ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Высшая математика»

Учебно-методическое пособие

по дисциплине «Высшая математика»

«Методические указания и варианты заданий первого семестра»

Авторы
Волокитин Г.И.,
Поркшеян В.М.

Ростов-на-Дону, 2024

Аннотация

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов первого курса, изучающих дисциплину «Высшая математика» в первом семестре всех форм обучения технических направлений. Охвачены разделы «Линейная алгебра», «Векторная алгебра и аналитическая геометрия», «Введение в анализ», «Элементы дифференциального исчисления», «Элементы интегрального исчисления».

Авторы

к.ф.-м.н., доцент кафедры «Высшая математика»
Волокитин Г.И.

доцент, к.ф.-м.н., зав. кафедрой
«Высшая математика»
Поркшеян В.М.

Оглавление

1. Экзаменационная программа по математике первого семестра

Элементы линейной алгебры.

Матрицы, виды матриц и действия с матрицами. Числовые характеристики матриц. Определители второго и третьего порядков: определения, свойства и способы вычисления. Элементарные преобразования матриц. Обратная матрица: определение, критерий существования и способы вычисления обратной матрицы. Базисный минор и ранг матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений, их виды. Теорема Кронекера-Капелли. Решение определенных систем третьего порядка методом Крамера, матричным методом и методом Гаусса. Общее решение однородных и неоднородных неопределенных систем.

Векторная алгебра и аналитическая геометрия.

Понятие геометрического вектора. Проекция вектора на ось. Линейные операции над векторами.

Линейная независимость векторов, базис на плоскости и в пространстве. Координаты вектора, их геометрический смысл. Действия с векторами в координатах. Условие коллинеарности векторов, деление отрезка в данном отношении. Скалярное произведение двух векторов: определение, свойства, вычисление в координатах и приложения. Векторное произведение двух векторов: определение, свойства, вычисление в координатах и приложения. Смешанное произведение трех векторов, теорема о геометрическом смысле, вычисление в координатах и свойства. Условие компланарности трех векторов.

Прямая на плоскости. Угловой коэффициент прямой. Различные виды уравнений прямой (каноническое уравнение, общее, «в отрезках», нормальное). Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой.

Плоскость: нормальный вектор, общее уравнение плоскости. Различные виды уравнений плоскости («в отрезках», нормальное уравнение). Угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости.

Прямая в пространстве: канонические и параметрические уравнения. Прямая как пересечение двух плоскостей. Угол между прямыми и угол между прямой и плоскостью.

Системы координат на плоскости: прямоугольная и полярная. Системы координат в пространстве: прямоугольная, цилиндрическая и сферическая. Кривые второго порядка: определения и канонические уравнения эллипса, окружности, гиперболы и параболы.

Введение в анализ.

Функция одной переменной. Предел последовательности и функции. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Сравнение бесконечно малых. Теоремы о первом и втором специальных пределах. Число ***e***, экспонента, натуральный логарифм. Непрерывность функции. Точки разрыва, их классификация. Свойства непрерывных на отрезке функций.

Дифференциальное исчисление.

Задачи, приводящие к понятию производной (о касательной к кривой и о скорости). Определение производной, ее геометрический и механический смысл. Правила дифференцирования. Таблица производных основных элементарных функций. Повторное дифференцирование. Вычисление производных функций, заданных неявно и в параметрическом виде. Дифференциал функции: определение, свойства, геометрический смысл, инвариантность. Применение дифференциалов в приближенных вычислениях. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей. Приложение дифференциального исчисления к исследованию функций: монотонность, экстремумы, направление выпуклости кривых и точки перегиба. Асимптоты. Общая схема исследования функции. Формула Тэйлора для многочлена и для функции с остаточным членом в форме Лагранжа, формулы Маклорена для основных элементарных функций.

Функции нескольких переменных.

Основные определения. Геометрический смысл функции двух переменных. Понятие предела и непрерывность функции двух переменных. Определение частной производной и ее геометрический смысл. Полный дифференциал функции двух переменных. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости. Дифференцирование сложных функций. Касательная и нормаль к поверхности. Экстремумы функции двух переменных: необходимые и достаточные условия экстремума. Градиент скалярного поля, производная по направлению.

Неопределенный интеграл.

Первообразная функции, неопределенный интеграл и его свойства. Таблица интегралов. Основные приемы интегрирования: непосредственное интегрирование, метод подстановки, интегрирование по частям. Интегралы группы «четырех». Интегрирование дробно-рациональных функций. Интегралы от тригонометрических функций. Интегрирование некоторых иррациональностей.

Определенный интеграл.

Задача о площади криволинейной трапеции. Понятие определенного интеграла, его геометрический и механический смысл. Свойства определенного интеграла, выражаемые равенствами. Свойства определенного интеграла, выражаемые неравенствами. Теорема о среднем. Связь определенного и неопределенного интегралов, формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям. Несобственные интегралы первого и второго рода. Приложения определенного интеграла: вычисление площадей плоских фигур. Вычисление длины дуги плоской кривой, объем тела вращения. Понятие криволинейного интеграла первого и второго рода. Определение двойного интеграла и его вычисление.

2. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ПЕРВОГО СЕМЕСТРА

Задача 1. Даны матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Проверить, что матрица $\mathbf{A}$ - невырожденная и найти решение матричного уравнения $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B}$:

1. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 3 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -2 & 0\\ 0 & 10\end{pmatrix};$

2. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix};$

3. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ -1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix};$

4. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -2 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix};$

5. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\\ -1 & 9\end{pmatrix}$; 6.

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 3 & 0\\ 2 & -2\end{pmatrix}$;

7. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ -1 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 0\\ -2 & 10\end{pmatrix}$; 8.

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}5 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 1 & 0\\ 4 & 5\end{pmatrix}$;

9. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ 4 & -5\end{pmatrix}$; 10.

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ 3 & 6\end{pmatrix}$.

Задача 2. Тремя методами (по формулам Крамера, матричным методом и методом Гаусса) решить систему линейных алгебраических уравнений: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B}$, где матрицы

A и **B** заданы в условии задачи 1, причем **B** - первый столбец соответствующей матрицы задачи 1. **X** - матрица-столбец неизвестных

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. В пирамиде $ABCDF$ даны вершины $A, \ B, \ D, \ F$. Основание пирамиды – параллелограмм $ABCD$. Прямоугольные декартовы координаты вершин $A, \ B, \ D$ - элементы соответственно первого, второго, третьего столбцов матрицы **A** в задаче 1, координаты вершины F- элементы первого столбца матрицы **B** из этой же задачи. Найти:

a) векторы $\overline{AB}, \ \overline{AC}, \ \overline{AF}$ и их модули;
b) вершину C;
c) работу, производимую силой $\mathbf{F} = \overline{AF}$ при перемещении точки приложения вдоль отрезка AC;
d) внутренний угол $\angle A$;
e) площадь треугольника $\triangle ABC$;
f) объем пирамиды $ABCDF$.

g) проверить, что векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AF}$ образуют базис; выяснить, какая это тройка – правая или левая.

Задача 4. Точки A, B, C, D, F являются вершинами пирамиды из задачи 3. Найти:

a) канонические и параметрические уравнения ребра AB**;**
b) уравнение грани $ABCD$;
c) угол между ребром AF и гранью $ABCD$;
d) уравнение высоты пирамиды, опущенной из вершины F;
e) расстояние от вершины пирамиды F до основания $ABCD$;
f) проекцию вершины F на плоскость основания $ABCD$;
g) в плоскости Oxy построить треугольник □ABC. Координаты вершин этого треугольника – две первые координаты точек A, B, C в задаче 3. Составить уравнение стороны AB и указать угловой коэффициент этой прямой.

Задача 5. Найти пределы функций.

1. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^5-4x^4+2}{(3x^2+2\sqrt{x}-1)(2x+3)^3}$;

b) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x^2-11x+5}{x^2-7x+10}$;

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\,\mathrm{arctg}\,2x}$;

d) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{\sin 3x}}$.

2. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^2\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+5\right)^4}{\left(2x+\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+1\right)^4}$;

b) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{2x^2-13x-7}{x^2-9x+14}$;

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^3 x}{\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)(1-\sin x)}$;

d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\mathrm{tg}\,3x)}{\arcsin 9x}$.

3. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2-3x+1)^2}{5x^4+3x^3-2}$;

b) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{x^2-6x-16}{x^2-8x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\arcsin x}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{10x-3}{10x+1}\right)^{5x}$.

4. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x+3)(x-5)^2}{2x^3+10x^2+5}$;

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2+x-4}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 5x}{1-\cos 10x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 3}(4x-11)^{\frac{5x}{x-3}}$.

5. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+3)\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{2x^2+10x+1}$;

b) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{5x^2-51x+10}{x^2-10x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\left(\pi(x-1)\right)}{x^2+x-2}$; d)

$\lim\limits_{x\to -1}(2x+3)^{\frac{1}{x+1}}$.

6. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(2x^3+\sqrt{x}+1\right)\left(3x^2+5\right)}{3x^5+x^2\sqrt{x}-2x+10}$;

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-5x+6}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}8x^2}{1-\cos 4x}$; d) $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{\frac{5}{x-2}}$.

7. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+3)\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{2x^2+10x\sqrt{x}+1}$;

b) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-6x+5}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x^2}{1-\cos 2x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}3x)^{1/2x}$.

8 . a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(x^3+\sqrt{x}+1\right)\left(2x^2+5\right)}{4x^5+3x^2\sqrt{x}-x+10}$;

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-7x+3}{5x^2-16x+3}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\left(x^2-x\right)\sin x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 3}(7-2x)^{1/(6-2x)}$.

9. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3+(x-1)^3}{\left(x+2\sqrt{x}+1\right)^3}$;

b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+5x-2}{4x^3-16x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x(1-\cos x)}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg} x}}$.

10. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^3+2x+1}+\sqrt{x^4+1}}{\left(2x-\sqrt{x}+5\right)^2}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{2x-4}$;

c) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5+2x}{3+2x}\right)^{2x}$.

Задача 6. Найти производную функции $y(x)$ в точке x_0, используя *определение* производной.

1. $y(x)=\dfrac{1}{3x+2}, \quad x_0=1.$
2. $y(x)=x^2+x, \quad x_0=3.$
3. $y(x)=(2x+1)^2, \quad x_0=0.$
4. $y(x)=-\dfrac{1}{x^2+1}, \quad x_0=1.$
5. $y(x)=\dfrac{2x}{x+1}, \quad x_0=0.$
6. $y(x)=x^2+2x+3, \quad x_0=2.$
7. $y(x)=\sqrt{x+1}, \quad x_0=3;$
8. $y(x)=x^2+3x-2, \quad x_0=-1.$
9. $y(x)=\ln(1+x), \quad x_0=4.$
10. $y(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}, \quad x_0=4.$

Задача 7. Используя правила дифференцирования и формулы таблицы производных, в примерах a), b), c), d) вычислить производную. В примере e) найти второю производную:

1. a) $y=\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sin 2x}-\dfrac{3}{\ln x}+x^2\,\mathrm{e}^{2x}+1\right)^{12}$;

b) $y=(\operatorname{arctg} x)^{\sqrt{x}}$; c) $x+y=\sin\left(x^2-y^2\right)$;

d) $\begin{cases} x=\cos^2 3t, \\ y=-\dfrac{\sin^3 3t}{3} \end{cases}$; e) $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{4}{x}$

2. a) $y=\ln\left(\dfrac{\sqrt{x^3}+2}{\cos 2x}-\dfrac{1}{x}+x^2 2^x+1\right)$;

b) $y=\left(x^2-\sqrt{x}\right)^{\arcsin x}$; c) $xy=\sqrt{x^2+y^2}$

d) $\begin{cases} x=2^t\cos t, \\ y=2^t\sin t \end{cases}$; e) $y=\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg} x$.

3. a) $y=\cos\left(\dfrac{\sqrt{x}+3}{\ln x}-\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}+x^2 3^x+1\right)$;

b) $y=\left(x^3-\sqrt{x^3}\right)^{\operatorname{ctg} x}$; c) $e^{xy}=x^2+y^2$;

d) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t). \end{cases}$ e) $y = \lg\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right).$

4. a) $y = \dfrac{1}{\left(x \sin x - \ln^2 x + 3\right)}$;

b) $y = \left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^{\arcsin\sqrt{x}}$; c) $2^x + 2^y = x^2 + y^2$;

d) $\begin{cases} x = \cos^4 t, \\ y = \sin^4 t. \end{cases}$; e) $y = x\sqrt{1 + x^2}$.

5. a) $y = \sin^2\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} - x^3 e^{2x} + 1\right)$; b) $y = (\operatorname{tg} 2x)^{\sqrt{x}}$;

c) $\arcsin(xy) - x = y$;

d) $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = \sin t - t \cos t. \end{cases}$; e) $y = x \lg x$.

6. a) $y = \dfrac{1}{\left(\sqrt{x} \arcsin x + \dfrac{x^2}{\operatorname{tg} 2x} - 5^{-x} + 1\right)^2}$;

b) $y = \left(1 + x^2\right)^{\operatorname{arctg} x}$; c) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = xy$;

d) $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$; e) $x^2 - xy + y^2 = 1$.

7. a) $y=\sqrt{x}\,\mathrm{ctg}^2\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)$; b) $y=(\sin 3x)^x$;

c) $y^3+3y=x$;

d) $\begin{cases} x=e^{2t}\cos^2 t, \\ y=e^{2t}\sin^2 t \end{cases}$; e) $y=\mathrm{tg}\,2x$.

8. a) $y=\dfrac{1}{\ln\left(x^2\cos 3x+\dfrac{2\sqrt{x}}{\arcsin x}+1\right)}$; b) $y=x^{\mathrm{arcctg}\,5x}$;

c) $y=1+xe^{2y}$;

d) $\begin{cases} x=\ln t-\dfrac{1}{t}, \\ y=\dfrac{t^2+2t+1}{t} \end{cases}$; e) $y=\mathrm{ctg}\,2x$.

9. a) $y=\arcsin^2\sqrt{1-4x^2}$; b) $y=(\mathrm{tg}\,2x)^{1+2x}$;

c) $x\sin y-\cos y+2y=0$;

d) $\begin{cases} x=e^{2t}\cos 2t, \\ y=e^{2t}\sin 2t \end{cases}$; e) $y=\ln\left(x-\sqrt{x^2-3}\right)$.

10. a) $y=\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}+x^2 10^x-3\right)^5$; b) $y=(\arccos x)^{\ln x}$;

c) $x^y=y^x$;

d) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}\sin^3 t, \\ y = \dfrac{1}{3}\cos^3 t \end{cases}$; e) $y = e^{-3x^2}$.

Задача 8. Для функции двух переменных

$$z = f(x, y) \equiv x^2 + 2xy + 2y^2 + nx - y + 1,$$

где n - номер варианта, найти:

a) полный дифференциал dz и вторые производные z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy};

b) производную сложной функции $\dfrac{dz}{dt}$, если (выбирая свой вариант1)

1. $\begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = t^2 - \dfrac{1}{t}. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\ln t}, \\ y = \operatorname{tg}\sqrt{t}. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x = \ln^2 t, \\ y = \operatorname{arctg}\sqrt{t}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = 2^{-t}, \\ y = \arcsin\sqrt{t}. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = e^{3t}, \\ y = t\ln t. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x = t^2 - \dfrac{1}{t}, \\ y = \ln^3 t. \end{cases}$ 7. $\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \operatorname{ctg}\sqrt{t}. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x = \arcsin^2 t, \\ y = \sqrt[3]{t} + \operatorname{ctg}\sqrt{t}. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = (\sin t + \cos t)^2, \\ y = \lg^2 t. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x = (\ln t + t)^2, \\ y = \operatorname{arctg}^2 t. \end{cases}$

c). Исследовать функцию $f(x, y)$ на экстремум;

d). Составить уравнение касательной плоскости к поверхности $f(x, y)$ в точке $M_0(1;1;z_0)$;

e) вычислить градиент $\operatorname{grad} z(1;1)$ и производную по направлению $\dfrac{\partial z}{\partial l}(1;1)$, где $\mathbf{l} = \overline{OM}$ - вектор-радиус точки $(1;1)$.

Задача 9. Найти интегралы: в заданиях a), b), c) и d) вычислить неопределенные интегралы, применяя таблицу интегралов. В заданиях e), f) вычислить определенные интегралы с помощью неопределенных

1. a) $\displaystyle\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$; b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^3 x}$;

c) $\int (2x-3)\ln x dx$; d) $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4e^x+3}$;

e) $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$; f) $\int_0^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}\,x dx$.

2. a) $\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$; b) $\int \frac{x^2 dx}{x^6-25}$;

c) $\int x\,\mathrm{arctg}\,2x dx$; d) $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$;

e) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}}$; f) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 4x dx$.

3. a) $\int \frac{2^{x+1}-5^{x+1}+10^x\cos x}{10^x}dx$; b) $\int \frac{dx}{(x-1)\ln(x-1)}$;

c) $\int x^3 e^{-x^2}dx$; d) $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$;

e) $\int_0^7 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$; f) $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x dx$.

4. a) $\int \frac{8^x-1}{2^x-1}dx$; b) $\int \frac{\cos 2x dx}{\sqrt[4]{\sin^3 2x}}$;

c) $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$; d) $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$;

e) $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^8+3}$; f) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin 5x \cos x dx$.

