ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Высшая математика»

Учебно-методическое пособие «Операционное исчисление»

по дисциплине

«Основы операционного исчисления и теории функций комплексного переменного»

Авторы
Ворович Е.И.,
Золотых И.А.,
Коровина К.С.,
Поляков А.С.,
Типаева Э.Р.

Ростов-на-Дону, 2024

Аннотация

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов очной формы обучения направления 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств.

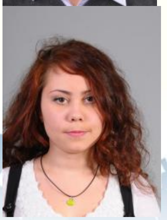
Авторы

доц. кафедры «Высшая математика»
Ворович Е.И.

старший преподаватель кафедры «Математика и информатика»
Золотых И.А.

старший преподаватель кафедры «Информационная безопасность в вычислительных системах и сетях»
Коровина К.С.

старший преподаватель кафедры «Математика и информатика»
Поляков А.С.



старший преподаватель кафедры «Кибербезопасность информационных систем»
Типаева Э.Р.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Операционное исчисление широко применяется при исследовании переходных процессов в линейных физических системах электротехники, автоматики, радиотехники, механики.

Задача данного пособия – помочь студенту самостоятельно овладеть техникой использования преобразования Лапласа. Данное пособие состоит из четырех разделов.

В первом разделе приведены определения, формулы и теоремы, на которые в остальных разделах есть ссылки.

Во втором разделе Вы найдете примеры решения типичных задач:

определение изображения по заданному оригиналу;

определение оригинала по заданному изображению;

решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и систем таких уравнений операторным методом;

Третий раздел –это самоучитель. Он содержит задачи, ответы, указания к решению задач и подробные решения.

Работать с самоучителем нужно следующим образом.

Решать задачи, начиная с №1. Ответ задачи №1 содержится в части «Ответы» под номером 1. Если ответ совпал с приведенным в пособии, переходить к решению задачи №2, в противном случае смотреть указание №1 и снова решать задачу 1. Если же информация, содержащаяся в указании, окажется недостаточной для получения верного ответа, то Вам придется ознакомиться с решением, приведенным в части «решения» под номером 1, затем снова самостоятельно решить задачу и, получив верный ответ, перейти к задаче №2 и так далее.

Четвертый раздел содержит задачи для самостоятельного решения.

Желаем успеха.

1. Основные определения, теоремы и формулы

Пусть $f(t)$ – комплекснозначная функция действительного переменного *t*.

Определение. Функция $f(t)$ называется **оригиналом**, если она обладает следующими свойствами:

1) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;

2) на любом конечном интервале $[a,b]$ $(a,b>0)$ $f(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле, то есть: а) ограничена; б) непрерывна или кусочно-непрерывна (имеет конечное число точек разрыва 1 рода); в) имеет конечное число экстремумов;

3) $f(t)$ растет не быстрее экспоненциальной функции, то есть существуют такие постоянные $M>0$ и $S \ge 0$, что для всех *t* выполняется неравенство $|f(t)| \le Me^{St}$. Число *S* называется показателем роста. Множество функций-оригиналов обозначим *D* (класс *D*).

Пусть $f(t)$ – оригинал с показателем роста *S*, *p* – комплексный параметр, причем $\operatorname{Re} p > 0$.

Рассмотрим $\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$. Это несобственный интеграл. Можно показать, что если $f(t)$ – оригинал, то этот интеграл сходится и является функцией параметра *p*, обозначим его $F(p)$.

Определение. $F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$ называется **преобразованием Лапласа** функции $f(t)$

Обозначения $f(t) \xrightarrow{L} F(p)$ $\qquad F(p) = L\{f(t)\}$

$$f(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\longrightarrow}} F(p)$$

Терминология: *f(t)* называется оригиналом, прообразом; *F(p)* – изображением, образом, преобразованием Лапласа.

Замечание. $F(p)$ определена в полуплоскости $\operatorname{Re} p \ge S$ и является в этой полуплоскости функцией аналитической (т.е. дифференцируемой)

Определение. Сверткой функцией $f_1(t)$ и $f_2(t)$ называется функция, обозначаемая

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau$$

Основные теоремы

Введем обозначения: *f(t)* – оригинал, $L\{f(t)\}, F(p)$ – изображение

1) Свойство линейности:

$L\{C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)\} = L\{C_1 f_1(t)\} + L\{C_2 f_2(t)\} = C_1 L\{f_1(t)\} + C_2 L\{f_2(t)\}$

$f_1(t), f_2(t)$ – оригиналы, C_1, C_2 – произвольные комплексные постоянные .

2) Теорема смещения:

$L\{e^{at} f(t)\} = F(p-a)$, где *a*- произвольное комплексное число.

3) Теорема интегрирования изображения:

$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_p^\infty F(q)dq$,

если несобственный интеграл является сходящимся

4) Теорема дифференцирования изображения:

$L\{-t\, f(t)\} = F'(p)$, $L\{(-1)^n t^n f(t)\} = F^{(n)}(p)$

5) Теорема о дифференцировании оригинала: если функция *f(t)* и ее производные являются оригиналами, то

$L\{f'(t)\} = pF(p) - f(0)$; $L\{f''(t)\} = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$

6) Теорема умножения изображений.

Пусть $L\{f_1(t)\} = F_1(p)$, $L\{f_2(t)\} = F_2(p)$. Тогда $\boxed{L\{f_1 * f_2\} = F_1(p)F_2(p)}$.

Таблица изображений

Здесь *a* и ω являются комплексными числами, n- натуральное число.

№	Оригинал	Изображение
1.	1	$\frac{1}{p}$
2.	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
3.	$sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
4.	$cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$

5.	$sh\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
6.	$ch\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
7.	$e^{at}sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
8.	$e^{at}cos\omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
9.	$e^{at}sh\omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2}$
10.	$e^{at}ch\omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}$
11.	t	$\frac{1}{p^2}$
12.	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
13.	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
14.	$tsin\omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
15.	$tcos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
16.	$tsh\omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2-\omega^2)^2}$
17.	$tch\omega t$	$\frac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$

Также при решении используются следующие формулы:

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \quad (18)$$

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \quad (19)$$

$$\mathrm{sh}\, z = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right) \quad (20)$$

$$\mathrm{ch}\, z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right)$$

(21)

$$\cos^2 z = \frac{1}{2}(1+\cos 2z)$$ (23)

$$\sin^2 z = \frac{1}{2}(1-\cos 2z)$$ (24)

2. Примеры решения задач.

1.Определение изображения по оригиналу

Пример 1. Найти изображение *F (p)* по заданному оригиналу

$$f(t) = = t\cdot sh2t\cdot \cos 3t.$$

Решение.

Преобразуем оригинал (формула 20):

$$f(t)= \frac{1}{2} t\,(e^{2t} - e^{-2t})\cos 3t= \frac{1}{2}(e^{2t}t\cos 3t - e^{-2t}t\cos 3t)= \frac{1}{2}(e^{2t} f_1(t)- e^{-2t}f_1(t))$$

По таблице оригиналов и изображений (формула 15) найдем изображение F1 (p) для оригинала f 1 (t): $L(t\cos 3t) = \dfrac{p^2-9}{(p^2+9)^2}$

Используя свойства линейности преобразования Лапласа и теорему смещения, получим:

$$L\{\frac{1}{2}(e^{2t} f_1(t)- e^{-2t}f_1(t))\}= \frac{1}{2}\left(\frac{(p-2)^2-9}{((p-2)^2+9)^2} - \frac{(p+2)^2-9}{((p+2)^2+9)^2}\right)=F(p)$$

2. Определение оригинала по изображению

Пусть изображение F(p) задано в виде правильной рациональной дроби. Для того, чтобы найти соответствующий ему оригинал f(t), надо представить заданную дробь в виде суммы простейших дробей. Оригиналы последних получаем по таблице оригиналов и изображений.

Пример 2. Найти оригинал f(t) по заданному изображению F(p)= $\dfrac{7p+3}{(p-1)(p^2+4p+S)}$

Решение. Методом неопределенных коэффициентов получим разложение дроби на элементарные, то есть представим F(p) в виде суммы простейших дробей

$$\frac{7p+3}{(p-1)(p^2+4p+5)} = \frac{1}{p-1} - \frac{p-2}{p^2+4p+5} = F_1(p)-F_2(p)$$

Найдем оригиналы, пользуясь таблицей изображений.

Для $F_1(p)$ $f_1(t)= e^t$.

Представим $F_2(p)$ в виде

$$F_2(p)= \frac{p-2}{p^2+4p+5} = \frac{p+2-4}{(p+2)^2+1} = \frac{p+2}{(p+2)^2+1} - 4\frac{1}{(p+2)^2+1}$$

Тогда $f_2(t)= e^{-2t}\cos t-4\, e^{-2t}\sin t$

Итак, $f(t)=f_1(t)-f_2(t)=e^t-f_2(t)=e^{-2t}\cos t-4e^{-2t}\sin t$

3. Нахождение частных решений линейных дифференциальных уравнений и систем с постоянными коэффициентами

Рассмотрим операторный метод решения линейных дифференциальных уравнений, основанный на применении теоремы о дифференцировании оригинала.

Найдем частное решение уравнения $y''+by'+cy=f(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=y_0$, $y'(0)=y^*$.

