ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Высшая математика»

Учебно-методическое пособие

по дисциплине «Алгебра и аналитическая геометрия»

«Методические указания и варианты заданий первого семестра»

Автор
Волокитин Г.И.

Ростов-на-Дону, 2024

Аннотация

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов первого курса, изучающих дисциплину «Алгебра и аналитическая геометрия» в первом семестре всех форм обучения технических направлений. Охвачены разделы «Линейная алгебра», «Векторная алгебра и аналитическая геометрия».

Автор

к.ф.-м.н., доцент кафедры «Высшая математика»
Волокитин Г.И.

Оглавление

1. Экзаменационная программа по линейной алгебре, векторной алгебре и аналитической геометрии

Элементы линейной алгебры.

Матрицы, виды матриц и действия с матрицами. Числовые характеристики матриц. Определители второго и третьего порядков: определения, свойства и способы вычисления. Элементарные преобразования матриц. Обратная матрица: определение, критерий существования и способы вычисления обратной матрицы. Базисный минор и ранг матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений, их виды. Теорема Кронекера-Капелли. Решение определенных систем третьего порядка методом Крамера, матричным методом и методом Гаусса. Общее решение однородных и неоднородных неопределенных систем. Линейные пространства, примеры линейных пространств. Размерность и базис линейного пространства. Линейные преобразования (операторы), примеры линейных преобразований.

Матрица линейного оператора. Собственные векторы и собственные значения квадратной матрицы. Свойства собственных векторов. Приведение матрицы к диагональному виду.

Векторная алгебра и аналитическая геометрия.

Понятие геометрического вектора. Проекция вектора на ось. Линейные операции над векторами. Линейная независимость векторов, базис на плоскости и в пространстве. Координаты вектора, их геометрический смысл. Действия с векторами в координатах. Условие коллинеарности векторов, деление отрезка в данном отношении. Скалярное произведение двух векторов: определение, свойства, вычисление в координатах и приложения. Векторное произведение двух векторов: определение, свойства, вычисление в координатах и приложения. Смешанное произведение трех векторов, теорема о геометрическом смысле, вычисление в координатах и свойства. Условие компланарности трех векторов.

Прямая на плоскости. Угловой коэффициент прямой. Различные виды уравнений прямой (каноническое уравнение, общее, «в отрезках», нормальное). Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой.

Плоскость: нормальный вектор, общее уравнение плоскости. Различные виды уравнений плоскости («в отрезках», нормальное уравнение). Угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости.

Прямая в пространстве: канонические и параметрические уравнения. Прямая как пересечение двух плоскостей. Угол между прямыми и угол между прямой и плоскостью.

Системы координат на плоскости: прямоугольная и полярная. Системы координат в пространстве: прямоугольная, цилиндрическая и сферическая. Кривые второго порядка: определения и канонические уравнения эллипса, окружности, гиперболы и параболы. Поверхности второго порядка: эллипсоиды, сфера, гиперболоиды, параболоиды, цилиндры, конусы.

2. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Задача 1. Даны матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Проверить, что матрица $\mathbf{A}$ - невырожденная и найти решение матричного уравнения $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B}$:

1. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$;

2. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;

3. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$;

4. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

5. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\\ -1 & 9\end{pmatrix}$; 6. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 3 & 0\\ 2 & -2\end{pmatrix}$;

7. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ -1 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 0\\ -2 & 10\end{pmatrix}$; 8. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}5 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 1 & 0\\ 4 & 5\end{pmatrix}$;

9. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ 4 & -5\end{pmatrix}$; 10. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ 3 & 6\end{pmatrix}$.

Задача 2. Тремя методами (по формулам Крамера, матричным методом и методом Гаусса) решить систему линейных алгебраических уравнений: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B}$, где матрицы

A и **B** заданы в условии задачи 1, причем **B** - первый столбец соответствующей матрицы задачи 1. **X** - матрица-столбец неизвестных

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Определить ранг матрицы A.

Записать в развернутом виде однородную систему $AX = 0$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Найти фундаментальную систему решений этой однородной СЛАУ и записать структуру его общего решения.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

2. $$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. $$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix}.$$

4. $$A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & -1 \\ 9 & 4 & 0 & -5 \\ 4 & 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

5. $$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & -7 & -6 \\ 3 & 5 & -9 & -5 \end{pmatrix}.$$

6. $$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & -9 \\ 4 & 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

7. $$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 5 \\ 3 & 11 & -3 & 10 \\ 5 & 17 & -1 & 10 \end{pmatrix}.$$

8. $$A=\begin{pmatrix} 5 & 24 & -7 & -1 \\ -1 & -2 & 7 & 3 \\ 3 & 20 & 7 & 5 \\ 2 & 18 & 14 & 8 \end{pmatrix}.$$

9. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$

10. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & -2 & 0 \\ 5 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$

Задача 4. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A:

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

2. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix}.$

3. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

4. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

5. $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$

6. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

7. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$

8. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

9. $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$

10. $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

Задача 5. В пирамиде $ABCDF$ даны вершины $A,\ B,\ D,\ F$. Основание пирамиды – параллелограмм $ABCD$. Прямоугольные декартовы координаты вершин $A,\ B,\ D$ - элементы соответственно первого, второго, третьего столбцов матрицы $\mathbf{A}$ в задаче 1, координаты вершины F- элементы первого столбца матрицы $\mathbf{B}$ из этой же задачи. Найти:

a) векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AF}$ и их модули;
b) вершину C;
c) работу, производимую силой $\mathbf{F}=\overline{AF}$ при перемещении точки приложения вдоль отрезка AC;
d) внутренний угол $\angle A$;
e) площадь треугольника $\triangle ABC$;
f) объем пирамиды $ABCDF$.
g) проверить, что векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AF}$ образуют базис; выяснить, какая это тройка – правая или левая.

Задача 6. На плоскости даны вершины треугольника $\triangle ABC$. Сделать чертеж и найти:

h) а). Канонические уравнения сторон AB и AC ;
i) б). Уравнение высоты, опущенной из вершины B;
j) в). Внутренний угол $\angle A$;
k) г). Уравнение медианы, проведенной из вершины B;
l) д). Расстояние от точки B до стороны AC.
m) 1. $A(1;3)$, $B(2;3)$, $C(-1;2)$;
n) 2. $A(2;-1)$, $B(5;5)$, $C(3;2)$;

o) 3. $A(1;0)$, $B(3;2)$, $C(-1;4)$;

p) 4. $A(2;-1)$, $B(5;3)$, $C(3;-2)$;

q) 5. $A(2;3)$, $B(4;1)$, $C(6;3)$;

r) 6. $A(2;0)$, $B(0;3)$, $C(0;0)$;

s) 7. $A(1;3)$, $B(2;1)$, $C(-1;2)$;

t) 8. $A(5;1)$, $B(1;2)$, $C(3;3)$;

u) 9. $A(2;1)$, $B(3;-1)$, $C(1;-2)$;

v) 10. $A(1;2)$, $B(9;6)$, $C(3;0)$.

Задача 7. Точки A, B, C, D, F являются вершинами пирамиды из задачи 5. Найти:

a) канонические и параметрические уравнения ребра AB;
b) уравнение грани $ABCD$;
c) угол между ребром AF и гранью $ABCD$;
d) уравнение высоты пирамиды, опущенной из вершины F;
e) расстояние от вершины пирамиды F до основания $ABCD$;
f) проекцию вершины F на плоскость основания $ABCD$;

g) в плоскости Oxy построить треугольник $\triangle ABC$. Координаты вершин этого треугольника – две первые координаты точек $A, \quad B, \quad C$ в задаче 3. Составить уравнение стороны AB и указать угловой коэффициент этой прямой.

3. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Даны матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Проверить, что матрица $\mathbf{A}$ - невырожденная и найти решение матричного уравнения $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 5 & 2\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix}.$$

Решение. а). Проверим, что матрица $\mathbf{A}$ - невырожденная. Матрица называется невырожденной, если ее определитель отличен от нуля. Определитель найдем, раскрывая, например, по элементам первой строки:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

.

Невырожденная матрица имеет обратную $\mathbf{A}^{-1}$.

Умножая слева обе части матричного уравнения $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ на $\mathbf{A}^{-1}$, получаем решение:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

б). Обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$ найдем, используя присоединенную матрицу $\mathbf{A}^{+}$. Элементы присоединенной матрицы - это алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы $\mathbf{A}$, расположенные по столбцам:

$$\mathbf{A}^{+} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица определяется формулой:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{A}^{+}.$$

Находим алгебраические дополнения элементов исходной матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{vmatrix}=3\cdot 2-5\cdot 1=1;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-(4-3)=-1;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{vmatrix}=10-9=1;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 2\end{vmatrix}=11; \qquad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-7;$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix}=1;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-7; \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=5;$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-1.$$

Итак, присоединенная матрица имеет вид:

$$\mathbf{A}^{+}=\begin{pmatrix}1 & 11 & -7\\ -1 & -7 & 5\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Таким образом, обратная матрица равна

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 11 & -7\\ -1 & -7 & 5\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & 11/2 & -7/2\\ -1/2 & -7/2 & 5/2\\ 1/2 & 1/2 & -1/2\end{pmatrix}.$$

Проверим, что обратная матрица найдена правильно, должно выполняться условие $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ - единичная матрица. Вычислим, например, элементы первого столбца произведения матриц:

$$e_{11}=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{11}{2}\cdot 2+\left(-\frac{7}{2}\right)\cdot 3=\frac{23-21}{2}=1$$ - верно,

$$e_{21}=-\frac{1}{2}\cdot 1+\left(-\frac{7}{2}\right)\cdot 2+\frac{5}{2}\cdot 3=\frac{-1-14+15}{2}=0$$ - верно,

$$e_{31}=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 2+\left(-\frac{1}{2}\cdot 3\right)=0$$ - верно.