5. a) $\int \sqrt{1+\sin 2x}dx, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$; b) $\int x^2 5^{-x^3} dx$;

c) $\int \arcsin 2x dx$; d) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$;

e) $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$; f) $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}}$.

6. a) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$; b) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$;

c) $\int x^3 \ln x dx$; d) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$;

e) $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}}$; f) $\int_0^1 \arccos x dx$.

7. a) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4-1}} dx$; b) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$;

c) $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$; d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x+1}}$;

e) $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2} dx$; f) $\int_1^e \ln x dx$.

8. a) $\int x(1-x)^{10}\,dx$; b) $\int \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$;

c) $\int (2x-3)\sin 4x\,dx$; d) $\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)(x+1)}\,dx$;

e) $\int_0^{\pi} \cos^4 x\,dx$ f) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$.

9. a) $\int \frac{x\,dx}{(1-x)^{10}}$; b) $\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^{10}}}\,dx$;

c) $\int (2x-3)\cos 4x\,dx$ d) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x+1}}$;

e) $\int_0^{\pi/12} \mathrm{tg}^2\, 3x\,dx$; f) $\int_0^1 \arcsin x\,dx$.

10. a) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}\,dx$; b) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4+x^6}}$;

c) $\int x\ln(1+x)\,dx$; d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$;

e) $\int_0^{0,5} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$; f) $\int_1^{10} \lg x\,dx$.

Задача 10. Приложения определенного интеграла.

а). Выполняя чертеж, вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями.

b). Вычислить длину дуги плоской кривой.

c). Проверить , что переменная сила $\mathbf{F}=\{P(x,y),Q(x,y)\}$, где $P(x,y)=n\sqrt{x}+xy$, $Q(x,y)=n(x+y)$ не является потенциальной (здесь n – номер варианта). Применяя криволинейный интеграл второго рода, найти работу силового поля $\mathbf{F}$ вдоль дуги параболы $y=x^2$, проходящей через точки $O(0,0)$ и $M(1,1)$.

Вариант 1.

a) $y=x^2, \quad y=2-x, \quad y=0$; b) $y=\ln\cos x, \quad 0\le x\le \pi/6$;

Вариант 2.

a) $y=2x, \quad y=x, \quad x=1$; b) $y=1-\ln\sin x, \quad \pi/3\le x\le \pi/2$;

Вариант 3.

a) $y=e^x, \quad y=e^{-x}, \quad x=1$; b) $y=\sqrt{x^3}, \quad 0\le x\le 4$;

Вариант 4.

a) $y = 2x, \quad y = \frac{x}{2}, \quad yx = 2$; b) $y = \frac{1}{3}\ln\sin 3x, \quad {}^{\pi}\!/_{6} \le x \le {}^{2\pi}\!/_{9}$;

Вариант 5.

a) $y^2 = 3x, \quad x^2 = 3y$; b) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x, \quad 1 \le x \le 2$;

Вариант 6.

a) $yx = 2, \quad x + 2y - 5 = 0$; b) $y = \sqrt{(x-2)^3}, \quad 2 \le x \le 6$;

Вариант 7.

a) $y = -x^2 + 6x - 5, \quad y = 0$; b) $y = \ln x, \quad \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$;

Вариант 8.

a) $y = \sqrt{x}, \quad y = \frac{1}{x}, \quad x = 4$; b) $y = \frac{1}{2}\ln\cos 2x, \quad 0 \le x \le {}^{\pi}\!/_{12}$

;

Вариант 9.

a) $y = 2x^2, \quad y = -2x + 4$; b) $y = 7 + x\sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 1$;

Вариант 10.

a) $y = x^2, \quad y = 2 - x$; b) $y = 1 + \ln\cos x, \quad 0 \le x \le {}^{\pi}\!/_{6}$;

3. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Даны матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Проверить, что матрица $\mathbf{A}$ - невырожденная и найти решение матричного уравнения $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&5&2\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\\0&4\end{pmatrix}.$$

Решение. а). Проверим, что матрица $\mathbf{A}$ - невырожденная. Матрица называется невырожденной, если ее определитель отличен от нуля. Определитель найдем, раскрывая, например, по элементам первой строки:

$$\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&5&2\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}3&1\\5&2\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}2&1\\3&2\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}2&3\\3&5\end{vmatrix}=$$

.

Невырожденная матрица имеет обратную $\mathbf{A}^{-1}$. Умножая слева обе части матричного уравнения $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B}$ на $\mathbf{A}^{-1}$, получаем решение:

$$\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}$$

б). Обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$ найдем, используя присоединенную матрицу $\mathbf{A}^{+}$. Элементы присоединенной матрицы - это алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы $\mathbf{A}$, расположенные по столбцам:

$$\mathbf{A}^{+} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица определяется формулой:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{A}^{+}.$$

Находим алгебраические дополнения элементов исходной матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 1;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(4-3) = -1;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 11; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

Итак, присоединенная матрица имеет вид:

$$\mathbf{A}^{+} = \begin{pmatrix} 1 & 11 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, обратная матрица равна

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 11 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 11/2 & -7/2 \\ -1/2 & -7/2 & 5/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Проверим, что обратная матрица найдена правильно, должно выполняться условие $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ - единичная матрица. Вычислим, например, элементы первого столбца произведения матриц:

$$e_{11} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{11}{2} \cdot 2 + \left(-\frac{7}{2}\right) \cdot 3 = \frac{23 - 21}{2} = 1$$ - верно,

$$e_{21}=-\frac{1}{2}\cdot 1+\left(-\frac{7}{2}\right)\cdot 2+\frac{5}{2}\cdot 3=\frac{-1-14+15}{2}=0 \quad -$$

верно,

$$e_{31}=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 2+\left(-\frac{1}{2}\cdot 3\right)=0 \quad - \text{ верно.}$$

Аналогично проверяем остальные значения элементов матрицы $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}$.

в). Находим решение матричного уравнения:

$$\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1/2 & 11/2 & -7/2 \\ -1/2 & -7/2 & 5/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 1/2\cdot 2+11/2\cdot 0+(-7/2)\cdot 0 & 1/2\cdot 1+11/2\cdot 3+(-7/2)\cdot 4 \\ -1/2\cdot 2-7/2\cdot 0+5/2\cdot 0 & -1/2\cdot 1-7/2\cdot 3+5/2\cdot 4 \\ 1/2\cdot 2+1/2\cdot 0-1/2\cdot 0 & 1/2\cdot 1+1/2\cdot 3-1/2\cdot 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 2. Тремя методами (Крамера, матричным методом и методом Гаусса) решить систему линейных алгебраических уравнений: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B}$, где матрица $\mathbf{A}$ задана в условии примера 1, матрица правых частей системы - первый столбец матрицы $\mathbf{B}$, а $\mathbf{X}$ - матрица-столбец неизвестных $\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Решение. Учитывая правило перемножения матриц, запишем подробный вид системы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

Получим решение по формулам Крамера:

$x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$. Здесь $\Delta = \det \mathbf{A} = 2$ - определитель матрицы системы, он найден в задаче 1 при нахождении обратной матрицы. $\Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \Delta_3$ - определители, полученные из определителя матрицы системы заменой соответственно первого, второго, третьего столбца матрицы столбцом правых частей:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

.

Таким образом, получаем,

$$x_1 = \frac{2}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{-2}{2} = -1, \quad x_3 = \frac{2}{2} = 1.$$

Получим решение матричным методом. В этом случае решение определяется формулой:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}.$$

Обратная матрица была найдена при решении примера 1. Поэтому сразу запишем

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 11/2 & -7/2 \\ -1/2 & -7/2 & 5/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \cdot 2 + 11/2 \cdot 0 - 7/2 \cdot 0 \\ -1/2 \cdot 2 - 7/2 \cdot 0 + 5/2 \cdot 0 \\ 1/2 \cdot 2 + 1/2 \cdot 0 - 1/2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

Сравнивая соответствующие элементы матриц слева и справа, снова находим

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1.$$

Получим решение методом Гаусса. При помощи элементарных преобразований строк расширенной матрицы $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ последовательно исключаем неизвестные в уравнениях системы. На месте клетки $\mathbf{A}$ получим единичную матрицу $\mathbf{E}$, при этом на месте клетки $\mathbf{B}$ появится вектор решения.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} c_2-2\times c_1 \\ c_3-3\times c_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & -4 \\ 0 & -1 & -7 & -6 \end{array}\right) \sim c_2\times(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -7 & -6 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} c_1-2\times c_2 \\ c_3+c_2 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -6 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \sim c_3:(-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -6 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} c_2-5\times c_3 \\ c_1+7\times c_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = (\mathbf{E}|\mathbf{X}).$$

Итак, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Пример 3. Даны вершины пирамиды $ABCDF$, причем основание $ABCD$ - параллелограмм: $A(1;0;-1)$, $B(2;2;-3)$, $D(3;1;1)$, $F(4;-3;5)$..