Применим преобразование Лапласа к обеим частям уравнения

$$L\{y''+by'+cy\}=L\{f(x)\}$$

В силу линейности преобразования $L\{y''\}+bL\{y'\}+cL\{y\}=L\{f(x)\}$. Обозначим $L\{y\}=\bar{y}$, $L\{f(x)\}=F(p)$ и, используя формулы теоремы, получим

$$p^2\bar{y}-py(0)-y'(0)+b[p\bar{y}-y(0)]+c\bar{y}=F(p).$$

Мы получили уравнение, уже не дифференциальное, из которого определим $\bar{y}$.

$$\bar{y}(p^2+bp+c)=F(p)+py(0)+y'(0)+by(0)$$

$$\bar{y}=\frac{F(p)+py(0)+y'(0)+by(0)}{p^2+bp+c}.$$

Применив процедуру обращения, находим решение уравнения $y(x)=L^{-1}\{\bar{y}\}$.

Пример 3. Найти частное решение уравнения (системы уравнений), удовлетворяющее начальным условиям

а) $y''+2y'+2y=0$ $\qquad y(0)=1$, $\qquad y'(0)=2$.

$$L\{y''+2y'+2y\}=L\{0\},\quad L\{y''\}+2L\{y'\}+2L\{y\}=L\{0\}$$

$$p^2\bar{y}-py(0)-y'(0)+2[p\bar{y}-y(0)]+2\bar{y}=0$$

$$p^2\bar{y}-p-2+2p\bar{y}-2+2\bar{y}=0,\quad \bar{y}(p^2+2p+2)=p+4$$

$$\bar{y}=\frac{p+4}{p^2+2p+2}=\frac{p+4}{(p+1)^2+1}=\frac{p+1}{(p+1)^2+1}+\frac{3}{(p+1)^2+1}\quad\rightarrow$$

$$y'=e^{-x}\cos x+3e^{-x}\sin x$$

б) $y'' + y' - 2y = e^{-x}$ $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 1$.

$$L\{y'' + y' - 2y\} = L\{e^{-x}\}$$

$$p^2\bar{y} - py(0) - y'(0) + p\bar{y} - y(0) - 2\bar{y} = \frac{1}{p+1}$$

$$p^2\bar{y} - 1 + p\bar{y} - 2\bar{y} = \frac{1}{p+1}$$

$$\bar{y}(p^2 + p - 2) = \frac{1}{p+1} + 1 = \frac{p+2}{p+1}$$

$$\bar{y} = \frac{p+2}{(p+1)(p^2+p-2)} = \frac{p+2}{(p+1)(p+2)(p-1)} = \frac{1}{p^2-1} \quad \to \quad y(x) = \operatorname{sh} x$$

.

в) $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y & x(0) = 0 \\ \dot{y} = 2x + y + 1 & y(0) = 5 \end{cases}$

Здесь неизвестные функции $x(t)$ и $y(t)$, обозначим $L\{x\} = \bar{x}$, $L\{y\} = \bar{y}$. Применим к обеим частям каждого уравнения преобразование Лапласа, после чего получим систему уже не дифференциальных уравнений, но относительно изображений $\bar{x}$ и $\bar{y}$.

$$\begin{cases} L\{\dot{x}\} = \bar{x} + 2\bar{y} \\ L\{\dot{y}\} = 2\bar{x} + \bar{y} + \dfrac{1}{p} \end{cases} \qquad \begin{cases} p\bar{x} - x(0) = \bar{x} + 2\bar{y} \\ p\bar{y} - y(0) = 2\bar{x} + \bar{y} + \dfrac{1}{p} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p\bar{x} = \bar{x} + 2\bar{y} \\ p\bar{y} - 5 = 2\bar{x} + \bar{y} + \dfrac{1}{p} \end{cases} \quad (*)$$

$(*)$ – линейная система двух уравнений с двумя неизвестными. Ее решение

$$\bar{x} = \frac{10p+2}{p(p-3)(p+1)} \qquad \bar{y} = \frac{5p^2 - 4p - 1}{p(p-3)(p+1)}$$

$$\bar{x} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-3} + \frac{C}{p+1} \quad \to \quad x = A + Be^{3t} + Ce^{-t}$$

$$\bar{y} = \frac{D}{p} + \frac{E}{p-3} + \frac{F}{p+1} \quad \rightarrow \quad y = D + Ee^{3t} + Fe^{-t}$$

Здесь *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* – числовые коэффициенты, определяемые методом неопределенных коэффициентов.

4. Решение интегральных уравнений Вольтерра

Для решения интегральных уравнений Вольтерра применяется теорема об изображении свертки: $L(f_1 * f_2) = F_1(p) * F_2(p)$.

Пример 4. Решить интегральное уравнение: $\phi(x) = e^{-x} + \int_0^x \sin(x-t)\phi(t)dt$,

Решение. Обозначим $L(\phi(x)) = F(p)$, тогда $L(\int_0^x \sin(x-t)\phi(t)dt) = \frac{1}{p^2+1} * F(p)$. $L(e^{-x}) = \frac{1}{p+1}$. Подставляя в уравнение, получим: $F(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p^2+1} * F(p)$

$$F(p) = \frac{p^2+1}{(p+1)p^2} \qquad \phi(x) = 2e^{-x} + x - 1$$

3. Самоучитель

3.1 Задачи.

Найти изображение $F(p)$ по заданному оригиналу $f(t)$.

1) $f(t) = e^{tsin\beta}$
2) $f(t) = e^{-3t}$
3) $f(t) = e^{2t}$
4) $f(t) = cos2t$
5) $f(t) = sin3t$
6) $f(t) = sh8t$
7) $f(t) = ch5t$
8) $f(t) = e^{3t}sin5t$
9) $f(t) = e^{-2t}cos7t$
10) $f(t) = e^{5t}sh3t$
11) $f(t) = e^{2t}ch8t$
12) $f(t) = te^{3t}$
13) $f(t) = t^2$
14) $f(t)=t^5$
15) $f(t) = t^3e^{2t}$
16) $f(t) = t^4e^{-t}$
17) $f(t) = tsin3t$
18) $f(t) = tch2t$
19) $f(t) = a^t$
20) $f(t) = sin^2t$
21) $f(t) = e^{3t}sin^2t$
22) $f(t) = cos^3t$
23) $f(t) = e^{2t}cos^3t$
24) $f(t) = shat \cdot sinbt$
25) $f(t) = sin3t \cdot cost$
26) $f(t) = t^2sint$
27) $f(t) = t^2e^tsin\,t$
28) $f(t) = tcos^2t$
29) $f(t) = te^{3t}cos^2t$
30) $f(t) = \frac{e^t-1}{t}$
31) $f(t) = \frac{1-e^{-t}}{t}$
32) $f(t) = \frac{sin^2t}{t}$

Найти оригинал f(t) по заданному изображению F(p)

33) $F(p)=\frac{1}{p^2}$
34) $F(p)=\frac{1}{p^5}$
35) $F(p)=\frac{1}{p^8}$
36) $F(p)=\frac{1}{(p-1)^2}$
37) $F(p)=\frac{1}{(p-2)^5}$
38) $F(p)=\frac{1}{(p+1)^3}$
39) $F(p)=\frac{2}{p^2+4}$
40) $F(p)=\frac{3}{p^2-16}$
41) $F(p)=\frac{5}{(p-2)^2+9}$
42) $F(p)=\frac{p}{p^2+1}$
43) $F(p)=\frac{p-1}{(p-1)^2-8}$
44) $F(p)=\frac{p+3}{(p+2)^2-1}$
45) $F(p)=\frac{p-3}{(p+1)^2-7}$
46) $F(p)=\frac{1}{p^2+4p+5}$
47) $F(p)=\frac{1}{p^2+4p+3}$
48) $F(p)=\frac{p}{p^2+4p+5}$
49) $F(p)=\frac{p-5}{p^2+6p-15}$
50) $F(p)=\frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$
51) $F(p)=\frac{1}{p^2(p^2+1)}$
52) $F(p)=\frac{p^2+2p+6}{(p-1)(p-2)(p-4)}$
53) $F(p)=\frac{1}{p^5-p^2}$
54) $F(p)=\frac{2p^3+p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3}$

Найти частное решение дифференциального уравнения, соответствующее заданным начальным условиям

55. $x''+3x'=e^t, x(0)=0, x'(0)=1$
56. $y''-2y'=e^{2t}, y(0)=y'(0)=0$
57. $y''+2y'-3y=e^{-t}, y(0)=0, y'(0)=1$

58. $y'' + 2y' + y = \sin t, y(0) = 0,\ y'(0) = -1$
59. $y'' - 2y' + 2y = 1, y(0) = y'(0) = 0$

Найти частное решение системы дифференциальных уравнений, соответствующее заданным начальным условиям

60. $\begin{cases} x' = -y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}, \quad x(0) = y(0) = 1$
61. $\begin{cases} x' = 3x + 4y \\ y' = 4x - 3y \end{cases}, \quad x(0) = y(0) = 1$
62. $\begin{cases} x' = 2y \\ y' = 2x \end{cases}, \quad \begin{matrix} x(0)=2 \\ y(0)=2 \end{matrix}$ 63. $\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}, \quad \begin{matrix} x(0)=1 \\ y(0)=-1 \end{matrix}$
64. $\begin{cases} x' + x = y + e^t \\ y' + y = x + e^t \end{cases}, \quad x(0) = y(0) = 1$

