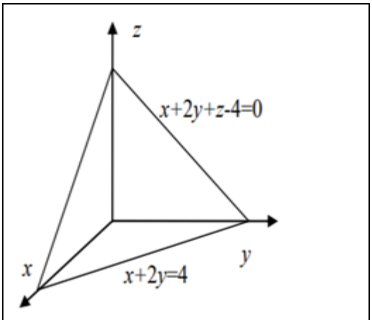


Рис. 25

на плоскости, например парабола, то графиком функции двух переменных $z = f(x;y)$ является

некоторая поверхность, которая располагается в трёхмерном пространстве R^3 . С элементарным примером поверхности мы хорошо

знакомы ещё из курса аналитической геометрии – это плоскость.

Например, графиком функции $z = 4-x-2y$ или $x+2y+z=4$,что то же самое, является плоскость (рис.25), а графиком функции $z = x^2+y^2$ является параболоид вращения (рис.26).

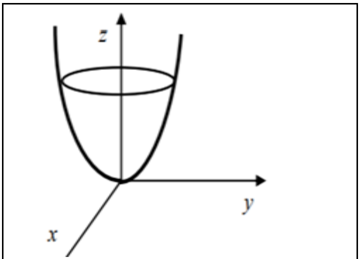


Рис. 26

Замечание: как мы уже знаем графиком функции двух переменных, является поверхность, но иногда график функции может представлять собой, пространственную прямую, либо даже единственную точку.

Задания для самостоятельного решения.

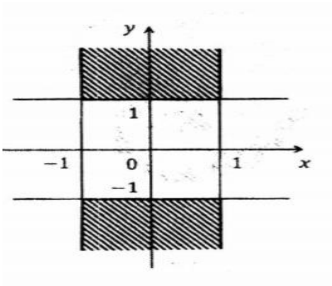
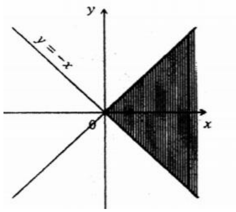
11. Найти область определения функции $z = f(x;y)$.

1	$z = 2 - x - y$	**11**	$z = \sqrt{2 - x^2 - 2y^2}$
2	$z = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$	**12**	$z = ln(3x - y^2)$
3	$z = ln(xy)$	**13**	$z = arcsin(2x + y)$
4	$z = ln\left(1 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}\right)$	**14**	$z = \dfrac{1}{9 - 9x^2 - 9y^2}$
5	$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$	**15**	$z = \sqrt{x^2 + y}$
6	$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$	**16**	$z = \dfrac{1}{4 - x^2 - 4y^2}$
7	$z = \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{y^2 - 1}$	**17**	$z = ln(x^2 + 2y^2 - 2)$
8	$z = \sqrt{x - y} - \sqrt{y + x}$	**18**	$z = \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{xy}$
9	$z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$	**19**	$z = \dfrac{x + 5}{\sqrt{x + y}}$
10	$z = arcsin\left(\dfrac{x}{y}\right)$	**20**	$z = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$

Ответы:

11.1. вся координатная плоскость, то есть $(x;y) \in R^2$.	**11.11.** $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} \leq 1$- внутренняя часть эллипса $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$,включая граничные точки.

11.2. $x^2+y^2<1$ –все точки, лежащие внутри круга с центром в точке (0;0) радиусом единичной длины, за исключением граничной области.	**11.12.** $y^2>3x$ -все точки плоскости, лежащие вне параболы $y^2=3x$.
11.3. $x,y>0$ или $x,y<0$ все точки плоскости, лежащие в первой и третьей четверти.	**11.13.** $\frac{-1-y}{2}\leq x\leq\frac{1-y}{2}$ -часть области, заключённая между двумя прямыми $y=1-2x, y=-1-2x$.
11.4. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}<1$ – внутренняя часть эллипса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$,с полуосями $a=2, b=3$, за исключением граничной области.	**11.14.** $x^2+y^2\neq 1$-все точки плоскости Oxy за исключение точек, лежащих на окружности $x^2+y^2=1$.
11.5. $x^2+y^2\leq 4$ – точки, лежащие внутри окружности $x^2+y^2=4$ и на её границе.	**11.15.** $y\geq -x^2$ -все точки плоскости Oxy, лежащие на параболе и вне параболы $y=-x^2$.
11.6. $x^2+y^2\geq 9$ – точки, лежащие на границе окружности $x^2+y^2=9$ и вне её.	**11.16.** $4-x^2-4y^2\neq 0$-все точки плоскости Oxy за исключение точек, лежащих на эллипсе $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$.

<table>
<tr><td>11.7. $\begin{cases} x\epsilon[-1;1] \\ y\epsilon(-\infty;1]\cup[1;+\infty) \end{cases}$
</td><td>11.17. $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{1}\geq 1$-точки,
лежащие на границе и вне эллипса $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{1}=1$.</td></tr>
<tr><td>11.8. $\begin{cases} y\leq x \\ y\geq -x \end{cases}$</td><td>11.18. $x>0, y>0$- все точки плоскости, лежащие в первой четверти.</td></tr>
<tr><td>11.9. $x\geq\sqrt{y}$- все точки, лежащие правее ветви параболы $y=x^2$.</td><td>11.19. $y>-x$ -все точки плоскости, лежащие выше прямой $y=-x$.</td></tr>
<tr><td>11.10. $-y\leq x\leq y$ -часть области, заключённая между двумя прямыми $y=-x, y=x$.</td><td>11.20. $x^2+y^2\neq 0$- все точки плоскости Oxy за исключение точки $O(0;0)$.</td></tr>
</table>

3.2. Линии уровня.

Пусть имеется функция $z=f(x;y)$ график которой представляет собой некоторую поверхность. Построение графиков функций двух переменных во многих случаях весьма затруднительно. Поэтому рассмотрим возможность изображения графика функций двух переменных, основанный на сечении поверхности $z = f(x;y)$ плоскостью $z = C$, где C – любое число (эта плоскость параллельна плоскости Oxy и пересекает ось z в точке $z = C$). Спроецируем линию пересечения этой плоскости с поверхностью $z = f(x;y)$на плоскость Oxy и получим так называемую линию уровня функции $z = f(x;y)$.

Таким образом, **линией уровня функции** $z = f(x;y)$называется множество точек $(x;y)$плоскости Oxy, в которых функция принимает одно и то же постоянное значение C, то есть $z = C$.

Придавая различные значения параметру C , можно получить множество линий уровня функции $z = f(x;y)$.

Для лучшего понимания этого термина будем сравнивать ось Oz с высотой: чем больше значение z – тем больше высота, чем меньше значение z – тем высота меньше.

Образно говоря, **линии уровня** – это горизонтальные «срезы» поверхности на различных высотах. Данные сечения проводятся плоскостями $z = C$, после чего проецируются на плоскость. Таким образом, линии уровня помогают выяснить, как выглядит та или иная поверхность.

Пример 3.2. Записать уравнение семейства линий уровня функции $z = (x-2)^2 + (y-1)^2$.Выделить линию уровня, проходящую через точку$M_0(1;1)$. Исследовать форму данной поверхности с помощью линий уровня.

Решение.

Исходя из определения уравнение линии уровня принимает вид$(x-2)^2+(y-1)^2=C$.Выделим линию уровня, проходящую

через точку $M_0(1;1)$, то есть найдём значение постоянной C,

при $x=1, y=1$:

$(1-2)^2+(1-1)^2=C, C=1;$

Тогда уравнение линии уровня, проходящей через точку $M_0(1;1)$,

принимает вид:
$(x-2)^2+(y-1)^2=1$ –уравнение окружности с центром в точ-

ке$(2;1)$, с радиусом $R=1$.

Исследуем форму данной поверхности с помощью уравнений линий уровня $(x-2)^2+(y-1)^2=C$.Очевидно, что в данном случае

$z=C\geq 0$ -высота не может принимать отрицательные значения,

так как сумма квадратов не может быть отрицательна. Таким образом, поверхность располагается в верхнем полупространстве. Поскольку в условии не сказано, на каких конкретно высотах нужно «срезать» линии уровня, то мы можем выбрать несколько значений z на своё усмотрение, для удобства возьмём $z=0{,}1{,}9{,}81$.

Заметим, что все «срезы» проецируются на плоскость Oxy, и по-

этому у точек записываются две, а не три координаты.
Исследуем поверхность на нулевой высоте, для этого поставим значение $z=C=0$ в равенство$(x-2)^2+(y-1)^2=z$:

$(x-2)^2+(y-1)^2=C,$

$(x-2)^2+(y-1)^2=0,$

$(x-2)^2=0, (y-1)^2=0,$

$x-2=0$, $y-1=0$, то есть $x=2$, $y=1$, следовательно, при $C=0$ линия уровня представляет собой точку $(2;1)$.

Для высоты $z=1$ линия уровня $z=C$ представляет собой окружность $(x-2)^2+(y-1)^2=1^2$ с центром в точке $(2;1)$ единичного радиуса.

Теперь выберем, например, плоскость $z=9$ и «разрезаем ей» исследуемую поверхность $(x-2)^2+(y-1)^2=z$ (подставляем в исходное уравнение $z=9$):

$$(x-2)^2+(y-1)^2=9;$$

Таким образом, для высоты $z=9$ поверхности $z=(x-2)^2+(y-1)^2$ линия уровня представляет собой окружность с центром в точке $(2;1)$, радиуса 3 .

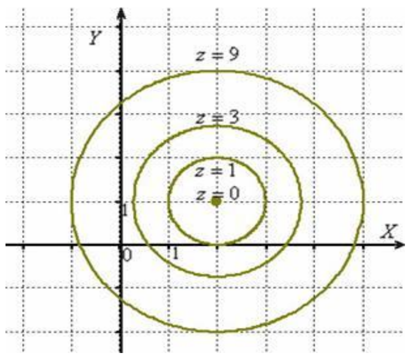


Рис. 27

Давайте построим ещё одну линию уровня, например, для $z=81$:

$(x-2)^2+(y-1)^2=81$ – окружность с центром в точке $(2;1)$ с радиусом 9.

Линии уровня, располагаются на плоскости, каждая линия подписывается – какой высоте она соответствует. Изобразим то, что у нас получилось (рис.27).

Нетрудно понять, что другие линии уровня рассматриваемой поверхности тоже представляют собой окружности, при этом, чем выше мы поднимаемся (увеличиваем значение «зет») – тем больше становится радиус. Таким образом, исходная поверхность представляет собой бесконечную чашу, вершина которой расположена на плоскости $z = 0$.

Пример 3.3. Найти линии уровня функции $z = \frac{x}{\sqrt{y}}$.

Решение.

Линия уровня $z = C$ определяется уравнением

$C = \frac{x}{\sqrt{y}}$или $x = C\sqrt{y}$- полу парабола, расположенная в первой

четверти плоскости Oxy при $C > 0$,во второй четверти при $C < 0$.

При $C = 0$,получим $x = 0$-полуось $Oy(y > 0, x = 0)$.

Замечание: аналогично определяются поверхности уровня функции трех переменных $u = f(x; y; z)$. Поверхностью уровня функции $u = f(x; y; z)$ называется поверхность $f(x; y; z)$, в точках которой функция принимает одно и то же значение $u = C$.

Пример 3.4. Найти поверхности уровня функции $u = x^2 - y^2 + z^2$.

Решение.

Уравнение семейства поверхностей уровня имеет вид $x^2 - y^2 + z^2 = C$. Если $C = 0$, то получаем $x^2 - y^2 + z^2 = 0$- конус; если $C < 0$,то $x^2 - y^2 + z^2 = C$ –семейство двуполостных гиперболоидов.

Замечание: в дальнейшем ограничимся рассмотрением функций двух переменных, так как все основные понятия и теоремы, сформулированные для функций двух переменных, легко обобщаются на случай большего числа переменных.

3.3. Предел функции двух переменных. Непрерывность функции двух переменных.

Понятия предела и непрерывности функции двух переменных аналогичны случаю одной переменной. Прежде всего, введем понятие δ- окрестности данной точки $M_0(x_0;y_0)$. Пусть $M_0(x_0;y_0)$ произвольная точка плоскости, под δ –окрестностью точки $M_0(x_0;y_0)$ понимается множество всех точек плоскости $N(x;y)$, координаты которых удовлетворяют неравенству $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$. Другими словами –окрестность точки $M_0(x_0;y_0)$ – это все внутренние точки круга с центром в точке $M_0(x_0;y_0)$ и радиусом δ(рис.28).

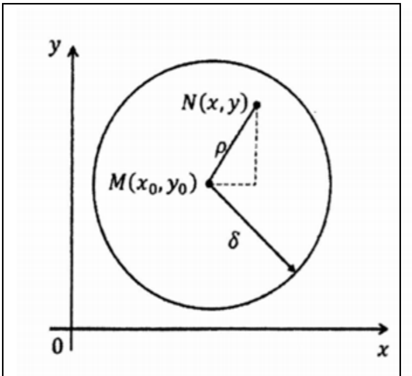


Рис. 28

Для дальнейшего удобства введём обозначение:

$\rho=|\overline{M_0N}|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ -расстояние между точками $N(x;y)$и $M_0(x_0;y_0)$.

Тогда для нахождения точки $N(x;y)$ внутри круга радиуса δ будет выполняться условие $\rho<\delta$.

Пусть функция $z=f(x;y)$определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$ кроме, быть может, самой этой точки.

Число a называется **пределом функции** $z=f(x;y)$при $x\to x_0$ и $y\to y_0$ (или $N(x;y)\to M_0(x_0;y_0)$), если для любого числа $\varepsilon>0$ найдётся число $\delta>0$, зависящее от ε, такое, что для всех точек $N(x;y)$,отличных от точки $M_0(x_0;y_0)$ и отстоящих от этой точки на расстояние ρ $(0<\rho<\delta)$ выполняется неравенство $|f(x;y) - a| < \varepsilon$.

Обозначение: $a = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y)$.

Геометрический смысл предела функции двух переменных.

Дадим геометрическую интерпретацию понятия предела в трехмерном пространстве.

Рассмотрим функцию $z = f(x;y)$ определенную на всей плоскости Oxy, причем $f(x_0;y_0) = a$. Спроектируем точку A, лежащую на графике функции $z = f(x;y)$ на плоскость Oxy. Соответствующую точку $M_0(x_0;y_0)$ на плоскости выберем центром такого радиуса δ, все точки которого будут находиться между линиями уровня. Тогда для всех точек $N(x;y)$ этого круга, отличных от точки $M_0(x_0;y_0)$ и отстоящих от этой точки на расстояние ρ $(0 < \rho < \delta)$, выполняется неравенство $|f(x;y) - a| < \varepsilon$.

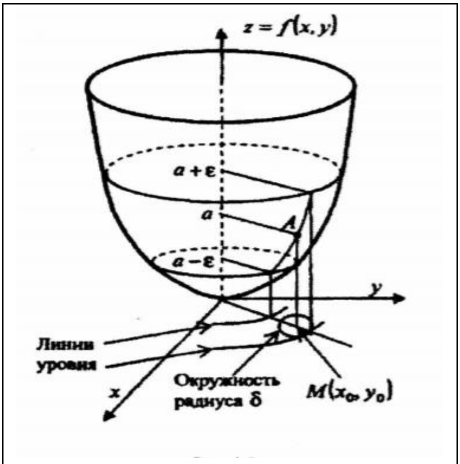


Рис. 29

Таким образом, $a = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y)$.

Другими словами, **геометрический смысл** предела функции двух переменных состоит в следующем. Каково бы ни было произвольное число $\varepsilon > 0$, найдется число δ -окрестность точки $M_0(x_0;y_0)$, что во всех ее точках $N(x;y)$, отличных от $M_0(x_0; y_0)$, аппликаты (z) соответствующих точек поверхности $z = f(x; y)$ отличаются от числа a по модулю меньше, чем на ε .

Замечание:
1)Вычисление пределов функции двух переменных является более сложно задачей по сравнению с вычислением пределов функций одной переменной. Это связано с тем, что точка N может стремиться к точке M_0 по любому направлению на плоскости в отличие от функции одной переменной, где переменная x может стремиться к числу $x_0(x \to x_0)$ на числовой прямой только справа или слева. Получающиеся при этом многочисленные пределы функции двух переменных должны совпадать друг с другом. В этом случае, легче доказать отсутствие предела функции $z = f(x; y)$ при $N(x; y) \to M_0(x_0; y_0)$,для этого достаточно выбрать два таких направления, движение по которым приводит к различным пределам.
2)Предел функции двух переменных обладает свойствами, аналогичными свойствам предела функции одной переменной. Это означает, что справедливы следующие утверждения: если функции $f(M)$ и $g(M)$ определены на множестве D и имеют в точке $M_0(x_0; y_0)$ этого множества пределы a и b В соответственно, то и функции $f(M) \pm g(M), f(M) \cdot g(M)$, $\frac{f(M)}{g(M)}, (g(M) \neq 0)$ имеют в точке M_0 пределы, которые соответственно равны $a \pm b, a \cdot b, \frac{a}{b}(b \neq 0)$.

Пример 3.5. Найти предел:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$;**б)** $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}\frac{x^3+y^3}{x^4+y^4}$;**в)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$.

Решение.

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\left[\frac{0}{0}\right]$-числитель и знаменатель обращается в ноль в единственной точке$(0;0)$,выясним существует ли там предел?

Проведём небольшое исследование. Будем приближаться к точке $O(0;0)$ по прямой $y=kx$, где k— некоторое число. Тогда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-k^2)}{x^2(1+k^2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-k^2}{1+k^2}=\frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

Функция $z=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ в точке $O(0;0)$предела не имеет, так как при разных значениях k функция имеет различные предельные значения;

б)

$$\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}\frac{x^3+y^3}{x^4+y^4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y=kx}}\frac{x^3+k^3x^3}{x^4+k^4x^4}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^4(\frac{1}{x}+\frac{k^3}{x})}{x^4(1+k^4)}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{k^3}{x}}{1+k^4}=\frac{0}{1+k^4}=0,$$

так как при различных значениях k, функция имеет единственное предельное значение 0, то предел функции $z=\frac{x^3+y^3}{x^4+y^4}$, при $x\to +\infty, y\to +\infty$ равен нулю;

в)

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{kx^2+4}}{kx^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(2-\sqrt{kx^2+4}\right)\left(2+\sqrt{kx^2+4}\right)}{kx^2\left(2+\sqrt{kx^2+4}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2^2-\left(\sqrt{kx^2+4}\right)^2}{kx^2\left(2+\sqrt{kx^2+4}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4-kx^2-4}{kx^2\left(2+\sqrt{kx^2+4}\right)}=-\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{kx^2\left(2+\sqrt{kx^2+4}\right)}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\sqrt{kx^2+4}}=-\frac{1}{4}.$$

Непрерывность и точки разрыва.

Функция $z = f(x;y)$ называется **непрерывной в точке**

$M_0(x_0;y_0)$ если она определена в этой точке и

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) = f(x_0;y_0)$ (или $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$).

Функция $z = f(x;y)$ называется **непрерывной в области** D,

если она непрерывна в каждой точке области D .

Область непрерывности элементарной функции $z = f(x;y)$ совпадает с областью ее определения.

Точки, в которых непрерывность нарушается (не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности функции в точке), называются **точками разрыва этой функции.** Точки разрыва функции $z = f(x;y)$ могут образовывать целые линии разрыва, а иногда и более сложные геометрические образы. Так, например, функция $z = \frac{3}{y+x}$ имеет линию разрыва $y = -x$.

Можно дать другое, равносильное приведенному выше, определению непрерывности функции $z = f(x;y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$.

Обозначим $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta z = f(x;y) - f(x_0;y_0)$.

Величины Δx и Δy называются приращениями аргументов x

и y , а Δz — полным приращением функции $f(x;y)$ в точке

$M_0(x_0;y_0)$.