Найти:

a) координаты, модуль и направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$;

b) вершину C;

c) скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, а также косинус угла между этими векторами;

d) работу, производимую силой $\mathbf{F}=\overline{AF}$ при перемещении точки приложения вдоль отрезка AC;

e) проекцию вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{AF}$;

f) векторное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, а также площадь треугольника $\triangle ABC$;

g) смешанное произведение векторов $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AF}$, а также объем пирамиды $ABCDF$.

Решение. а) Вектор $\overline{AB}$ найдем по формуле

$$\overline{AB}=\left\{x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A\right\}:$$

$\overline{AB}=\left\{2-1;2-0;-3-(-1)\right\}=\left\{1;2;-2\right\}$. Модуль вектора $\mathbf{a}=\left\{a_1,a_2,a_3\right\}$ определяется соотношением $|\mathbf{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$. Получаем отсюда $\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=3$. Направляющие косинусы – это координаты **орта** вектора $\overline{AB}$. Т.е. вектора

$$\overline{AB}^0=\frac{\overline{AB}}{\left|\overline{AB}\right|}=\frac{\{1;2;-2\}}{3}=\left\{\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right\}.$$

Направляющие косинусы равны:

$$\cos\alpha=\frac{1}{3},\quad \cos\beta=\frac{2}{3},\quad \cos\gamma=-\frac{2}{3}.$$

b) Чтобы найти координаты вершины C, найдем вектор $\overline{AC}$. По определению суммы векторов $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{AD}$. Но

$\overline{AD}=\{3-1;1-0;1-(-1)\}=\{2;1;2\}$. Поэтому

$\overline{AC}=\{1;2;-2\}+\{2;1;2\}=\{1+2;2+1;-2+2\}=\{3;3;0\}$.

Т.к. $\overline{AC}=\{x_C-x_A;y_C-y_A;z_C-z_A\}$, то имеем

$\{3;3;0\}=\{x_C-1;y_C-0;z_C+1\}$. Отсюда находим три равенства $3=x_C-1;\quad 3=y_C-0;\quad 0=z_C+1$. Т.е. вершина C следующая $C(4;3;-1)$.

c) Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$. Находим

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}=\{1;2;-2\}\cdot\{3;3;0\}=1\cdot3+2\cdot3+(-2)\cdot0=9$$

.

Косинус угла между векторами определяется соотношением

$$\cos\left(\mathbf{a}^\wedge\mathbf{b}\right)=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}.$$

Используя эту формулу, получаем

$$\cos\left(\overline{AB}^\wedge\overline{AC}\right)=\frac{9}{3\sqrt{3^2+3^2+0^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

d) Учитываем механический смысл скалярного произведения (скалярное произведение вектора силы на вектор перемещения – это работа, совершаема силой при перемещении точки ее приложения из начала в конец отрезка: $\mathrm{A}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{S}$).

Найдем вектор силы $\mathbf{F}=\overline{AF}=\{3;-3;6\}$.

Следовательно, работа равна

$$\mathrm{A}=\overline{AF}\cdot\overline{AC}=\{3;-3;6\}\cdot\{3;3;0\}=0$$

e) Проекцию вектора вычислим с помощью скалярного произведения:

$$np_{\overline{AF}}\overline{AB}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AF}}{\left|\overline{AF}\right|}=\frac{\{1;2;-2\}\cdot\{3;-3;6\}}{\sqrt{3^2+(-3)^2+6^2}}=\frac{3-6-12}{\sqrt{54}}=-\frac{5}{\sqrt{6}}$$

.

f) Векторное произведение двух векторов вычисляется по формуле $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$

Имеем

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 2 & -2\\ 3 & 3 & 0\end{vmatrix}=6\mathbf{i}-6\mathbf{j}+(-3)\mathbf{k}=\{6;-6;-3\}.$$

Учитывая, что модуль векторного произведения – площадь параллелограмма, для площади треугольника имеем соотношение

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|\{6;-6;-3\}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+(-6)^2+(-3)^2}=\frac{9}{2}$$

.

g) вычислим смешанное произведение по формуле

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.$$

Имеем

$$\left(\overline{AB},\overline{AD},\overline{AF}\right)=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & -3 & 6\end{vmatrix}=18.$$

Учитывая, что модуль смешанного произведения численно равен объему параллелепипеда, построенного па векторах-сомножителях, а объем четырехугольной пирамиды составляет третью часть объема параллелепипеда, получаем

$$V_{пир}=\frac{18}{3}=6.$$

Замечание 1. Тройка векторов $\mathbf{a}=\{a_1;a_2;a_3\}$, $\mathbf{b}=\{b_1;b_2;b_3\}$, $\mathbf{c}=\{c_1;c_2;c_3\}$ образует базис в пространстве, если смешанное произведение $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$ - число, отличное от 0.

Замечание 2. Тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ в указанном порядке *правая*, если смешанное произведение $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})>0$. Если $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})<0$, то тройка *левая.*

Пример 4. На плоскости даны вершины треугольника $\triangle ABC$: $A(1;0)$, $B(2;2)$, $C(3;1)$.

Сделать чертеж и найти:

a). Длины сторон треугольника $\triangle ABC$;

b). Внутренний угол A (через tg);

c). Уравнение высоты, проведенной через вершину C;

d). Точку пересечения высот треугольника;

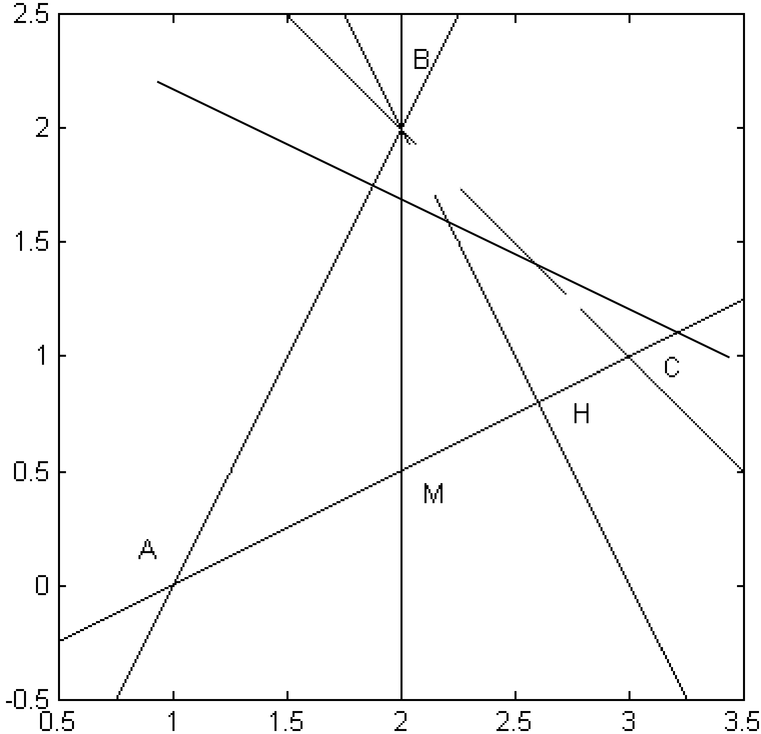
e). Длину высоты, опущенной из вершины B;

f). Площадь треугольника;

g). Составить уравнение медианы, проведенной из вершины B.

Решение. а).

Строим треугольник в координатных осях:



a). Длины сторон треугольника $\triangle ABC$ равны модулям векторов $\overrightarrow{AB}=\{1;2\}$, $\overrightarrow{AC}=\{1;1\}$, $\overrightarrow{BC}=\{2;1\}$

$AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$, $BC=|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$, $AC=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

b). Отметим, угол наклона прямой отсчитывается от положительной полуоси Ox против хода часовой стрелки. Учитываем, что в треугольнике внутренний угол $\angle A$ - это разность углов наклона прямых (в указанном порядке) AB и AC. Для нахождения внутреннего угла $\angle A$ используем формулу

$\operatorname{tg}\angle A = \dfrac{k_{AB} - k_{AC}}{1 + k_{AB}\cdot k_{AC}}$, где k_{AB}, k_{AC} - угловые коэффициенты прямых AB и AC. Для нахождения угловых коэффициентов составим канонические уравнения прямых AB и AC. Возьмем уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

AB: $\dfrac{y-0}{2-0} = \dfrac{x-1}{2-1}$, y=2$x$-2, $k_{AB} = 2$.