3.2. Ответы

1) $\frac{1}{p-\sin\beta}$;
2) $\frac{1}{p+5}$;
3) $\frac{1}{p-2}$;
4) $\frac{p}{p^2+4}$;
5) $\frac{p}{p^2+9}$;
6) $\frac{8}{p^2-64}$;
7) $\frac{p}{p^2-25}$;
8) $\frac{5}{(p-3)^2+25}$;
9) $\frac{p+2}{(p+2)^2+49}$;
10) $\frac{3}{(p-5)^2-9}$;
11) $\frac{p-2}{(p-2)^2-64}$;
12) $\frac{1}{(p-3)^2}$;
13) $\frac{1}{p^3}$;
14) $\alpha\frac{3!}{(p-2)^4}$;
15) $\frac{4!}{(p+1)^3}$;
16) $\frac{4!}{(p+1)^5}$;

17) $\dfrac{6p}{(p^2+9)^2}$;

18) $\frac{1}{p-lna}$;

19) $\frac{2}{p(p^2+4)}$;

20) $\frac{2}{(p-3)[(p-3)^2+4]}$;

21) $\frac{p(p^2+7)}{(p^2+9)(p^2+1)}$;

22) $\frac{(p-2)[(p-2)^2+7]}{[(p-2)^2+9][(p-2)^2+1]}$;

23) $\frac{2pab}{[(p-a)^2+1][(p+a)^2+1]}$;

24) $3\frac{p^2+8}{(p^2+16)(p^2+4)}$;

25) $\frac{6p^2-2}{(p^2+1)^3}$;

26) $\frac{6p^2-12p+4}{(p^2-2p+2)^3}$;

27) $\frac{p^4+2p^2+8}{p^2(p^2+4)^2}$;

28) $\frac{(p-3)^4+2(p-3)^2+8}{(p-3)^2[(p-3)^2+4]^2}$;

29) $\ln\frac{p}{p-1}$;

30) $\ln\frac{p+1}{p}$;

31) $\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{p^2+1}}{p}$.

32) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{p^2+4}}{p}$

33) $f(t) = t$

34) $f(t) = \frac{1}{4!}t^4$

35) $f(t) = \frac{1}{7!}t^7$

36) $f(t) = \frac{1}{2}e^t t^2$

37) $f(t) = \frac{1}{4!}e^{2t}t^4$

38) $f(t) = \frac{1}{2}e^{-t}t^2$

39) $f(t) = \sin 2t$

40) $f(t) = \frac{3}{4}\,\mathrm{sh}\,4t$

41) $f(t) = \frac{5}{3}e^{2t}\sin 3t$

42) $f(t) = \cos 2t$

43) $f(t) = e^{t}\operatorname{ch}\sqrt{8}t$
44) $f(t) = e^{-2t}(\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t)$
45) $f(t) = e^{-t}(\operatorname{ch}\sqrt{7}t - \frac{4}{\sqrt{7}}\operatorname{sh}\sqrt{7}t)$
46) $f(t) = e^{-2t}\sin t$
47) $f(t) = e^{-2t}\operatorname{sh} t$
48) $f(t) = e^{2t}(\cos t + 2\sin t)$
49) $f(t) = e^{3t}(\operatorname{ch}\sqrt{24}t - \frac{8}{\sqrt{24}}\operatorname{sh}\sqrt{24}\,t)$
50) $f(t) = -\frac{1}{15}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{10}\cos 2t + \frac{1}{5}\sin 2t$
51) $f(t) = t - sint$
52) $f(t) = 3e^{t} - 7e^{-2t} + 5e^{4t}$
53) $f(t) = -t + \frac{1}{3}e^{t} - \frac{1}{3}e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$
54) $f(t) = 2e^{-t}\sin t + \frac{1}{2}t^{2}$
55. $x = -\frac{2}{3} + \frac{1}{4}e^{t} + \frac{5}{12}e^{-3t}$
56. $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}te^{2t}$
57. $y = -\frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{8}e^{-3t} + \frac{3}{8}e^{t}$
58. $y = -\frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}te^{-t} + \frac{1}{2}e^{-t}$
59. $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{t}(\cos t - \sin t)$
60. $\begin{cases} x = e^{t}(\cos t - 2\sin t) \\ y = e^{t}(\cos t + 3\sin t) \end{cases}$
61. $\begin{cases} x = \operatorname{ch} 5t + \frac{7}{5}\operatorname{sh} 5t \\ y = \operatorname{ch} 5t + \frac{1}{5}\operatorname{sh} 5t \end{cases}$
62. $\begin{cases} x = 2\operatorname{ch} 2t + 2\operatorname{sh} 2t = 2e^{2t} \\ y = 2e^{2t} \end{cases}$
63. $\begin{cases} x = \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t = e^{t} \\ y = -e^{t} \end{cases}$
64. $\begin{cases} x = e^{t} \\ y = e^{t} \end{cases}$

3.3 Указания

1) Смотри таблицу изображений, формулу 2, $\alpha = \sin\beta$;
2) Смотри таблицу изображений, формулу 2, $\alpha = -3$;
3) Смотри таблицу изображений, формулу 2, $\alpha = 2$;
4) Смотри таблицу изображений, формулу 4, $\omega = 2$;
5) Смотри таблицу изображений, формулу 3, $\omega = 3$;
6) Смотри таблицу изображений, формулу 5, $\omega = 8$;

7) Смотри таблицу изображений, формулу 6, $\omega = 5$;
8) Смотри таблицу изображений, формулу 7, $\alpha = 3$, $\omega = 5$;
9) Смотри таблицу изображений, формулу 8, $\alpha = -2$, $\omega = 7$;
10) Смотри таблицу изображений, формулу 9, $\alpha = 5$, $\omega = 3$;
11) Смотри таблицу изображений, формулу 10, $\alpha = 2$, $\omega = 8$;
12) Смотри таблицу изображений, формулу 13 n=1, $\alpha = 3$;
13) Смотри таблицу изображений, формулу 12, $n = 2$;
14) Смотри таблицу изображений, формулу 12, $n = 5$;
15) Смотри таблицу изображений, формулу 13, n=3, $\alpha = 2$;
16) Смотри таблицу изображений, формулу 13, n=4, $\alpha = -1$;
17) Смотри таблицу изображений, формулу 14;
18) Смотри таблицу изображений, формулу 17;
19) Представить $f(t) = a^t = e^{\ln a^t} = e^{t\ln a}$. Смотреть таблицу изображений, формулу 2;
20) Применить формулу 22 ; затем смотреть таблицу изображений формулу 4.
21) Смотреть решение задачи 20 + теорема 2 (смещения);
22) Воспользоваться представлением $\cos t$ в виде (19), возвести в куб, затем таблица изображений, формула 2 ;
23) Смотреть решение задачи 22 + теорема 2 (смещения);
24) Воспользоваться представлением $sh\, t$ в виде (20), затем таблица изображений, формула 7 ;
25) Представить $sin3t$ в виде (18), $cost$ в виде (19), раскрыть скобки, затем таблица изображений формула 2.
26) Первый способ: представить $sint$ в виде (18), затем таблица изображений, формула 7 ; второй способ: использовать теорему 4;
27) Смотреть решение задачи 26 + теорема 2 (смещения);
28) Применить формулу 23, затем смотреть таблицу изображений формулы 11 и 15.
29) Смотреть решение задачи 28 + теорема 2 (смещения);
30) - 32) Использовать теорему 3 об интегрировании изображений.
33) Смотреть формулу 11
34) Смотреть формулу 12
35) Смотреть формулу 12
36) Смотреть формулу 13
37) Смотреть формулу 13
38) Смотреть формулу 13
39) Смотреть формулу 3
40) Смотреть формулу 5
41) Смотреть формулу 7
42) Смотреть формулу 4

43) Смотреть формулу 10

44) Представить числитель в виде p+3=p+2+1, разделить почленно числитель на знаменатель, затем использовать формулы 9,10

45) Представить p-3=p+1-4, смотреть указание 44

46)-49) Выделить полный квадрат в знаменателе, затем использовать формулы 7,9 или 8,10

50)-53) Представить данные в условии рациональные дроби в виде суммы простейших дробей. Оригинал от рациональной дроби вычисляется как сумма оригиналов соответствующих простейших дробей.

50) $F(p) = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p-2} + \frac{Cp+D}{p^2+4}$

$A = -\frac{1}{15}$; $B = \frac{1}{6}$; $C = -\frac{1}{10}$; D$= -\frac{6}{15}$

51) $F(p) = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{Cp+D}{p^2+1}$, A=1, B=0, C=0, D=-1.

52) $F(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p-4}$, A=3, B=-7, C=5.

53) $F(p) = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{P-1} + \frac{Dp+E}{p^2+p+E}$,

$A = 1, C = \frac{1}{3}, B = 0, D = -\frac{1}{3}, E = \frac{1}{3}$

54) Разложить на множители знаменатель и представить дробь в виде суммы простейших дробей.

55)-64) Введем обозначения: $L\{y\} = Y(p)$, $L\{x\} = X(p)$. Из теоремы 5 о дифференцировании оригинала следует:

$L\{y'\} = pY(p) - y(0)$, $L\{y''\} = p^2Y(p) - py(0) - y'(0)$,
$L\{x'\} = pX(p) - x(0)$, $L\{x''\} = p^2X(p) - px(0) - x'(0)$.