Аналогично проверяем остальные значения элементов матрицы $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}$.

в). Находим решение матричного уравнения:

$$\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1/2 & 11/2 & -7/2 \\ -1/2 & -7/2 & 5/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 1/2\cdot 2+11/2\cdot 0+(-7/2)\cdot 0 & 1/2\cdot 1+11/2\cdot 3+(-7/2)\cdot 4 \\ -1/2\cdot 2-7/2\cdot 0+5/2\cdot 0 & -1/2\cdot 1-7/2\cdot 3+5/2\cdot 4 \\ 1/2\cdot 2+1/2\cdot 0-1/2\cdot 0 & 1/2\cdot 1+1/2\cdot 3-1/2\cdot 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 2. Тремя методами (Крамера, матричным методом и методом Гаусса) решить систему линейных алгебраических уравнений: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B}$, где матрица $\mathbf{A}$ задана в условии примера 1, матрица правых частей системы - первый столбец матрицы $\mathbf{B}$, а $\mathbf{X}$ - матрица-столбец неизвестных $\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Решение. Учитывая правило перемножения матриц, запишем подробный вид системы:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=2 \\ 2x_1+3x_2+x_3=0 \\ 3x_1+5x_2+2x_3=0 \end{cases}.$$

Получим решение по формулам Крамера:

$x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta},\quad x_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}$. Здесь $\Delta=\det\mathbf{A}=2$ - определитель матрицы системы, он найден в задаче 1 при нахождении обратной матрицы. $\Delta_1,\quad \Delta_2,\quad \Delta_3$ - определители, полученные из определителя матрицы системы заменой соответственно первого, второго, третьего столбца матрицы столбцом правых частей:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

.

Таким образом, получаем,

$$x_1 = \frac{2}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{-2}{2} = -1, \quad x_3 = \frac{2}{2} = 1.$$

Получим решение матричным методом. В этом случае решение определяется формулой:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}.$$

Обратная матрица была найдена при решении примера 1. Поэтому сразу запишем

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 11/2 & -7/2 \\ -1/2 & -7/2 & 5/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \cdot 2 + 11/2 \cdot 0 - 7/2 \cdot 0 \\ -1/2 \cdot 2 - 7/2 \cdot 0 + 5/2 \cdot 0 \\ 1/2 \cdot 2 + 1/2 \cdot 0 - 1/2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

Сравнивая соответствующие элементы матриц слева и справа, снова находим

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1.$$

Получим решение методом Гаусса. При помощи элементарных преобразований строк расширенной матрицы $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ последовательно исключаем неизвестные в уравнениях системы. На месте клетки $\mathbf{A}$ получим единичную матрицу $\mathbf{E}$, при этом на месте клетки $\mathbf{B}$ появится вектор решения.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{matrix} c_2 - 2\times c_1 \\ c_3 - 3\times c_1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & -4 \\ 0 & -1 & -7 & -6 \end{array}\right) \sim c_2\times(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -7 & -6 \end{array}\right) \sim \begin{matrix} c_1 - 2\times c_2 \\ c_3 + c_2 \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -6 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \sim c_3 : (-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -6 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right) \sim \begin{matrix} c_2 - 5\times c_3 \\ c_1 + 7\times c_3 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = (\mathbf{E}|\mathbf{X}).$$

Итак, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Пример 3. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}.$$

Решение. Используя метод Жордана-Гаусса, матрицу системы приводим к упрощенному виду:

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & -8 & -2 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученной эквивалентной матрице отвечает равносильная однородная система:

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad +6x_3+2x_4=0 \\ \qquad\quad x_2-4x_3-x_4=0 \end{cases}.$$

Ранг матрицы $rangA=2$, число свободных неизвестных $k=n-r=4-2=2$. Принимаем, x_1, x_2 - базисные переменные (коэффициенты при этих неизвестных в полученной системе – элементы минора второго порядка, отличного от 0). Переменные x_3 и x_4 - свободные.

