ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Высшая математика»

Учебно-методическое пособие

по дисциплине «Математический анализ»

«Методические указания и варианты заданий первого семестра»

Авторы
Волокитин Г.И.,
Поляков А.С.

Ростов-на-Дону, 2024

Аннотация

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов первого курса, изучающих дисциплину «Математический анализ» в первом семестре всех форм обучения технических направлений. Охвачены разделы «Введение в анализ», «Элементы дифференциального исчисления», «Элементы интегрального исчисления».

Авторы

к.ф.-м.н., доцент кафедры «Высшая математика»
Волокитин Г.И.

старший преподаватель кафедры
«Высшая математика»
Поляков А.С.

Оглавление

1. ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ ПЕРВОГО СЕМЕСТРА

Введение в анализ.

Функция одной переменной. Предел последовательности и функции. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Сравнение бесконечно малых. Теоремы о первом и втором специальных пределах. Число ***e***, экспонента, натуральный логарифм. Непрерывность функции. Точки разрыва, их классификация. Свойства непрерывных на отрезке функций.

Дифференциальное исчисление.

Задачи, приводящие к понятию производной (о касательной к кривой и о скорости). Определение производной, ее геометрический и механический смысл. Правила дифференцирования. Таблица производных основных элементарных функций. Повторное дифференцирование. Вычисление производных функций, заданных неявно и в параметрическом виде. Дифференциал функции: определение, свойства, геометрический смысл, инвариантность. Применение дифференциалов в приближенных вычислениях. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей. Приложение дифференциального исчисления к исследованию функций: монотонность, экстремумы, направление выпуклости кривых и точки перегиба. Асимптоты. Общая схема исследования функции. Формула Тэйлора для многочлена и для функции с остаточным членом в форме Лагранжа, формулы Маклорена для основных элементарных функций.

Функции нескольких переменных.

Основные определения. Геометрический смысл функции двух переменных. Понятие предела и непрерывность функции двух переменных. Определение частной производной и ее геометрический смысл. Полный дифференциал функции двух переменных. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости. Дифференцирование сложных функций. Касательная и нормаль к поверхности. Экстремумы функции двух переменных: необходимые и достаточные условия экстремума. Градиент скалярного поля, производная по направлению.

Неопределенный интеграл.

Первообразная функции, неопределенный интеграл и его свойства. Таблица интегралов. Основные приемы интегрирования: непосредственное интегрирование, метод подстановки, интегрирование по частям. Интегралы группы «четырех». Интегрирование дробно-рациональных функций. Интегралы от тригонометрических функций. Интегрирование некоторых иррациональностей.

Определенный интеграл.

Задача о площади криволинейной трапеции. Понятие определенного интеграла, его геометрический и механический смысл. Свойства определенного интеграла, выражаемые равенствами. Свойства определенного интеграла, выражаемые неравенствами. Теорема о среднем. Связь определенного и неопределенного интегралов, формула Ньютона-

Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям. Несобственные интегралы первого и второго рода. Приложения определенного интеграла: вычисление площадей плоских фигур. Вычисление длины дуги плоской кривой, объем тела вращения. Понятие криволинейного интеграла первого и второго рода. Определение двойного интеграла и его вычисление.

2. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ПЕРВОГО СЕМЕСТРА

Задача 1. Найти пределы функций.

1. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^5-4x^4+2}{(3x^2+2\sqrt{x}-1)(2x+3)^3}$;

b) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{x^2-7x+10}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\,\mathrm{arctg}\,2x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{\sin 3x}}$.

2. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^2\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+5\right)^4}{\left(2x+\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+1\right)^4}$;

b) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2x^2-13x-7}{x^2-9x+14}$;

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^3 x}{\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)(1-\sin x)}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\operatorname{tg}3x)}{\arcsin 9x}$.

3. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(x^2-3x+1\right)^2}{5x^4+3x^3-2}$;

b) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2-6x-16}{x^2-8x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\arcsin x}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{10x-3}{10x+1}\right)^{5x}$.

4. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x+3)(x-5)^2}{2x^3+10x^2+5}$;

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2+x-4}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 5x}{1-\cos 10x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 3}(4x-11)^{\frac{5x}{x-3}}$.

5. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+3)\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{2x^2+10x+1}$;

b) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{5x^2-51x+10}{x^2-10x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\left(\pi(x-1)\right)}{x^2+x-2}$; d)

$\lim\limits_{x\to -1}(2x+3)^{\frac{1}{x+1}}$.

6. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(2x^3+\sqrt{x}+1\right)\left(3x^2+5\right)}{3x^5+x^2\sqrt{x}-2x+10}$;

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-5x+6}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 8x^2}{1-\cos 4x}$; d)

$\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{\frac{5}{x-2}}$.

7. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+3)\left(\sqrt{x}+1\right)^{2}}{2x^{2}+10x\sqrt{x}+1}$;

b) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^{2}-14x-5}{x^{2}-6x+5}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x^{2}}{1-\cos 2x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\mathrm{tg}\,3x\right)^{1/2x}$.

8 . a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(x^{3}+\sqrt{x}+1\right)\left(2x^{2}+5\right)}{4x^{5}+3x^{2}\sqrt{x}-x+10}$;

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^{2}-7x+3}{5x^{2}-16x+3}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\left(x^{2}-x\right)\sin x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 3}\left(7-2x\right)^{1/(6-2x)}$.

9. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{3}+(x-1)^{3}}{\left(x+2\sqrt{x}+1\right)^{3}}$;

b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^{2}+5x-2}{4x^{3}-16x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x(1-\cos x)}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg}x}}$.

10. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^3+2x+1}+\sqrt{x^4+1}}{\left(2x-\sqrt{x}+5\right)^2}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{2x-4}$;

c) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5+2x}{3+2x}\right)^{2x}$.

Задача 2. Найти производную функции $y(x)$ в точке x_0, используя *определение* производной.

1. $y(x)=\dfrac{1}{3x+2}$, $x_0=1$.

2. $y(x)=x^2+x$, $x_0=3$.

3. $y(x)=(2x+1)^2$, $x_0=0$.

4. $y(x)=-\dfrac{1}{x^2+1}$, $x_0=1$.

5. $y(x)=\dfrac{2x}{x+1},\quad x_0=0.$

6. $y(x)=x^2+2x+3,\quad x_0=2.$

7. $y(x)=\sqrt{x+1},\quad x_0=3;$

8. $y(x)=x^2+3x-2,\quad x_0=-1.$

9. $y(x)=\ln(1+x),\quad x_0=4.$

10. $y(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2},\quad x_0=4.$

Задача 3. Используя правила дифференцирования и формулы таблицы производных, в примерах a), b), c), d) вычислить производную. В примере e) найти второю производную:

1. a) $y=\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sin 2x}-\dfrac{3}{\ln x}+x^2\,\mathrm{e}^{2x}+1\right)^{12};$

b) $y=(\operatorname{arctg} x)^{\sqrt{x}};$ c) $x+y=\sin\left(x^2-y^2\right);$

d) $\begin{cases} x=\cos^2 3t, \\ y=-\dfrac{\sin^3 3t}{3} \end{cases};$ e) $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{4}{x}$

2. a) $y=\ln\left(\dfrac{\sqrt{x^3}+2}{\cos 2x}-\dfrac{1}{x}+x^2 2^x+1\right)$;

b) $y=\left(x^2-\sqrt{x}\right)^{\arcsin x}$; c) $xy=\sqrt{x^2+y^2}$

d) $\begin{cases} x=2^t\cos t, \\ y=2^t\sin t \end{cases}$; e) $y=\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg} x$.

3. a) $y=\cos\left(\dfrac{\sqrt{x}+3}{\ln x}-\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}+x^2 3^x+1\right)$;

b) $y=\left(x^3-\sqrt{x^3}\right)^{\operatorname{ctg} x}$; c) $e^{xy}=x^2+y^2$;

d) $\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t). \end{cases}$ e) $y=\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

4. a) $y=\dfrac{1}{\left(x\sin x-\ln^2 x+3\right)}$;

b) $y=\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^{\arcsin\sqrt{x}}$; c) $2^x+2^y=x^2+y^2$;

d) $\begin{cases} x=\cos^4 t, \\ y=\sin^4 t. \end{cases}$; e) $y=x\sqrt{1+x^2}$.