55)-59). Применим к обеим частям уравнения теорему о дифференцировании оригинала и свойство линейности преобразования Лапласа. Вместо исходного дифференциального уравнения с начальными условиями получаем так называемое – изображающее уравнение. Последнее всегда является линейным алгебраическим уравнением относительно изображения неизвестной функции.

60)-64). Решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом проводится по той же схеме, что и решение одного дифференциального уравнения. Применяя преобразование Лапласа к обеим частям каждого уравнения, используя формулы теоремы о дифференцировании оригинала и свойство линейности преобразования Лапласа, получаем так называемую изображающую систему, которая является линейной алгебраической системой относительно X и Y. Для определения X и Y здесь можно использовать правило Крамера:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

Если $\Delta \neq 0$, то $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$.

3.4. Решения

20) $f(t) = sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - cos2t)$,

$F(p) = \frac{1}{2}[L\{1\} - L\{cos2t\}] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4}\right] = \frac{1}{2}\frac{p^2+4-p^2}{p(p^2+4)} = \frac{2}{p(p^2+4)}$

21) В ответ задачи 20 вместо *p* подставляем *p-3*, получаем

$$F(p) = \frac{2}{(p-3)[(p-3)^2+4]}.$$

22) $f(t) = cos^3 t = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}[e^{3it} + 3e^{2it}e^{-it} + 3e^{it}e^{-2it} + e^{-3it} = \frac{1}{8}[e^{3it} + 3e^{it} + e^{-it} + e^{-3it}]$.

$$F(p) = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{p-3i} + 3\frac{1}{p-i} + 3\frac{1}{p+i} + \frac{1}{p+3i}\right]$$
$$= \frac{1}{8}\left[\frac{2p}{p^2-9i^2} + 3\frac{2p}{p^2-i^2}\right] = \frac{p}{4}\left[\frac{1}{p^2+9} + \frac{3}{p^2+1}\right] = \frac{p(p^2+7)}{(p^2+9)(p^2+1)}.$$

23) В ответ задачи 22 вместо *p* подставляем *p-2*, получаем

$$F(p) = \frac{(p-2)[(p-2)^2+7]}{[(p-2)^2+9][(p-2)^2+1]}.$$

24) $f(t) = shat \cdot sinbt = \frac{1}{2}(e^{at} - e^{-at})sinbt = \frac{1}{2}[e^{at}sinbt - e^{-at}sinbt] =$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{b}{(p-a)^2+1} - \frac{b}{(p+a)^2+1}\right] = \frac{2pab}{[(p-a)^2+1][(p+a)^2+1]}.$$

25) $f(t) = \frac{e^{3it}+e^{-3it}}{2i} \cdot \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{1}{4i}(e^{4it} - e^{-2it} + e^{2it} - e^{-4it})$.

$$F(p) = \frac{1}{4i}\left[\frac{1}{p-4i} - \frac{1}{p+2i} + \frac{1}{p-2i} - \frac{1}{p+4i}\right] =$$
$$= \frac{1}{4i}\left[\frac{p+4i-p+4i}{(p-4i)(p+4i)} + \frac{p+2i-p+2i}{(p+2i)(p-2i)}\right] = \frac{2}{p^2+16} + \frac{1}{p^2+4} =$$
$$= \frac{2p^2+8+p^2+16}{(p^2+16)(p^2+4)} = 3\frac{p^2+8}{(p^2+16)(p^2+4)}.$$

26) $L\{t^2 sint\} = L\left\{t^2 \cdot \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right\} = \frac{1}{2i}[L\{t^2e^{it}\} - L\{t^2e^{-it}\}] =$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{2!}{(p-i)^3} - \frac{2!}{(p+i)^3}\right] = \frac{1}{i}\frac{(p+i)^3-(p-i)^3}{[(p-i)(p+i)]^3} =$$
$$= \frac{1}{i}\frac{p^3+3p^2i+3pi^2+i^3-p^3+3p^2i-3pi^2+i^3}{[(p-i)(p+i)]^3} =$$

$$=\frac{1}{i}\frac{6p^2i+2i^3}{[(p-i)(p+i)]^3}=\frac{6p^2-2}{(p^2+1)^3}.$$

27) В ответ задачи 26 вместо *p* подставляем *p-1*, получаем

$$L\{t^2e^t sint\}=\frac{6(p-1)^2-2}{[(p-1)^2+1]^3}=\frac{6p^2-12p+4}{(p^2-2p+2)^3}.$$

28) $L\{tcos^2t\}=L\left\{t\cdot\frac{1+cos2t}{2}\right\}=\frac{1}{2}[L\{t\}+L\{tcost\}]=$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p^2}+\frac{p^2-4}{(p^2+4)^2}\right]=\frac{1}{2}\frac{(p^2+4)^2+p^2(p^2-4)}{p^2(p^2+4)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{2p^4+4p^2+16}{p^2(p^2+4)^2}=\frac{p^4+2p^2+8}{p^2(p^2+4)^2}.$$

29) В ответ задачи 28 вместо *p* подставляем *p-3*, получаем

$$L\{te^{3t}cos^2t\}=\frac{(p-3)^4+2(p-3)^2+8}{(p-3)^2[(p-3)^2+4]^2}.$$

30) $L\{e^t-1\}=\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}$

$$L\left\{\frac{e^t-1}{t}\right\}=\int_p^\infty\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}\right)dp=\lim_{b\to\infty}\int_p^b\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}\right)dp=$$

$$=\lim_{b\to\infty}[ln|p-1|-ln|p|]\Big|_p^b=\lim_{b\to\infty}\left[ln\left|\frac{p-1}{p}\right|\right]\Bigg|_p^b=$$

$$=\lim_{b\to\infty}ln\left|\frac{b-1}{b}\right|-ln\left|\frac{p-1}{p}\right|=\left\{\lim_{b\to\infty}ln\frac{b-1}{b}=ln\lim_{b\to\infty}\frac{b-1}{b}=ln1=0\right\}=$$

$$=-ln\left|\frac{p-1}{p}\right|=ln\left|\frac{p}{p-1}\right|.$$

31) $L\{1-e^{-t}\}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}$

$$L\left\{\frac{1-e^{-t}}{t}\right\}=\int_p^\infty\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right)dp=\lim_{b\to\infty}[ln|p|-ln|p+1|]\Big|_p^b=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left[ln\left|\frac{p}{p+1}\right|\right]\Bigg|_p^b==\lim_{b\to\infty}ln\left|\frac{b}{b+1}\right|-ln\left|\frac{p}{p+1}\right|=$$

$$=-ln\left|\frac{p}{p+1}\right|=ln\left|\frac{p+1}{p}\right|$$

32) L$\{\,sin^2t\}=L\left\{\frac{1}{2}\,(1-cos2t)\right\}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+4}\right]$

$$\mathrm{L}\{\,\frac{sin^2t}{t}\}=\frac{1}{2}\int_p^\infty\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+4}\right)dp=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_p^b\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+4}\right)dp=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}[ln\,|p|-\frac{1}{2}ln|p^2+4|]\Bigg|_p^b=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[ln\frac{p}{\sqrt{p^2+4}}\right]\Bigg|_p^b=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{b\to\infty}ln\left|\frac{b}{\sqrt{b^2+4}}\right|-ln\left|\frac{p}{\sqrt{p^2+4}}\right|\right]=\frac{1}{2}\left[ln\lim_{b\to\infty}\left|\frac{b}{\sqrt{b^2+4}}\right|-ln\left|\frac{p}{\sqrt{p^2+4}}\right|\right]=$$

$= \frac{1}{2}\left[ln\,1 - ln\left|\frac{p}{\sqrt{p^2+4}}\right|\right] = -\frac{1}{2}ln\left|\frac{p}{\sqrt{p^2+4}}\right| = \frac{1}{2}ln\left|\frac{\sqrt{p^2+4}}{p}\right|.$

33) $F(p) = \frac{1}{p^2} \to f(t) = t$

34) $F(p) = \frac{1}{p^5} = \frac{1}{4!}\frac{4!}{p^5} \to f(t) = \frac{1}{4!}t^4$

35) F(p)= $\frac{1}{p^8} = \frac{7!}{7!\,p^8} \to f(t) = \frac{t^7}{7!}$

36) $F(p) = \frac{1}{(p-1)^3} = \frac{1}{2!}\frac{2!}{(p-1)^3} \to f(t) = \frac{1}{2}e^t t^2$

37) $F(p) = \frac{1}{(p-2)^5} = \frac{1}{4!}\frac{4!}{(p-2)^5} \to f(t) = \frac{1}{4!}e^{2t}t^4$

38) $F(p) = \frac{1}{(p+1)^3} = \frac{1}{2!}\frac{2!}{(p+1)^3} \to f(t) = \frac{1}{2}e^{-t}t^2$

39) Смотреть указание 39

40) $F(p) = \frac{3}{p^2-16} = \frac{3}{4}\frac{4}{p^2-16} \to f(t) = \frac{3}{4}\operatorname{sh}4t$

41) $F(p) = \frac{5}{(p-2)^2+9} = \frac{5}{3}\frac{3}{(p-2)^2+9} \to f(t) = \frac{5}{3}e^{2t}\sin 3t$