Функция $z = f(x; y)$называется **непрерывной в точке**

$M_0(x_0; y_0)$, если выполняется равенство $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$, то есть пол-

ное приращение функции в этой точке стремится к нулю, когда приращения ее аргументов x и y стремится к нулю.

Пример 3.6. Найти точки разрыва функции:
а) $z = \frac{x^3 y}{x^2 - y}$;**б)** $z = \frac{x-y}{x+y}$;**в)** $z = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$.

Решение.

а) Функция потеряет смысл, если знаменатель обратится в ноль, то есть, когда$x^2 - y = 0$ или $y = x^2$. Следовательно, данная функ-

ция имеет линией разрыва параболу $y = x^2$;

б) Функция потеряет смысл, если знаменатель обратится в ноль, то есть, когда $x + y = 0$ или $y = -x$. Таким образом, данная функ-

ция имеет линией разрыва прямую $y = -x$.

в) Функция потеряет смысл, если знаменатель обратится в ноль $x^4 + y^4 = 0$, то есть при $x = 0$ и $y = 0$.

Следовательно, данная функция имеет разрыв в точке O (0;0).

Замечание: пользуясь определением непрерывности и теоремами о пределах, можно так же доказать, что арифметические операции над непрерывными функциями и построение сложной функции из непрерывных функций приводит к непрерывным функциям.

3.4. Частные производные функций нескольких переменных и их геометрический смысл.

Пусть задана функция $z = f(x; y)$.Так как x, y - независимые переменные, то одна из них может изменяться, а другая сохранять своё значение.

Если одному из аргументов функции $z = f(x;y)$ придать приращение, а другой аргумент не изменять, то функция получит частное приращение по одному из аргументов.

Например, дадим независимой переменной x приращение Δx,сохраняя значение y неизменным, тогда z получит приращение, которое называется частным приращением функции z по переменной x.

Обозначение:

$\boldsymbol{d_x z = \Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x;y)}$**(3.1)- частное приращение функции z по переменной x.**

Аналогично получаем частное приращение функции z по переменной y(3.2):

$\boldsymbol{d_y z = \Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x;y)}$**(3.2)**

Частной производной функции нескольких переменных по одному из её аргументов называется предел отношения частного приращения функции по этому аргументу к соответствующему приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

Обозначения:

$\boldsymbol{\frac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}}$ **(3.3)-частная производная функции z по переменной x;**

$\boldsymbol{\frac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}}$ **(3.4)-частная производная функции z по переменной y.**

Таким образом, частные производные от функции нескольких переменных являются «производными в направлении координатных осей». Например, при нахождении $\frac{\partial z}{\partial x}$ приращение получает переменная x, изменяясь от x до $x + \Delta x$ вдоль оси Ox.

Замечание:

1)для обозначения частных производных могут быть использованы и другие обозначения, а именно

$\boldsymbol{\frac{\partial z}{\partial x}, z'_x, \frac{\partial f}{\partial x}, f'_x}$ – частная производная функции z по переменной x;

$\boldsymbol{\frac{\partial z}{\partial y}, z'_y, \frac{\partial f}{\partial y}, f'_y}$ – –частная про- изводная функции z по переменной y;

2) если необходимо, в скобках указывается точка $(x_0; y_0)$, в которой вычислены частные производные, это записывается следующим образом: $f'_x\,|_{(x_0;y_0)}$ или $f'_x(x_0; y_0)$.

Итак, для функции двух переменных $z = f(x; y)$ рассматриваются частные производные по переменной x и по переменной y. Из определения частных производных следует правило их нахождения: частная производная по x есть обыкновенная производная по x функции $f(x; y)$ вычисленная при условии, что $y = const$, при этом используются обычные правила и формулы дифференцирования функции одной переменной, аналогично вычисляется частная производная по переменной y.

Если рассматривается функция трех переменных, например $u = f(x; y; z)$, то u'_x вычисляют, полагая $y, z = const$; u'_y вычисляют при $x, z = const$; u'_z вычисляют при $x, y = const$.

Пример 3.7. Найти частные производные функции: **а)** $z = x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1$; **б)** $z = cos\frac{x^2}{y}$; **в)** $z = arctg\frac{x+y}{x-y}$;
г) $u = (sinx)^{yz}$.

Решение.

а) Находим частную производную функции z

по переменной x, учитывая, что $y = const$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1)'_x = (x^4)'_x - 2y^3(x^2)'_x + (y^5 + 1)'_x =$$
$$= 4x^3 - 4xy^3;$$

Находим частную производную функции z
по переменной y, учитывая, что $x = const$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1)'_y = (x^4)'_y - 2x^2(y^3)'_y + (y^5)'_y + (1)'_y =$$
$$= -6x^2y^2 + 5y^4;$$

б) $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(cos\frac{x^2}{y}\right)'_x = -sin\frac{x^2}{y}\cdot\left(\frac{x^2}{y}\right)'_x = -sin\frac{x^2}{y}\cdot\frac{1}{y}\cdot(x^2)'_x = -\frac{2x}{y}sin\frac{x^2}{y}$;

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(cos\frac{x^2}{y}\right)'_y = -sin\frac{x^2}{y}\cdot\left(\frac{x^2}{y}\right)'_y = -sin\frac{x^2}{y}\cdot x^2\cdot\left(\frac{1}{y}\right)'_y =$$

$$= -sin\frac{x^2}{y}\cdot x^2\cdot(y^{-1})'_y = -sin\frac{x^2}{y}\cdot x^2\cdot(-y^{-2}) = \left(\frac{x}{y}\right)^2 sin\frac{x^2}{y};$$

в) $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(arctg\frac{x+y}{x-y}\right)'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x+y}{x-y}\right)'_x = \frac{1}{\frac{(x-y)^2+(x+y)^2}{(x-y)^2}}\cdot$

$$\cdot\frac{(x+y)'_x\cdot(x-y)-(x-y)'_x(x+y)}{(x-y)^2} = \frac{(x-y)^2}{(x-y)^2+(x+y)^2}\cdot\frac{x-y-(x+y)}{(x-y)^2} =$$

$$= -\frac{2y}{2x^2+2y^2} = -\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(arctg\frac{x+y}{x-y}\right)'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x+y}{x-y}\right)'_y =$$

$$= \frac{1}{\frac{(x-y)^2+(x+y)^2}{(x-y)^2}}\cdot\frac{(x+y)'_y\cdot(x-y)-(x-y)'_y\cdot(x+y)}{(x-y)^2} =$$

$$= \frac{(x-y)^2}{(x-y)^2+(x+y)^2}\cdot\frac{x-y-(-1)(x+y)}{(x-y)^2} = \frac{2x}{2x^2+2y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

г) Находим частную производную функции u по переменной x ,учитывая, что $y, z = const$,при фиксированном значении y, z производная функции $u = (sin)^{yz}$ по переменной x находится как производная степенной функции $(u^n)' = nu^{n-1}\cdot u'$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ((sinx)^{yz})'_x = yz(sinx)^{yz-1}(sinx)'_x =$$

$$= yz(sinx)^{yz-1}cosx;$$

При фиксированном значении x, z производная функции $u = (sinx)^{yz}$ по переменной y находится как производная показательной функции$(a^u)' = a^u\cdot lna\cdot u'$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = ((sinx)^{yz})'_y = (sinx)^{yz}\cdot ln(sinx)\cdot(yz)'_y =$$

$$= (sinx)^{yz}\cdot ln(sinx)z\cdot(y)'_y = (sinx)^{yz}\cdot ln(sinx)\cdot z;$$

При фиксированном значении x, y производная функции

$u = (sinx)^{yz}$ по переменной z находится как производная показательной функции$(a^u)' = a^u \cdot lna \cdot u'$:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = ((sinx)^{yz})'_z = (sinx)^{yz} \cdot ln(sinx) \cdot (yz)'_z =$$

$$= (sinx)^{yz} \cdot ln(sinx) \cdot y(z)'_z = (sinx)^{yz} \cdot ln(sinx) \cdot y.$$

Пример 3.8. Показать, что функция $u = x^3 + 7x^2y + 2xz^2 - 3y^3 + 4xyz + z^3$ удовлетворяет уравнению $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 3u$.

Решение

Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x^3 + 7x^2y + 2xz^2 - 3y^3 + 4xyz + z^3)'_x =$$
$$= 3x^2 + 14xy + 2z^2 + 4yz;$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = (x^3 + 7x^2y + 2xz^2 - 3y^3 + 4xyz + z^3)'_y =$$
$$= 7x^2 - 9y^2 + 4xz;$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = (x^3 + 7x^2y + 2xz^2 - 3y^3 + 4xyz + z^3)'_z =$$
$$= 4xz + 4xy + 3z^2;$$

Умножая обе части первого найденного равенства на x, второго - на y ,третьего на z и складывая их, получим:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = x(3x^2 + 14xy + 2z^2 + 4yz) +$$
$$+y(7x^2 - 9y^2 + 4xz) + z(4xz + 4xy + 3z^2) =$$
$$= 3x^3 + 14x^2y + 2xz^2 + 4xyz + 7x^2y - 9y^3 +$$
$$+4xyz + 4xz^2 + 4xyz + 3z^3 = 3x^3 + 21x^2y +$$
$$+6xz^2 - 9y^3 + 12xyz + 3z^3 = 3(x^3 + 7x^2y +$$
$$= +2xz^2 - 3y^3 + 4xyz + z^3) = 3u.$$

Таким образом, $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 3u$,что и требовалось показать.

Геометрический смысл частных производных функции двух переменных $z = f(x;y)$.

Как известно, графиком функции является некоторая поверхность. Графиком функции $z = f(x;y_0)$ является линия пересечения этой поверхности с плоскостью $y = y_0$ (плоскость параллельная плоскости Oxz).

Исходя из геометрического смысла производной для функции одной переменной, заключаем, что $f'_x(x_0;y_0) = tg\alpha$, где α — угол между осью Ox и касательной, проведенной к функции $z = f(x;y_0)$в точке $M_0(x_0;y_0;f(x_0;y_0))$(рис. 30).

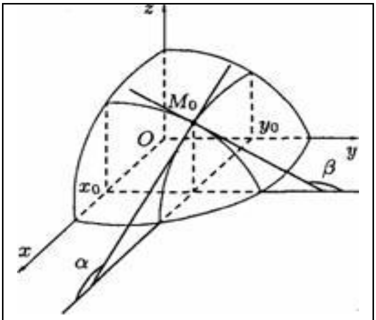


Рис. 30

Аналогично, $f'_y(x_0;y_0) = tg\beta$.

Задания для самостоятельного решения.

12. Найти частные производные первого порядка ФНП по каждому аргументу:

1	$z = \frac{x}{y^3} + \frac{y}{x^3} - \frac{1}{6x^2y}$	**11**	$z = \sqrt{x^2 + y^2}$
2	$z = \frac{xy}{x - y}$	**12**	$z = x^2 - 2x\sqrt{y}$
3	$z = ln\left(\frac{x}{y}\right)$	**13**	$u = \frac{y^3 - 2x^3}{lnz}$
4	$u = x^{\frac{y}{z}}$	**14**	$z = x^y + y^x$

5	$z = xyln(x+y)$	**15**	$z = e^{x^3-3y^2}$
6	$z = x^2 + sin(xy)$	**16**	$z = \dfrac{x}{x^2+y^2}$
7	$z = e^{\frac{x-4}{y-2}}$	**17**	$z = arctgxy$
8	$u = e^{x^2+y^2} \cdot sin^2 z$	**18**	$z = xe^{x-2y}$
9	$z = x^2 ctg\left(\dfrac{xy}{2}\right)$	**19**	$u = \dfrac{3^{x-y}}{cos2z}$
10	$u = 2^{x-2y+3z}$	**20**	$u = arcsin\dfrac{xz}{\sqrt{y}}$

Ответы:

12.1. $z'_x = \frac{1}{y^3} - \frac{3y}{x^4} + \frac{1}{3x^3y}$; $z'_y = -\dfrac{3x}{y^4} + \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{6x^2y^2}$.	**12.11.** $z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $z'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
12.2. $z'_x = -\frac{y^2}{(x-y)^2}$; $z'_y = \dfrac{x^2}{(x-y)^2}$.	**12.12.** $z'_x = 2(x - \sqrt{y})$; $z'_y = -\dfrac{x}{\sqrt{y}}$.
12.3. $z'_x = \frac{1}{x}$; $z'_y = -\frac{1}{y}$.	**12.13.** $u'_x = -\frac{6x^2}{lnz}$; $u'_y = \frac{3y^2}{lnz}$; $u'_z = \frac{2x^3-y^3}{zln^2z}$.
12.4. $u'_x = \frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$; $u'_y = \dfrac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}lnx$; $u'_z = -\dfrac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}lnx$.	**12.14.** $z'_x = yx^{y-1} + y^x lny$; $z'_y = x^y lnx + xy^{x-1}$.

12.5. $z'_x = yln(x+y) + \frac{xy}{x+y}$; $z'_y = xln(x+y) + \frac{xy}{x+y}$.	**12.15.** $z'_x = 3x^2e^{x^3-3y^2}$; $z'_y = -6ye^{x^3-3y^2}$.
12.6. $z'_x = 2x + ycos(xy)$; $z'_y = xcos(xy)$.	**12.16.** $z'_x = \frac{3x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$; $z'_y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$.
12.7. $z'_x = \frac{1}{y-2}e^{\frac{x-4}{y-2}}$; $z'_y = \frac{4-x}{(y-2)^2}e^{\frac{x-4}{y-2}}$.	**12.17.** $z'_x = \frac{y}{1+(xy)^2}$; $z'_y = \frac{x}{1+(xy)^2}$.
12.8. $u'_x = 2xe^{x^2+y^2} \cdot sin^2z$; $u'_y = 2ye^{x^2+y^2} \cdot sin^2z$; $u'_z = e^{x^2+y^2} \cdot sin2z$.	**12.18.** $z'_x = (1+x)e^{x-2y}$; $z'_y = -2xe^{x-2y}$.
12.9. $z'_x = 2xctg\left(\frac{xy}{2}\right) - \frac{x^2y}{2sin^2\left(\frac{xy}{2}\right)}$; $z'_y = -\frac{x^3}{2sin^2\left(\frac{xy}{2}\right)}$.	**12.19.** $u'_x = \frac{3^{x-y}ln3}{cos2z}$; $u'_y = -\frac{3^{x-y}ln3}{cos2z}$; $u'_z = \frac{2\cdot 3^{x-y}tg2z}{cos2z}$.
12.10. $u'_x = 2^{x-2y+3z}\,ln2$; $u'_y = -2^{x-2y+3z+1}\,ln2$; $u'_z = 2^{x-2y+3z}3\,ln2$.	**12.20.** $u'_x = \frac{z}{\sqrt{y-(xz)^2}}$; $u'_y = -\frac{xz}{2y\sqrt{y-(xz)^2}}$; $u'_z = \frac{x}{\sqrt{y-(xz)^2}}$.

3.5. Полное приращение и полный дифференциал функции $z = f(x;y)$.

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x;y)$заданную в некоторой области. Пусть $M_0(x_0;y_0)$— точка этой области. Найдем изменение этой функции при переходе из точки $M_0(x_0;y_0)$ в точку $M(x;y)$ той же области.

Разность значений функции в точках M и M_0 называется **полным приращением** функции $z=f(x;y)$.

Обозначение: Δz или $\Delta f(x;y)$

Таким образом, $\Delta z=f(M)-f(M_0)=f(x;y)-f(x_0;y_0)$.

Обозначим приращения аргументов x и y при переходе из точки M_0 в точку M через Δx и Δy соответственно: $\Delta x=x-x_0, \Delta y=y-y_0$, откуда $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$,тогда $\Delta z=f(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)-f(x_0;y_0)$.

Функция $z=f(x;y)$ называется **дифференцируемой** в точке $M(x;y)$,если её полное приращение в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta z=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y \quad \textbf{(3.5)},$$

где $\frac{\partial z}{\partial x}=A$, $\frac{\partial z}{\partial y}=B$, $\alpha=\alpha(\Delta x;\Delta y)\to 0$ и $\beta=\beta(\Delta x;\Delta y)\to 0$

при $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0$.

Сумма первых двух слагаемых $A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y$ в равенстве

$\Delta z=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y$ представляет собой **главную часть приращения функции** $z=f(x;y)$и называется **полным дифференциалом** этой функции и обозначается

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\Delta y \quad \textbf{(3.6)}$$

Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, то есть $dx=\Delta x$ и $dy=\Delta y$, таким образом, данное

равенство можно переписать в виде (3.7):

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \quad \textbf{(3.7)}$$

Полный дифференциал функции $z=f(x;y)$в точке $M_0(x_0;y_0)$ вычисляется по следующей формуле:

$$dz(M_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(M_0)dx + \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)dy \quad \textbf{(3.8)}$$

Замечания:

1) Аналогично вычисляется полный дифференциал функции трех аргументов, то есть по формуле (3.9):

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \quad \textbf{(3.9)}$$

2) Арифметические свойства и правила исчисления дифференциалов функции одной переменной сохраняются и для дифференциалов функции двух (и большего числа) переменных.

Теорема 3.1. Для того, чтобы функция $z = f(x; y)$ была дифференцируемой в данной точке, достаточно, чтобы она обладала частными производными, непрерывными в этой точке.

Примем теорему 3.1 без доказательств.

Таким образом, функция имеет полный дифференциал в случае непрерывности её частных производных. Если функция имеет полный дифференциал, то она называется дифференцируемой.

Частный дифференциал функции — это произведение частной производной по одной из независимых переменных на дифференциал этой переменной.

Обозначение:

$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}dx$ **(3.10)**-частный дифференциал функции z по переменной x;

$d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}dy$**(3.11)**-частный дифференциал функции z по переменной y.

Таким образом, **полный дифференциал** — это сумма частных дифференциалов, то есть

$$\boldsymbol{dz = d_x z + d_y z} \text{ (3.12)}$$

Пример 3.9. Для функции $f(x;y) = x^2 + xy - y^2$ найти полное приращение Δz и полный дифференциал dz.

Решение.

$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y) = (x + \Delta x)^2 +$
$+(x + \Delta x) \cdot (y + \Delta y) - (y + \Delta y)^2 - (x^2 + xy - y^2) =$
$= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + xy + x\Delta y + \Delta xy + \Delta x\Delta y - y^2 -$
$-2y\Delta y - \Delta y^2 - x^2 - xy + y^2 = [(2x + y)\Delta x + (x - 2y)\Delta y] +$
$+(\Delta x^2 + \Delta x\Delta y - \Delta y^2)$.

Итак, $\Delta z = [(2x + y)\Delta x + (x - 2y)\Delta y] + (\Delta x^2 + \Delta x\Delta y - \Delta y^2)$- полное приращение,

$dz = (2x + y)\Delta x + (x - 2y)\Delta y$ –полный дифференциал (главная часть приращения функции).

Пример 3.10. Найти значение полного дифференциала dz и полное приращение Δz функции $z = x^2y - y^2x$ в точке $M_0(-1; 1)$при $\Delta x = 0{,}1$ и $\Delta y = -0{,}1$.

Решение.

$\Delta z = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$- полное приращение функции z.

$dz(M_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(M_0)dx + \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)dy$-полный дифференциал функцииz в точке $M_0(x_0; y_0)$.Для того, чтобы вычислить приращение функции в заданной точке $\Delta z = z(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - z(x_0; y_0)$,найдем $z(x_0; y_0)$ и $z(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$:

$z(x_0; y_0) = z(-1; 1) = (-1)^2 \cdot 1 - 1^2(-1) = 2$;

$z(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) = z(-1 + 0{,}1; 1 - 0{,}1) = z(-0{,}9; 0{,}9) =$

$= (-0{,}9)^2 \cdot 0{,}9 - (0{,}9)^2 \cdot (-0{,}9) = 2 \cdot 0{,}81 \cdot 0{,}9 = 1{,}458;$

Таким образом, $\Delta z = 1{,}458 - 2 = -1{,}542$.