5. a) $y=\sin^2\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}-x^3e^{2x}+1\right)$; b) $y=(\operatorname{tg} 2x)^{\sqrt{x}}$;

c) $\arcsin(xy)-x=y$;

d) $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t, \\ y=\sin t-t\cos t. \end{cases}$; e) $y=x\lg x$.

6. a) $y=\dfrac{1}{\left(\sqrt{x}\arcsin x+\dfrac{x^2}{\operatorname{tg}2x}-5^{-x}+1\right)^2}$;

b) $y=\left(1+x^2\right)^{\operatorname{arctg}x}$; c) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=xy$;

d) $\begin{cases} x=2t-t^2, \\ y=3t-t^3 \end{cases}$; e) $x^2-xy+y^2=1$.

7. a) $y=\sqrt{x}\operatorname{ctg}^2\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)$; b) $y=(\sin 3x)^x$;

c) $y^3+3y=x$;

d) $\begin{cases} x=e^{2t}\cos^2 t, \\ y=e^{2t}\sin^2 t \end{cases}$; e) $y=\operatorname{tg}2x$.

8. a) $y=\dfrac{1}{\ln\left(x^2\cos 3x+\dfrac{2\sqrt{x}}{\arcsin x}+1\right)}$; b) $y=x^{\operatorname{arcctg}5x}$;

c) $y=1+xe^{2y}$;

d) $\begin{cases} x=\ln t-\dfrac{1}{t}, \\ y=\dfrac{t^2+2t+1}{t} \end{cases}$; e) $y=\operatorname{ctg}2x$.

9. a) $y=\arcsin^2\sqrt{1-4x^2}$; b) $y=(\operatorname{tg}2x)^{1+2x}$;

c) $x\sin y-\cos y+2y=0$;

d) $\begin{cases} x=e^{2t}\cos 2t, \\ y=e^{2t}\sin 2t \end{cases}$; e) $y=\ln\left(x-\sqrt{x^2-3}\right)$.

10. a) $y=\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}+x^2 10^x-3\right)^5$; b) $y=(\arccos x)^{\ln x}$;

c) $x^y=y^x$;

d) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}\sin^3 t, \\ y=\dfrac{1}{3}\cos^3 t \end{cases}$; e) $y=e^{-3x^2}$.

Задача 4. Найти экстремумы функции.

1. $y=2x^3-3x^2$.
2. 2. $y=2x^3-6x^2-18x+7$.
3. $y=\dfrac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$.
4. 4. $y=\sqrt[3]{\left(x^2-3x+8\right)^2}$.
5. $y=\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$.

6. $y=(x-1)^5(3x+1)^4$.

7. $y=\dfrac{4\sqrt{3}}{9x\sqrt{1-x}}$.

8. $y=x-\ln(1+x)$.

9. $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

10. $y=\dfrac{10}{4x^3-9x^2+6x}$.

Задача 5. Для функции двух переменных

$$z=f(x,y)\equiv x^2+2xy+2y^2+nx-y+1,$$

где n - номер варианта, найти:

a) полный дифференциал dz и вторые производные z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy};

b) производную сложной функции $\dfrac{dz}{dt}$, если (выбирая свой вариант1)

1. $\begin{cases} x=\cos^2 t, \\ y=t^2-\dfrac{1}{t}. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\ln t}, \\ y=\operatorname{tg}\sqrt{t}. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x=\ln^2 t, \\ y=\operatorname{arctg}\sqrt{t}. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x=2^{-t}, \\ y=\arcsin\sqrt{t}. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x=e^{3t}, \\ y=t\ln t. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x=t^2-\dfrac{1}{t}, \\ y=\ln^3 t. \end{cases}$ 7. $\begin{cases} x=\sin^2 t, \\ y=\operatorname{ctg}\sqrt{t}. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x=\arcsin^2 t, \\ y=\sqrt[3]{t}+\operatorname{ctg}\sqrt{t}. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x=(\sin t+\cos t)^2, \\ y=\lg^2 t. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x=(\ln t+t)^2, \\ y=\operatorname{arctg}^2 t. \end{cases}$

c). Исследовать функцию $f(x,y)$ на экстремум;

d). Составить уравнение касательной плоскости к поверхности $f(x,y)$ в точке $M_0(1;1;z_0)$;

e) вычислить градиент $\operatorname{grad} z(1;1)$ и производную по направлению $\dfrac{\partial z}{\partial l}(1;1)$, где $\mathbf{l}=\overline{OM}$ - вектор-радиус точки $(1;1)$.