$AC: \dfrac{y-0}{1-0} = \dfrac{x-1}{3-1}$, $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$, $k_{AC} = \dfrac{1}{2}$

Получаем, $tg\angle A = \dfrac{2-1/2}{1+2\cdot 1/2} = \dfrac{3}{4}$. $\angle A = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$.

c) Угловой коэффициент высоты CK связан с угловым коэффициентом стороны AB соотношением

$k_{AB} \cdot k_{CK} = -1$. Отсюда находим, $k_{CK} = -\frac{1}{2}$. Уравнение высоты составим, используя уравнение прямой, имеющей заданный наклон и проходящей через заданную точку: $y - y_0 = k(x - x_0)$. *CK*: y-1= - $\frac{1}{2}(x-3)$, y= - $\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$. d). Составим уравнение высоты *BH*. Угловой коэффициент высоты *BH* связан с угловым коэффициентом стороны *AC* условием $k_{AC} \cdot k_{BH} = -1$. Отсюда находим, $k_{BH} = -2$. Уравнение высоты составим, используя уравнение прямой, имеющей заданный наклон и проходящей через заданную точку: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$BH: y - 2 = -2(x-2), \quad y = -2x + 6.$$

Для нахождения точки пересечения высот треугольника решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}, \\ y = -2x + 6. \end{cases}$$

Решая систему, получаем: $x=\frac{7}{3}$, $y=-\frac{4}{3}$. Т.е. N

$\left(\frac{7}{3};-\frac{4}{3}\right)$ - точка пересечения высот .

е). Расстояние от вершины B до стороны AC найдем по формуле:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$ где $Ax+By+C=0$ - общее уравнение прямой, $(x_0;y_0)$ - точка, от которой определяется расстояние.

Общее уравнение стороны AC имеет вид:
$x-2y-1=0$.

Поэтому $$d=\frac{|2-2\cdot 2-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}.$$

f) Площадь треугольника найдем по формуле: $S=\frac{1}{2}BH\cdot AC$. Получим $S=\frac{1}{2}\frac{3}{\sqrt{5}}\sqrt{5}=\frac{3}{2}$

g) Чтобы составить уравнение медианы, найдем координаты точки M - середины стороны AC :

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1+3}{2} = 2, \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$BM : \dfrac{y-2}{1/2-2} = \dfrac{x-2}{2-2}, \quad x = 2$ (каноническое уравнение вертикальной прямой).

Отметим, деление на 0 здесь имеет символический смысл: $x-2=0\dfrac{y-2}{-3/2}$.

Пример 5. Точки $A(1;2;3)$, $B(3;0;2)$, $C(6;3;-1)$, $D(4;1;5)$ являются вершинами пирамиды.

Найти:

а). Уравнения ребра AB;

б). Угол между ребрами AB и AC;

в). Уравнение грани ABC;

г). Угол между ребром AD и гранью ABC;

д). Уравнение высоты пирамиды, опущенной из вершины D, а также проекцию этой вершины на плоскость ABC.

Решение. а). Канонические уравнения прямой в пространстве, проходящей через две заданные точки, определяются соотношениями

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Следовательно, уравнения ребра AB имеют вид

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-2}{0-2}=\frac{z-3}{2-3}, \quad \text{или} \quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{-1}.$$

Это канонические уравнения прямой в пространстве AB. Параметрические уравнения этой прямой получим, приравняв каждую из дробей параметру t:

$$x=2t+1, \quad y=-2t+2, \quad z=-t+3.$$

б). Угол между ребрами - это угол φ между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

Эти векторы соответственно равны $\overline{AB}=\{2;-2;-1\}$ и $\overline{AC}=\{5;1;-4\}$. Поэтому

$$\cos\varphi=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\left|\overline{AC}\right|}=\frac{2\cdot5+(-2)\cdot1+(-1)\cdot(-4)}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}\sqrt{5^2+1^2+(-4)^2}}=\frac{4}{\sqrt{42}}$$

.

в). Составим уравнение грани ABC, используя условие компланарности векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и текущего вектора $\overline{AM}=\{x-1;y-2;z-3\}$:

$$\left(\overline{AM},\overline{AB},\overline{AC}\right)=\begin{vmatrix}x-1 & y-2 & z-3\\ 2 & -2 & -1\\ 5 & 1 & -4\end{vmatrix}=0.$$

Раскрывая определитель, получим

$$(x-1)\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & -4\end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix}2 & -1\\ 5 & -4\end{vmatrix}+(z-3)\begin{vmatrix}2 & -2\\ 5 & 1\end{vmatrix}=0,$$

или

$$3x+y+4z-17=0.$$

г). Угол α между прямой с направляющим вектором **a** и плоскостью с нормальным вектором **N** - угол между прямой и ее ортогональной проекцией нв плоскость. Он определяется формулой

$$\sin\alpha=\frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{N}|}{|\mathbf{a}||\mathbf{N}|}.$$

Направляющий вектор ребра равен

$\mathbf{a} = \overline{AD} = \{3; -1; 2\}$, координаты нормального вектора плоскости – это коэффициенты в общем уравнении плоскости, т.е. $\mathbf{N} = \{3; 1; 4\}$. Отсюда получаем

$$\sin\alpha = \frac{|3\cdot3+(-1)\cdot1+2\cdot4|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{3^2+1^2+4^2}} = \frac{8}{\sqrt{91}},$$

$$\alpha = \arcsin\frac{8}{\sqrt{91}}.$$

д). Направляющим вектором высоты пирамиды, опущенной из вершины D, является нормальный вектор плоскости $\mathbf{N} = \{3; 1; 4\}$. Поэтому канонические уравнения высоты следующие

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{4}.$$

Проекцию P вершины D на плоскость основания найдем как пересечение прямой DP и плоскости ABC. Для этого от канонических уравнений высоты перейдем к параметрическим уравнениям:

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{4} = t, \quad x = 3t+4, \quad y = t+1, \quad z = 4t+5$$

Подставляя последние соотношения в уравнение плоскости ABC, получаем уравнение для определения значения параметра t, соответствующего точке P:

$$3(3t+4)t+1+4(4t+5)-17=0, \quad t=-\frac{8}{13}.$$

Подставляя полученное значение t в параметрические уравнения высоты, находим координаты точки P:

$$x=3\left(-\frac{8}{13}\right)+4=\frac{28}{13}, \quad y=-\frac{8}{13}+1=\frac{5}{13}, \quad z=4\left(-\frac{8}{13}\right)+5=\frac{33}{13}$$

.

Пример 6. Найти пределы функций: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3x-1)(4x+1)}{x^2+2x+\sqrt{x}+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{x-8}-1}{x^2-81}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{1-\cos 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^x$

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x-1)(4x+1)}{x^2+2x+\sqrt{x}+3}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ *Чтобы раскрыть неопределенность типа* $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ *необходимо и в числителе и в знаменателе в каждом из сомножителей вынести за скобки старшие степени* $=$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\left(3-\frac{1}{x}\right)\cancel{x}\left(4+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}+\frac{3}{x^2}\right)}=\frac{(3-0)(4+0)}{(1+0+0+0)}=12;$$

б) Привлекая сопряженное выражение и далее разлагая на множители, имеем

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x-8}-1}{x^2-81}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 9}\frac{\left(\sqrt{x-8}-1\right)\left(\sqrt{x-8}+1\right)}{\left(\sqrt{x-8}+1\right)(x-9)(x+9)}=$$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{x-8-1}{\left(\sqrt{9-8}+1\right)(x-9)(9+9)}=\frac{1}{36}$$

в)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{1-\cos 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x2\sin x\cos x}{2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos 0}{\sin x}=1$$

;

Здесь использован первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^x=\left(1^\infty\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{3x+2}\right)^x=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-3}{3x+2}\right)^{\frac{3x+2}{-3}}\right]^{\frac{-3}{3x+2}x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-3\cancel{x}}{\cancel{x}\left(3+\frac{2}{x}\right)}}=\frac{1}{e}$$

Здесь применен второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Пример 7. Используя определение, найти производную функции $y=x^2+3x$ в точке $x_0=1$.

Решение.

По определению

$$y'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x_0+\Delta x)-y(x_0)}{\Delta x}.$$

$$y(x_0)=y(1)=1^2+3\cdot 1=4,$$

$$y(x_0+\Delta x)=y(1+\Delta x)=(1+\Delta x)^2+3(1+\Delta x)=4+5\Delta x+\Delta x^2$$

Отсюда

$$y'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x_0+\Delta x)-y(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4+5\Delta x+\Delta x^2-4}{\Delta x}=$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(5 + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = 5.$$

Для решения примеров **задания 7** предполагается использование правил дифференцирования и таблицы производных основных элементарных функций. В правилах дифференцирования переменные величины u, v - функции аргумента x.