Систему перепишем в виде:

$$\begin{cases} x_1=-6x_3-2x_4 \\ x_2=\ 4x_3+\ x_4 \end{cases}.$$

Найдем фундаментальную систему решений:

а). Пусть $x_3=1$, $x_4=0$, тогда из последней системы имеем $x_1=-6$, $x_2=4$.

б). Пусть $x_3=0$, $x_4=1$, тогда находим $x_1=-2$, $x_2=1$.

В результате получена фундаментальная система решений (ФСР):

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение исходной однородной системы имеет вид:

$$X_{o.o.} = C_1\mathbf{e}_1 + C_2\mathbf{e}_2 = C_1\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь C_1 и C_2 - произвольные постоянные. Выполнив действия с матрицами, решение можно записать и в компонентном виде:

$$\begin{cases} x_{o.o.,1} = -6C_1 - 2C_2 \\ x_{o.o.,2} = 4C_1 + C_2 \\ x_{o.o.,3} = C_1 \\ x_{o.o.,4} = C_2 \end{cases}.$$

Поясним использованные при решении понятия и методы. Элементарными преобразованиями строк любую матрицу можно привести к *ступенчатому виду* (прямой ход метода Гаусса). Матрица имеет ступенчатый вид, если строки начинаются с нулей и единицы. За единицей в строке расположены элементы с произвольными значениями. Первая строка ступенчатой матрицы может начинаться и с единицы. Каждая нижеследующая строка вначале имеет большее количество нулей.

Определение. К элементарным преобразованиям матрицы относятся следующие операции:

1. Перестановка местами строк (столбцов).
2. Умножение всех элементов строки (столбца) на одно и то же число, отличное от нуля.
3. Прибавление к элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), предварительно умноженных на одно и то же любое число.
4. Транспонирование матрицы.

В дальнейшем будем использовать элементарные преобразования *строк первых трех* типов. Заметим, если A - матрица коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), то элементарные преобразования первого типа означают перемену местами уравнений системы. Преобразование второго типа означает умножение левой и правой части какого-то уравнения на число, не равное нулю. Наконец, элементарное преобразование матрицы третьего типа означает, что к одному из уравнений системы добавлено другое уравнение, предварительно умноженное на число. Подобные приемы составляют основу решения СЛАУ методом последовательно исключения неизвестных (метод Гаусса).

Отметим, при всех этих преобразованиях получаются *равносильные* системы (у равносильных систем решения совпадают). Отсюда понятно следующее определение.

Определение. Матрица $\tilde{A}$, получаемая из матрицы A конечным числом элементарных преобразований, называется *эквивалентной матрицей*.

Обозначают $A \sim \tilde{A}$.

На практике элементарные преобразования строк удобно проводить по правилам Жордана:

<u>Правило 1</u>. *Ведущая строка сохраняется*. Поясним, *ведущей* называют ту строку матрицы, при помощи которой будут изменены элементы других строк этой матрицы. Ведущая строка содержит *ведущий* (разрешающий) элемент, с его помощью остальные элементы ведущего столбца преобразуются в 0. Ведущие элементы будем отмечать в рамках.

<u>Правило 2</u>. *Ведущий столбец обнуляется* (все элементы ведущего столбца за исключением разрешающего элемента заменяются 0).

<u>Правило 3</u>. *Остальные элементы матрицы изменяем по «правилу прямоугольника»*:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{В} & \cdots & Д \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ П & \cdots & И \end{array}$$

$$\boxed{И' = \frac{В \cdot И - П \cdot Д}{В}} \qquad (*)$$

В этой схеме обозначено: $\boxed{B}$ - ведущий элемент, $И$ - изменяемый элемент, $И'$ - измененное значение этого элемента, $П$, $Д$ - элементы побочной диагонали прямоугольника $\boxed{B}$ - $Д$ - $И$ - $П$. На главной диагонали *всегда* элементы $\boxed{B}$ и $И$. Элементы $П$, $Д$ находятся на одном уровне (по вертикали и горизонтали) с ведущим и изменяемым элементами.

Применение правил Жордана существенно упрощает расчеты, т.к. снимает вопрос подбора множителя k при использовании преобразований третьего типа.

Замечание 1. Формулой (*) особенно удобно пользоваться, если ведущий элемент равен единице. Если ниже ведущей строки имеются другие ненулевые строки, то при помощи элементарных преобразований первого и второго типа часто можно получить в качестве разрешающего элемента число 1.

Рангом матрицы называется наивысший порядок отличных от нуля миноров. Учитывая, что эквивалентные матрицы имеют одинаковый ранг и что любую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к упрощенному виду, ранг матрицы определяем по количеству ненулевых строк в эквивалентной матрице. То есть левый верхний отличный от нуля минор (*базисный минор*) эквивалентной матрицы определяет ранг матрицы.