Задача 6. Найти интегралы: в заданиях a), b), c) и d) вычислить неопределенные интегралы, применяя таблицу интегралов. В заданиях e), f) вычислить определенные интегралы с помощью неопределенных

1. a) $\int \frac{1+2x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx$; b) $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg}^3 x}$;

c) $\int (2x-3)\ln x dx$; d) $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4e^x+3}$;

e) $\int\limits_0^4 \sqrt{16-x^2}dx$; f) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg} x dx$.

2. a) $\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$; b) $\int \frac{x^2 dx}{x^6-25}$;

c) $\int x\operatorname{arctg} 2x dx$; d) $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$;

e) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}}$; f) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 4x dx$.

3. a) $\int \frac{2^{x+1}-5^{x+1}+10^x\cos x}{10^x}dx$; b) $\int \frac{dx}{(x-1)\ln(x-1)}$;

c) $\int x^3 e^{-x^2}dx$; d) $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$;

e) $\int\limits_0^7 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$; f) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^5 x dx$.

4. a) $\int \frac{8^x-1}{2^x-1}dx$; b) $\int \frac{\cos 2x dx}{\sqrt[4]{\sin^3 2x}}$;

c) $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$; d) $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$;

e) $\int\limits_0^1 \frac{x^3 dx}{x^8+3}$; f) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \sin 5x \cos x dx$.

5. a) $\int \sqrt{1+\sin 2x}dx,\ \ 0\le x\le \frac{\pi}{2}$; b) $\int x^2 5^{-x^3} dx$;

c) $\int \arcsin 2x dx$; d) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$;

e) $\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$; f) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}}$.

6. a) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$; b) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$;

c) $\int x^3 \ln x dx$; d) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$;

e) $\int\limits_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$; f) $\int\limits_0^1 \arccos x dx$.

7. a) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4-1}}dx$; b) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$;

c) $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx$; d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x+1}}$;

e) $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$; f) $\int_1^e \ln x dx$.

8. a) $\int x(1-x)^{10}dx$; b) $\int \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$;

c) $\int (2x-3)\sin 4x dx$; d) $\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)(x+1)}dx$;

e) $\int_0^{\pi} \cos^4 x dx$ f) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$.

9. a) $\int \frac{xdx}{(1-x)^{10}}$; b) $\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^{10}}}dx$;

c) $\int (2x-3)\cos 4x dx$ d) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x+1}}$;

e) $\int_0^{\pi/12} \operatorname{tg}^2 3x dx$; f) $\int_0^1 \arcsin x dx$.

10. a) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^{x}+1}dx$; b) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4+x^6}}$;

c) $\int x\ln(1+x)dx$; d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$;

e) $\int\limits_0^{0,5} x^2\sqrt{1-x^2}dx$; f) $\int\limits_1^{10} \lg x dx$.

Задача 7. Приложения определенного интеграла.

a). Выполняя чертеж, вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями.

b). Вычислить длину дуги плоской кривой.

c). Проверить , что переменная сила $\mathbf{F}=\{P(x,y),Q(x,y)\}$, где $P(x,y)=n\sqrt{x}+xy$, $Q(x,y)=n(x+y)$ не является потенциальной (здесь n – номер варианта). Применяя криволинейный интеграл второго рода, найти работу силового поля $\mathbf{F}$ вдоль дуги параболы $y=x^2$, проходящей через точки $O(0,0)$ и $M(1,1)$.