Правила дифференцирования

1. $c' = 0, \qquad c - const$
2. $(ku)' = ku', \qquad k - const$
3. $(u + v)' = u' + v'$ - производная суммы
4. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ - производная произведения
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ - производная дроби
6. Производная сложной функции:

$$\left[y(u(x))\right]' = y_u' \cdot u_x'$$

(вначале производная внешней функции по промежуточному аргументу)

Таблица производных

$$x' = 1 \qquad (1)$$

$$\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha u^{\alpha - 1} \quad u' \qquad (2)$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \quad u' \qquad (3)$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \quad u' \qquad (4)$$

$$\left(e^{u}\right)' = e^{u} \quad u' \qquad (5)$$

$$\left(a^{u}\right)' = a^{u} \ln a \quad u' \qquad (6)$$

$$\left(\ln u\right)' = \frac{1}{u} \quad u' \qquad (7)$$

$$\left(\log_a u\right)' = \frac{1}{u \ln a} \quad u' \qquad (8)$$

$$(\sin u)' = \cos u \quad u' \qquad (9)$$

$$(\cos u)' = -\sin u \quad u' \qquad (10)$$

$$(\mathrm{tg}\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \quad u' \qquad (11)$$

$$(\mathrm{ctg}\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \quad u' \qquad (12)$$

$$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \quad u' \qquad (13)$$

$$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \quad u' \qquad (14)$$

$$(\mathrm{arctg}\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \quad u' \qquad (15)$$

$$(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\frac{1}{1+u^2} \quad u' \qquad (16)$$

Особое внимание следует обратить на правило 6 для производных сложных функций. В примере 7c) необходимо вычислить производную **неявной** функции, а в примере 7d) - производную функции, заданной в **параметрическом** виде**.**

(Можно использовать формулу $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$).

Пример 8. Для функции двух переменных $z = 4x^2 + 2xy + 2y^2 - 5x - 3y + 1$ найти:

a) полный дифференциал dz и вторые производные z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy} ;

b) производную $\dfrac{dz}{dt}$ сложной функции

$z = f\left(x(t), y(t)\right)$, если $\begin{cases} x = \ln t - t, \\ y = \operatorname{arctg}\sqrt{t^3}. \end{cases}$

c) исследовать функцию

$z = 4x^2 + 2xy + 2y^2 - 5x - 3y + 1$ на экстремум;

d) составить уравнение касательной плоскости к поверхности

$z=4x^2+2xy+2y^2-5x-3y+1$ в точке $(1;1;z_0)$;

е) вычислить градиент $\operatorname{grad} z\left(3;4;\right)$ и производную по направлению $\frac{\partial z}{\partial l}(3;4)$, где $\mathbf{l}=\overline{OM}$ - вектор-радиус точки $(3;4)$, плоского скалярного поля, заданного функцией $z=4x^2+2xy+2y^2-5x-3y+1$.

Решение. а).Для функции нескольких переменных в отличие от функции одного аргумента путей приближения $M(x,y)\to M_0(x_0,y_0)$ бесконечно много. Поэтому изменение функции $z=f(x,y)$ следует рассматривать не вообще, а в определенном направлении. Скорости изменения функции в направлениях координатных осей характеризуются частными производными $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

Частная производная по переменной x может обозначаться также символом z'_x. Частная производная по x является производной функции одного аргумента, которая возникает, если зафиксировать другой аргумент y:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = \left.\frac{dz(x, y_0)}{dx}\right|_{x=x_0}$$

Отсюда следует, что при вычислении частных производных используются прежние правила дифференцирования и формулы таблицы производных.

Например, для функции $z = x^3 + 2x^2y^2 - \sqrt{y} + 1$

имеем

$$z'_x = \left(x^3 + 2x^2y^2 - \sqrt{y} + 1\right)'_x =$$

$$= \left(x^3\right)'_x + 2y^2\left(x^2\right)'_x - \left(\sqrt{y}\right)'_x + 1' = 3x^2 + 2y^2 2x - 0 + 0,$$

$$z'_y = \left(x^3 + 2x^2y^2 - \sqrt{y} + 1\right)'_y =$$

$$= \left(x^3\right)'_y + 2x^2\left(y^2\right)'_y - \left(\sqrt{y}\right)' + 1' = 0 + 2x^2 2y - \frac{1}{2\sqrt{y}} + 0.$$

Полный дифференциал определен формулой $dz = z'_x dx + z'_y dy$. Поэтому, вычислив частные производные $z'_x = 8x + 2y - 5, \quad z'_y = 2x + 4y - 3$, сразу имеем

$$dz = (8x + 2y - 5)dx + (2x + 4y - 3)dy.$$

b). Производная сложной функции $z = f\left(x(t), y(t)\right)$ определяется равенством

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Подготовим выражения производных по t:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} - 1, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^3}\frac{3}{2}\sqrt{t}.$$

В результате получаем

$$\frac{dz}{dt} = (8x + 2y - 5)\left(\frac{1}{t} - 1\right) + (2x + 4y - 3)\frac{1}{1+t^3}\frac{3}{2}\sqrt{t}.$$

c). Исследуем функцию на экстремум. Для этого, во-первых, найдем точки, подозрительные на экстремум, из условий стационарности

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$$

Имеем алгебраическую систему:

$$\begin{cases} 8x+2y=5, \\ 2x+4y=3. \end{cases}$$

Решив систему, получили стационарную точку функции $M_0\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Во-вторых, проверим наличие экстремума в найденной критической точке. Вычислим вторые производные. Подсчитываем значение выражения $\Delta(x,y)=z''_{xx}\cdot z''_{yy}-\left(z''_{xy}\right)^2$ в точке M_0:

$$z''_{xx}=(8x+2y-5)'_x=8,\quad z''_{xy}=(8x+2y-5)'_y=2,$$

$$z''_{yy}=(2x+4y-3)'_y=4.$$

$$A=z''_{xx}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=8,\quad B=z''_{xy}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=2,\quad C=z''_{yy}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=4,$$

$$\Delta(M_0)=AC-B^2=8\cdot 4-2^2>0.$$

Т.к. $\Delta>0$, то M_0 - точка экстремума, причем минимума, поскольку $A>0$. Окончательно

$$z_{\min}=z\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=4\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\frac{1}{2}\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{2}\right)^2-5\frac{1}{2}-3\frac{1}{2}+1=-1.$$

d). Определим сначала третью координату точки касания

$$z_0 = f(1,1) = 4\cdot 1^2 + 2\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 1^2 - 5\cdot 1 - 3\cdot 1 + 1 = 1$$

Касательная плоскость к поверхности $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0) определяется уравнением

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Учитывая значения частных производных

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = (8x + 2y - 5)\Big|_{\substack{x=1\\ y=1}} = 5,$$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = (2x + 4y - 3)\Big|_{\substack{x=1\\ y=1}} = 3$, получаем уравнение касательной плоскости

$z - 1 = 5(x - 1) + 3(y - 1)$, или $5x + 3y - z - 7 = 0$.

е). Градиентом скалярного поля (плоского) называется вектор, у которого координаты – частные производные:

$$\operatorname{grad} z(M_0) \equiv \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right\}.$$

Вычислим значения частных производных

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = (8x + 2y - 5)\Big|_{\substack{x=3\\ y=4}} = 27,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = (2x + 4y - 3)\Big|_{\substack{x=3\\ y=4}} = 19.$$

Получаем $\operatorname{grad} z(M_0) \equiv \{27;19\}$. Производную по направлению найдем из соотношения

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \operatorname{grad} z(M_0) \cdot \mathbf{l}^0 = \{27;19\} \cdot \frac{\{3;4\}}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{27 \cdot 3 + 19 \cdot 4}{5} = \frac{157}{5}$$

В задаче 9 следует вычислить интегралы. Предполагается знание основных методов интегрирования и формул таблицы интегралов.

Таблица интегралов

Интегралы от степенных функций:

1. $\int dx = x + c$

2. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \qquad \alpha \neq -1$

3. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c,$ 4. $\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + c$

5. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c$

Интегралы от показательных функций:

6. $\int e^x dx = e^x + c$

7. $\int a^x = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$

Интегралы от тригонометрических функций:

8. $\int \cos x dx = \sin x + c$

9. $\int \sin x dx = -\cos x + c$

10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$

11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$

Интегралы “группы 4-х”:

12. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$

- “высокий логарифм”

13. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c$ -

“длинный log”

Интеграл в примерах 9a) вычисляется непосредственным интегрированием, используя свойства линейности. Интеграл в примере 9b) решается методом подведения выражений под знак дифференциала. Если знаменатель подынтегральной функции квадратичный трехчлен, то такой интеграл относится к интегралам «группы четырех». Для приведения таких интегралов к табличным необходимо выделять в знаменателе подынтегральных дробей полные квадраты и применить далее соответствующую подстановку. Можно, также, сразу выполнить замену переменной интегрирования по такому правилу: *новая переменная интегрирования равна старой переменной интегрировании плюс половина коэффициента при первой степени старой переменной интегрирования в приведенном квадратном трехчлене*. Для решения примера 9c) надо применить формулу интегрирования по частям:

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}.$$

В некоторых случаях требуется проинтегрировать дробно-рациональную функцию. Если дробь под интегралом неправильная, надо выделить сначала целую часть. Это можно сделать, например, с помощью приема деление многочлена на многочлен «уголком». Затем правильную дробь следует представить суммой простых дробей в соответствии с корнями знаменателя. Неизвестные вначале коэффициенты простых дробей определяются методом неопределенных коэффициентов. Интеграл 9d) решается соответствующей подстановкой. Замену переменной интегрирования необходимо выполнить и для решения примеров, содержащих радикалы. Подстановка должна быть такой, чтобы избавиться от иррациональностей. В примерах 9e), 9f) требуется вычислить определенные интегралы. Здесь необходимо знание основной формулы интегрального исчисления – формулы Ньютона-Лейбница.