Пример 4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\mathbf{A}$, заданного матрицей

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1. Запишем характеристическое уравнение

$$\det\left(A-\lambda E\right)=\begin{vmatrix} (2-\lambda) & -1 & 1 \\ 0 & (1-\lambda) & 1 \\ -1 & 1 & (1-\lambda) \end{vmatrix}=0\,.$$

Если раскрыть определитель, то получим кубическое уравнение. Отыскание корней таких уравнений в общем случае не простая задача. Поэтому, используя свойства определителей, преобразуем уравнение к виду, из которого сразу определяется один из корней уравнения. Перепишем уравнение, вычитая из элементов первой строки соответствующие элементы второй строки:

$$\begin{vmatrix} (2-\lambda) & -(2-\lambda) & 0 \\ 0 & (1-\lambda) & 1 \\ -1 & 1 & (1-\lambda) \end{vmatrix}=0.$$

Т.к. элементы первой строки имею общий множитель, уравнение можно переписать в виде

$$(2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & (1-\lambda) & 1 \\ -1 & 1 & (1-\lambda) \end{vmatrix}=0\,.$$

Отсюда получим: а) $(2-\lambda)=0$; б)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & (1-\lambda) & 1 \\ -1 & 1 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Решая, имеем а) $\lambda_1 = 2$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\lambda) & 1 \\ -1 & 0 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = 0$,

или $\begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1 \\ 0 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

2. Находим собственные векторы, отвечающие каждому из собственных чисел.

$\lambda = 2$. Тогда однородная система (38) в данном случае принимает вид:

$$\begin{cases} (2-2)x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 0x_1 + (1-2)x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 + (1-2)x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 0x_1 - x_2 + x_3 = 0. \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Матрица этой однородной системы $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

имеет ранг 2. В качестве компонент искомого вектора можно брать алгебраические дополнения элементов одной из строк матрицы (но той строки, которая не приведет к нулевому вектору). В самом деле, сумма произведений элементов выбранной строки на их алгебраические дополнения равна определителю, но он равен 0. Следовательно, соответствующее уравнение системы удовлетворяется.

Остальные уравнения системы удовлетворяются, поскольку сумма произведений элементов строки на алгебраические дополнения параллельного ряда по свойству определителей равна 0. Итак, находим

$$x_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad x_2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Собственный вектор, соответствующий числу $\lambda = 2$, имеет вид
$X_1^{\text{T}} = (0;-1;-1)$. Или, так как собственный вектор определяется с точностью до множителя,
$X_1^{\text{T}} = (0;1;1)$.

Рассмотрим другое собственное число $\lambda = 1$. Матрица однородной системы для определения координат собственного вектора имеет вид

$$\begin{pmatrix} (2-1) & -1 & 1 \\ 0 & (1-1) & 1 \\ -1 & 1 & (1-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение этой системы – алгебраические дополнения, например, элементов первой строки матрицы:

$$x_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad x_2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad x_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Собственный вектор, отвечающий числу $\lambda = 1$, следующий $X_2^{\text{T}} = (-1;-1;0)$.

Пример 5. Даны вершины пирамиды $ABCDF$, причем основание $ABCD$ - параллелограмм: $A(1;0;-1)$, $B(2;2;-3)$, $D(3;1;1)$, $F(4;-3;5)$..

Найти:

a) координаты, модуль и направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$;

b) вершину C;

c) скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, а также косинус угла между этими векторами;

d) работу, производимую силой $\mathbf{F} = \overline{AF}$ при перемещении точки приложения вдоль отрезка AC;

e) проекцию вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{AF}$;

f) векторное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, а также площадь треугольника $\triangle ABC$;

g) смешанное произведение векторов $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AF}$, а также объем пирамиды $ABCDF$.

Решение. a) Вектор $\overline{AB}$ найдем по формуле

$$\overline{AB}=\left\{x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A\right\}:$$

$\overline{AB}=\left\{2-1;2-0;-3-(-1)\right\}=\left\{1;2;-2\right\}$. Модуль вектора $\mathbf{a}=\left\{a_1,a_2,a_3\right\}$ определяется соотношением

$|\mathbf{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$. Получаем отсюда

$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=3$. Направляющие косинусы – это координаты **орта** вектора $\overline{AB}$. Т.е. вектора

$$\overline{AB}^0=\frac{\overline{AB}}{\left|\overline{AB}\right|}=\frac{\{1;2;-2\}}{3}=\left\{\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right\}.$$

Направляющие косинусы равны:

$$\cos\alpha=\frac{1}{3},\quad \cos\beta=\frac{2}{3},\quad \cos\gamma=-\frac{2}{3}.$$

b) Чтобы найти координаты вершины C, найдем вектор $\overline{AC}$. По определению суммы векторов $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{AD}$. Но

$\overline{AD}=\{3-1;1-0;1-(-1)\}=\{2;1;2\}$. Поэтому

$\overline{AC}=\{1;2;-2\}+\{2;1;2\}=\{1+2;2+1;-2+2\}=\{3;3;0\}$.