42) Смотреть указание 42

43) Смотреть указание 43

44) $F(p) = \frac{p+2+1}{(p+2)^2-1} = \frac{p+2}{(p+2)^2-1} + \frac{1}{(p+2)^2-1} \to f(t) = e^{-2t}(\operatorname{ch}t + \operatorname{sh}t)$

45) $F(p) = \frac{p+1-4}{(p+1)^2-7} = \frac{p+1}{(p+1)^2-7} - 4\frac{1}{(p+1)^2-7} = \frac{p+1}{(p+1)^2-7} - \frac{4}{\sqrt{7}}\frac{\sqrt{7}}{(p+1)^2-7} \to$ $f(t) = e^{-t}(\operatorname{ch}\sqrt{7}t - \frac{4}{\sqrt{7}}\operatorname{sh}\sqrt{7}t)$

46) $F(p) = \frac{1}{p^2+4p+5} = \frac{1}{(p+2)^2+1} \to f(t) = e^{-2t}\sin t$

47) $F(p) = \frac{1}{p^2+4p+3} = \frac{1}{(p+2)^2-1} \to f(t) = e^{-2t}\operatorname{sh}t$

48) $F(p) = \frac{p}{p^2-4p+5} = \frac{p}{(p-2)^2+1} = \frac{p-2+2}{(p-2)^2+1} = \frac{p-2}{(p-2)^2+1} + \frac{2}{(p-2)^2+1}$

Смотреть формулы 8,7. $f(t) = e^{2t}\cos t + 2e^{2t}\sin t$

49) $F(p) = \frac{p-5}{p^2+6p-15} = \frac{p-5}{(p+3)^2-24} = \frac{p+3-8}{(p+3)^2-24} = \frac{p+3}{(p+3)^2-24} - \frac{8}{(p+3)^2-24} =$ $\frac{p+3}{(p+3)^2-24} - \frac{8}{\sqrt{24}}\frac{\sqrt{24}}{(p+3)^2-24}$

Смотреть формулы 9,10. $f(t) = e^{3t}\operatorname{ch}\sqrt{24}t - \frac{8}{\sqrt{24}}\operatorname{sh}\sqrt{24}t$

50) $F(p) = \frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p-2} + \frac{Cp+D}{p^2+4} \to f(t) = Ae^{-t} + Be^{2t} +$ $C\cos 2t + \frac{D}{2}\sin 2t$

Найдем коэффициенты A,B,C,D.

$A(p-2)(p^2+4) + B(p+1)(p^2+4) + (Cp+D)(p+1)(p-2) = p+2$

При p=2, 24B=4→ $B = \frac{1}{6}$

При p=0, -8A+4B-2D=2→ $D = -\frac{6}{15}$

При p=-1, -15A=1→ $A=-\frac{1}{15}$

Сравнивая коэффициенты при p^3, получаем

$$A+B+C=0\to C=-A-B=-\frac{1}{10}$$

51) $F(p)=\frac{1}{p^2(p^2+1)}=\frac{A}{p^2}+\frac{B}{p}+\frac{Cp+D}{p^2+1}$

Найдем коэффициенты A,B,C,D.

$$A(p^2+1)+Bp(p^2+1)+(Cp+D)p^2=1$$
$$p^3(B+C)+p^2(A+D)+pB+A=1$$

Сравнивая коэффициенты при p^3,p^2,p,p^0, получаем

$$A=1,\qquad B=0,\qquad A+D=0\to D=-A=-1$$
$$B+C=0\to C=-B=0$$
$$F(p)=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2+1}\to f(t)=t-\sin t$$

52) $F(p)=\frac{p^2+2p+6}{(p-1)(p-2)(p-4)}=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{p-2}+\frac{C}{p-4}\to f(t)=Ae^t+Be^{-2t}+Ce^{4t}$

$$A(p-2)(p-4)+B(p-1)(p-4)+C(p-1)(p-2)=p^2+2p+6$$

При p=1, $3A=9\to A=3$

При p=2, $-2B=14\to B=-7$

При p=4, $6C=30\to C=5$

53) $F(p)=\frac{1}{p^5-p^2}=\frac{1}{p^2(p^3-1)}=\frac{1}{p^2(p-1)(p^2+p+1)}=\frac{A}{p^2}+\frac{B}{p}+\frac{C}{p-1}+\frac{Dp+E}{p^2+p+E}$

$$A(p-1)(p^2+p+1)+Bp(p-1)(p^2+p+1)+Cp^2(p^2+p+1)$$
$$+(Dp+E)p^2(p-1)=1$$

При p=1, $3C=1\to C=\frac{1}{3}$

При p=0, $-A=1\to A=1$

Перепишем предыдущее равенство в виде

$A(p^3-1)+B(p^4-p)+C(p^4+p^3+p^2)+Dp^4+Ep^3-Dp^2-Ep^2$=1

Сравнивая коэффициенты при p^4,p^3,p^2 получаем систему

$$\begin{cases} B+C+D=0\\ A+C+E-D=0\\ C-E=0\end{cases}$$

из которого найдем $B=0,D=-\frac{1}{3},E=\frac{1}{3}$

Итак, $F(p)=-\frac{1}{p^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{p-1}-\frac{1}{3}\frac{p-1}{p^2+p+1}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{1}{p-1}-\frac{1}{3}\frac{p+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$

$$=-\frac{1}{p^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{p-1}-\frac{1}{3}\frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$f(t)=-t+\frac{1}{3}e^t-\frac{1}{3}e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

54) $F(p)=\frac{2p^3+p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3}=\qquad\frac{2p^3+p^2+2p+2}{p^3(p^2+2p+2)}=\frac{2}{p^2+2p+2}+\frac{1}{p^3}=\frac{2}{(p+1)^2+1}+$

$\frac{1}{p^3}$

$f(t) = 2e^{-t}\sin t + \frac{1}{2}t^2$

55. $L\{x'' + 3x'\} = L(e^t)$

$$p^2X - px(0) - x'(0) + 3pX - 3x(0) = \frac{1}{p-1}$$

Учитывая заданные начальные условия, получаем

$p^2X + 1 + 3pX = \frac{1}{p-1}$; $\quad X(p^2 + 3p) = \frac{1}{p-1} - 1 = \frac{2-p}{p-1}$;

$X = \frac{2-p}{(p-1)(p^2+3p)} = \frac{2-p}{p(p-1)(p+3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p+3}$;

Следовательно, $x = A + Be^t + Ce^{-3t}$.

Найдем постоянные A, B, C. Приравнивая числители после приведения к общему знаменателю в выражении для X, получим

$A(p-1)(p+3) + Bp(p+3) + Cp(p-1) = 2 - p$;

Полагая $p = 0$, получим $-3A = 2 \Longrightarrow A = -\frac{2}{3}$. Аналогично при $p = 1$ имеем $4B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{4}$; и при $p = -3$ получаем $C = \frac{5}{12}$.

Таким образом, $x = -\frac{2}{3} + \frac{1}{4}e^t + \frac{5}{12}e^{-3t}$.

56. $L\{y'' - 2y'\} = L(e^{2t})$;

$p^2Y - 2pY = \frac{1}{p-2} \Longrightarrow Y = \frac{1}{p(p-2)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{(p-2)^2} + \frac{C}{p-2} \Rightarrow y = A + Bte^{2t} + Ce^{2t}$

Найдем постоянные A, B, C: $A(p-2)^2 + Bp + Cp(p-2) = 1$.

Отсюда, если $p = 0$, то $4A = 1 \Longrightarrow A = \frac{1}{4}$, если $p = 2$, то $2B = 1 \Longrightarrow B = \frac{1}{2}$. Приравнивая коэффициенты при p^2 в правой и левой частях равенства, получим

$A + C = 0 \Longrightarrow C = -A = -\frac{1}{4}$. *Тогда* $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}te^{2t}$.

57. $L\{y'' + 2y' - 3y\} = L(e^{-t})$.

$p^2Y - py(0) - y'(0) + 2pY + 2py(0) - 3Y = \frac{1}{p+1}$,

$p^2Y - 1 + 2pY - 3Y = \frac{1}{p+1}$, $Y(p^2 + 2p - 3) = \frac{1}{p+1} + 1 = \frac{p+2}{p+1}$.

Отсюда

$Y = \frac{p+2}{(p+1)(p^2+2p-3)} = \frac{p+2}{(p+1)(p+3)(p-1)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+3} + \frac{C}{p-1} \Longrightarrow y = Ae^{-t} + Be^{-3t} + Ce^t$.

Найдем постоянные A, B, C. Имеем

$A(p+3)(p-1) + B(p+1)(p-1) + C(p+1)(p+3) = p + 2$.

Отсюда при $p = 1$: $8C = 3 \Longrightarrow C = \frac{3}{8}$, при $p = -3$: то $8B = -1 \Longrightarrow B =$

$-\frac{1}{8}$,

при $p = -1$: $-4A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{4}$.

58. $L\{y'' + 2y' + y\} = L(sint)$.

$p^2Y - py(0) - y'(0) + 2pY + 2y(0) + Y = \frac{1}{p^2+1}$,

$p^2Y + 1 + 2pY + Y = \frac{1}{p^2+1}$.