Чтобы вычислить полный дифференциал функции$z = x^2y - y^2x$

используем формулу $dz(M_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(M_0)\Delta\, x + \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)\Delta\, y$, для этого

найдем частные производные заданной функции
$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y$, и определим их значения в точке M_0:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2y - y^2x)'_x = y(x^2)'_x - y^2(x)'_x = 2xy - y^2;$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2y - y^2x)'_y = x^2 \cdot (y)'_y - x \cdot (y^2)'_y = x^2 - 2yx;$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = z'_x(-1;1) = 2 \cdot (-1) \cdot 1 - 1^2 = -3;$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = z'_y(-1;1) = (-1)^2 - 2 \cdot 1(-1) = 3.$$
$$dz(M_0) = -3 \cdot\ 0{,}1 +\ 3 \cdot (-0{,}1) = -0{,}6.$$

Пример 3.11. Найти полный дифференциал для следующих функций:
а) $z = xy + \frac{x}{y}$;**б)** $z = x\sin(x+y)$; **в)** $u = \sqrt{x^2 + y - z}$;

г)$u = \arcsin\frac{xz+1}{y^3}$.

Решение.

а) Полный дифференциал состоит из частных производных, поэтому найдём их:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(xy + \frac{x}{y}\right)'_x = y \cdot (x)'_x + \frac{1}{y}(x)'_x = y + \frac{1}{y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(xy+\frac{x}{y}\right)'_y=x\cdot(y)'_y+x\cdot(y^{-1})'_y=x-\frac{x}{y^2};$$

Подставляя полученные значения $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ в формулу

$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ имеем:

$$dz=\left(y+\frac{1}{y}\right)dx+\left(x-\frac{x}{y^2}\right)dy;$$

б)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(xsin(x+y)\right)'_x=(x)'_x\cdot sin(x+y)+x\cdot\left(sin(x+y)\right)'_x=$$

$$=sin(x+y)+xcos(x+y)\cdot(x+y)'_x=sin(x+y)+xcos(x+y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(xsin(x+y)\right)'_y=x\left(sin(x+y)\right)'_y=xcos(x+y)(x+y)'_x=$$

$$=xcos(x+y);$$

$$dz=\left(sin(x+y)+xcos(x+y)\right)dx+\left(xcos(x+y)\right)dy;$$

в) Запишем функцию $u=\sqrt{x^2+y-z}$ трёх переменных в виде $u=(x^2+y-z)^{\frac{1}{2}}$ и найдём частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left((x^2+y-z)^{\frac{1}{2}}\right)'_x=\frac{1}{2}(x^2+y-z)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2+y-z)'_x=$$

$$=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+y-z}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y-z}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left((x^2+y-z)^{\frac{1}{2}}\right)'_y=\frac{1}{2}(x^2+y-z)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2+y-z)'_y=$$

$$=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+y-z}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left((x^2+y-z)^{\frac{1}{2}}\right)'_z=\frac{1}{2}(x^2+y-z)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2+y-z)'_z=$$

$$= -\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+y-z}};$$

$$du = \frac{x}{\sqrt{x^2+y-z}}dx + \frac{1}{2\sqrt{x^2+y-z}}dy - \frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+y-z}}dz \text{ или } du = \frac{2xdx+dy-dz}{2\sqrt{x^2+y-z}};$$

г)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(arcsin\frac{xz+1}{y^3}\right)'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{xz+1}{y^3}\right)^2}}\cdot\left(\frac{xz+1}{y^3}\right)'_x =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{xz+1}{y^3}\right)^2}}\cdot\frac{1}{y^3}(xz+1)'_x = \frac{z}{\sqrt{y^6-(xz+1)^2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(arcsin\frac{xz+1}{y^3}\right)'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{xz+1}{y^3}\right)^2}}\cdot\left(\frac{xz+1}{y^3}\right)'_y =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{xz+1}{y^3}\right)^2}}\cdot(xz+1)(y^{-3})'_y = \frac{-3(xz+1)y^{-4}}{\frac{\sqrt{y^6-(xz+1)^2}}{y^3}} =$$

$$= -\frac{3(xz+1)}{y\cdot\sqrt{y^6-(xz+1)^2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(arcsin\frac{xz+1}{y^3}\right)'_z = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{xz+1}{y^3}\right)^2}}\left(\frac{xz+1}{y^3}\right)'_z =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{xz+1}{y^3}\right)^2}}\cdot\frac{1}{y^3}(xz+1)'_z = \frac{x}{\sqrt{y^6-(xz+1)^2}};$$

$$du = \frac{z}{\sqrt{y^6-(xz+1)^2}}dx - \frac{3(xz+1)}{y\cdot\sqrt{y^6-(xz+1)^2}}dy +$$

$$+\frac{x}{\sqrt{y^6-(xz+1)^2}}dz \text{ или } du = \frac{zydx-3(xz+1)dy+xydz}{y\sqrt{y^6-(xz+1)^2}}.$$

3.6. Применение полного дифференциала функции к приближенным вычислениям.

При достаточно малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$, а значит, при достаточно

малом $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ дифференцируемой

функции $z = f(x;y)$имеет место приближенное равенство $\Delta z \approx dz$

.

Полное приращение имеет вид
$\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x;y)$, следовательно, равен-

ство $\Delta z \approx dz$ можно также переписать в следующем виде:

$$\boldsymbol{f(x+\Delta x; y+\Delta y) \approx f(x;y) + \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y}$$

Данной формулой пользуются при приближённых вычислениях.
Замечание: с помощью полного дифференциала можно найти границы абсолютной и относительной погрешностей в приближенных вычислениях, приближенное значение полного приращения функции и так далее.

Пример 3.12. Вычислить приближенно:
а) $1,02^{\,5,03}$; **б)** $0,98^{\,2,01}$;**в)** $\sqrt{sin^2 1,55 + 9e^{0,015}}$.

Решение.

а) Число $1,02^{\,5,03}$ есть частное значение функции $z = f(x;y) = x^y$,
$1,02^{\,5,03} = (1+0,02)^{5+0,03} = (x+\Delta x)^{y+\Delta y}$, где $x = 1$, $\Delta x = 0,02$, $y = 5$, $\Delta y = 0,03$.
Воспользуемся ранее полученной формулой
$f(x+\Delta x; y+\Delta y) \approx f(x;y) + \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$,тогда

$1,02^{\,5,03} = f(1+0,02; 5+0,03) \approx f(1;5) + \dfrac{\partial z}{\partial x}(1;5)\cdot 0,02 +$

$+\frac{\partial z}{\partial y}(1;5)\cdot 0{,}03$, находим $f(1;5)$ и $\frac{\partial z}{\partial x}(1;5)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1;5)$:

$f(1;5) = 1^5 = 1,$

$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1},$

$\frac{\partial z}{\partial x}(1;5) = 5\cdot 1^4 = 5,$

$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y lnx,$

$\frac{\partial z}{\partial y}(1;5) = 1^5\cdot ln1 = 0.$

Следовательно, $1,02^{\,5{,}03} \approx 1+5\cdot 0{,}02+0\cdot 0{,}03 = 1+0{,}1 = 1{,}1;$

Таким образом, $1,02^{\,5{,}03} \approx 1{,}1$.

Для проверки вычислите, применяя калькулятор.

б) Принимаем $f(x;y) = x^y$,

$0,98^{\,2{,}01} = (1-0{,}02)^{2+0{,}01} = (x+\Delta x)^{y+\Delta y}$, где $x = 1$, $\Delta x = -0{,}02$,

$y = 2$, $\Delta y = 0{,}01$.

Воспользуемся формулой

$f(x+\Delta x; y+\Delta y) \approx f(x;y) + \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$,тогда

$0,98^{\,2{,}01} = f(1-0{,}02;\, 2+0{,}01) \approx$

$\approx f(1;2) + \frac{\partial z}{\partial x}(1;2)\cdot(-0{,}02) + \frac{\partial z}{\partial y}(1;2)\cdot 0{,}01,$

, находим $f(1;2)$ и $\frac{\partial z}{\partial x}(1;2)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1;2)$:

$f(1;2) = 1^2 = 1,$

$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1},$

$\frac{\partial z}{\partial x}(1;2) = 2\cdot 1 = 2,$

$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y lnx,$

$\frac{\partial z}{\partial y}(1;2) = 1^2\cdot ln1 = 0.$

Следовательно, $0,98^{\,2{,}01} \approx 1+2\cdot(-0{,}02)+0\cdot 0{,}01 = 0{,}96.$

в) Принимаем $f(x;y) = \sqrt{sin^2x+9e^y} = (sin^2x+9e^y)^{\frac{1}{2}}$,

$\sqrt{sin^2 0{,}55+9e^{0{,}015}} = \sqrt{sin^2(0+0{,}55)+9e^{0+0{,}015}} =$

$= \sqrt{sin^2(x+\Delta x)+9e^{y+\Delta y}}$, где $x = 0$, $\Delta x = 0{,}55$,

$y = 0$, $\Delta y = 0{,}015$.

Воспользуемся формулой

$f(x+\Delta x; y+\Delta y) \approx f(x;y) + \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$,тогда

$\sqrt{sin^2 0{,}55 + 9e^{0{,}015}} = f(0+0{,}55; 0+0{,}015) \approx$

$\approx f(0;0) + \frac{\partial z}{\partial x}(0;0)\cdot 0{,}55 + \frac{\partial z}{\partial y}(0;0)\cdot 0{,}015,$

, находим $f(0;0)$ и $\frac{\partial z}{\partial x}(0;0)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0;0)$:

$f(0;0) = \sqrt{sin^2 0 + 9e^0} = 3;$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \left((sin^2 x + 9e^y)^{\frac{1}{2}}\right)'_x = \frac{1}{2}(sin^2 x + 9e^y)^{-\frac{1}{2}}\cdot$

$\cdot (sin^2 x + 9e^y)'_x = \frac{2sinxcosx}{2\sqrt{sin^2 x + 9e^y}} = \frac{sinxcosx}{\sqrt{sin^2 x + 9e^y}};$

$\frac{\partial z}{\partial x}(0;0) = 0;$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \left((sin^2 x + 9e^y)^{\frac{1}{2}}\right)'_y = \frac{1}{2}(sin^2 x + 9e^y)^{-\frac{1}{2}}\cdot (sin^2 x + 9e^y)'_y =$

$= \frac{9e^y}{2\sqrt{sin^2 x + 9e^y}};$

$\frac{\partial z}{\partial x}(0;0) = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$ Следовательно,

$\sqrt{sin^2 0{,}55 + 9e^{0{,}015}} \approx 3 + 0\cdot 0{,}55 + 1{,}5\cdot 0{,}015 = 3{,}0225.$

Задания для самостоятельного решения.

13. Найти полные дифференциалы следующих функций:

1	$z = ln\left(1+\frac{x}{y}\right)$	**11**	$z = cos\,(x^5y^2)$
2	$z = x^2y^3$	**12**	$z = x^5 - 2xy^2 + 3xy - x$
3	$z = \frac{x}{y^2}$	**13**	$z = ln\,(x^3+y^3)$
4	$z = \frac{x-y}{x+y}$	**14**	$z = e^x(4y - xy - y^2)$
5	$z = x^3 - 3axy + y^3$	**15**	$v = arctg\frac{u}{t}$

6	$z=\sqrt{x^2-y^2}$	**16**	$u=x^{y^z}$
7	$u=(xy)^z$	**17**	$z=x\sqrt{y}+\dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$
8	$z=ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$	**18**	$z=ln\,tg\dfrac{x}{y}$
9	$z=arctg\dfrac{y}{x}$	**19**	$u=\dfrac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}$
10	$u=sin(x^2+y^2+z^2)$	**20**	$z=(5x^2y-y^3+7)^3$

Ответы:

13.1. $dz=\frac{1}{x+y}\,dx-\frac{x}{y^2+xy}dy$
13.2. $dz=2xy^3\,dx+3x^2y^2dy$
13.3. $dz=\frac{1}{y^2}\,dx-\frac{2x}{y^3}dy$
13.4. $dz=\frac{2(ydx-xdy)}{(x+y)^2}$
13.5. $dz=3((x^2-ay)\,dx+(y^2-ax)dy)$
13.6. $dz=\frac{xdx-ydy}{\sqrt{x^2-y^2}}$
13.7. $du=yz(xy)^{z-1}\,dx+xz(xy)^{z-1}dy+(xy)^z\ln(xy)dz$

13.8. $dz = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2}dy$
13.9. $dz = \frac{xdy-ydx}{\sqrt{x^2+y^2}}$
13.10. $du = 2cos(x^2+y^2+z^2)\cdot(xdx+ydy+zdz)$
13.11. $dz = -x^4ysin(x^5y^2)(5ydx+2xdy)$
13.12. $dz = (5x^4-2y^2+3y-1)dx+(-4xy+3x)dy$
13.13. $dz = \frac{3}{x^3+y^3}(x^2dx+y^2dy)$
13.14. $dz = e^x((3y-xy-y^2)dx+(4x+2y-4)dy)$
13.15. $dv = \frac{t}{u^2+t^2}du - \frac{u}{u^2+t^2}dt$
13.16. $u = y^z x^{y^z-1}dxzy^{z-1}x^{y^z}\ln x\,dy + y^z x^{y^z}\ln x\ln y\,dz$

13.17. $dz = \left(\sqrt{y} - \frac{y}{3\sqrt[3]{x^4}}\right)dx + \left(\frac{x}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dy$
13.18. $dz = \frac{2}{y\sin\frac{2x}{y}}dx - \frac{2x}{y^2\sin\frac{2x}{y}}dy$
13.19. $du = \frac{dx}{\sqrt{y^2+z^2}} - \frac{xydy+xzdz}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}}$
13.20. $dz = 30xy(5x^2y - y^3 + 7)^2dx +$ $+3(5x^2y - y^3 + 7)^2(5x^2 - 3y^2)dy$

3.7. Дифференцирование неявных функций.

Функция $z = f(x; y)$ называется неявной функцией переменных x и y,если она определяется уравнением $\boldsymbol{F(x; y; z) = 0}$, то есть уравнением неразрешённым относительно z.

Например, $z = x^2 + y^2$-явно заданная функция двух переменных x, y;

$arctgz - (x + z)y - 5 = 0$ –неявно заданная функция двух переменных (z не выражено через x, y).

Теорема 3.2. Если функция $F(x; y; z)$ дифференцируема по переменным x, y, z в некоторой пространственной области

и $F_z'(x; y; z) \neq 0$,то уравнение $F(x; y; z) = 0$ определяет однозначную неявную дифференцируе- мую функцию и её частные производные, могут быть найдены по формулам:

$$z'_x = -\frac{F'_x(x;y;z)}{F'_z(x;y;z)},\quad z'_y = -\frac{F'_y(x;y;z)}{F'_z(x;y;z)} \quad \textbf{(3.13)}$$

Доказательство.

Найдём частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявной функции z,заданной уравнением $F(x;y;z)=0$.

Для этого подставим в уравнение $F(x;y;z)=0$ вместо z функцию $f(x;y)$,получим следующее равенство:

$$F\big(x;y;f(x;y)\big)=0;$$

Продифференцировав равенство $F\big(x;y;f(x;y)\big)=0$ по переменной x получим:

$$\frac{\partial}{\partial x}F\big(x;y;f(x;y)\big)=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0, y=const;$$

Выражая из полученного равенства $\frac{\partial z}{\partial x}=z'_x$,учитывая,

что $\frac{\partial F}{\partial x}=F'_x, \frac{\partial F}{\partial z}=F'_z$ имеем:

$F'_x+F'_z\cdot z'_x=0$, отсюда $z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}$;

Продифференцировав равенство $F\big(x;y;f(x;y)\big)=0$ по переменной y получим:

$$\frac{\partial}{\partial y}F\big(x;y;f(x;y)\big)=\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0, x=const;$$

$$F'_y+F'_z\cdot z'_y=0, z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Итак, $z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}$, $z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$,что и требовалось доказать.

Пример 3.13. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и$\frac{\partial z}{\partial y}$, и полный дифференциал dz функции нескольких переменных
$xcosy + ycosz + zcosx - 1 = 0$.

Решение.

Функция $z = f(x; y)$ задана неявно уравнением
$F(x; y; z) = xcosy + ycosz + zcosx - 1 = 0$.
Рассмотрим два способа решения данной задачи:
1 способ :(по формулам,)
Для этого найдем частные производныеF'_x, F'_y, F'_z и подставим в данные формулы:

$$F'_x = (xcosy + ycosz + zcosx - 1)'_x = cosy - zsinx;$$
$$F'_y = (xcosy + ycosz + zcosx - 1)'_y = -xsiny + cosz,$$
$$F'_z = (xcosy + ycosz + zcosx - 1)'_z = cosx - ysinz.$$
$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{cosy - zsinx}{cosx - ysinz} = \frac{zsinx - cosy}{cosx - ysinz};$$
$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-xsiny + cosz,}{cosx - ysinz} = \frac{xsiny - cosz}{cosx - ysinz}.$$

Найдём полный дифференциал dz:

$$dz = z'_x dx + z'_x dx;$$
$$dz = \frac{zsinx - cosy}{cosx - ysinz}dx + \frac{xsiny - cosz}{cosx - ysinz}dy.$$

2 способ:

Вычислим дифференциал от левой и правой частей уравнения $F(x, y, z) = 0$, учитывая, что $d(UV) = dU \cdot V + dV \cdot U$, а
$F(x, y, z) = xcosy + ycosz + zcosx - 1 = 0$ имеем:
$d(xcosy + ycosz + zcosx - 1) = d(0),$
$d(xcosy) + d(ycosz) + d(zcosx) - d(1) = 0,$
$cosydx + xd(cosy) + coszdy + yd(cosz) + cosxdz + zd(cosx) = 0,$
$cosydx - xsinydy + coszdy - ysinzdz + cosxdz - zsinxdx = 0,$
собирая дифференциалы получим:
$(cosy - zsinx)dx + (cosz - xsiny)dy + (cosx - ysinz)dz = 0;$
Таким образом,
$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = (cosy - zsinx)dx + (cosz - xsiny)dy +$
$+(cosx - ysinz)dz = 0$,где $\frac{\partial F}{\partial x} = cosy - zsinx, \frac{\partial F}{\partial y} = cosz - xsiny,$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = cosx - ysinz.$$

Выражая из полученного равенства dz,определяем $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$(cosx - ysinz)dz = -(cosy - zsinx)dx - (cosz - xsiny)dy$$

$dz = \frac{zsinx-cosy}{cosx-ysinz}dx + \frac{xsiny-cosz}{cosx-ysinz}dy$- полный дифференциал исходной функции, следовательно,
$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{zsinx-cosy}{cosx-ysinz}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xsiny-cosz}{cosx-ysinz}$-частные производные.

Результаты совпали, следовательно, решение найдено верно.

Пример 3.14. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функции

заданной неявно уравнением:

а) $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$;**б)** $e^z - xyz = 0$; **в)** $cos2z = y^2 - xe^{\frac{y}{z}}$.

Решение.