Т.к. $\overline{AC}=\left\{x_C-x_A;y_C-y_A;z_C-z_A\right\}$, то имеем

$\{3;3;0\}=\{x_C-1;y_C-0;z_C+1\}$. Отсюда находим три равенства $3=x_C-1;\quad 3=y_C-0;\quad 0=z_C+1$. Т.е. вершина C следующая $C(4;3;-1)$.

a) Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$. Находим

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}=\{1;2;-2\}\cdot\{3;3;0\}=1\cdot3+2\cdot3+(-2)\cdot0=9$$

.

Косинус угла между векторами определяется соотношением

$$\cos\left(\mathbf{a}^\wedge\mathbf{b}\right)=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}.$$

Используя эту формулу, получаем

$$\cos\left(\overline{AB}^\wedge\overline{AC}\right)=\frac{9}{3\sqrt{3^2+3^2+0^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b) Учитываем механический смысл скалярного произведения (скалярное произведение вектора силы на вектор перемещения – это работа, совершаема силой при перемещении точки ее приложения из начала в конец отрезка: $\mathrm{A}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{S}$).

Найдем вектор силы $\mathbf{F}=\overline{AF}=\{3;-3;6\}$.

Следовательно, работа равна

$$A=\overline{AF}\cdot\overline{AC}=\{3;-3;6\}\cdot\{3;3;0\}=0$$

c) Проекцию вектора вычислим с помощью скалярного произведения:

$$пр_{\overline{AF}}\overline{AB}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AF}}{\left|\overline{AF}\right|}=\frac{\{1;2;-2\}\cdot\{3;-3;6\}}{\sqrt{3^2+(-3)^2+6^2}}=\frac{3-6-12}{\sqrt{54}}=-\frac{5}{\sqrt{6}}$$

.

d) Векторное произведение двух векторов вычисляется по формуле $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ a_1&a_2&a_3\\ b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$

Имеем

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ 1&2&-2\\ 3&3&0\end{vmatrix}=6\mathbf{i}-6\mathbf{j}+(-3)\mathbf{k}=\{6;-6;-3\}.$$

Учитывая, что модуль векторного произведения – площадь параллелограмма, для площади треугольника имеем соотношение

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|\{6;-6;-3\}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+(-6)^2+(-3)^2}=\frac{9}{2}$$

.

g) вычислим смешанное произведение по формуле

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Имеем

$$\left(\overline{AB},\overline{AD},\overline{AF}\right)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix}=18.$$

Учитывая, что модуль смешанного произведения численно равен объему параллелепипеда, построенного па векторах-сомножителях, а объем четырехугольной пирамиды составляет третью часть объема параллелепипеда, получаем

$$V_{пир}=\frac{18}{3}=6.$$

Замечание 1. Тройка векторов $\mathbf{a}=\{a_1;a_2;a_3\}$, $\mathbf{b}=\{b_1;b_2;b_3\}$, $\mathbf{c}=\{c_1;c_2;c_3\}$ образует базис в пространстве, если смешанное произведение $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ - число, отличное от 0.

Замечание 2. Тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ в указанном порядке *правая*, если смешанное произведение $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})>0$. Если $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})<0$, то тройка *левая.*

Пример 6. На плоскости даны вершины треугольника $\triangle ABC$: $A(1;0)$, $B(2;2)$, $C(3;1)$.

Сделать чертеж и найти:

a). Длины сторон треугольника $\triangle ABC$;

b). Внутренний угол A (через tg);

c). Уравнение высоты, проведенной через вершину C;

d). Точку пересечения высот треугольника;