Приведем образцы решений примеров задачи 9, где более детально разъясняются вышеуказанные рекомендации.

Пример 8. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{x^2}{x^6+4}dx.$$

Решение.

$$\int \frac{x^2}{x^6+4}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^6+4}dx = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(x^3\right)}{x^6+4} = \left| \begin{gathered} x^3 = t, \\ dt = 3x^2 dx \end{gathered} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+2^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{2} + C$$

Пример 9. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx.$$

Решение.

$$\int \frac{x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx = \int \frac{(x+1)-4}{\sqrt{4-(x+1)^2}}dx = \left| \begin{gathered} x+1 = t, \\ dx = dt \end{gathered} \right| =$$

$$\int \frac{t-4}{\sqrt{4-t^2}}dt = \int \frac{tdt}{\sqrt{4-t^2}} - 4\int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(4-t^2\right)}{\sqrt{4-t^2}} -$$

$$-4\arcsin\frac{t}{2} + C = -\sqrt{4-\left(x+1\right)^2} - 4\arcsin\frac{x+1}{2} + C.$$

Пример 10. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx.$$

Решение.

Интегрируя по частям, имеем

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx = \left| \begin{array}{ll} u=\arcsin x, & du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv=\dfrac{dx}{\sqrt{x+1}}, & v=2\sqrt{x+1} \end{array} \right| = 2\sqrt{x+1}\cdot\arcsin x -$$

$$-2\int \sqrt{x+1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\sqrt{x+1}\cdot\arcsin x - 2\int \frac{\sqrt{x+1}dx}{\sqrt{(1+x)(1-x)}} =$$

$$= 2\sqrt{x+1}\cdot\arcsin x + 2\int \frac{d(1-x)}{\sqrt{1-x}} = 2\sqrt{x+1}\cdot\arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C.$$

Пример 11. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx.$$

Решение.

Выделяем сначала целую часть подынтегральной дроби:

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx. \frac{x^3+1}{x^3-x^2} = \frac{x^3-x^2+x^2+1}{x^3-x^2} = 1 + \frac{x^2+1}{x^3-x^2}.$$

Знаменатель правильной дроби имеет один простой корень $x=1$ и один кратный корень $x=0$.

Поэтому дробь заменим суммой простых дробей вида:

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x}.$$

Неизвестные вначале коэффициенты находим следующим образом (метод неопределенных коэффициентов). Просуммируем дроби в правой части, приводя их к общему знаменателю. Сравнивая числители дробей, справа и слева, имеем тождество

$$Ax^2+B(x-1)+Cx(x-1)\equiv x^2+1.$$

Поочередно задавая удобные значения x, составим уравнения для нахождения неизвестных коэффициентов. Пусть $x=0$, тогда $-B=1\Rightarrow\boxed{B=-1}$. Пусть $x=1$, тогда $\boxed{A=2}$. Пусть $x=-1$, тогда $A-2B+2C=2\Rightarrow\boxed{C=-1}$. Таким образом, $\dfrac{x^2+1}{x^3-x^2}=\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}$. Следовательно,

$$\int\frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx=\int\left(1+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)dx=x+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+\frac{1}{x}+C.$$

Пример 12. Вычислить неопределенный интеграл $\int\cos^4 x dx.$

Решение.

$$\int \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x\right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx = \int \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x\right) dx =$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Пример 13. Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5} dx.$

Решение

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5} dx = \left| \begin{matrix} x = t^2, \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right| = \int \frac{2t^2}{t+5} dt = 2\int \frac{t^2 - 25 + 25}{t+5} dt =$$

$$2\int \left(\frac{(t-5)(t+5)}{t+5} + \frac{25}{t+5} \right) dt =$$

$$=2\int(t-5)dt+50\int\frac{dt}{t+5}=(t-5)^2+50\ln|t+5|+C=$$

$$=\left(\sqrt{x}-5\right)^2+50\ln\left(\sqrt{x}+5\right)+C.$$

В задачах 9e), 9f) и 10 требуется находить определенные интегралы. Определенный интеграл вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b\equiv F(b)-F(a)}$$

Здесь $F(b)$, $F(a)$ - значения первообразной функции $f(x)$, вычисленные на концах промежутка интегрирования. Отметим, также, при использовании подстановок в определенном интеграле заменяется не только «старая» переменная интегрирования и ее дифференциал, но и границы промежутка интегрирования. Однако, обратная замена при этом не нужна. Отметим, формула интегрирования по частям для определенного интеграла принимает вид:

$$\boxed{\int_a^b u dv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v du}.$$

Пример 14. Вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

Решение.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+4+1} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \begin{vmatrix} t=x+2, & dt=dx \\ t_н=2, & t_в=3 \end{vmatrix} =$$

$$= \int_2^3 \frac{dt}{(t-2)^2+4(t-2)+5} =$$

$$= \int_2^3 \frac{dx}{t^2-4t+4+4t-8+5} = \int_2^3 \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t\Big|_2^3 = \operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2.$$

Пример 15. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx.$$

Решение.

Интеграл можно вычислить, применяя тригонометрическую подстановку $x=\sin t$. Однако, здесь будем использовать прием интегрирования по частям:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} u=\sqrt{1-x^2}, & du=\dfrac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv=dx, & v=x \end{matrix} \right| =$$

$$x\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$=0+\int_0^1 \frac{x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx+\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx+\arcsin x\Big|_0^1.$$

Итак, получено линейное уравнение для искомого интеграла:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=-\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx+\arcsin 1-\arcsin 0.$$

$$2\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}-0.$$ Окончательно

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}.$$

Часто необходимо вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость. Различают несобственные интегралы первого рода – интегралы на бесконечном промежутке и несобственные интегралы второго рода – интегралы от неограниченных функций. Эти интегралы являются обобщениями определенного интеграла: несобственный интеграл первого рода определяется как предел собственных интегралов, рассматриваемых на конечном промежутке, когда граница промежутка интегрирования устремляется в бесконечность

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Если $x=a$ - особая точка подынтегральной функции, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a-\varepsilon}^b f(x)dx.$$

В случае, когда найдена первообразная подынтегральной функции, исследование сходимости несобственных интегралов достаточно простое.

Пример 16. Вычислить несобственный интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{10}}$, или установить его расходимость.

Решение.

Это несобственный интеграл первого рода. По определению,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^{10}} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^{10}} = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{-9x^9}\Big|_1^b = \frac{1}{9} - \lim_{b\to\infty}\frac{1}{9b^9} = \frac{1}{9}.$$

Пример 17. Вычислить несобственный интеграл второго рода:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Big|_{1+\varepsilon}^2 = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\ln(1+\varepsilon)} - \frac{1}{\ln 2} = -\infty \Rightarrow$$

Интеграл расходится.

В заключение, приведем примеры решений заданий, касающихся приложений определенного интеграла.