а) Обозначим левую часть данного равенства через функцию $F(x;y;z) = x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5$ и найдем её частные производные:

$$F'_x = (x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5)'_x = 2x - 4,$$
$$F'_y = (x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5)'_y = -4y,$$
$$F'_z = (x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5)'_z = 2z + 2;$$

Применяя формулы $z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$, получим:

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2x-4}{2z+2} = \frac{2-x}{z+1};$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-4y}{2z+2} = \frac{2y}{z+2}.$$

б) $F = e^z - xyz$, так как

$$F'_x = (e^z - xyz)'_x = -yz,$$

$$F'_y = (e^z - xyz)'_y = -xz,$$

$$F'_z = (e^z - xyz)'_z = e^z - xy;$$

Учитывая, что по условию $e^z - xyz = 0$ или $e^z = xyz$,что то же самое, имеем:

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{-yz}{e^z - xy} = \frac{yz}{xyz - xy} = \frac{yz}{xy(z-1)} = \frac{z}{x(z-1)};$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-xz}{e^z - xy} = \frac{xz}{xyz - xy} = \frac{xz}{xy(z-1)} = \frac{z}{y(z-1)}.$$

в) Запишем данное уравнение в виде $F(x; y; z) = 0$:

$$cos2z - y^2 + xe^{\frac{y}{z}} = 0.$$

Найдём частные производные функции $F(x; y; z)$:

$$F'_x = \left(cos2z - y^2 + xe^{\frac{y}{z}}\right)'_x = e^{\frac{y}{z}}(x)'_x = e^{\frac{y}{z}},$$

$$F'_y = \left(cos2z - y^2 + xe^{\frac{y}{z}}\right)'_y = -2y + x\left(e^{\frac{y}{z}}\right)'_y = -2y + xe^{\frac{y}{z}}\left(\frac{y}{z}\right)'_y =$$

$$= -\,2y + xe^{\frac{y}{z}} \cdot \frac{1}{z}(y)'_y = -2y + xe^{\frac{y}{z}} \cdot \frac{1}{z} = \frac{-2yz + xe^{\frac{y}{z}}}{z};$$

$$F'_z = \left(cos2z - y^2 + xe^{\frac{y}{z}}\right)'_z = -2sin2z + x\left(e^{\frac{y}{z}}\right)'_z =$$

$$= -2sin2z + xe^{\frac{y}{z}}\left(\frac{y}{z}\right)'_z = -2sin2z + xye^{\frac{y}{z}}(z^{-1})'_z =$$

$$= -2sin2z - \frac{xye^{\frac{y}{z}}}{z^2} = \frac{-2z^2sin2z - xye^{\frac{y}{z}}}{z^2};$$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{e^{\frac{y}{z}}}{\frac{-2z^2sin2z - xye^{\frac{y}{z}}}{z^2}} = \frac{z^2e^{\frac{y}{z}}}{2z^2sin2z + xye^{\frac{y}{z}}};$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{\frac{-2yz + xe^{\frac{y}{z}}}{z}}{\frac{-2z^2 sin2z - xye^{\frac{y}{z}}}{z^2}} = \frac{z\left(xe^{\frac{y}{z}} - 2yz\right)}{2z^2 sin2z + xye^{\frac{y}{z}}}.$$

Пример 3.15. Найти полный дифференциал функции z,определяемой равенством $cos^2x + cos^2y + cos^2z = 1.$

Решение.

Учитывая, что функция $z = f(x; y)$задана неявно уравнением $F(x; y; z) = 0$,

где $F(x; y; z) = cos^2x + cos^2y + cos^2z - 1$ и полный дифференциал

вычисляется по формуле $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ имеем:

$$F'_x = (\ cos^2x + cos^2y + cos^2z - 1)'_x = ((cosx)^2)'_x =$$

$$= 2cosx(cosx)'_x = -2sinxcosx = -sin2x;$$

$$F'_y = (\ cos^2x + cos^2y + cos^2z - 1)'_y = ((cosy)^2)'_y =$$

$$= 2cosy(cosy)'_y = -2sinycosy = -sin2y;$$

Аналогично получим $F'_z = -sin2z;$

$$z'_x = -\frac{-sin2x}{-sin2z} = -\frac{sin2x}{sin2z};\ z'_y = -\frac{-sin2y}{-sin2z} = -\frac{sin2y}{sin2z};$$

Найдём полный дифференциал:

$dz = -\frac{sin2x}{sin2z}dx - \frac{sin2y}{sin2z}dy$ или $dz = -\frac{sin2xdx + sin2ydy}{sin2z}$.

Задания для самостоятельного решения.

14. Найти частные производные функции $z = f(x; y)$ заданной неявно уравнением $F(x; y; z) = 0$:

1	$z^3 + 3xyz = a^3$	**11**	$zln(xy) + xe^{-2z} = 0$
2	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	**12**	$z^2 + sin(yz) - x = 0$
3	$x + arctg\frac{y}{z-x} = z$	**13**	$sin(3x - 2z) + x^2yz = 0$
4	$x^3y + zy^3 + z^3y = 0$	**14**	$z^2 - ln2z + xy^3 = 0$
5	$x + y + z = e^{-(x+y+z)}$	**15**	$x - cos(z + y) - z^3 = 0$
6	$x^2 - 2y^2 + z^2 -$ $-4x + 2z - 5 = 0$	**16**	$z - y^2e^{xz} = 0$
7	$sin(z + y) +$ $+cos(x - z) = 0$	**17**	$e^x + ylnz - x = 0$
8	$3x^2 - 2y^2 + z^2 -$ $-5x + 2 = 0$	**18**	$x^2 + y^2 + z^2 = 16$
9	$x^3 + 3y^2 - x^3z^2 +$ $+5z + 8 = 0$	**19**	$z^3 - tg(3z + x^2y^2) = 0$
10	$x - y + z + 3 = xz^2$	**20**	$x^2y - xy^2 + xyz^3 + 6 = 0$

Ответы:

14.1. $z'_x = -\frac{yz}{xy+z^2}$; $z'_y = -\frac{xz}{xy+z^2}$	**14.11.** $z'_x = \frac{\frac{z}{x}+e^{-2z}}{2xe^{-2z}-ln(xy)}$; $z'_y = \frac{z}{y\left(2xe^{-2z} - ln(xy)\right)}$
14.2. $z'_x = -\frac{c^2x}{a^2z}$; $z'_y = -\frac{c^2y}{b^2z}$	**14.12.** $z'_x = \frac{1}{2z+ycos(yz)}$; $z'_y = -\frac{zcos(yz)}{2z + ycos(yz)}$

14.3. $z'_x = 1$; $z'_y = \frac{z-x}{(z-x)^2+y^2+y}$	**14.13.** $z'_x = \frac{2\cos(3x-2z)+2xyz}{2\cos(3x-2z)-x^2y}$; $z'_y = \frac{x^2z}{2\cos(3x-2z)-x^2y}$
14.4. $z'_x = -\frac{3x^2}{y^2+3z^2}$; $z'_y = -\frac{x^3+3zy^2+z^3}{y^3+3z^2y}$	**14.14.** $z'_x = \frac{y^3}{\frac{1}{z}-2z}$; $z'_y = \frac{3y^2x}{\frac{1}{z}-2z}$
14.5. $z'_x = \frac{2xy}{e^z+1}$; $z'_y = \frac{x^2}{e^z+1}$	**14.15.** $z'_x = \frac{1}{3z^2-\sin(y+z)}$; $z'_y = \frac{\sin(y+z)}{3z^2-\sin(y+z)}$

14.6. $z'_x = \frac{2-x}{z+1}$; $z'_y = \frac{2y}{z+1}$	**14.16.** $z'_x = \frac{zy^2e^{xz}}{1-xy^2e^{xz}}$; $z'_y = \frac{2ye^{xz}}{1-xy^2e^{xz}}$
14.7. $z'_x = \frac{\sin(x-z)}{\cos(z+y)+\sin(x-z)}$; $z'_y = -\frac{\cos(z+y)}{\cos(z+y)+\sin(x-z)}$	**14.17.** $z'_x = \frac{z(1-e^x)}{y}$; $z'_y = -\frac{z\ln z}{y}$
14.8. $z'_x = \frac{5-6x}{2z}$; $z'_y = \frac{2y}{z}$	**14.18.** $z'_x = -\frac{x}{z}$; $z'_y = -\frac{y}{z}$
14.9. $z'_x = \frac{3(1-z^2)}{2xz}$; $z'_y = \frac{3y}{z}$	**14.19.** $z'_x = \frac{2xy^2}{3z^2\cos^2(3z+x^2y^2)}$; $z'_y = \frac{2yx^2}{3z^2\cos^2(3z+x^2y^2)}$
14.10. $z'_x = \frac{z^2-1}{1-2xz}$; $z'_y = \frac{1}{1-2xz}$	**14.20.** $z'_x = -\frac{2xy-y^2+yz^3}{3xyz^2}$; $z'_y = -\frac{x^2-2xy+xz^3}{3xyz^2}$

3.8. Производная сложной функции.

1)Случай одной независимой переменной.

Пусть $z = f(x;y)$ функция двух независимых переменных x и y,каждая из которых является функцией одной независимой переменной t: $x = x(t), y = y(t)$,тогда функция $z = f(x(t); y(t))$ является сложной функцией одной переменной t(переменные x и y промежуточные).

Теорема 3.3. Если $z = f(x;y)$ дифференцируема в точке $M(x;\ y)\epsilon D$ функция и $x = x(t), y = y(t)$- дифференцируемыми функции независимой переменной t,то производная сложной функции $z = f(x(t); y(t))$ вычисляется по формуле (3.14):

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} \quad \textbf{(3.14)}$$

Доказательство.

Дадим независимой переменной t приращение Δt,тогда функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ получат приращение Δx и Δy соответственно, они в свою очередь вызовут приращение Δz функции $z = f(x;y)$.

Так как по условию функция $z = f(x;y)$ дифференцируема в точке $M(x;\ y)$,то её полное приращение имеет вид:

$$\Delta z = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + \alpha\cdot\Delta x + \beta\cdot\Delta y\,,$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x;\Delta y) \to 0$ и $\beta = \beta(\Delta x;\Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$.

Учитывая, что $\frac{dz}{dt} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}$ разделим обе части полного приращения на Δt и переходя к преде- лу в обеих частях равенства имеем:

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y|:\Delta t,$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t}+\alpha\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}+\beta\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t},$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t}+\alpha\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}+\beta\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t}\right),$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial z}{\partial y}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\alpha\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\beta\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=$$

$$=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+0\cdot\frac{dx}{dt}+0\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt};$$

Таким образом, $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$.

Замечание: в частности, если $z=f(x;y), y=y(x)$, получим $z=f\big(x;y(x)\big)$-сложную функцию независимой переменной x.

Этот случай сводится к предыдущему заменой t на x $(dx=dt)$,согласно формуле , имеем:

$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$, полная производная функции z по переменной x будет вычисляться следующим образом:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\qquad \textbf{(3.15)}$$

Формулы

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

носят названия- **формулы полной производной**.

2)Случай нескольких независимых переменных.

Если $z=f(x;y)$,где $x=(u;v), y=y(u;v)$, тогда $z=f\big(x(u;v);y(u;v)\big)$—сложная функция двух независимых переменных u и v.

Ее частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ можно найти, используя формулу $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$ заменив в данной формуле t на u $(t=u)$ получим:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u};$$

Аналогично, заменив в данной формуле t на v получим:

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v};$$

Таким образом, частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, сложной функции $z = f\big(x(u;v);y(u;v)\big)$ можно найти, используя формулу (3.16):

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} \end{cases} \quad \textbf{(3.16)}$$

Таким образом, производная сложной функции $z = f\big(x(u;v);y(u;v)\big)$ по каждой независимой переменной u и v равна сумме произведений частных производных этой функции по ее промежуточным переменным x и y на их производные по соответствующим независимым переменным u и v.

Заметим, что в данном случае справедлива формула:

$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$ –полный дифференциал функции $z = f\big(x(u;v);y(u;v)\big)$.

Пример 3.16. Найти производную функции:

а) $z = x^2y^3$, где $x = t, y = t^2$;

б) $z = x\cos\frac{x}{y}$, где $x = 1 + 3t, y = \sqrt{1 + t^2}$;

в) $z = ln(x^2 - y^2)$, где $y = e^x$;

г) $z = arctg\frac{x+1}{y}$,где $y = e^{(1+x)^2}$;

д) $z = \frac{x^2}{y}$,где $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$;

е) $z = 3^{x^2} arctg y$,где $x = \frac{u}{v}, y = uv$.

Решение.

а) Так как функция $z = x^2y^3, x = t, y = t^2$ является сложной функцией одной переменной t. Решение может быть найдено по формуле $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$, поэтому найдём $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2y^3)'_x = y^3(x^2)'_x = 2xy^3;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2y^3)'_y = x^2(y^3)'_y = 3x^2y^2;$$

$$\frac{dx}{dt} = (t)' = 1;$$

$$\frac{dy}{dt} = (t^2)' = 2t.$$

Подставим найденные значения в формулу:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=2xy^3\cdot 1+3x^2y^2\cdot 2t=\ 2xy^3+$$

$$+6x^2y^2t=2t\cdot(t^2)^3+6t^2(t^2)^2t=2t^7+6t^7=8t^7;$$

Замечание: можно как сохранить переменные xиy так и заменить их через t(в зависимости от того упроститься или нет выражение после подстановки);

Решение можно было найти иначе, подставив значение для $x=t, y=t^2$ в формулу $z=x^2y^3=t^2\cdot(t^2)^3=t^8$ и вычислив производную $\frac{dz}{dt}=(t^8)'=8t^7$.

б) Так как исходная функция является сложной функцией одной переменной t. Решение может быть найдено по формуле $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$, поэтому найдём$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}$ и подставим полученные значения в формулу:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x\cos\frac{x}{y}\right)'_x=(x)'_x\cdot\cos\frac{x}{y}+x\cdot\left(\cos\frac{x}{y}\right)'_x=\cos\frac{x}{y}-x\cdot\sin\frac{x}{y}\left(\frac{x}{y}\right)'_x=$$

$$=\cos\frac{x}{y}-x\cdot\sin\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}(x)'_x=\cos\frac{x}{y}-\frac{x}{y}\cdot\sin\frac{x}{y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x\cos\frac{x}{y}\right)'_y=x\left(\cos\frac{x}{y}\right)'_y=-x\sin\frac{x}{y}\left(\frac{x}{y}\right)'_y=-x\sin\frac{x}{y}\cdot x(y^{-1})'_y=$$

$$=-x^2\sin\frac{x}{y}(-y^{-2})=\left(\frac{x}{y}\right)^2\cdot\sin\frac{x}{y}\ ;$$

$$\frac{dx}{dt}=(1+3t)'=3;$$

$$\frac{dy}{dt}=\left(\sqrt{1+t^2}\right)'=\left((1+t^2)^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1+t^2)'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{1+t^2}}\cdot 2t=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}};$$

$$\frac{dz}{dt}=3\cdot\left(\cos\frac{x}{y}-\frac{x}{y}\cdot\sin\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{x}{y}\right)^2\cdot\sin\frac{x}{y}\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}};$$

в) Так как исходная функция является сложной функцией одной переменной x. Решение может быть найдено по формуле $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$. Найдём частные производные$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ и полную производную$\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\ln(x^2-y^2)\right)'_x=\frac{1}{x^2-y^2}\cdot(x^2-y^2)'_x=\frac{2x}{x^2-y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(ln(x^2-y^2)\right)'_y=\frac{1}{x^2-y^2}\cdot(x^2-y^2)'_y=-\frac{2y}{x^2-y^2};$$

$$\frac{dy}{dx}=(e^x)'=e^x;$$

На основании формулы $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$получаем:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{x^2-y^2}-\frac{2y}{x^2-y^2}e^x=\frac{2(x-ye^x)}{x^2-y^2}=$$

$$=\frac{2(x-ye^x)}{x^2-y^2}=\frac{2(x-e^{2x})}{x^2-e^{2x}};$$

г) Так как исходная функция является сложной функцией одной переменной x. Решение может быть найдено по форму-ле$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(arctg\frac{x+1}{y}\right)'_x=\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x+1}{y}\right)'_x=$$

$$=\frac{1}{\frac{y^2+(x+1)^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y}(x+1)'_x=\frac{y}{y^2+(x+1)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(arctg\frac{x+1}{y}\right)'_y=\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x+1}{y}\right)'_y=$$

$$=\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{y}\right)^2}(x+1)(y^{-1})'_y=\frac{x+1}{\frac{y^2+(x+1)^2}{y^2}}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)=$$

$$=-\frac{x+1}{y^2+(x+1)^2};$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(e^{(1+x)^2}\right)'=e^{(1+x)^2}((1+x)^2)'=2e^{(1+x)^2}(1+x);$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{y}{y^2+(x+1)^2}-\frac{2(x+1)^2e^{(1+x)^2}}{y^2+(x+1)^2}=$$

$$=\frac{y-2(x+1)^2e^{(1+x)^2}}{y^2+(x+1)^2}=\frac{e^{(1+x)^2}(1-2(x+1)^2)}{e^{2(1+x)^2}+(x+1)^2};$$

д) Так как функция $z=\frac{x^2}{y}$,где $x=uv$, $y=\frac{u}{v}$- сложная функция двух независимых переменных u и v,поэтому решение может быть найдено по формулам$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\end{cases}$, для этого находим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{x^2}{y}\right)'_x = \frac{1}{y}\cdot(x^2)'_x = \frac{2x}{y};$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{x^2}{y}\right)'_y = x^2\left(\frac{1}{y}\right)'_y = x^2(y^{-1})'_y = -\frac{x^2}{y^2};$$
$$\frac{\partial x}{\partial u} = (uv)'_u = v(u)'_u = v;$$
$$\frac{\partial x}{\partial v} = (uv)'_v = u(v)'_v = u;$$
$$\frac{\partial y}{\partial u} = \left(\frac{u}{v}\right)'_u = \frac{1}{v}(u)'_u = \frac{1}{v};$$
$$\frac{\partial y}{\partial v} = \left(\frac{u}{v}\right)'_v = u\cdot\left(\frac{1}{v}\right)'_v = u(v^{-1})'_v = -\frac{v}{v^2}$$

Применяя вышеуказанные формулы, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{2x}{y}\cdot\ v - \frac{x^2}{y^2}\cdot\frac{1}{v};$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{2x}{y}u - \frac{x^2}{y^2}\cdot\left(-\frac{v}{v^2}\right).$$

Итак, $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2xv}{y} - \frac{x^2}{y^2 v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2xu}{y} + \frac{x^2 v}{(yv)^2} \end{cases}$;

е) Сложная функция двух независимых переменных u и v,поэтому решение может быть найдено по формулам $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} \end{cases}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(3^{x^2} arctgy\right)'_x = arctgy\left(3^{x^2}\right)'_x =$$
$$= arctgy\cdot 3^{x^2} ln3\cdot(x^2)'_x = 2ln3\cdot 3^{x^2} x arctg\, y,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(3^{x^2} arctgy\right)'_y = 3^{x^2}(arctgy)'_y = \frac{3^{x^2}}{1+y^2};$$
$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{v},\quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{u}{v^2},\quad \frac{\partial y}{\partial u} = v,\quad \frac{\partial y}{\partial v} = u;$$

Составляем суммы соответствующих произведений:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2\,ln3\cdot 3^{x^2} x\, arctg\, y}{v} + \frac{3^{x^2} v}{1+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{2ln3\ \ 3^{x^2}xuarctg\,y}{v^2}+\frac{3^{x^2}u}{1+y^2}.$$

Ответ можно оставить в такой форме или выразить через u и v:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=2ln3\cdot 3^{\frac{u^2}{v^2}}\ \frac{u}{v^2}arctg(uv)+\frac{3^{\frac{u^2}{v^2}}v}{1+u^2v^2},$$
$$\frac{\partial z}{\partial v}=-2\frac{u^2}{v^3}\cdot 3^{\frac{u^2}{v^2}}\ ln3\ arctg(uv)+\frac{u}{1+u^2v^2}\cdot 3^{\frac{u^2}{v^2}}.$$

Пример 3.17. Показать, что функция $z=arctg\frac{x}{y}$, где $x=u+v, y=u-v$, удовлетворяет соотношению $\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u-v}{u^2+v^2}$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(arctg\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y}(x)'_x=$$
$$=\frac{1}{\frac{x^2+y^2}{y^2}\cdot y}=\frac{y}{x^2+y^2};$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(arctg\frac{x}{y}\right)'_y=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_y=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot x(y^{-1})'_y=$$
$$-\frac{x}{\frac{x^2+y^2}{y^2}\cdot y^2}=-\frac{x}{x^2+y^2};$$
$$\frac{\partial x}{\partial u}=(u+v)'_u=(u)'_u=1;$$
$$\frac{\partial x}{\partial v}=(u+v)'_v=(v)'_v=1;$$
$$\frac{\partial y}{\partial u}=(u-v)'_u=(u)'_u=1;$$
$$\frac{\partial y}{\partial v}=(u-v)'_v=-(v)'_v=-1;$$

Применяя формулы $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\end{cases}$, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{y-x}{x^2+y^2}=$$

$$= \frac{u - v - (u + v)}{(u + v)^2 + (u - v)^2} = -\frac{2v}{2u^2 + 2v^2} = -\frac{v}{u^2 + v^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{y + x}{x^2 + y^2} =$$

$$= \frac{u - v + u + v}{(u + v)^2 + (u - v)^2} = \frac{2u}{2u^2 + 2v^2} = \frac{u}{u^2 + v^2};$$

Покажем, что $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u-v}{u^2+v^2}$,

$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{v}{u^2+v^2} + \frac{u}{u^2+v^2} = \frac{u-v}{u^2+v^2}$ –что и требовалось доказать.