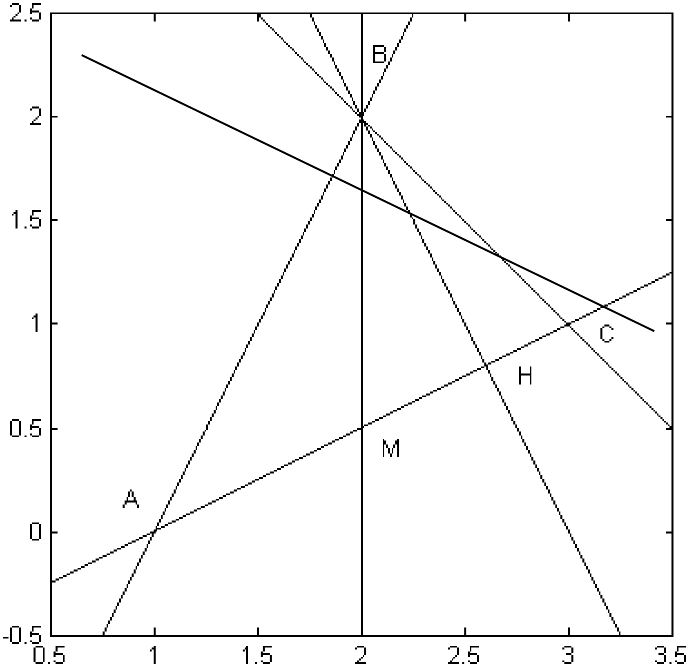
e). Длину высоты, опущенной из вершины B;

f). Площадь треугольника;

g). Составить уравнение медианы, проведенной из вершины B.

Решение. a).

Строим треугольник в координатных осях:



a). Длины сторон треугольника $\triangle ABC$ равны модулям векторов $\overrightarrow{AB}=\{1;2\}$, $\overrightarrow{AC}=\{1;1\}$, $\overrightarrow{BC}=\{2;1\}$

$AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$, $BC=|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$, $AC=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

b). Отметим, угол наклона прямой отсчитывается от положительной полуоси Ox против хода часовой стрелки. Учитываем, что в треугольнике внутренний угол $\angle A$ - это разность углов наклона прямых (в указанном порядке) AB и AC. Для нахождения внутреннего угла $\angle A$ используем формулу

$\operatorname{tg}\angle A = \dfrac{k_{AB} - k_{AC}}{1 + k_{AB} \cdot k_{AC}}$, где k_{AB}, k_{AC} - угловые коэффициенты прямых AB и AC. Для нахождения угловых коэффициентов составим канонические уравнения прямых AB и AC. Возьмем уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

AB: $\dfrac{y-0}{2-0} = \dfrac{x-1}{2-1}$, $\quad$ y=2x-2, $\quad$ $k_{AB} = 2$.

$AC: \dfrac{y-0}{1-0} = \dfrac{x-1}{3-1}$, $\quad y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$, $\quad$ $k_{AC} = \dfrac{1}{2}$

Получаем, $tg\angle A = \dfrac{2 - 1/2}{1 + 2 \cdot 1/2} = \dfrac{3}{4}$. $\angle A = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$.

с) Угловой коэффициент высоты CK связан с угловым коэффициентом стороны AB соотношением

$k_{AB} \cdot k_{CK} = -1$. Отсюда находим, $k_{CK} = -\dfrac{1}{2}$. Уравнение высоты составим, используя уравнение прямой, имеющей заданный наклон и проходящей через заданную точку: $y - y_0 = k(x - x_0)$. CK: y-1= - $\dfrac{1}{2}(x-3)$,

y= - $\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}$. d). Составим уравнение высоты BH. Угловой коэффициент высоты BH связан с угловым коэффициентом стороны AC условием $k_{AC} \cdot k_{BH} = -1$. Отсюда находим, $k_{BH} = -2$. Уравнение высоты составим, используя уравнение прямой, имеющей заданный наклон и проходящей через заданную точку: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$BH : y - 2 = -2(x-2), \quad y = -2x + 6.$$

Для нахождения точки пересечения высот треугольника решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}, \\ y = -2x + 6. \end{cases}$$

Решая систему, получаем: $x = \dfrac{7}{3}$, $y = -\dfrac{4}{3}$. Т.е. N $\left(\dfrac{7}{3}; -\dfrac{4}{3}\right)$ - точка пересечения высот .

е). Расстояние от вершины B до стороны AC найдем по формуле:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$ где $Ax+By+C=0$ - общее уравнение прямой, $(x_0;y_0)$ - точка, от которой определяется расстояние.

Общее уравнение стороны AC имеет вид: $x-2y-1=0$.

Поэтому $$d=\frac{|2-2\cdot 2-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}.$$

f) Площадь треугольника найдем по формуле: $S=\frac{1}{2}BH\cdot AC$. Получим $S=\frac{1}{2}\frac{3}{\sqrt{5}}\sqrt{5}=\frac{3}{2}$

g) Чтобы составить уравнение медианы, найдем координаты точки M - середины стороны AC:

$$x_M=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{1+3}{2}=2,\quad y_M=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}.$$

$BM:\frac{y-2}{1/2-2}=\frac{x-2}{2-2},\quad x=2$ (каноническое уравнение вертикальной прямой).