$Y = \frac{-p^2}{(p^2+1)(p^2+2p+1)} = \frac{-p^2}{(p^2+1)(p+1)^2} = \frac{Ap+B}{p^2+1} + \frac{C}{(p+1)^2} + \frac{D}{p+1}$,

$(Ap + B)(p + 1)^2 + C(p^2 + 1) + D(p + 1)(p^2 + 1) = -p^2$,

$p = -1$: $2C = -1 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$,

$p = 0$: $B + C + D = 0$.

Приравнивая коэффициенты при p^3 и p^2 в обеих частях равенства, получим еще два уравнения

p^3: $A + D = 0$,

p^2: $B + 2A + C + D = -1$

В итоге $A = -\frac{1}{2}$, $B = 0$, $C = -\frac{1}{2}$, $D = \frac{1}{2}$.

$$Y = -\frac{1}{2}\frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{2}\frac{p}{(p+1)^2} + \frac{1}{2}\frac{p}{p+1} \Rightarrow$$

$y = -\frac{1}{2}cost - \frac{1}{2}te^{-t} + \frac{1}{2}e^{-t}$.

59. $L\{y'' - 2y' + 2y\} = L(1)$.

$p^2Y - py(0) - y'(0) - 2pY + 2y(0) + 2Y = \frac{1}{p}$.

$p^2Y - 2pY + 2Y = \frac{1}{p} \Rightarrow Y = \frac{1}{p(p^2-2p+2)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp+C}{p^2-2p+2}$.

$Ap^2 - 2Ap + 2A + Bp^2 + Cp = 1$.

p^2: $A + B = 0$,

p^1: $C - 2A = 0$,

p^0: $2A = 1$. Итак, $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = 1$;

$$Y = \frac{1}{2}\frac{1}{p} + \frac{-\frac{1}{2}p + 1}{(p-1)^2+1} = \frac{p}{2} - \frac{1}{2}\frac{p-2}{(p-1)^2+1}$$

$$= \frac{p}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{p-1}{(p-1)^2+1} - \frac{1}{(p-1)^2+1}\right] \Rightarrow$$

$y = \frac{1}{2} - \frac{e^{-t}}{2}(cost - sint)$.

60. $\begin{cases} L\{x'\} = L\{-y\}, \\ L\{y'\} = L\{2x+2y\}. \end{cases}$ $\begin{cases} pX - x(0) = -Y, \\ pY - y(0) = 2X + 2Y. \end{cases}$ $\begin{cases} pX - 1 = -Y, \\ pY - 1 = 2X + 2Y. \end{cases}$

$$\begin{cases} pX + Y = 1, \\ -2X + Y(p-2) = 1. \end{cases}$$

Получили линейную систему с постоянными коэффициентами относительно неизвестных X, Y:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & 1 \\ -2 & p-2 \end{vmatrix} = p(p-2) + 2 = p^2 - 2p + 2;$$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & p-2 \end{vmatrix} = p - 3$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} p & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = p + 2$.

$X = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{p-3}{p^2-2p+2} = \frac{p-3}{(p-1)^2+1} = \frac{p-1}{(p-1)^2+1} - \frac{2}{(p-1)^2+1}$.

Отсюда $x = e^t cost - 2e^t sint = e^t(cost - 2sint)$.

$Y = \frac{p+2}{(p-1)^2+1} = \frac{p-1}{(p-1)^2+1} + \frac{3}{(p-1)^2+1} \Longrightarrow y = e^t(cost + 3sint)$.

61. $\begin{cases} L\{x'\} = L\{3x + 4y\}, \\ L\{y'\} = L\{4x - 3y\}. \end{cases} \begin{cases} pX - 1 = 3X + 4Y, \\ pY - 1 = 4X - 3Y. \end{cases} \begin{cases} X(p-3) - 4Y = 1, \\ -4X + Y(p+3) = 1. \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-3 & -4 \\ -4 & p+3 \end{vmatrix} = p^2 - 25;$$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & p+3 \end{vmatrix} = p + 7$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} p-3 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = p + 1$.

$$X = \frac{p+7}{p^2-25} = \frac{p}{p^2-25} + \frac{7}{p^2-25} \Longrightarrow x = ch5t + \frac{7}{5}sh5t.$$

$$Y = \frac{p+1}{p^2-25} = \frac{p}{p^2-25} + \frac{1}{p^2-25} \Longrightarrow y = ch5t + \frac{1}{5}sh5t.$$

62. $\begin{cases} L\{x'\} = L\{2y\}, \\ L\{y'\} = L\{2x\}. \end{cases} \begin{cases} pX - 2 = 2Y, \\ pY - 2 = 2X. \end{cases} \begin{cases} Xp - 2Y = 2, \\ -2X + Yp = 2. \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & -2 \\ -2 & p \end{vmatrix} = p^2 - 4;$$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & p \end{vmatrix} = 2p + 4$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} p & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2p + 4$.

$$X = Y = \frac{2p+4}{p^2-4} = 2\frac{p+2}{p^2-4} = 2\left[\frac{p}{p^2-4} + \frac{2}{p^2-4}\right].$$

$x = y = 2ch2t + 2sh2t = \frac{2}{2}(e^{2t} + e^{-2t} + e^{2t} - e^{-2t}) = 2e^{2t}$.

63. $\begin{cases} L\{x'\} = L\{-y\}, \\ L\{y'\} = L\{-x\}. \end{cases} \begin{cases} pX + Y = 1, \\ pY + X = -1. \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & 1 \\ 1 & p \end{vmatrix} = p^2 - 1;$$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & p \end{vmatrix} = p + 1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} p & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -p - 1$.

$$X = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{p+1}{p^2-1} = \frac{1}{p-1} \Rightarrow x = e^t.$$

$$Y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=-\frac{p+1}{p^2-1}=-X\ \Longrightarrow y=-x=-e^t\,.$$

64. $\begin{cases} L\{x+x'\}=L\{y+e^t\}, \\ L\{y+y'\}=L\{x+e^t\}. \end{cases}$

$$\begin{cases} X+pX-x(0)=Y+\dfrac{1}{p-1}, \\ Y+pY-y(0)=X+\dfrac{1}{p-1}. \end{cases}\ \begin{cases} X(p+1)-Y=1+\dfrac{1}{p-1}, \\ -X+Y(p+1)=1+\dfrac{1}{p-1}. \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} p+1 & -1 \\ -1 & p+1 \end{vmatrix}=(p+1)^2-1=p^2+2p.$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} \frac{p}{p-1} & -1 \\ \frac{p}{p-1} & p+1 \end{vmatrix}=\frac{p^2+2p}{p-1},\ \Delta_2=\begin{vmatrix} p+1 & \frac{p}{p-1} \\ -1 & \frac{p}{p-1} \end{vmatrix}=\frac{p^2+2p}{p-1}.$$

$$X=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{p+1}{p^2-1}=\frac{1}{p-1}\Longrightarrow x=e^t\,.$$

$$Y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=-\frac{p+1}{p^2-1}=-X\ \Longrightarrow y=-x=-e^t\,.$$

Итак, $\Delta_1=\Delta_2\ \Rightarrow \frac{p^2+2p}{(p-1)(p^2+2p)}=\frac{1}{p-1}\ \Longrightarrow x=y=e^t$.

4. Задачи для самостоятельного решения

Задание 1

Найти изображение F(p) по заданному оригиналу f(t):

1. a) $cht\cdot cost$ b) $t\cdot sin^4t$ c) $\frac{cos2t-cost}{t}$
2. a) $ch2t\cdot sin2t$ b) $t\cdot cos^4t$ c) $\frac{sin2t}{t}$
3. a) $2sht\cdot sin3t$ b) $t\cdot sin^3t$ c) $\frac{e^t\cdot sint}{t}$
4. a) $sh2t\cdot sin2t$ b) $t\cdot cos^3t$ c) $\frac{sin^2t}{t}$
5. a) $cht\cdot sin2t$ b) $t\cdot sin^4 2t$ c) $\frac{sin2t\cdot sin3t}{t}$
6. a) $2(sht\cdot sin2t+sh2t\cdot cost)$ b) $t\cdot sin^3 2t$ c) $\frac{e^{2t}-e^t}{t}$
7. a) $sh2t\cdot cos2t$ b) $t\cdot cos^4 2t$ c) $\frac{1-cos3t}{t}$
8. a) $e^{-2t}\cdot sin3t\cdot cos2t$ b) $t\cdot e^{-2t}\cdot sht$ c) $\frac{sht\cdot cost}{t}$
9. a) $2(cht\cdot sint+sht\cdot cost)$ b) $t\cdot cos^2 2t$ c) $\frac{sin7t\cdot cos3t}{t}$
10. a) $cht\cdot sin4t$ b) $t\cdot e^{-t}\cdot cost$ c) $\frac{e^{2t}\cdot sint}{t}$
11. a) $e^{2t}\cdot cos3t\cdot cos4t$ b) $t\cdot sint\cdot ch2t$ c) $\frac{sh^2t}{t}$
12. a) $sht\cdot cos2t\cdot sin3t$ b) $t\cdot cost\cdot ch2t$ c) $\frac{sin7t\cdot cos3t}{t}$
13. a) $cht\cdot sin2t\cdot sin3t$ b) $t^2\cdot e^t\cdot sint$ c) $\frac{cht-ch2t}{t}$
14. a) $ch3t\cdot sin^2t$ b) $t\cdot e^t\cdot sin2t$ c) $\frac{sht}{t}$
15. a) $sh5t\cdot cos3t$ b) $t\cdot e^t\cdot sin^2t$ c) $\frac{sint-sin2t}{t}$
16. a) $e^{-t}\cdot cos^2t$ b) $t\cdot sht\cdot cost$ c) $\frac{1-cost}{t}\cdot e^{-t}$
17. a) $cht\cdot cos3t$ b) $t\cdot e^t\cdot sint\cdot cos2t$ c) $\frac{1-e^{2t}}{te^t}$
18. a) $2(sht\cdot cos2t+cht)$ b) $t\cdot e^{-t}\cdot cost\cdot cos2t$ c) $\frac{e^t\cdot sin^2t}{te^t}$
19. a) $e^{2t}\cdot sint\cdot sin3t$ b) $t^2\cdot e^{-t}\cdot sh2t$ c) $\frac{1-ch^2t}{t}$
20. a) $e^{-t}\cdot cht\cdot sin2t$ b) $t\cdot e^{-t}\cdot sint\cdot sin3t$ c) $\frac{e^{-t}\cdot sin^2t}{t}$
21. a) $e^{-t}\cdot ch2t\cdot cost$ b) $t\cdot sht\cdot sint$ c) $\frac{e^{-t}\cdot sin^2t}{t}$
22. a) $e^t\cdot cos3t\cdot cos4t$ b) $t\cdot cht\cdot cos2t$ c) $\frac{1-cos2t}{t}\cdot e^t$
23. a) $e^t\cdot cos2t\cdot sin3t$ b) $t\cdot sh2t\cdot cost$ c) $\frac{sh2t\cdot sht}{t}$
24. a) $e^{-t}\cdot sint\cdot sin3t$ b) $t\cdot cht\cdot sin2t$ c) $\frac{sh^2 3t}{t}$
25. a) $e^{2t}\cdot cos^2t$ b) $t\cdot sht\cdot cos4t$ c) $\frac{ch3t-cht}{t}$