Задания для самостоятельного решения.

15. 1)-12),17)-20) Найти производную функции;
13)-16) Найти дифференциал функции.

1	$z = x^2 + y^3 + xy$, $x = asint, y = acost$	**11**	$z = yx^2, y = cosx$
2	$z = xy^3$, $x = \sqrt{t}$, $y = cost^2$	**12**	$z = ln(x^2 - y^2)$, $y = x^2$
3	$z = lnsin\frac{x}{y}$, $x = 3t^2$, $y = \sqrt{t^2 + 1}$	**13**	$z = x^3 + y^3$, $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$
4	$z = e^{xy} ln(x + y)$, $x = t^3$, $y = 1 - t^3$	**14**	$z = \sqrt{x^2 - y^2}$, $x = u^v$, $y = ulnv$
5	$z = xyarctg(xy)$, $x = t^2 + 1$, $y = t^3$	**15**	$z = e^{x - \frac{2}{y}}$, $x = vcos^2u$, $y = usin^2v$
6	$z = e^{2x-3y}$, $x = tgt$, $y = t^2 - t$	**16**	$z = \frac{x^2}{y}$, $x = u - 2v$, $y = v + 2u$

7	$z = x^y, \ \ x = lnt,$ $y = sint$		**17**	$z = vu^2 + u, u = x + 1,$ $v = x + e^y$
8	$z = sinx \ ln \, y, x = t^3,$ $y = e^t$		**18**	$z = vu^2 + v, u = x + y^2,$ $v = lnx + e^y$
9	$z = xe^y, y = \varphi(x)$		**19**	$z = arctg(x + 2y),$ $x = t^2, \ \ y = t^3$
10	$z = e^{xy}, y = \varphi(x)$		**20**	$z = \frac{y}{x}, \ \ x = e^t,$ $y = 1 - e^{2t}$

Ответы:

15.1. $\frac{dz}{dt} = a^2(sin2t + cos2t - 3acos^2tsint)$
15.2. $\frac{dz}{dt} = \frac{cos^3 t^2}{2\sqrt{t}} - 3\sqrt{t^3}\,cost^2 sin2t^2$
15.3. $\frac{dz}{dt} = \frac{t}{y} ctg\left(\frac{x}{y}\right)\left(6 - \frac{x}{y^2}\right)$
15.4. $\frac{dz}{dt} = 0$
15.5. $\frac{dz}{dt} = (y\ arctg\ xy + \frac{xy^2}{1+x^2y^2}) \cdot 2t + (y\ arctg\ xy + \frac{x^2y}{1+x^2y^2}) \cdot 3t^2$
15.6. $\frac{dz}{dt} = \ 2e^{2x-3y}\frac{1}{cos^2t} - 3e^{2x-3y}(2t - 1)$
15.7. $\frac{dz}{dt} = \ yx^{y-1}\frac{1}{t} + x^y \ ln\, x \, cos\, t$
15.8. $\frac{dz}{dt} = \ tcos\,(t^3) + sin(t^3)$
15.9. $\frac{dz}{dx} = e^y + xe^y\varphi'(x)$
15.10. $\frac{dz}{dx} = ye^{xy} + xe^{xy}\varphi'(x)$
15.11. $\frac{dz}{dx} = x(2cosx - xsinx)$
15.12. $\frac{dz}{dx} = \frac{2(1-2x^2)}{x(1-x^2)}$
15.13. $dz = 3v^2(v^3 + \frac{1}{v^3})du + 3u^3(v^2 - \frac{1}{v^4})dv$

15.14. $dz=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}vu^{v-1}-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\ln v\right)du+$ $+\left(\frac{xu^v\ln u}{\sqrt{x^2-y^2}}-\frac{yu}{v\sqrt{x^2-y^2}}\right)dv$
15.15. $dz=e^{x-\frac{2}{y}}\left(\frac{2}{y^2}\sin^2 v-v\sin 2u\right)du+$ $+e^{x-\frac{2}{y}}\left(\cos^2 v+\frac{2}{y^2}u\sin 2v\right)dv3-$
15.16. $dz=\frac{x}{y}\left(2\left(1-\frac{x}{y}\right)du-\left(4+\frac{x}{y}\right)dv\right)$
15.17. $\frac{\partial z}{\partial x}=u^2+2uv,\ \frac{\partial z}{\partial y}=u^2e^y$
15.18. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{u^2+1}{x}+2uv+1,$ $\frac{\partial z}{\partial y}=(2uv+1)\cdot 2y+(u^2+1)e^y$
15.19. $\frac{dz}{dt}=\frac{2t(3t+1)}{1+t^4(1+2t)^2}$
15.20. $\frac{dz}{dt}=-(e^{-t}+e^t)$

3.9. Градиент функции и производная по направлению.

Градиент функции.

Рассмотрим функцию двух переменных $n=2, z=f(x;y)$.

Градиентом функции нескольких переменных в данной точке называется вектор, координаты которого равны частным производным по соответствующим аргументам, вычисленным в данной точке $M(x;y)$.

Обозначение:

$$\boldsymbol{grad z}|_M=\left(z'_x|_M; z'_y|_M\right) \text{ или}$$

$$\boldsymbol{grad z}|_M=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_M;\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_M\right) \quad \textbf{(3.17)}$$

Аналогично вычисляется градиент для функции трёх переменных $u = f(x;y;z)$,то есть

$$grad u|_M = (u'_x|_M; u'_z|_M; u'_z|_M).$$

Физический смысл градиента.

Градиент функции, то есть вектор $grad z|_M$указывает направление, в котором функция z в точке M возрастает с максимальной скоростью. При этом максимальная величина скорости равна:

$$|grad z|_M| = \sqrt{(z'_x|_M)^2 + \left(z'_y|_M\right)^2};$$

Пример 3.18. Найти градиент функции $z = x^2 y$ в точке $M(1;2)$,вычислить величину градиента.

Решение.

Вычислим частные производные и их значения в точке M:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2 y)'_x = y \cdot (x^2)'_x = 2xy;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 y)'_y = x^2 (y)'_y = x^2;$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = z'_x|_M = (2xy)|_M = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4;$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = z'_y|_M = (x^2)|_M = 1.$$

Таким образом,$grad z|_M = \left(z'_x|_M; z'_y|_M\right) = (4;1)$-градиент функции $z = x^2 y$ в точке $M(1;2)$,то есть вектор, в направлении которого функция $z = x^2 y$ возрастает в точке $M(1;2)$.

$|grad u|_M| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$ –величина градиента-максимальная величина скорости возрастания.

Пример 3.19. Найти градиент функции $u = 2^{x+2y-z}$ в точке $M(1;0;1)$.

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (2^{x+2y+z})'_x = 2^{x+2y-z} ln2 (x + 2y - z)'_x =$$

$$= 2^{x+2y-z} ln2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (2^{x+2y-z})'_y = 2^{x+2y-z} ln2 \cdot (x + 2y - z)'_y =$$

$$= 2^{x+2y-z} ln2 \cdot 2 = 2^{x+2y-z+1} ln2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (2^{x+2y-z})'_z = 2^{x+2y-z} ln2 \cdot (x+2y-z)'_z =$$
$$= -2^{x+2y+3z} ln2;$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = (2^{x+2y-z} ln2)|_M = 2^{1+2\cdot 0-1} ln2 = ln2;$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = (2^{x+2y-z+1} ln2)|_M = 2^{1+2\cdot 0-1+1} ln2 = 2ln2;$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = (2^{x+2y-z} ln2)|_M = 2^{1+2\cdot 0-1} ln2 = ln2.$$

Таким образом,$gradu|_M = (ln2; 2ln2; ln2)$.

Пример 3.20. Найти точки, в которых модуль градиента функции $z = (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$ равен 2.

Решение.

Поскольку $gradz = \left(z'_x; z'_y\right)$,то $|gradz| = \sqrt{z_x'^2 + z_y'^2}$, найдём точки, где $|gradz| = 2$, для этого вычислим частные производные исходной функции:

$$z'_x = \left((x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \right)'_x = \frac{3}{2}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}(x^2+y^2)'_x = 3x \cdot \sqrt{x^2+y^2};$$
$$z'_y = \left((x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \right)'_y = \frac{3}{2}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}(x^2+y^2)'_y = 3y \cdot \sqrt{x^2+y^2};$$

Если $|gradz| = 2$, то

$$\sqrt{\left(3x\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + \left(3y\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} = 2,$$
$$\sqrt{9x^2(x^2+y^2) + 9y^2(x^2+y^2)} = 2,$$
$$\sqrt{9(x^2+y^2)(x^2+y^2)} = 2,$$
$$\sqrt{\left(3(x^2+y^2)\right)^2} = 2,$$

$3(x^2+y^2) = 2$, то есть $x^2+y^2 = \frac{2}{3}$.

Таким образом точки, в которых модуль градиента функции $z = (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$ равен 2, это все точки, лежащие на окружно-

сти $x^2+y^2 = \frac{2}{3}$ –окружность с центром в начале координат и радиусом $R=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Производная по направлению.

Рассмотрим функцию $z=f(x;y)$ определённую и дифференцируемую в некоторой окрестности точки $M(x;y)$и произвольный вектор $\bar{l}$ -некоторое направление (вектор с началом в точке $M(x;y)$), α,β-углы, образованные вектором $\bar{l}$ с осями координат (рис.31),

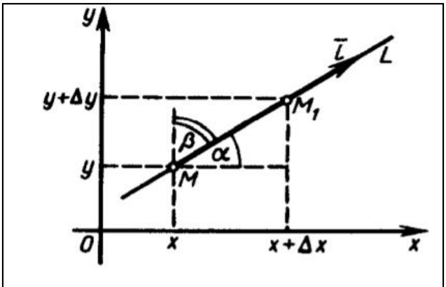


Рис. 31

$\bar{l}^0=(cos\alpha;cos\beta)$-орт этого направления. Для характеристики скорости изменения функции z в точке $M(x;y)$в направлении вектора $\bar{l}$ введём понятие производной по направлению.

Для этого проведём через точку $M(x;y)$ прямую L так, чтобы она совпала по направлению с вектором $\bar{l}$, и возьмём на прямой некоторую точку $M_1(x+\Delta x;y+\Delta y)$ и найдём скорость изменения функции при движении точки M.Направление движения точки $M(x;y)$ будет показывать вектор $\overline{MM_1}=\bar{l}$,через Δl обозначим длину отрезка$|\overline{MM_1}|$($|\overline{MM_1}|=\Delta\, l$).Приращение функции z возникающее при переходе от точки M к точке M_1в направлении вектора $\bar{l}$ определяется следующим образом:

$$\Delta z=z(M_1)-z(M)=f(x+\Delta x;y+\Delta y)-f(x;y),$$

Предел отношения $\frac{\Delta z}{\Delta l}$ при $\Delta l\to 0(M_1\to M)$ если он существует, называется **производной функции** $z=f(x;y)$ **в точке** M **в направлении вектора** $\bar{l}$. .

Обозначение:

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta l}=\lim_{M_1\to M}\frac{z(M_1)-z(M)}{|MM_1|} \quad \textbf{(3.18)}$$

Предположим, что функция $z=f(x;y)$ дифференцируема в точке $M(x;y)$.Тогда её приращение можно записать в виде:

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\Delta y+\alpha_1\cdot\Delta x+\beta_1\cdot\Delta y,$$

где$\alpha_1=\alpha_1(\Delta x;\Delta y)\to 0$ и $\beta_1=\beta_1(\Delta x;\Delta y)\to 0$ при $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0$.

Разделив обе части равенства на Δl и учитывая, что $cos\alpha=\frac{\Delta x}{\Delta l}, cos\beta=\frac{\Delta y}{\Delta l}$, имеем:

$$\frac{\Delta z}{\Delta l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta l}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta l}+\alpha_1\cdot\frac{\Delta x}{\Delta l}+\beta_1\cdot\frac{\Delta y}{\Delta l},$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot cos\beta+\alpha_1\cdot cos\alpha+\beta_1\cdot cos\beta.$$

Переходя к пределу в этом равенстве при $\Delta l\to 0$,

учитывая, что $\frac{\partial z}{\partial l}=\lim\limits_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta l}$ и α_1,β_1 –бесконечно малые функции

при $\Delta l\to 0$ получим:

$$\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta l}=\lim_{\Delta l\to 0}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot cos\beta+\alpha_1\cdot cos\alpha+\beta_1\cdot cos\beta\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot cos\beta.$$

Таким образом, получим формулу

$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot cos\beta$ **(3.19)- производная функции** z **в направлении вектора** $\bar{l}$.

Используя понятие градиента функции $gradz=\left(\frac{\partial z}{\partial x};\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ и учитывая, что орт вектора $\bar{l}$ (единичный вектор $\bar{l}^0$) имеет координаты $\bar{l}^0=(cos\alpha;cos\beta)$($\bar{l}^0=\frac{\bar{l}}{|\bar{l}|}$) представим полученную формулу(3.19) в виде скалярного произведения векторов $gradz$ и $\bar{l}^0$,то есть в виде(3.20):

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \boldsymbol{gradz} \cdot \bar{\boldsymbol{l}}^{\boldsymbol{0}} = \left(\boldsymbol{gradz}, \bar{\boldsymbol{l}}^{\boldsymbol{0}}\right) \quad \textbf{(3.20)}$$

Замечание: для функции трёх переменных $u = f(x; y; z)$ производная по направлению определяется аналогично, то есть по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot cos\gamma.$$

Физический смысл производной по направлению.

Производная $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_M$ характеризует скорость изменения функции z в точке M в направлении данного вектора$\bar{l}$. Если$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_M > 0$,то функция возрастает в направлении вектора$\bar{l}$ со скоростью$\left|\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_M\right|$,

если$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_M < 0$, то функция убывает в направлении вектора$\bar{l}$ со скоростью$\left|\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_M\right|$.

Пример 3.21. Найти градиент и производную функции $u = x^3y + xz^2 + z^3y$ в точке $M(-1; 0; 2)$ в направлении вектора $\overline{MM_1} = \bar{\imath} - \bar{\jmath} + \bar{k}$.

Решение.

Поскольку$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = gradu|_M \cdot \bar{l}^0$,то решение данной задачи будет состоять из двух этапов:

1)Найдём $gradu|_M$,для этого вычислим частные производные данной функции и их значения в точке M :

$$u'_x = (x^3y + xz^2 + z^3y)'_x = y \cdot (x^3)'_x + z^2(x)'_x = 3yx^2 + z^2;$$

$$u'_y = (x^3y + xz^2 + z^3y)'_y = x^3(y)'_y + z^3(y)'_y = x^3 + z^3;$$

$$u'_z = (x^3y + xz^2 + z^3y)'_z = x(z^2)'_z + y(z^3)'_z = 2xz + 3yz^2;$$

Найдём значение частных производных в точке M:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = (3yx^2 + z^2)|_M = 3\cdot 0\cdot(-1)^2 + 2^2 = 4;$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = (x^3 + z^3)|_M = (-1)^3 + 2^3 = 7;$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = (2xz + 3yz^2)|_M = 2\cdot(-1)\cdot 2 + 3\cdot 0\cdot 2^2 = -4.$$

Таким образом,$gradu|_M = (4; 7; -4)$;

2)Находим единичный вектор $\bar{l}^0$ имеющий данное направление $\overline{MM_1} = \bar{\imath} - \bar{\jmath} + \bar{k} = (1; -1; 1)$,

$$\bar{l}^0 = \frac{\overline{MM_1}}{|\overline{MM_1}|} = \frac{(1;-1;1)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{(1;-1;1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{-1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right);$$

3)Находим $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = gradu\cdot\bar{l}^0 = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} + 7\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + (-4)\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} =$$

$= \frac{4\sqrt{3} - 7\sqrt{3} - 4\sqrt{3}}{3} = -\frac{7\sqrt{3}}{3} < 0$-функция убывает в направлении вектора $\bar{l} = \overline{MM_1}$ со скоростью$\left|-\frac{7\sqrt{3}}{3}\right| = \frac{7\sqrt{3}}{3}$.

Пример 3.22. Найти производную функции $z = ln(e^x + e^y)$ в начале координат в направлении луча, образующего с осью абсцисс угол 45^0.

Решение.

1)Найдём $gradz|_O$,для этого вычислим частные производные данной функции и их значения в начале координат $O(0; 0)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (ln(e^x + e^y))'_x = \frac{1}{e^x + e^y}(e^x + e^y)'_x = \frac{e^x}{e^x + e^y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(ln(e^x+e^y)\ )'_y=\frac{1}{e^x+e^y}(e^x+e^y)'_y=\frac{e^y}{e^x+e^y};$$

Найдём значение частных производных в точке $O(0;0)$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_O=\left.\left(\frac{e^x}{e^x+e^y}\right)\right|_O=\frac{e^0}{e^0+e^0}=\frac{1}{2};$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_O=\left.\left(\frac{e^x}{e^x+e^y}\right)\right|_O=\frac{e^0}{e^0+e^0}=\frac{1}{2};$$

Таким образом, $gradz|_O=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

2)Находим орт вектора, в направлении которого будем искать производную, то есть вектор единичной длины, образующего с осью абсцисс угол 45^0:

$$\bar{l}^0=(cos\alpha;cos\beta)=(cos45^0;cos45^0)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

.

3)Находим $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_O$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_O=gradz|_O\cdot\bar{l}^0=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Задания для самостоятельного решения.

16. Вычислить градиент и производную ФНП в точке M в направлении вектора $\bar{l}$.

1	$u=xyz$, $M(3;-1;2)$, $\bar{l}=(0;1;3)$.	**11**	$u=x^3y+xz^2+z^3y$, $M(-1;0;2)$, $\bar{l}=(1;-1;1)$.
2	$z=\frac{xy}{x^2+y^2+1}$, $M(0;3),\bar{l}=(3;4)$.	**12**	$u=y^x-z^3$, $M(0;e;-1)$, $\bar{l}=(1;2;-2)$.
3	$u=arctg(xy^2z)$, $M(2;1;0),\bar{l}=3\bar{\imath}+4\bar{k}$.	**13**	$u=x^3y+xz^2+z^3y$, $M(0;1;2),\bar{l}=(2;2;1)$.
4	$z=e^{\frac{2x}{x^2+y^2}},M(1;1)$, $\bar{l}=(-3;1)$.	**14**	$z=xy^2+4x^3y$, $M(2;3),\bar{l}=(3;4)$.