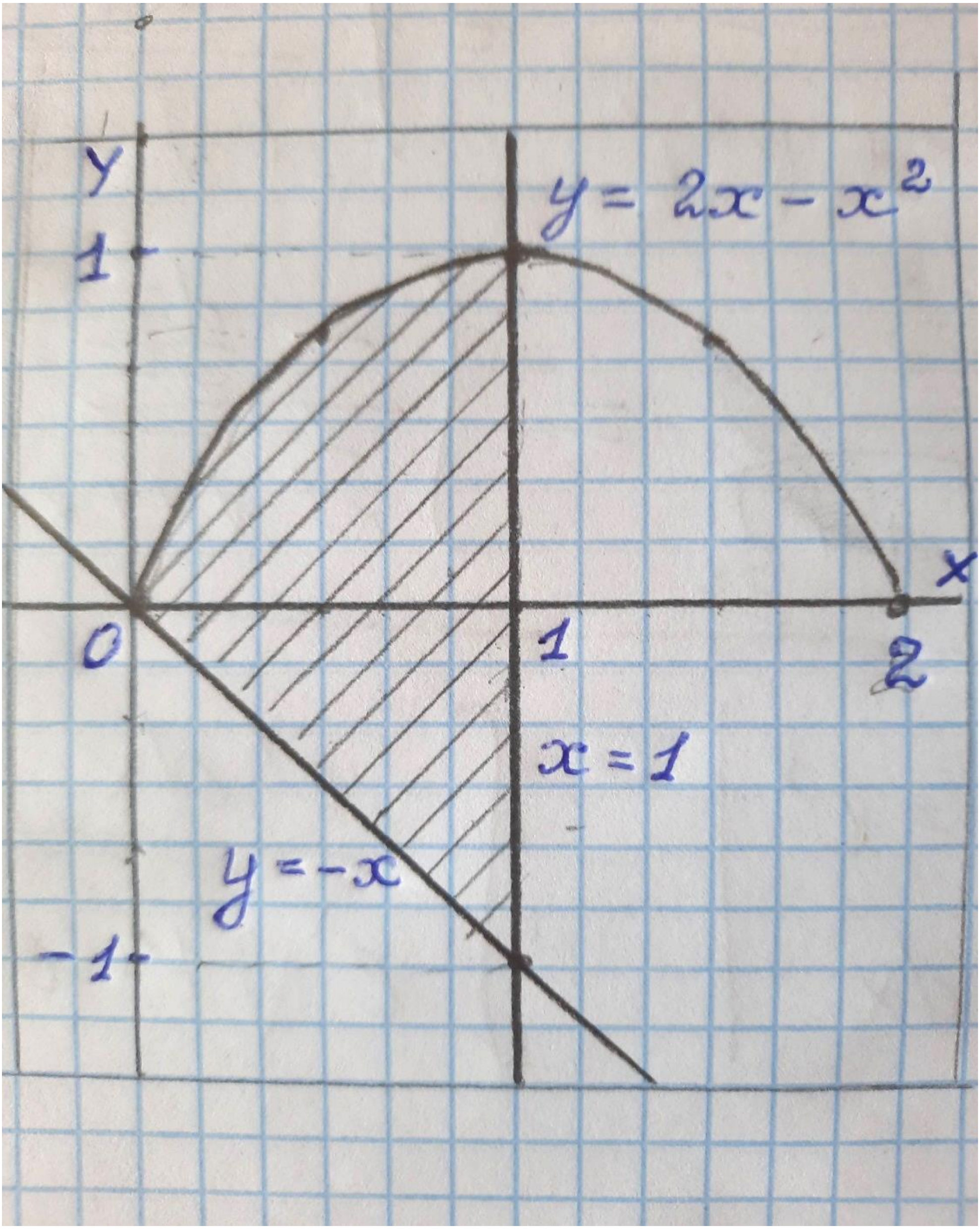
Пример 18. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями

$$y = 2x - x^2, \quad y = -x, \quad x = 1.$$

Решение.

Строим граничные линии фигуры, которую обозначаем штриховкой. Определяем точки пересечения граничных линий. Напомним, для построения прямой откладываем координаты двух точек. Чтобы построить другие линии, требуется указать хотя бы три точки, которые затем плавно соединяем непрерывной линией. Точки пересечения линий находим, решая систему, составленную из уравнений линий. Так, в данном случае точка пересечения параболы $y = 2x - x^2$ и прямой линии $y = -x$ имеет координаты

$x=0, \quad y=0$. $(1;1)$ - точка пересечения параболы и вертикальной прямой $x=1$. $(1;-1)$ - точка пересечения указанных прямых.


y
1
y = 2x − x²
x
0
1
2
x = 1
y = −x
−1

Используем формулу

$S=\int\limits_a^b\left[y_1(x)-y_2(x)\right]dx$, где a, b - абсциссы точек пересечения граничных линий. $y_1(x)$ - уравнение «верхней» кривой ($y_1(x)=2x-x^2$), $y_2(x)$ - уравнение «нижней» кривой ($y_2=-x$).

$a=0,\quad b=1$. Получаем

$$S=\int\limits_0^1\left[\left(2x-x^2\right)-(-x)\right]dx=\int\limits_0^1\left(3x-x^2\right)dx=\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{3}{2}-\frac{1}{3}=\frac{7}{6}$$

Пример 19. Вычислить длину дуги плоской кривой – цепной линии $y=\operatorname{ch}x$ от точки $A(0;1)$ до точки $B\left(\ln 2;\frac{5}{4}\right)$.

Решение.

Используем формулу:

$$l_{\overset{\smile}{AB}}=\int\limits_{x_A}^{x_B}\sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx.$$

Далее,

$$y' = (\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

Здесь $\operatorname{ch} x, \quad \operatorname{sh} x$ - соответственно косинус и синус гиперболический. Учитывая, что

$$\sqrt{1+\left(y'\right)^2} = \sqrt{1+\frac{\left(e^x - e^{-x}\right)^2}{4}} = \sqrt{\frac{4+e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4}} = \operatorname{ch} x$$

,

Получаем

$$l_{\overset{\smile}{AB}} = \int_0^{\ln 2} \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x \Big|_0^{\ln 2} = \operatorname{sh}(\ln 2) - \operatorname{sh} 0 = \frac{e^{\ln 2} - e^{\ln\frac{1}{2}}}{2} = \frac{3}{4}.$$

Пример 20. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линией $x^4 + y^4 = x^2$.

Решение.

Т.к. переменные входят в уравнение в четной степени, то фигура симметрична относительно обеих координатных осей. Поэтому можно рассмотреть вращение «четвертинки» фигуры, которая ограничена линией от точки $(0;0)$ до точки $(1;0)$ и прямой $y=0$. Объем тела вращения вокруг оси абсцисс определяется формулой $V=\pi\int_a^b y^2(x)dx$. Поскольку в данном случае $y^2=x\sqrt{1-x^2}$, то половина искомого объема определяется соотношением

$$\frac{1}{2}V=\pi\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx=-\frac{\pi}{2}\int_0^1\sqrt{1-x^2}d\left(1-x^2\right)=-\frac{\pi}{2}\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{3}.$$

Окончательно получаем $V=\dfrac{2}{3}\pi.$

К вычислению определенных интегралов приводятся криволинейные интегралы. Различают криволинейные интегралы 1-го рода (интегралы по дуге) и криволинейные интегралы 2-го рода (интегралы по координате). Ниже рассмотрим криволинейные интегралы 2-го рода

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Здесь $P(x,y)$, $Q(x,y)$ - заданные функции двух переменных, а L = кривая на плоскости, где определены эти функции. Если принять, что функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ координаты переменной силы, то криволинейный интеграл – это работа, которую совершает переменная сила при перемещении точки приложения вдоль дуги кривой L:

$$\mathrm{A} = \int_L \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_L (P\mathbf{\imath} + Q\mathbf{j})\cdot(\mathbf{\imath}dx + \mathbf{j}dy) = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

.

Если кривая L задана уравнением $y=\varphi(x)$, то вычисление криволинейного интеграла проводится по формуле

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_1}^{x_2}\left[P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\varphi'(x)\right]dx$$

,

где x_1, x_2 - абсциссы точек начала и конца пути интегрирования.

Пример 21. Проверить , что переменная сила $\mathbf{F}=\{P(x,y),Q(x,y)\}$, где $P(x,y)=xy$, $Q(x,y)=y-x$ не является потенциальной. Применяя криволинейный интеграл второго рода, найти работу силового поля $\mathbf{F}$ вдоль дуги параболы $y=x^2$, проходящей через точки $O(0,0)$ и $M(1,1)$.

Решение.

Сила $\mathbf{F}=\{P(x,y),Q(x,y)\}$ называется потенциальной, если выполняется условие $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$. В данном случае имеем

$P=xy, \quad Q=y-x$ и далее

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial (xy)}{\partial y}=x, \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial (y-x)}{\partial x}=-1\neq\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$$

, условие не выполняется.

Вычислим работу

$$\mathrm{A} = \int_0^1 \left[P\left(x, \varphi(x)\right) + Q\left(x, \varphi(x)\right) \varphi'(x) \right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left[x \cdot x^2 + \left(x^2 - x\right)\left(2x\right) \right] dx = \int_0^1 \left[3x^3 - 2x^2 \right] dx = \left(\frac{3}{4} x^4 - \frac{2}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{12}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данко П.В., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. I – М.: Высшая школа, 1986, 2003.
2. Данко П.В., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я., Данко С.П. Высшая математика в упражнениях и задачах. Мир и Образование, 2023.
3. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – МГУ, 2022.
4. Волокитин Г.И., Ларченко В.В., Азаров Д.А., Редько Ю.С. Начала линейной алгебры. Учебное пособие. – Ростов-на-Дону: Издательский центр ДГТУ, 2012.
5. Бермант А.Ф., Араманович А.Г.. Краткий курс математического анализа для втузов. – Лань, 2010.
6. Соболь Б.В., Мишняков Н.Т., Поркшеян В.М. Практикум по высшей математике. – Феникс, Ростов-на-Дону, 2010.

1.