Отметим, деление на 0 здесь имеет символический смысл: $x-2=0\dfrac{y-2}{-3/2}$.

Пример 7. Точки $A(1;2;3)$, $B(3;0;2)$, $C(6;3;-1)$, $D(4;1;5)$ являются вершинами пирамиды.

Найти:

а). Уравнения ребра AB;

б). Угол между ребрами AB и AC;

в). Уравнение грани ABC;

г). Угол между ребром AD и гранью ABC;

д). Уравнение высоты пирамиды, опущенной из вершины D, а также проекцию этой вершины на плоскость ABC.

Решение. а). Канонические уравнения прямой в пространстве, проходящей через две заданные точки, определяются соотношениями

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Следовательно, уравнения ребра AB имеют вид

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-2}{0-2}=\frac{z-3}{2-3}, \qquad \text{или} \qquad \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{-1}.$$

Это канонические уравнения прямой в пространстве AB. Параметрические уравнения этой прямой получим, приравняв каждую из дробей параметру t:

$$x=2t+1, \quad y=-2t+2, \quad z=-t+3.$$

б). Угол между ребрами - это угол φ между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

Эти векторы соответственно равны $\overline{AB}=\{2;-2;-1\}$ и $\overline{AC}=\{5;1;-4\}$. Поэтому

$$\cos\varphi=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\left|\overline{AC}\right|}=\frac{2\cdot5+(-2)\cdot1+(-1)\cdot(-4)}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}\sqrt{5^2+1^2+(-4)^2}}=\frac{4}{\sqrt{42}}$$

.

в). Составим уравнение грани ABC, используя условие компланарности векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и текущего вектора $\overline{AM}=\{x-1;y-2;z-3\}$:

$$\left(\overline{AM},\overline{AB},\overline{AC}\right)=\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & -4 \end{vmatrix}=0.$$

Раскрывая определитель, получим

$$(x-1)\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & -4\end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix}2 & -1\\ 5 & -4\end{vmatrix}+(z-3)\begin{vmatrix}2 & -2\\ 5 & 1\end{vmatrix}=0,$$

или

$$3x+y+4z-17=0.$$

г). Угол α между прямой с направляющим вектором **a** и плоскостью с нормальным вектором **N** - угол между прямой и ее ортогональной проекцией нв плоскость. Он определяется формулой

$$\sin\alpha=\frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{N}|}{|\mathbf{a}||\mathbf{N}|}.$$

Направляющий вектор ребра равен

$\mathbf{a}=\overline{AD}=\{3;-1;2\}$, координаты нормального вектора плоскости – это коэффициенты в общем уравнении плоскости, т.е. $\mathbf{N}=\{3;1;4\}$. Отсюда получаем

$$\sin\alpha=\frac{|3\cdot3+(-1)\cdot1+2\cdot4|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{3^2+1^2+4^2}}=\frac{8}{\sqrt{91}},$$

$$\alpha=\arcsin\frac{8}{\sqrt{91}}.$$

д). Направляющим вектором высоты пирамиды, опущенной из вершины D, является нормальный вектор плоскости $\mathbf{N} = \{3;1;4\}$. Поэтому канонические уравнения высоты следующие

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{4}.$$

Проекцию P вершины D на плоскость основания найдем как пересечение прямой DP и плоскости ABC. Для этого от канонических уравнений высоты перейдем к параметрическим уравнениям:

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{4} = t, \quad x = 3t+4, \quad y = t+1, \quad z = 4t+5$$

Подставляя последние соотношения в уравнение плоскости ABC, получаем уравнение для определения значения параметра t, соответствующего точке P:

$$3(3t+4)t+1+4(4t+5)-17=0, \quad t = -\frac{8}{13}.$$

Подставляя полученное значение t в параметрические уравнения высоты, находим координаты точки P:

$$x=3\left(-\frac{8}{13}\right)+4=\frac{28}{13},\quad y=-\frac{8}{13}+1=\frac{5}{13},\quad z=4\left(-\frac{8}{13}\right)+5=\frac{33}{13}$$

.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данко П.В., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. I – М.: Высшая школа, 1986, 2003.
2. Данко П.В., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я., Данко С.П. Высшая математика в упражнениях и задачах. Мир и Образование, 2023.
3. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – МГУ, 2022.
4. Волокитин Г.И., Ларченко В.В., Азаров Д.А., Редько Ю.С. Начала линейной алгебры. Учебное пособие. – Ростов-на-Дону: Издательский центр ДГТУ, 2012.
5. Соболь Б.В., Мишняков Н.Т., Поркшеян В.М. Практикум по высшей математике. – Феникс, Ростов-на-Дону, 2010.