5	$u=x^2+2xz+y^2$, $M(1;2;-1)$, $\bar{l}=(1;2;-2)$.	15	$u=ln(x^2+y^2+z^2)$, $M(2;-3;1)$, $\bar{l}=(3;-4;2)$.
6	$z=2x^2+xy$, $M(-1;2)$, $\bar{l}=(3;4)$.	16	$u=\dfrac{xyz}{x+y+z}$, $M(2;1;3)$, $\bar{l}=(-2;1;2)$.
7	$u=ln(e^x+e^y+e^z)$, $M(0;0;0)$, $\bar{l}=(1;-2;2)$.	17	$z=x^2-xy+3y^3$, $M(1;1)$, $\bar{l}=(-5;12)$.
8	$z=x^2-xy+y^3$, $M(1;-1)$, $\bar{l}=(3;-4)$.	18	$z=3x^2+5y^2$, $M(1;-1)$, $\bar{l}=(1;2)$.
9	$z=3x^4-xy+y^3$, $M(1;2)$, $\bar{l}=(3;-4)$.	19	$u=xy^2z^3$, $M(3;2;1)$, $\bar{l}=(2;2;1)$.
10	$z=ln(2x+3y)$, $M(1;3)$, $\bar{l}=(5;12)$.	20	$u=xy^2+z^2-xyz$, $M(1;2;3)$, $\bar{l}=(1;-2;2)$.

Ответы:

16.1. $gradu\vert_M=(-2;6;-3)$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right\vert_M=-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.	**16.11.** $gradu\vert_M=(4;7;-4)$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right\vert_M=-\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$.
16.2. $gradz\vert_M=\left(\dfrac{3}{10};0\right)$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial l}\right\vert_M=\dfrac{9}{50}$.	**16.12.** $gradu\vert_M=(1;0;-3)$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right\vert_M=\dfrac{7}{3}$.
16.3. $gradu\vert_M=(0;0;2)$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right\vert_M=-\dfrac{1}{6}$.	**16.13.** $gradu\vert_M=(4;8;12)$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right\vert_M=12$.
16.4. $gradz\vert_M=(0;-e)$ $\left.\dfrac{\partial z}{\partial l}\right\vert_M=\dfrac{-e\sqrt{10}}{20}$.	**16.14.** $gradz\vert_M=(153;44)$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial l}\right\vert_M=127$.

16.5. $gradu\|_M=(0;4;2)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right\|_M=\frac{4}{3}$.	**16.15.** $gradu\|_M=\left(\frac{2}{7};-\frac{3}{7};\frac{1}{7}\right)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right\|_M=\frac{20}{7\sqrt{29}}$.
16.6. $gradz\|_M=(-2;3)$, $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right\|_M=\frac{6}{5}$.	**16.16.** $gradu\|_M=\left(\frac{1}{3};\frac{5}{6};\frac{1}{6}\right)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right\|_M=\frac{1}{6}$.
16.7. $gradu\|_M=\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right\|_M=\frac{1}{9}$.	**16.17.** $gradz\|_M=(1;8)$, $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right\|_M=7$.
16.8. $gradz\|_M=(3;2)$, $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right\|_M=0{,}2$.	**16.18.** $gradz\|_M=(6;-10)$, $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right\|_M=-\frac{14}{\sqrt{5}}$.
16.9. $gradz\|_M=(10;11)$, $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right\|_M=-2{,}8$.	**16.19.** $gradu\|_M=(4;12;36)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right\|_M=22\frac{2}{3}$.
16.10. $gradz\|_M=\left(\frac{2}{11};\frac{3}{11}\right)$, $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right\|_M=\frac{46}{143}$.	**16.20.** $gradu\|_M=(-2;1;4)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right\|_M=\frac{4}{3}$.

3.10. Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности.

Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности заданной неявно.

Пусть уравнение $F(x;y;z)=0$ определяет функцию $z=f(x;y)$, заданную неявно на некотором множестве точек

$(x,y)\in D$. Совокупность точек $M(x;y;f(x;y))$, где $(x,y)\in D$, в пространстве R^3 образует некоторую поверхность S, которая называется графиком функции $z=f(x;y)$.Пусть $M_0(x_0;y_0;z_0)$ — точка поверхности S.

Касательной плоскостью к поверхности $z=f(x;y)$ в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$, называется плоскость, содержащие все касательные к поверхности, проведённые в точке M_0(рис.32).Прямые l_1 и l_2 определяют плоскость α , которая называется **касательной плоскостью** к поверхности в точке M_0. Прямая, проходящая через точку M_0 перпендикулярно к касательной плоскости, называется **нормалью** к поверхности.

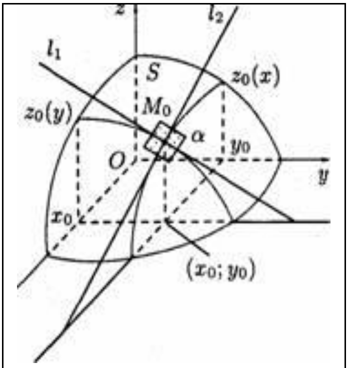


Рис. 32

Уравнение касательной плоскости к поверхности в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$имеет вид:

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0 \quad \mathbf{(3.21)}$$

Уравнение нормали к поверхности в точке M_0:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)} \quad \mathbf{(3.22)}$$

Замечание: если поверхность задана явно уравнением$z=f(x;y)$, то уравнения касательной плоскости имеет вид

$$f'_x(M_0)(x-x_0)+f'_y(M_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0 \quad \mathbf{(3.23)}$$

и уравнения нормали определяется равенством

$$\frac{x-x_0}{f'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{-1} \quad \mathbf{(3.24)}$$

Алгоритм нахождения касательной плоскости и нормали к поверхности:

1)найти частные производные функции, которой задана поверхность;

2)найти значения найденных частных производных в точке M_0;

3)найденные значения частных производных и координаты точки M_0подставить в уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности.

Пример 3.23. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в точке M_0:

а) $z=\frac{3x}{x^2-y^2}$, $M_0(1;0;3)$;**б)**$\sqrt{x^2+y^2}-\frac{xy}{z}=11, M_0(3;-4;2)$;

в) $e^{xyz}-5z+x^2y-e^z=4$, $M_0(2;1;0)$.

Решение.

а) Поскольку поверхность задана явно уравнением $z=\frac{3x}{x^2-y^2}$,то для нахождения касательной плоскости и нормали к поверхности воспользуемся формулами:

$z-z_0=f'_x(x_0;y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0;y_0)(y-y_0)$ – уравнение касательной плоскости и $\frac{x-x_0}{f'_x(x_0;y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0;y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$ – уравнение нормали.

Для этого найдем частные производные данной функции и их значения в точке M_0:

$$f'_x=\left(\frac{3x}{x^2-y^2}\right)'_x=3\left(\frac{x}{x^2-y^2}\right)'_x=3\frac{(x)'_x(x^2-y^2)-x(x^2-y^2)'_x}{(x^2-y^2)^2}=$$

$$=3\left(\frac{x^2-y^2-2x^2}{(x^2-y^2)^2}\right)=-\frac{3(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2};$$

$$f'_y = \left(\frac{3x}{x^2 - y^2} \right)'_y = 3x(\,(x^2 - y^2)^{-1}\,)'_y = -3x(x^2 - y^2)^{-2}(\,x^2 - y^2\,)'_y =$$

$$= \frac{6xy}{(x^2 - y^2)^2};$$

$$f'_x(1;0) = -\frac{3(1^2 + 0^2)}{(1^2 - 0^2)^2} = -3,$$

$$f'_y(1;0) = \frac{6 \cdot 1 \cdot 0}{(1^2 - 0^2)^2} = 0.$$

Найденные значения частных производных и координаты точки M_0 подставить в уравнения касательной плоскости и нормали:

$z - 3 = -3(x - 1) + 0(y - 0),$

$z - 3 = -3x + 3$ или $3x + z - 6 = 0$ – уравнение касательной плоскости;

$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-3}{-1}$ —уравнения нормали;

б) Поверхность задана неявно уравнением $\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{xy}{z} = 11$ или

$\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{xy}{z} - 11 = 0$,поэтому в дальнейшем, для нахождения

касательной плоскости и нормали будем использовать следующие формулы

$F'_x(x_0; y_0; z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0; y_0; z_0)(y - y_0) +$
$+F'_z(x_0; y_0; z_0)(z - z_0) = 0$-уравнение касательной плоскости;

$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0;y_0;z_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(x_0;y_0;z_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(x_0;y_0;z_0)}$ -уравнение нормали.

Обозначив через $F(x;y;z)$левую часть уравнения, име-

ем$F(x;y;z) = \sqrt{x^2+y^2} - \frac{xy}{z} - 11 = 0$.

Найдем частные производные и их значения в точке $M_0(3;-4;2)$:

$$F'_x = \left((x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{xy}{z} - 11 \right)'_x = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2+y^2)'_x -$$

$$-\frac{y}{z}(x)'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{z};$$

$$F'_y = \left((x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{xy}{z} - 11 \right)'_y = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2+y^2)'_y -$$

$$-\frac{x}{z}(y)'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{z};$$

$$F'_z = \left((x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{xy}{z} - 11 \right)'_z = -xy\left(\frac{1}{z}\right)'_z = -xy(z^{-1})'_z =$$

$$= -xy(-z^{-2}) = \frac{xy}{z^2};$$

$$F'_x(3;-4;2) = \frac{3}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} - \frac{(-4)}{2} = \frac{3}{5} + 2 = \frac{13}{5} = 2{,}6;$$

$$F'_y(3;-4;2) = \frac{-4}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} - \frac{3}{2} = -\frac{4}{5} - \frac{3}{2} = -\frac{14}{10} = -1{,}4;$$

$$F'_z(3;-4;2) = \frac{3\cdot(-4)}{2^2} = -3;$$

Найденные значения частных производных и координаты точки M_0подставить в уравнения касательной плоскости и нормали:

$$\frac{13}{5}(x-3)-\frac{14}{10}(y+4)-3(z-2)=0|\cdot 5,$$

$$13(x-3)-7(y+4)-15(z-2)=0,$$

$13x-7y-15z-34=0$— уравнение касательной плоскости,

$\frac{x-3}{2{,}6}=\frac{y+4}{-1{,}4}=\frac{z-2}{-3}$ – уравнение нормали.

в) Поверхность задана неявно уравнени-
ем$e^{xyz}-5z+x^2y-e^z=4$ или$e^{xyz}-5z+x^2y-e^z-4=0$, то есть

$F(x;y;z)=e^{xyz}+x^2y-5z-4=0$.

Найдем частные производные и их значения в точке$M_0(1;1;0)$:

$F'_x=(e^{xyz}+x^2y-5z-4)'_x=e^{xyz}yz(x)'_x+y(x^2)'_x=$

$=e^{xyz}yz+2xy;$

$F'_y=(e^{xyz}+x^2y-5z-4)'_y=e^{xyz}xz(y)'_y+x^2(y)'_y=$

$=e^{xyz}xz+x^2;$

$F'_z=(e^{xyz}+x^2y-5z-4)'_z=e^{xyz}xy-5;$

$F'_x(1;1;0)=e^{1\cdot1\cdot0}\cdot1\cdot0+2\cdot1\cdot1=2;$

$F'_y(1;1;0)=e^{1\cdot1\cdot0}\cdot1\cdot0+1^2=1;$

$F'_z(1;1;0)=e^{1\cdot1\cdot0}\cdot1\cdot0-5=-5;$

Подставляем полученные значения в формулы, получим:
$2(x-1)+1(y-1)-5(z-0)=0,$

$2x+y-5z-3=0$— уравнение касательной плоскости,

$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-5}$ – уравнение нормали.

Задания для самостоятельного решения.

17. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в данной точке M_0.

1	$x(y+z)(xy-z)+8=0, M_0(2;1;3)$
2	$x^3y+xz^3-3xy+4x^2=0, M_0(0;-1;2)$
3	$e^z-z+xy=3, M_0(2;1;0)$
4	$x^2+y^2+z^2=14, M_0(1;2;3)$
5	$xyz^2+2y^2+3yz+4=0, M_0(0;2;-2)$
6	$z=x^2+sinxy+2\sqrt{y}, M_0(0;1;2)$
7	$z=sinxcosy, M_0\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4};\frac{1}{2}\right)$
8	$x^2+y^2-2z^2-10=0, M_0(1;-1;2)$
9	$z=(x-y)arcsiny+(x-y)^2, M_0(1;0;1)$
10	$z=xy, M_0(1;1;1)$
11	$z=\sqrt{x^2+y^2}-xy, M_0(3;4;-7)$

12	$z = arctg\frac{y}{x}, M_0\left(1; 1; \frac{\pi}{4}\right)$
13	$(z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5, M_0(1; 1; 2)$
14	$x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0, M_0(1; 2; -1)$
15	$z = 2x^2 - 4y^2, M_0(2; 1; 4)$
16	$z = x^2 - 4xy + y^2, M_0(-2; 1; 13)$
17	$2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8, M_0(2; 2; 1)$
18	$z = x^2 + y^2, M_0(1; 2; 5)$
19	$x^2 + 3y^2 - 4z^2 = 15, M_0(2; -3; 2)$
20	$z = \frac{x^3 - 3axy + y^3}{a^2}, M_0(a; a; -a)$

Ответы:

17.1. $2x + 7y - 5z + 4 = 0$, $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{14} = \frac{z-3}{-10}$	**17.11.** $17x + 11y + 5z - 60 = 0$, $\frac{x-3}{17} = \frac{y-1}{11} = \frac{z-3}{5}$
17.2. $x = 0, \frac{x}{14} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-2}{0}$	**17.12.** $x - y + 2z - \frac{\pi}{2} = 0$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z - \frac{\pi}{2}}{2}$
17.3. $x + 2y - 4 = 0$, $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{0}$	**17.13.** $2x + y + 11z - 25 = 0$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{11}$

17.4. $x+2y+3z-14=0,$ $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{6}$	**17.14.** $x+11y+5z-18=0,$ $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{11}=\frac{z+1}{5}$
175. $4x+y+3z+4=0,$ $\frac{x}{4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{3}$	**17.15.** $8x-8y-z-4=0,$ $\frac{x-2}{8}=\frac{y-1}{-8}=\frac{z-4}{-1}$
17.6. $x+y-z+1=0,$ $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-1}$	**17.16.** $x-10y+z+13=0,$ $\frac{x+2}{8}=\frac{y-1}{-10}=\frac{z-13}{1}$
17.7. $x-y-2z-1=0,$ $\frac{x-\frac{\pi}{4}}{1}=\frac{y-\frac{\pi}{4}}{-1}=\frac{z-\frac{1}{2}}{-1}$	**17.17.** $x+y-4z=0,$ $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-4}$
17.8. $x-y-4z+6=0,$ $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{-8}$	**17.18.** $2x+4y-z-5=0,$ $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-5}{-1}$
17.9. $2x-y-z-1=0,$ $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{-1}$	**17.19.** $2x-9y-8z-15=0,$ $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{-9}=\frac{z-2}{-8}$
17.10. $x+y-z-1=0,$ $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}$	**17.20.** $z+a=0,$ $\frac{x-a}{0}=\frac{y-a}{0}=\frac{z+a}{1}$

3.11. Частные производные и дифференциалы высших порядков.

Частные производные второго порядка и выше называются частными производными высших порядков.

Предположим, что функция $z=f(x;y)$ имеет частные производные первого порядка$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x'(x;y), \frac{\partial z}{\partial y} = f_y'(x;y)$,которые являются функциями двух переменных. Предположим, что они дифференцируемы.

Частные производные от частных производных первого порядка называются **частными производными второго порядка.**

Существует четыре вида частных производных второго порядка:

$$z_{xx}'' = (z_x')_x'; \quad z_{yy}'' = \left(z_y'\right)_y'; z_{xy}'' = (z_x')_y'; z_{yx}'' = \left(z_y'\right)_x'.$$

Для них применяются следующие обозначения:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}''(x;y) = z_{xx}'';$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}''(x;y) = z_{yy}'';$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}''(x;y) = z_{xy}'' = (z_x')_y';$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}''(x;y) = z_{yx}'' = \left(z_y'\right)_x'.$$

Если полученные функции являются дифференцируемыми, то частные производные от них называются частными производными третьего порядка. Например, $z_{yxx}''' = \left(z_{yx}''\right)_x'$.

Частная производная высшего порядка, взятая по различным переменным, называется **смешанной частной** производной. Такими являются производные: z_{xy}'',z_{yx}'',z_{yxy}''' и так далее.

Теорема 3.4.(Шварца): если смешанные частные производные второго порядка непрерывны, то они равны между собой:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \quad \textbf{(3.25)}$$

Примем без доказательств.

Таким образом, результат смешанного дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования.

Замечание: аналогично определяются смешанные частные производные высших порядков, например,
$z'''_{yxx} = z'''_{xyx}$.

Таким образом, если частные производные, подлежащие вычислению, непрерывны, то результат многократного дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования.

Пример 3.24. Найти частные производные второго порядка от функции:

а) $z = yln x$;**б)** $z = e^{2x+3y}$;**в)** $z = (x^2 + y^2)ln2x$;**г)** $z = x^2 sin\sqrt{y}$.

Решение.

а) Найдем для начала частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (yln x)'_x = y(ln x)'_x = \frac{y}{x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (yln x)'_y = ln x(y)'_y = ln x;$$

Теперь дифференцируем вторично:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) = \left(\frac{y}{x}\right)'_x = y\left(\frac{1}{x}\right)'_x = y(x^{-1})'_x = -\frac{y}{x^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(ln x) = (ln x)'_y = 0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) = \left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{x}(y)'_y = \frac{1}{x};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(ln x) = \frac{1}{x};$$

Заметим, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

б) Найдём частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (e^{2x+3y})'_x = e^{2x+3y}(2x+3y)'_x = 2e^{2x+3y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (e^{2x+3y})'_y = e^{2x+3y}(2x+3y)'_y = 3e^{2x+3y};$$

Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2(e^{2x+3y})'_x = 2e^{2x+3y}(2x+3y)'_x = 4e^{2x+3y};$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2(e^{2x+3y})'_y = 2e^{2x+3y}(2x+3y)'_y = 6e^{2x+3y};$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2(e^{2x+3y})'_y = 2e^{2x+3y}(2x+3y)'_y = 6e^{2x+3y};$$

в)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left((x^2+y^2)ln2x\right)'_x = (x^2+y^2)'_x \cdot ln2x + (ln2x)'_x(x^2+y^2) =$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left((x^2+y^2)ln2x\right)'_x = (x^2+y^2)'_x \cdot ln2x + (ln2x)'_x(x^2+y^2) =$$
$$= 2xln2x + \frac{1}{2x}(2x)'_x \cdot (x^2+y^2) = 2xln2x + \frac{1}{x}(x^2+y^2) =$$
$$= 2xln2x + x + \frac{y^2}{x};$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left((x^2+y^2)ln2x\right)'_y = ln2x(x^2+y^2)'_y = 2yln2x;$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(2xln2x + x + \frac{y^2}{x}\right)'_x = 2\ln 2x + 2x\frac{1}{2x}(2x)'_x +$$
$$+1 + y^2(x^{-1})'_x = 2ln2x + 3 - \left(\frac{y}{x}\right)^2;$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (2yln2x)'_y = 2ln2x(y)'_y = 2ln2x;$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (2yln2x)'_x = 2y(ln2x)'_x =$$
$$= 2y\frac{1}{2x}(2x)'_x = \frac{2y}{x}.$$

г) Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2 \sin\sqrt{y}\right)'_x = \sin\sqrt{y}(x^2)'_x = 2x\sin\sqrt{y};$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2 \sin\sqrt{y}\right)'_y = x^2\left(\sin\left(y^{\frac{1}{2}}\right)\right)'_y = x^2 cos\left(y^{\frac{1}{2}}\right)\left(y^{\frac{1}{2}}\right)'_y =$$
$$= x^2 cos\left(y^{\frac{1}{2}}\right)\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} = \frac{x^2 cos(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}};$$

Находим вторые производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(2x\sin\sqrt{y}\right)'_x = 2\sin\sqrt{y}(x)'_x = 2\sin\sqrt{y};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(x^2 cos\left(y^{\frac{1}{2}}\right)\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\right)'_y = \frac{x^2}{2}\left(cos\left(y^{\frac{1}{2}}\right)\cdot y^{-\frac{1}{2}}\right)'_y =$$

$$= \frac{x^2}{2}\left(\left(cos\left(y^{\frac{1}{2}}\right)\right)'_y \cdot y^{-\frac{1}{2}} + \left(y^{-\frac{1}{2}}\right)'_y \cdot cos\left(y^{\frac{1}{2}}\right)\right) =$$

$$= \frac{x^2}{2}\left(-sin\left(y^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\cdot y^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}cos\left(y^{\frac{1}{2}}\right)\right) =$$

$$= \frac{x^2}{2}\left(-\frac{sin\left(y^{\frac{1}{2}}\right)}{2y} - \frac{cos\left(y^{\frac{1}{2}}\right)}{2y\sqrt{y}}\right) = -\frac{x^2}{4y}\left(sin(\sqrt{y}) + \frac{cos(\sqrt{y})}{\sqrt{y}}\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(2xsin\sqrt{y}\right)'_y = 2x\left(sin\sqrt{y}\right)'_y =$$

$$= 2xcos\sqrt{y}\left(\sqrt{y}\right)'_y = 2xcos\sqrt{y}\frac{1}{2\cdot\sqrt{y}} = \frac{xcos\sqrt{y}}{\sqrt{y}};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(\frac{x^2 cos(\sqrt{y})}{2\cdot\sqrt{y}}\right)'_x = \frac{cos(\sqrt{y})}{2\cdot\sqrt{y}}(x^2)'_y = \frac{xcos\sqrt{y}}{\sqrt{y}}.$$

Дифференциалы высших порядков.