26. a) $e^{2t}\cdot sin^2 3t$ b) $t\cdot e^{-t}\cdot sh2t$ c) $\frac{sht\cdot ch2t}{t}$

27. a) $e^{2t}\cdot sh2t\cdot sint$ b) $t\cdot sin^2 t$ c) $\frac{sh^3 t}{t}$

28. a) $e^{-t}\cdot cht\cdot sin3t$ b) $t\cdot cos^2 t$ c) $\frac{sh2t\cdot cht}{t}$

29. a) $e^{t}\cdot cos4t\cdot cost$ b) $t^2\cdot e^{t}\cdot sh2t$ c) $\frac{sint\cdot ch3t}{t}$

30. a) $e^{t}\cdot sin3t\cdot cost$ b) $t\cdot e^{2}\cdot ch2t$ c) $\frac{sht\cdot sin2t}{t}$

Задание 2

Найти оригинал f(t) по изображению F(p):

1. a) $F(p)=\frac{p^3-4p^2+7p-22}{(p-2)^2(p^2-p-20)}$ b) $F(p)=\frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$

2. a) $F(p)=\frac{p^2+7p+18}{(p+2)^3}$ b) $F(p)=\frac{p^2-5p+2}{(p-2)(p^2+1)}$

3. a) $F(p)=\frac{p+2}{p^2(p^2-1)}$ b) $F(p)=\frac{2p^2+17p-17}{(p-1)^2(p^2+16)}$

4. a) $F(p)=\frac{p^2-2p+7}{(p+1)(p-2)^2}$ b) $F(p)=\frac{p^2+8p+3}{(p-1)(p^2+9)}$

5. a) $F(p)=\frac{p^2+1}{p(p+1)(p+2)}$ b) $F(p)=\frac{2p^2+2p+3}{p^3(p^2+1)}$

6. a) $F(p)=\frac{p+5}{p^2(p-1)(p+2)}$ b) $F(p)=\frac{3p+5}{p(p^2+1)(p-3)}$

7. a) $F(p)=\frac{1}{(p+1)^3(p+3)}$ b) $F(p)=\frac{p^2-11p+7}{(p+5)(p^2+4)}$

8. a) $F(p)=\frac{p^2-5p+7}{(p+2)(p-1)^2}$ b) $F(p)=\frac{2}{p(p^2-2p+2)}$

9. a) $F(p)=\frac{2p+1}{(p+3)^2(p+1)}$ b) $F(p)=\frac{p^2+14}{(p^2+4)(p^2+9)}$

10. a) $F(p)=\frac{p}{(p-1)(p+1)^2}$ b) $F(p)=\frac{5p-29}{(p+2)(p^2+9)}$

11. a) $F(p)=\frac{2p^2+41p-41}{(p-1)(p+3)(p-4)}$ b) $F(p)=\frac{4p+5}{(p+1)^2(p^2+1)}$

12. a) $F(p)=\frac{4p^2+4p-8}{p^4-4p}$ b) $F(p)=\frac{-5p^3+25p^2-35p+44}{(p-1)^2(p^2+4)}$

13. a) $F(p)=\frac{p-4}{4p^3-p}$ b) $F(p)=\frac{6p^2+4p-8}{(p+2)^2(p^2+4)}$

14. a) $F(p)=\frac{3p^4+3p^3-13p^2+4}{p^5-5p^3+4p}$ b) $F(p)=\frac{p+2}{(p-1)(p^2+p+1)}$

15. a) $F(p)=\frac{2p^2-5}{p^4-10p^2+9}$ b) $F(p)=\frac{p^2}{p^4-1}$

16. a) $F(p)=\frac{(p+2)^2}{p(p-1)^2}$ b) $F(p)=\frac{2p-9}{(p+4)(p^2+4)}$

17. a) $F(p)=\frac{p^2-3p+2}{p(p+1)^2}$ b) $F(p)=\frac{p^2+p+28}{(p^2+9)(p-1)}$

18. a) $F(p)=\frac{p^2+2}{p^4-p^2}$ b) $F(p)=\frac{-4p^2-2p+8}{(p+2)(p^2+9)}$

19. a) $F(p)=\frac{p^2}{(p+2)^2(p+4)^2}$ b) $F(p)=\frac{6p+8}{(p+1)(p^2+4p+5)}$

20. a) $F(p)=\frac{p^2-2p+3}{(p+1)(p^3-4p^2)}$ b) $F(p)=\frac{p^3+p^2-1}{p^3(p^2+1)}$

21. a) $F(p)=\frac{p^2-8p+4}{p^3(p-2)}$ b) $F(p)=\frac{9p+17}{(p-3)(p^2+3p+4)}$

22. a) $F(p)=\frac{6p^2+2p+1}{(p^2+1)(p^2+p)}$ b) $F(p)=\frac{1}{(p^2+1)(p^2+2p+5)}$

23. a) $F(p)=\frac{1}{(p-1)^2(p-2)(p+5)}$ b) $F(p)=\frac{p^2-6}{p^4+6p^2+8}$

24. a) $F(p)=\frac{5p^2-2p-1}{p^2(p^2-1)}$ b) $F(p)=\frac{2p^2-3p-3}{(p-1)(p^2-2p+5)}$

25. a) $F(p)=\frac{4p+1}{p(p+1)^2}$ b) $F(p)=\frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}$

26. a) $F(p)=\frac{p^2+9}{(p+1)^2(p+3)^2}$ b) $F(p)=\frac{1}{(p-1)(p^2+1)}$

27. a) $F(p)=\frac{5p^2-2p-1}{p^2(p+2)^2}$ b) $F(p)=\frac{3p^3+4p^2+4p+4}{p^2(p^2+2p+2)}$

28. a) $F(p)=\frac{p^2+4}{p^2(p+2)^2}$ b) $F(p)=\frac{3p+4}{(p-3)(p^2+2p+2)}$

29. a) $F(p)=\frac{1}{(p+2)^3(p-1)^2}$ b) $F(p)=\frac{p+8}{(p-2)(p^2+4p+5)}$

30. a) $F(p)=\frac{1}{(p-1)^3(p-2)^2(p+4)}$ b) $F(p)=\frac{2p-3}{p(p^2+4p+8)}$

Задание 3.

Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

1. $y''+5y'+6y=12e^{-x}$, $y(0)=y'(0)=0$
2. $y''+4y'-5y=5x^2-3x+5$, $y(0)=-2,\quad y'(0)=4$
3. $y''+2y'+y=x$, $y(0)=y'(0)=0$
4. $y''-4y'+3y=e^{2x}$, $y(0)=1,\ y'(0)=2$
5. $y''-2y'+5y=5x^2-4x+2$, $y(0)=0,\quad y'(0)=2$
6. $y''-2y+10y=\sin(3x)$, $y(0)=y'(0)=0$
7. $y''-2y'-8y=8e^{2x}$, $y(0)=2,\ \ y'(0)=-2$
8. $y''-2y'-3y=8x$, $y(0)=2,\ \ y'(0)=4$
9. $y''-6y'+9y=e^{3x}$, $y(0)=1,\ \ y'(0)=0$
10. $y''-y'=9e^{2x}$, $y(0)=0,\ \ y'(0)=-5$
11. $y''-4y'+4y=2\sin(2x)$, $y(0)=0,\ \ y'(0)=-1$
12. $y''-y'=2x-1$, $y(0)=2,\ \ y'(0)=-3$

13. $y''+5y'+6y=e^{-2x}$, $y(0)=2,\ \ y'(0)=-4$
14. $y''-y'=x+1$, $y(0)=0,\ \ y'(0)=2$
15. $y''+4y=8\cos(x)$, $y(0)=1,\ \ y'(0)=2$
16. $y''-2y'+y=6x$, $y(0)=y'(0)=1$
17. $y''+2y'+y=9e^{2x}$, $y(0)=1,\ \ y'(0)=3$
18. $y''-3y'-4y=17\sin(3x)$, $y(0)=4,\ \ y'(0)=0$
19. $y''-y'+y=x+6$, $y(0)=1,\ \ y'(0)=0$
20. $y''+5y'+6y=4e^{-x}$, $y(0)=4,\ \ y'(0)=-7$
21. $y''-4y'+4y=6x$, $y(0)=2,\ \ y'(0)=3$
22. $y''+2y'+y=2\cos(3x)$, $y(0)=1,\ \ y'(0)=1$
23. $y''+y'-2y=20\sin(2x)$, $y(0)=1,\ \ y'(0)=-7$
24. $y''-2y'+y=2xe^{x}$, $y(0)=y'(0)=0$
25. $y''-2y'+y=4\sin(x)$, $y(0)=3,\ \ y'(0)=2$
26. $y''-6y'+8y=43\sin(x)$, $y(0)=-6,\ \ y'(0)=-36$
27. $y''-2y'+5y=e^{x}$, $y(0)=y'(0)=1$
28. $y''-2y'-8y=9e^{x}$, $y(0)=y'(0)=3$
29. $y''-4y'+3y=3x+2$, $y(0)=1,\ \ y'(0)=4$
30. $y''+4y=\sin(x)$, $y(0)=y'(0)=1$

Задание 4.

Найти частное решение системы линейных дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

1. $\begin{cases} y'=y-2z+3 \\ z'=y-z+1 \end{cases}$ $y(0)=3,\ z(0)=2$

2. $\begin{cases} y'-y-2z=x \\ z'-2y-z=x \end{cases}$ $y(0)=z(0)=1$

3. $\begin{cases} y'=-3y-z \\ z'=y-z \end{cases}$ $y(0)=1,\ \ z(0)=-1$

4. $\begin{cases} y'=-2z \\ z'=2y+e^{-x} \end{cases}$ $y(0)=1,\ \ z(0)=-1$

5. $\begin{cases} y'=5y+4z \\ z'=2y+3z \end{cases}$ $y(0)=1,\ \ z(0)=2$

6. $\begin{cases} y'=y-z \\ z'=-4y+4z \end{cases}$ $y(0)=1,\ \ z(0)=2$

7. $\begin{cases} y' = 2y + z \\ z' = -y + 4z \end{cases}$ $y(0) = 1,\ z(0) = 2$

8. $\begin{cases} y' = -y + 3z \\ z' = y + z + e^{x} \end{cases}$ $y(0) = z(0) = 0$

9. $\begin{cases} y' = -3y - z \\ 2y' + z' = \cos(x) \end{cases}$ $y(0) = z(0) = 0$

10. $\begin{cases} y' = 2y + 3z \\ z' = y + 4z \end{cases}$ $y(0) = 0,\ z(0) = 4$

11. $\begin{cases} y' + 7y - z = 0 \\ z' + 2y + 5z = 0 \end{cases}$ $y(0) = z(0) = 1$

12. $\begin{cases} y' + 6y - z = e^{-2x} \\ z' - 2y + 5z = e^{x} \end{cases}$ $y(0) = z(0) = 0$

13. $\begin{cases} y' = 7y + 3z \\ z' = 6y + 4z \end{cases}$ $y(0) = 0,\ z(0) = 2$

14. $\begin{cases} y' = 2y - 3z \\ z' = -y \end{cases}$ $y(0) = -2,\ z(0) = 6$

15. $\begin{cases} y' = 4y - z \\ z' = y + 2z \end{cases}$ $y(0) = 0,\ z(0) = 1$

16. $\begin{cases} y' = 2y - z \\ z' = y + 2z \end{cases}$ $y(0) = 0,\ z(0) = -1$

17. $\begin{cases} 3y' + z' + 2y = 1 \\ y' + 4z' + 3z = 0 \end{cases}$ $y(0) = z(0) = 0$

18. $\begin{cases} y' = 5y - z \\ z' = y + 3z \end{cases}$ $y(0) = 0,\ z(0) = -1$

19. $\begin{cases} y' = -y + 3z \\ z' = y + z + e^{2x} \end{cases}$ $y(0) = z(0) = 1$

20. $\begin{cases} y' = z \\ z' = 2y + 2z \end{cases}$ $y(0) = z(0) = 1$

21. $\begin{cases} y' = 5y + 4z \\ z' = 4y + 5z \end{cases}$ $y(0) = 0,\ z(0) = 1$

22. $\begin{cases} y' = y + 4z \\ z' = y - 2z \end{cases}$ $y(0) = 5,\ z(0) = 0$

23. $\begin{cases} y' = -3y - z \\ z' = y - z \end{cases}$ $y(0) = 1,\ z(0) = 1$

24. $\begin{cases} y' = y - z \\ z' = -4y + z \end{cases}$ $y(0) = 1,\ z(0) = 2$

25. $\begin{cases} y' = -3y + 2z \\ z' = -2y + z \end{cases}$ $y(0) = 4,\ z(0) = 5$

26. $\begin{cases} y' = y + 4z \\ z' = 2y + 3z \end{cases}$ $y(0) = 0,\ z(0) = 3$

27. $\begin{cases} y' = -y - 5z \\ z' = y + z \end{cases}$ $y(0) = 0,\ z(0) = -1$

28. $\begin{cases} y' = 3y - z \\ z' = 4y - z \end{cases}$ $y(0) = 0,\ \ z(0) = -3$

29. $\begin{cases} y' = 2y + z \\ z' = -10y + z \end{cases}$ $y(0) = 0,\ \ z(0) = -3$

30. $\begin{cases} y' = -y + 3z \\ z' = y + z + e^{x} \end{cases}$ $y(0) = z(0) = 1$

Задание 5.
Решить интегральное уравнение:

1. $\phi(x) = \sin(x) + 2\int_0^x \cos(x-t)\phi(t)dt$

2. $\int_0^x (x-t)^2 \phi(t)dt = x^n$

3. $\phi(x) = x - \int_0^x \sin(x-t)\phi(t)dt$

4. $\phi(x) = \mathrm{e}^x + \int_0^x \mathrm{e}^{x-t}\phi(t)dt$

5. $\phi(x) = \mathrm{e}^x - \int_0^x \mathrm{e}^{x-t}\phi(t)dt$

6. $\phi(x) = x - \int_0^x \mathrm{e}^{x-t}\phi(t)dt$

7. $\phi(x) = \cos(x) - \int_0^x (x-t)\cos(x-t)\phi(t)dt$

8. $\int_0^x \mathrm{e}^{x-t}\phi(t)dt = \sin x$

9. $\phi(x) = \mathrm{e}^{2x} + \int_0^x \mathrm{e}^{x-t}\phi(t)dt$

10. $\phi(x) = x - \int_0^x (x-t)\phi(t)dt$

11. $\phi(x) = 1 + x + \int_0^x \mathrm{e}^{-2(x-t)}\phi(t)$

12. $\int_0^x \cos(x-t)\phi(t)dt = \sin(x)$

13. $\phi(x) = x + \int_0^x \sin(x-t)\phi(t)dt$

14. $\int_0^x \mathrm{e}^{x-t}\phi(t)dt = shx$

15. $\phi(x) = \sin(x) + \int_0^x (x-t)\phi(t)dt$

16. $\int_0^x \mathrm{e}^{3(x-t)}\phi(t)dt = \sin x$

17. $\phi(x) = x - \int_0^x \mathrm{sh}(x-t)\phi(t)dt$

18. $\int_0^x \cos(x-t)\phi(t)dt = x\sin x$

19. $\phi(x) = \mathrm{sh}\, x - \int_0^x \mathrm{ch}(x-t)\phi(t)dt$

20. $\int_0^x sh(x-t)\phi(t)dt = x^n\, \mathrm{e}^{-x}$

21. $\phi(x) = 1 + 2\int_0^x \cos(x-t)\phi(t)dt$

22. $\int_0^x \mathrm{ch}(x-t)\phi(t)dt = x$

23. $\phi(x) = \mathrm{e}^x + 2\int_0^x \cos(x-t)\phi(t)dt$

24. $\int_0^x \cos(x-t)\phi(t)dt = x + x^2$

25. $\phi(x) = \cos x + \int_0^x \phi(t)dt$

26. $\phi(x) = -2\int_0^x \mathrm{e}^{-(x-t)}\, \phi(t)dt$

27. $\phi(x) = \mathrm{e}^{-x} + \int_0^x \mathrm{e}^{-(x-t)} \sin(x-t)\phi(t)dt$

28. $\int_0^x \mathrm{e}^{x-t}\, \phi(t)dt = x$

29. $\phi(x) = 1 - 2x - 4x^2 + \int_0^x (3 - 6(x-t) - 4(x-t)^2)\phi(t)dt$

30. $\int_0^x \mathrm{e}^{x-t}\, \phi(t)dt = x^2$