Введём понятие дифференциала высшего порядка. Полный дифференциал $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ функции$z = f(x;y)$ называют также дифференциалом первого порядка. Пусть функция $z = f(x;y)$имеет непрерывные производные второго порядка. Дифференциалом второго порядка функции $z = f(x;y)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка этой функции, то есть

$d^2z = d(dz)$.

Найдём его:

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_x dx + \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_y dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2;$$

Итак, если $z = f(x;y)$, где x и y — независимые переменные, то **дифференциал второго порядка** функции вычисляется по формуле (3.26):

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 \quad \textbf{(3.26)}$$

Аналогично определяются дифференциалы функции z более высокого порядка, то есть

$d^3z = d(d^2z)$, …, $d^nz = d(d^{n-1}z)$.

Таким образом, справедлива формула (3.27):

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n \cdot z \quad \textbf{(3.27)}$$

Посмотрим, как она работает, например, при $n = 3$ имеем:

$$d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 \cdot z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy +$$

$+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3$-дифференциал третьего порядка.

Пример 3.25. Найти полный дифференциал функции второго и третьего порядка для функции:

а) $z = \frac{x}{y}$;**б)** $z = x^2y$;**в)** $z = xy + \sin(2x - 3y)$.

Решение.

а) Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{y}(x)'_x = \frac{1}{y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{x}{y}\right)'_y = x(y^{-1})'_y = -\frac{x}{y^2};$$

Для того, чтобы найти дифференциал второго порядка, найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{y}\right)'_x = 0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(-\frac{x}{y^2}\right)'_y = -x(y^{-2})'_y = \frac{2x}{y^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \left(\frac{1}{y}\right)'_y = (y^{-1})'_y = -\frac{1}{y^2}.$$

Таким образом, дифференциал второго порядка имеет вид:

$$d^2z = 0dx^2 - \frac{2}{y^2}dxdy + \frac{2x}{y^3}dy^2;$$

Найдём дифференциал третьего порядка,
для этого вычислим частные производные
третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(0) = 0;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \left(\frac{2x}{y^3}\right)'_y = 2x(y^{-3})'_y = -\frac{6x}{y^4};$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = \left(-\frac{1}{y^2}\right)'_y = -(y^{-2})'_y = \frac{2}{y^3}.$$

Следовательно, дифференциал
третьего порядка имеет вид:

$$d^3 z = 0dx^3 + 0dx^2dy + \frac{6}{y^3}dxdy^2 - \frac{6x}{y^4}dy^3.$$

б) Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2 y)'_x = y(x^2)'_x = 2xy;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 y)'_y = x^2 (y)'_y = x^2;$$

Найдём дифференциал второго порядка,
для этого вычислим частные производные
второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (2xy)'_x = 2y(x)'_x = 2y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (x^2)'_y = 0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (2xy)'_y = 2x(y)'_y = 2x.$$

Таким образом, дифференциал второго порядка имеет вид:

$$d^2 z = 2ydx^2 + 4xdxdy + 0dy^2;$$

Найдём дифференциал третьего порядка,
для этого вычислим частные производные
третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = (2y)'_x = 0;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = (0)'_y = 0;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = (2y)'_y = 2;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = (2x)'_y = 0;$$

$d^3z = 0dx^3 + 2dx^2dy + 0dxdy^2 + 0dy^3 -$ дифференциал третьего порядка.

в) Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(xy + sin(2x - 3y)\right)'_x = y(x)'_x + cos(2x - 3y) \cdot (2x - 3y)'_x =$$
$$= y + 2cos(2x - 3y);$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(xy + sin(2x - 3y)\right)'_y = x(y)'_y + cos(2x - 3y) \cdot (2x - 3y)'_y =$$
$$= x - 3cos(2x - 3y);$$

Найдём дифференциал второго порядка, для этого вычислим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(y + 2cos(2x - 3y)\right)'_x = -2sin(2x - 3y)(2x - 3y)'_x =$$
$$= -4sin(2x - 3y);$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(x - 3cos(2x - 3y)\right)'_y = 3sin(2x - 3y)(2x - 3y)'_y =$$
$$= -9sin(2x - 3y);$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(y + 2cos(2x - 3y)\right)'_y = 1 - 2sin(2x - 3y) \cdot$$
$$\cdot (2x - 3y)'_y = 1 + 6sin(2x - 3y);$$

Таким образом, дифференциал второго порядка имеет вид:

$$d^2z = -4sin(2x - 3y)dx^2 + 2\left(1 + 6sin(2x - 3y)\right)dxdy +$$
$$-9sin(2x - 3y)dy^2;$$

Найдём дифференциал третьего порядка, для этого вычислим частные производные третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = -4\left(sin(2x - 3y)\right)'_x = -4cos(2x - 3y)(2x - 3y)'_x =$$
$$= -8cos(2x - 3y);$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = -9\left(sin(2x - 3y)\right)'_y = -9cos(2x - 3y)(2x - 3y)'_y =$$
$$= 27cos(2x - 3y);$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = -4\left(sin(2x - 3y)\right)'_y = -4cos(2x - 3y) \cdot$$

$\cdot (2x-3y)'_y = 12cos(2x-3y);$

$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \left(1+6sin(2x-3y)\right)'_y = 6cos(2x-3y)\cdot$

$\cdot (2x-3y)'_y = -18cos(2x-3y);$

$d^3z = -8cos(2x-3y)dx^3 + 36cos(2x-3y)dx^2dy +$
$-54cos(2x-3y)dxdy^2 + 27cos(2x-3y)dy^3$ –дифференциал третьего порядка.

Пример 3.26. Показать, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0$, если $u = arctg(2x-t)$

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(arctg(2x-t)\right)'_x = \frac{1}{1+(2x-t)^2}(2x-t)'_x = \frac{2}{1+(2x-t)^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(arctg(2x-t)\right)'_t = \frac{1}{1+(2x-t)^2}(2x-t)'_t = -\frac{1}{1+(2x-t)^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{2}{1+(2x-t)^2}\right)'_x = 2((1+(2x-t)^2)^{-1})'_x =$$

$$= -2(1+(2x-t)^2)^{-2}\cdot(1+(2x-t)^2)'_x =$$

$$= -\frac{2}{(1+(2x-t)^2)^2}\cdot 2(2x-t)(2x-t)'_x =$$

$$= -\frac{8(2x-t)}{(1+(2x-t)^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \left(\frac{2}{1+(2x-t)^2}\right)'_t = 2((1+(2x-t)^2)^{-1})'_t =$$

$$= -2(1+(2x-t)^2)^{-2}\cdot(1+(2x-t)^2)'_t =$$

$$= -2(1+(2x-t)^2)^{-2}\cdot 2\cdot(2x-t)\cdot(2x-t)'_t =$$

$$= \frac{4(2x-t)}{(1+(2x-t)^2)^2};$$

Покажем, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0$, для этого подставим полученные значения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$ в данное равенство:

$-\frac{8(2x-t)}{(1+(2x-t)^2)^2} + \frac{8(2x-t)}{(1+(2x-t)^2)^2} = 0$ –что и требовалось показать.

Задания для самостоятельного решения.

18.Найти частные производные и дифференциалы второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для следующих функций:

1	$z = x^3 + 2x^2y^2 + y^5$	**11**	$z = e^{4x-y}$
2	$z = y^2e^x + x^2y^3 + 1$	**12**	$z = xsin(x+y)$
3	$z = y^3 + x^2y$	**13**	$z = arctg\frac{x+y}{x}$
4	$z = e^x(cosy + xsiny)$	**14**	$z = \frac{1}{3x - y^3}$
5	$z = \frac{x^2}{1-y}$	**15**	$z = ye^{\frac{x}{y}}$
6	$z = ln(x - 2y)$	**16**	$z = cos(x^5y^2)$
7	$z = \frac{x^2}{y^2}$	**17**	$z = x^2 + xlny$
8	$z = x^2cos\sqrt{y}$	**18**	$z = sinxsiny$
9	$z = x^{2y}$	**19**	$z = e^{x^2y^2}$
10	$z = xe^y$	**20**	$z = (x+y)cos(x-2y)$

Ответы:

18.1 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 4y^2, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4x^2 + 20\,y^3, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 8xy,$

$d^2z = (6x + 4y^2)dx^2 + 16xydxdy + (4x^2 + 20\,y^3)dy^2.$

18.2. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(e^x+2y)y^2, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2(e^x+3yx^2)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=2y(e^x+3xy), d^2z=(e^x+2y)y^2dx^2+$ $+y(e^x+3xy)dxdy+2(e^x+3yx^2)dy^2$.
18.3. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2y, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=2x$, $d^2z=2ydx^2+4xdxdy+6ydy^2$.
18.4. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^x\left(cosy+siny(1+x)\right), \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-e^x(cosy+xsiny)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=e^x(cosy(1+x)-siny)$, $d^2z=e^x\left(cosy+siny(1+x)\right)dx^2+$ $+2e^x(cosy(1+x)-siny)dxdy-e^x(cosy+xsiny)dy^2$.
18.5. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2}{1-y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2x^2}{(1-y)^3}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{2x}{(1-y)^2}$ $d^2z=\frac{2}{1-y}dx^2-\frac{4x}{(1-y)^2}dxdy-\frac{2x^2}{(1-y)^3}dy^2$.
18.6. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{(x-2y)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{4}{(x-2y)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{2}{(x-2y)^2}$, $d^2z=-\frac{1}{(x-2y)^2}dx^2+\frac{4}{(x-2y)^2}dxdy-\frac{4}{(x-2y)^2}dy^2$.
18.7. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2}{y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{6x^2}{y^4}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-\frac{4x}{y^3}$, $d^2z=\frac{2}{y^2}dx^2-\frac{8x}{y^3}dxdy+\frac{6x^2}{y^4}dy^2$.
18.8. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2cos\sqrt{y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2}{4y}\left(\frac{sin\sqrt{y}}{\sqrt{y}}-cos\sqrt{y}\right)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{xcos\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$.

18.9. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y(2y-1)x^{2y-2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^{2y}ln^2 x, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = x^{2y-1}(y + 4ylnx)$, $d^2z = 2cos\sqrt{y}dx^2 + \frac{2xcos\sqrt{y}}{\sqrt{y}}dxdy + \frac{x^2}{4y}\left(\frac{sin\sqrt{y}}{\sqrt{y}} - cos\sqrt{y}\right)dy^2.$
18.10. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x\,e^y, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = e^y$, $d^2z = 0dx^2 + 2e^y dxdyx\,e^y + x\,e^y dy^2.$
18.11. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 16e^{4x-y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{4x-y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -4e^{4x-y}$, $d^2z = 16e^{4x-y}dx^2 - 8e^{4x-y}dxdy + e^{4x-y}dy^2.$
18.12. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\cos(x+y) - xsin(x+y), \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -xsin(x+y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = cos(x+y) - xsin(x+y)$, $d^2z = \left(2\cos(x+y) - xsin(x+y)\right)dx^2 +$ $+2\left(cos(x+y) - xsin(x+y)\right)dxdy - xsin(x+y)dy^2.$
18.13. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y(4x+2y)}{(2x^2+2xy+y^2)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2x^2+2xy}{(2x^2+2xy+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{2x^2 - y^2}{(2x^2+2xy+y^2)^2}$, $d^2z = \frac{y(4x+2y)}{(2x^2+2xy+y^2)^2}dx^2 - \frac{2(2x^2-y^2)}{(2x^2+2xy+y^2)^2}dxdy - \frac{2x^2+2xy}{(2x^2+2xy+y^2)^2}dy^2.$
18.14. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{18}{(3x-y^3)^3}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{6y(3x+2y^3)}{(3x-y^3)^3}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{18y^2}{(3x-y^3)^3}$, $d^2z = \frac{18}{(3x-y^3)^3}dx^2 - \frac{36y^2}{(3x-y^3)^3}dxdy + \frac{6y(3x+2y^3)}{(3x-y^3)^3}dy^2.$

18.15. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=\frac{x^2}{y^3}e^{\frac{x}{y}},$ $d^2z=\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}dx^2+2\frac{x^2}{y^3}e^{\frac{x}{y}}dxdy-\frac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}}dy^2.$
18.16. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-20x^3y^2sin(x^5y^2)-25x^8y^4cos(x^5y^2),$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2x^5sin(x^5y^2)-4x^{10}y^2cos(x^5y^2),$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=-10x^4ysin(x^5y^2)-10x^9y^3cos(x^5y^2),$ $d^2z=\left(-20x^3y^2sin(x^5y^2)-25x^8y^4cos(x^5y^2)\right)dx^2-$ $-\left(20x^4ysin(x^5y^2)+20x^9y^3cos(x^5y^2)\right)dxdy+e^{4x-y}dy^2.$
18.17. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x}{y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=\frac{1}{y},$ $d^2z=2dx^2+\frac{2}{y}dxdy-\frac{x}{y^2}dy^2.$
18.18. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-sinxsiny, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=sinxsiny, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=cosxcosy,$ $d^2z=-sinxsinydx^2+cosxcosydxdy+sinxsinydy^2.$
18.19. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2y^2e^{x^2y^2}(2x^2+1), \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x^2e^{x^2y^2}(2x^2y^2+1),$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=4xye^{x^2y^2}(x^2y^2+1),$ $d^2z=2y^2e^{x^2y^2}(2x^2+1)dx^2+4xye^{x^2y^2}(x^2y^2+1)dxdy+$ $+2x^2e^{x^2y^2}(2x^2y^2+1)dy^2.$

18.20. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2\sin(x-2y) - (x+y)\cos(x-2y),$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4\sin(x-2y) - 4(x+y)\cos(x-2y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \sin(x-2y) + 2(x+y)\cos(x-2y),$$

$$d^2 z = \big(-2\sin(x-2y) - (x+y)\cos(x-2y)\big)dx^2 +$$
$$+2\big(\sin(x-2y) + 2(x+y)\cos(x-2y)\big)dxdy +$$
$$+\big(4\sin(x-2y) - 4(x+y)\cos(x-2y)\big)dy^2.$$

3.12. Экстремумы функции нескольких переменных.

Определение экстремума функции.

Понятие максимума, минимума, экстремума функции двух переменных аналогичны соответствующим понятиям функции одной независимой переменной.

Функция $z = f(x;y)$ имеет максимум в точке $M_0(x_0;y_0)$, если $f(x_0;y_0) > f(x;y)$ для всех точек $(x;y)$ достаточно близких к точке $(x_0;y_0)$ и отличных от неё.

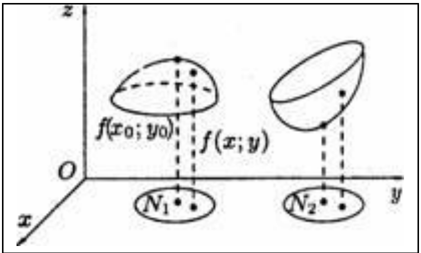


Рис. 33

Аналогично определяется точка минимума функции: для всех точек $(x;y)$, отличных от $(x_0;y_0)$, из окрестности точки $(x_0;y_0)$, выполняется неравенство $f(x_0;y_0) < f(x;y)$.На рис.33: N_1 —точка максимума, а N_2 —точка минимума функции $z = f(x;y)$.

Аналогично определяется экстремум функции трех и большего числа переменных.

Значение функции в точке максимума (минимума) называется **максимумом (минимумом)** функции.

Максимум и минимум функции называют ее **экстремумами.**

В области D функция может иметь несколько экстремумов или не иметь ни одного.

Замечание: в силу определения, точка экстремума функции лежит внутри области определения функции $z = f(x;y)$,поэтому перед тем, как найти экстремум необходимо найти область определения функции.

Необходимые условия экстремума.

Теорема 3.5. (необходимые условия экстремума). Если функция $z = f(x;y)$ имеет в точке $M_0(x_0;y_0)$ экстремум и имеет в точке M_0 частные производные первого порядка, то в этой точке частные производные равны нулю или не существует, то есть имеет место следующая система:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}(x_0;y_0) = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y}(x_0;y_0) = 0 \end{cases} \quad \textbf{(3.28)}$$

Примем теорему без доказательства.

Замечание: равенство нулю частных производных является необходимым, но не достаточным условием существования экстремума.

Точки, в которых выполняется необходимое условие, будем называть точками возможного экстремума.

Точки, в которых частные производные первого порядка функции равны нулю, то есть $\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, называются **стационарными точками** функции z .

Стационарные точки и точки, в которых хотя бы одна частная производная не существует, называются **критическими точками.**

Система $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}(x_0;y_0)=0 \\ \frac{\partial z}{\partial y}(x_0;y_0)=0 \end{cases}$ эквивалентна одному уравнению $dz(x_0;y_0)=0$.

Достаточные условия экстремума.
Не всякая критическая точка будет точкой экстремума.
Если $M_0(x_0;y_0)$ —стационарная точка функции $z=f(x;y)$ $(df(x_0;y_0)=0)$ и

если в некоторой окрестности этой точки второй дифференциал

$$d^2f\,(x_0;y_0)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0;y_0)(dx)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x_0;y_0)dxdy+$$

$+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0;y_0)(dy)^2$- сохраняет знак при любых значениях dxиdy,не равных нулю одновременно, то функция
в точке $M_0(x_0;y_0)$ имеет экстремум.

При этом если$d^2f\,(x_0;y_0)>0$,то этот экстремум -минимум, если

$d^2f\,(x_0;y_0)<0$ –максимум.

Теорема 3.6. (достаточные условия экстремума). Если в точке $M_0(x_0;y_0)$возможного экстремума и некоторой её окрестности функция $z=f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные

второго порядка

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0;y_0),B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x_0;y_0),$$

$$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0;y_0),\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix};$$

Тогда:
а) если $\Delta > 0$,то в точке $M_0(x_0; y_0)$ функция имеет экстремум, при-

чём при $A < 0, M_0(x_0; y_0)$ –точка максимума; при$A > 0$,

$M_0(x_0; y_0)$ –точка минимума;

б) $\Delta < 0$,в точке $M_0(x_0; y_0)$ экстремума нет;

в) $\Delta = 0$,то в точке$M_0(x_0; y_0)$ экстремум может быть или не быть,

требуется дополнительное исследование.
Примем теорему без доказательств.
Схема исследования функции на экстремум.
1)Найти область определения функции;
2)Найти частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

и определить критические точки (стационарные точки-точки, в которых частные производные равны нулю$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$ и точки, в которых хотя бы одна частная производная не существует);
3)Исследовать характер каждой критической точки при помощи достаточных условий экстремума функции.

Пример 3.27. Исследовать на экстремум функцию:
а) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$;**б)** $z = x^3 + y^3 - 9xy - 4$;

в) $z = 2x^2 + 2y^2 - lnx - lny$;**г)** $z = e^x(4y - xy - y^2)$.

Решение.
а) Областью определения данной функции являются все точки плоскости, то есть$(x; y) \epsilon R^2$.

Для того, чтобы найти стационарные точки, найдём частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ и решим систему $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y)'_x = 2x + y - 2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y)'_y = x + 2y - 3;$$

$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}, x = \frac{1}{3}, y = \frac{4}{3}$,следовательно,

$M\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$ –стационарная точка (точка возможного экстремума);

Исследуем характер стационарной точки,

для этого находим $\Delta = AC - B^2$:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (2x + y - 2)'_x = 2;$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (x + 2y - 3)'_y = 2;$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (2x + y - 2)'_y = 1;$$

$\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0, A > 0$,следовательно, $M\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$ –точка минимума,найдём значение функции в этой точке:

$$z_{min} = z\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{4}{3} =$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9} - \frac{6}{9} - 4 = \frac{15}{9} - 4 = \frac{5}{3} - 4 = -\frac{7}{3}.$$

б) Областью определения данной функции являются все точки плоскости, то есть $(x; y) \epsilon R^2$.

Найдём стационарные точки:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^3 + y^3 - 9xy - 4)'_x = 3x^2 - 9y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^3 + y^3 - 9xy - 4)'_y = 3y^2 - 9x;$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases};\ \begin{cases}3x^2-9y=0|:3\\ 3y^2-9x=0|:3\end{cases};\ \begin{cases}x^2-3y=0\\ y^2-3x=0\end{cases};$$

$\begin{cases} y=\frac{x^2}{3} & (1)\\ y^2-3x=0 & (2)\end{cases}$, подставляя (1) в (2)имеем:

$\left(\frac{x^2}{3}\right)^2-3x=0,\ \ \frac{x^4}{9}-3x=0|:9,$

$x^4-27x=0,$

$x(\ x^3-27)=0,$

$x_1=0, x_2=3$, тогда, $y_1=0, y_2=3$,следователь-

но, $M_1(0;0),\ M_2(3;3)$ –стационарные точки;

Исследуем характер стационарных точек, для этого найдём $\Delta= AC-B^2$:

$A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(3x^2-9y)'_x=6x;$

$C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(3y^2-9x)'_y=6y;$

$B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(3x^2-9y)'_y=-9;$

$\Delta= AC-B^2=6x\cdot 6y-(-9)^2=36xy-81,$

$\Delta_1=\Delta|_{M_1}=(36xy-81)|_{M_1}=36\cdot 0\cdot 0-81=-81<0,$ следовательно, в точке M_1 нет экстремума;

$\Delta_2=\Delta|_{M_2}=(36xy-81)|_{M_2}=36\cdot 3\cdot 3-81>0,$

$A=A|_{M_2}=(6x)|_{M_2}=18>0.$

Следовательно, M_2 –точка минимума, $z_{min}=z(3;3)=3^3+3^3-9\cdot 3\cdot 3-4=-31.$

в) Областью определения данной функции являются точки, для которых$x>0, y>0$-точки, лежащие в первой четверти.

Найдём стационарные точки:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (\,2x^2 + 2y^2 - lnx - lny)'_x = 4x - \frac{1}{x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (2x^2 + 2y^2 - lnx - lny)'_y = 4y - \frac{1}{y}.$$

Заметим, что частные производные не существуют при $x = 0, y = 0$,то есть в точке $O(0;0)$,но она не является точкой подозрительной на экстремум, так как не входит в область определения функции.

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}; \begin{cases} 4x - \frac{1}{x} = 0 | \cdot x \\ 4y - \frac{1}{y} = 0 | \cdot y \end{cases}; \begin{cases} 4x^2 - 1 = 0 \\ 4y^2 - 1 = 0 \end{cases};$$

$x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}, y_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}$-не входят в область определения.

Следовательно, $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ –стационарная точка.

Исследуем характер стационарных точек, для этого найдём частные производные второго порядка:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(4x - \frac{1}{x}\right)'_x = 4 + \frac{1}{x^2};$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(4y - \frac{1}{y}\right)'_y = 4 + \frac{1}{y^2};$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(4x - \frac{1}{x}\right)'_y = 0.$$

Тогда $\Delta|_M = (AC - B^2)|_M = \left(4 + \frac{1}{x^2}\right)\left(4 + \frac{1}{y^2}\right)\Big|_M =$

$$= \left(4 + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)\left(4 + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right) = 64 > 0, A > 0,$$

следовательно, в точке M функция имеет минимум.

Найдём значение функции в данной точке (минимум функции):

$$z_{min}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - ln\frac{1}{2} - ln\frac{1}{2} = 1 + 2ln2.$$

г) Найдём стационарные точки:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^x(4y - xy - y^2)\right)'_x = (e^x)'_x \cdot (4y - xy - y^2) +$$

$$+\left((4y - xy - y^2)\right)'_x \cdot e^x = e^x(4y - xy - y^2) + e^x(-y) =$$

$= e^x(3y - xy - y^2)$;

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(e^x(4y - xy - y^2)\right)'_y = e^x(4y - xy - y^2)'_y =$$

$= e^x(4 - x - 2y)$;

Решим систему $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$:

$$\begin{cases} e^x(3y - xy - y^2) = 0 | : e^x \\ e^x(4 - x - 2y) = 0 \,| : e^x \end{cases};$$

$$\begin{cases} 3y - xy - y^2 = 0 \\ 4 - x - 2y = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} y(3 - x - y) = 0 \\ 4 - x - 2y = 0 \end{cases};$$

Эта система имеет решение, если

$$\begin{cases} y = 0 \\ 4 - x - 2y = 0 \end{cases}, \begin{cases} 3 - x - y = 0 \\ 4 - x - 2y = 0 \end{cases},$$

то есть $\begin{cases} y = 0 \\ x = 4 \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 3 - y \\ 4 - x - 2y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 3 - y \\ 4 - (3 - y) - 2y = 0 \end{cases},$

$$\begin{cases} x = 3 - y \\ 1 - y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Таким образом, функция z имеет две стационарные точки $M_1\,(4; 0), M_2\,(2; 1)$.

Используя достаточные условия экстремума, исследуем характер стационарных точек,

, для этого найдём частные производные функции z второго порядка:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(e^x(3y - xy - y^2)\right)'_x = (e^x)'_x \cdot (3y - xy - y^2) +$$

$$+\left((3y - xy - y^2)\right)'_x \cdot e^x = e^x(3y - xy - y^2) + e^x(-y) =$$

$= e^x(2y - xy - y^2)$;

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(e^x(4 - x - 2y)\right)'_y = \left(e^x(4 - x - 2y)\right)'_y =$$

$= e^x(-2) = -2e^x$;

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(e^x(3y - xy - y^2)\right)'_y = e^x(3 - x - 2y).$$

Тогда

$\Delta = AC - B^2 = e^x(2y - xy - y^2)(-2e^x) -$

$-(e^x(3 - x - 2y)^2) = 2e^{2x}(y^2 + xy - 2y) -$

$-e^{2x}(3 - x - 2y)^2 = e^{2x}(2y^2 + 2xy - 4y - (3 - x - 2y)^2)$;

$\Delta_1 = \Delta|_{M_1} = \left(e^{2x}(2y^2 + 2xy - 4y - (3 - x - 2y)^2)\right)\Big|_{M_1} =$

$= e^{2\cdot 4}(2\cdot 0^2 + 2\cdot 4\cdot 0 - 4\cdot 0 - (3-4-2\cdot 0)^2) = -e^8 < 0,$
следовательно, в точке M_1 нет экстремума;
$\Delta_2 = \Delta|_{M_2} = \left(e^{2x}(2y^2 + 2xy - 4y - (3-x-2y)^2)\right)\big|_{M_2} =$
$= e^{2\cdot 1}(2\cdot 1^2 + 2\cdot 2\cdot 1 - 4\cdot 1 - (3-2-2\cdot 1)^2) = e^2 > 0 -$ в точке M_2 функция имеет экстремум, так как
$A|_{M_2} = \left(e^x(2y - xy - y^2)\right)\big|_{M_2} = -e^2 < 0$, то это точка максимума.

Найдём значение функции в данной точке (максимум функции):

$$z_{max} = z(2;1) = e^2(4\cdot 1 - 2\cdot 1 - 1) = e^2.$$

Задания для самостоятельного решения.

19. Исследовать на экстремум функцию $z = f(x;y)$.

1	$z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$
2	$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$
3	$z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
4	$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$
5	$z = (x-1)^2 - 2y^2$
6	$z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$
7	$z = 2x^3 + y^3 - 6x - 12y + 3$
8	$z = x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + xy + 1$
9	$z = \sqrt{x}y - y^2 - x + 6y$
10	$z = x^2 + y^2 - 2y + 1$
11	$z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$

12	$z = xy(1 - x - y)$
13	$z = 4x^2y + 24xy + y^2 + 32y - 6$
14	$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y + 5\frac{2}{3}$
15	$z = -x^2 + xy - y^2 - 9x +$ $+3y - 20$
16	$z = e^{x^2-y} \cdot (5 - 2x + y)$
17	$z = x^4 + y^4 - 2xy - y^2 - x^2$
18	$z = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3$
19	$z = x^2 - (y - 1)^2$
20	$z = x^3 + y^3 - 3xy$

Ответы:

19.1. $z_{min} = z(0;0) = 0$, $z_{max} = z\left(-\frac{5}{3};0\right) = \frac{125}{27}$, в остальных точках экстремумов нет.	**19.11.** $z_{min} = z(1;2) = -7$
19.2. $z_{min} = z\left(1;\frac{1}{2}\right) = 0$	**19.12.** экстремумов нет
19.3. $z_{min} = z(0;3) = -9$	**19.13.** $z_{min} = z(-3;2) = -10$
19.4. $z_{min} = z(1;0) = -1$	**19.14.** $z_{min} = z\left(\frac{1}{2};\frac{4}{3}\right) = \frac{10}{3}$

19.5. экстремумов нет	**19.15.** $z_{max}=z(-5;-1)=1$
19.6. $z_{min}=z\left(0;-\frac{2}{3}\right)=$ $=-\frac{4}{3}$	**19.16.** экстремумов нет
19.7. $z_{max}=z(-1;-2)=23;$ $z_{min}=z(1;2)=-17;$ в остальных точках экстремумов нет	**19.17.** $z_{min}=z(1;1)=$ $=z(-1;-1)=-2$
19.8. $z_{min}=z(0;0)=1$	**19.18.** $z_{min}=z(1;2)=-25,$ $z_{max}=z(-1;-2)=31$
19.9. $z_{max}=z(4;4)=12$	**19.19.** экстремумов нет
19.10. $z_{min}=z(0;1)=0$	**19.20.** $z_{min}=z(1;1)=-1$

3.13. Формула Тейлора для функции нескольких переменных.

Пусть функция $z=f(x;y)$- имеет в окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$непрерывные частные производные всех порядков до $(n+1)$-го включительно, тогда её можно разложить в многочлен n –ой степени(формула Тейлора) в окрестности этой точки:

$$\boldsymbol{f(x;y)=f(x_0;y_0)+\frac{df(x_0;y_0)}{1!}+\frac{d^2f(x_0;y_0)}{2!}+\dots+\frac{d^nf(x_0;y_0)}{n!}+R_n}\quad\textbf{(3.29)}$$

где R_n – остаточный член,

$df(x_0;y_0)=f'_x(x_0;y_0)dx+f'_y(x_0;y_0)dy\approx$
$\approx f'_x(x_0;y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0;y_0)(y-y_0)$-дифференциал первого порядка;
$d^2f(x_0;y_0)=f''_{xx}(x_0;y_0)dx^2+2f''_{xy}(x_0;y_0)dxdy+\cdot$

$+f''_{yy}(x_0;y_0)dy^2\approx f''_{xx}(x_0;y_0)(x-x_0)^2+$

$+2f''_{xy}(x_0;y_0)(x-x_0)(y-y_0)+f''_{yy}(x_0;y_0)(y-y_0)^2-$дифференциал второго порядка и так далее.

Замечание: чем больше слагаемых мы берём, тем большую точность даёт формула Тейлора.

Пример 3.28. Найти несколько первых членов разложения функцию $z = e^x siny$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(0;0)$.

Решение.

Найдём первые три слагаемых разложения функции $z = e^x siny$ в ряд Тейлора, то есть формула приобретает вид:

$$f(x;y) = f(x_0;y_0) + \frac{df(x_0;y_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0;y_0)}{2!} + r_2;$$

1)Найдем значение функции $z = f(x;y)$ в точке $(0;0)$: $f(0;0) = e^0 sin0 = 0$;

2)Считаем первый дифференциал в точке $(0;0)$, $df(0;0)$:

$df(0;0) = f'_x(0;0)(x-0) + f'_y(0;0)(y-0)$,
$f'_x = (e^x siny)'_x = siny(e^x)'_x = e^x siny$,
$f'_y = (e^x siny)'_y = e^x (siny)'_y = e^x cosy$,
$f'_x(0;0) = e^0 sin0 = 0$, $f'_y(0;0) = e^0 cos0 = 1$,
Следовательно,
$df(0;0) = 0 \cdot (x-0) + 1 \cdot (y-0) = y$;

3)Вычисляем второй дифференциал в точке $(0;0)$, $d^2 f(0;0)$:

$d^2 f(0;0) = f''_{xx}(0;0)(x-0)^2 + 2f''_{xy}(0;0)(x-0)(y-0) +$

$+ f''_{yy}(0;0)(y-0)^2$;

$f''_{xx} = (e^x siny)'_x = siny(e^x)'_x = e^x siny$,
$f''_{xy} = (e^x siny)'_y = e^x (siny)'_y = e^x cosy$,
$f''_{yy} = (e^x cosy)'_y = e^x (cosy)'_y = -e^x siny$,
$f''_{xx}(0;0) = e^0 sin0 = 0$,
$f''_{xy}(0;0) = e^0 cos0 = 1$,
$f''_{yy}(0;0) = -e^0 sin0 = 0$.
Получаем:
$d^2 f(0;0) = 0 \cdot (x-0)^2 + 1 \cdot (x-0) \cdot (y-0) + 0 \cdot (y-0)^2 = xy$;

Итак, разложения функцию $z = e^x siny$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(0;0)$ имеет вид: $f(x;y) = 0 + y + \frac{xy}{2!} = y + \frac{xy}{2}$.

Пример 3.29. Разложить функцию $z = 3x^5y^2 - 2x^4y^3 + 5y$ в ряд Тейлора в окрестности в точке $M_0(1;1)$ до третьего порядка включительно.

Решение.

Для разложения исходной функции в ряд Тейлора воспользуемся соответствующей формулой:

$$f(x;y)=f(x_0;y_0)+\frac{df(x_0;y_0)}{1!}+\frac{d^2f(x_0;y_0)}{2!}+\frac{d^3f(x_0;y_0)}{3!}+r_3;$$

1)Найдем значение функции z в точке $M_0(1;1)$:

$$z(M_0)=f(1;1)=3-2+5=6;$$

2)Вычислим первый дифференциал в точке $M_0(1;1), df(1;1)$:

$$df(1;1)=f'_x(1;1)(x-1)+f'_y(1;1)(y-1),$$
$$f'_x=(3x^5y^2-2x^4y^3+5y)'_x=15x^4y^2-8x^3y^3,$$
$$f'_y=(3x^5y^2-2x^4y^3+5y)'_y=6x^5y-6x^4y^2+5,$$
$$f'_x(1;1)=15-8=7, f'_y(1;1)=6-6+5=5.$$

Получаем:

$$df(1;1)=7(x-1)+5(y-1)$$

3)Вычислим второй дифференциал $d^2f(1;1)$:

$$d^2f(1;1)=f''_{xx}(1;1)(x-1)^2+2f''_{xy}(1;1)(x-1)(y-1)+$$
$$+f''_{yy}(1;1)(y-1)^2,$$

$$f''_{xx}=(15x^4y^2-8x^3y^3)'_x=60x^3y^2-24x^2y^3,$$
$$f''_{xy}=(15x^4y^2-8x^3y^3)'_y=30x^4y-24x^3y^2,$$
$$f''_{yy}=(6x^5y-6x^4y^2+5)'_y=6x^5-12x^4y,$$
$$f''_{xx}(1;1)=60-24=36,$$
$$f''_{xy}(1;1)=30-24=6,$$
$$f''_{yy}(1;1)=6-12=-6.$$ Следовательно,
$$d^2f(1;1)=36(x-1)^2+12(x-1)(y-1)-6(y-1)^2;$$

4)Вычисляем дифференциал третьего порядка в точке $M_0(1;1), d^3f(1;1)$:

$$d^3f(1;1)=f'''_{xxx}(1;1)(x-1)^3+3f'''_{xxy}(1;1)(x-1)^2(y-1)+$$
$$+3f'''_{xyy}(1;1)(x-1)(y-1)^2+f'''_{yyy}(1;1)(y-1)^3,$$

$$f'''_{xxx}=(60x^3y^2-24x^2y^3)'_x=180x^2y^2-48xy^3,$$
$$f'''_{xxx}(1;1)=180-48=132,$$
$$f'''_{xxy}=(60x^3y^2-24x^2y^3)'_y=120x^3y-72(xy)^2,$$
$$f'''_{xxy}(1;1)=120-72=48,$$
$$f'''_{xyy}=(30x^4y-24x^3y^2)'_y=30x^4-48x^3y,$$
$$f'''_{xyy}(1;1)=-18,$$
$$f'''_{yyy}=(6x^5-12x^4y)'_y=-12x^4,$$
$$f'''_{yyy}(1;1)=-12.$$

Следовательно,

$$d^3f(1;1) = 132(x-1)^3 + 3\cdot 48(x-1)^2(y-1) +$$
$$+3\cdot(-18)(x-1)(y-1)^2 + (-12)(y-1)^3 =$$
$$= 132(x-1)^3 + 144(x-1)^2(y-1) -$$
$$-54(x-1)(y-1)^2 - 12(y-1)^3;$$

Итак, разложение исходной функции в ряд Тейлора в окрестности точкиM_0 имеет вид:

$$f(x;y) = 6 + 7(x-1) + 5(y-1) + 18(x-1)^2 +$$

$$+6(x-1)(y-1) - 3(y-1)^2 + 22(x-1)^3 +$$

$$+24(x-1)^2(y-1) - 9(x-1)(y-1)^2 - 2(y-1)^3 + r_3.$$

ПЕРЕЧЕНЬ ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ

1. Соболь Б.В., Мишняков Н.Т., Поркшеян В.М. Практикум по высшей математике. Изд. 3-е. — Ростов н/Д, 2006. — 640 с.
2. Виленкин И.В., Гробер В.М. Высшая математика для студентов экономических, технических, естественно-научных специальностей вузов. Издательство «Феникс» — Ростов н/Д, 2004. — 415 с.
3. Письменный Д.Т., Конспект лекций по высшей математике (полный курс). 2-е изд. Москва: «Айриспресс», 2014.
4. Данко П. Е., Попов, А.Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах (1,2 том). — М.: Высш. шк., 2002.