Вариант 1.

a) $y=x^2,\quad y=2-x,\quad y=0$; b) $y=\ln\cos x,\quad 0\le x\le \pi/6$;

Вариант 2.

a) $y=2x, \quad y=x, \quad x=1;$ b) $y=1-\ln\sin x, \quad {\pi}/{3} \le x \le {\pi}/{2};$

Вариант 3.

a) $y=e^{x}, \quad y=e^{-x}, \quad x=1;$ b) $y=\sqrt{x^{3}}, \quad 0\le x\le 4;$

Вариант 4.

a) $y=2x, \quad y=\dfrac{x}{2}, \quad yx=2;$ b) $y=\dfrac{1}{3}\ln\sin 3x, \quad {\pi}/{6} \le x \le {2\pi}/{9};$

Вариант 5.

a) $y^{2}=3x, \quad x^{2}=3y;$ b) $y=\dfrac{1}{4}x^{2}-\dfrac{1}{2}\ln x, \quad 1\le x\le 2;$

Вариант 6.

a) $yx=2, \quad x+2y-5=0;$ b) $y=\sqrt{(x-2)^{3}}, \quad 2\le x\le 6;$

Вариант 7.

a) $y=-x^{2}+6x-5, \quad y=0;$ b) $y=\ln x, \quad \sqrt{3}\le x\le \sqrt{8};$

Вариант 8.

a) $y=\sqrt{x}, \quad y=\dfrac{1}{x}, \quad x=4;$ b) $y=\dfrac{1}{2}\ln\cos 2x, \quad 0\le x\le {\pi}/{12}$

;

Вариант 9.

a) $y=2x^2, \quad y=-2x+4$; b) $y=7+x\sqrt{x}, \quad 0\le x\le 1$;

Вариант 10.

a) $y=x^2, \quad y=2-x$; b) $y=1+\ln\cos x, \quad 0\le x\le \pi/6$;

3. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Найти пределы функций: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x-1)(4x+1)}{x^2+2x+\sqrt{x}+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x-8}-1}{x^2-81}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{1-\cos 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^x$

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x-1)(4x+1)}{x^2+2x+\sqrt{x}+3}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ *Чтобы раскрыть неопределенность типа* $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ *необходимо и в числителе и в знаменателе в каждом из сомножителей вынести за скобки*

$$\text{\textit{старшие степени}} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\left(3-\frac{1}{x}\right)\cancel{x}\left(4+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}+\frac{3}{x^2}\right)}=\frac{(3-0)(4+0)}{(1+0+0+0)}=12;$$

б) Привлекая сопряженное выражение и далее раскладывая на множители, имеем

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x-8}-1}{x^2-81}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 9}\frac{\left(\sqrt{x-8}-1\right)\left(\sqrt{x-8}+1\right)}{\left(\sqrt{x-8}+1\right)(x-9)(x+9)}=$$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{x-8-1}{\left(\sqrt{9-8}+1\right)(x-9)(9+9)}=\frac{1}{36}$$

в)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{1-\cos 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x2\sin x\cos x}{2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos 0}{\sin x}=1$$

;

Здесь использован первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^x=\left(1^\infty\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{3x+2}\right)^x=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-3}{3x+2}\right)^{\frac{3x+2}{-3}}\right]^{\frac{-3}{3x+2}x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-3\cancel{x}}{\cancel{x}\left(3+\frac{2}{x}\right)}}=\frac{1}{e}$$

Здесь применен второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Пример 2. Используя определение, найти производную функции $y=x^2+3x$ в точке $x_0=1$.

Решение.

По определению

$$y'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x_0+\Delta x)-y(x_0)}{\Delta x}.$$

$$y(x_0)=y(1)=1^2+3\cdot 1=4,$$

$$y(x_0+\Delta x)=y(1+\Delta x)=(1+\Delta x)^2+3(1+\Delta x)=4+5\Delta x+\Delta x^2$$

Отсюда

$$y'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x_0+\Delta x)-y(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4+5\Delta x+\Delta x^2-4}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\cancel{x}(5+\Delta x)}{\Delta\cancel{x}}=5.$$

Для решения примеров **задания 3** предполагается использование правил дифференцирования и таблицы производных основных элементарных функций. В правилах дифференцирования переменные величины u, v - функции аргумента x.

Правила дифференцирования

1. $c' = 0, \qquad c - const$
2. $(ku)' = ku', \qquad k - const$
3. $(u+v)' = u' + v'$ - производная суммы
4. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ - производная произведения
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ - производная дроби
6. Производная сложной функции:

$$\left[y(u(x))\right]' = y_u' \cdot u_x'$$

(вначале производная внешней функции по промежуточному аргументу)

Таблица производных

$$x'=1 \qquad (1)$$

$$\left(u^{\alpha}\right)'=\alpha u^{\alpha-1}\quad u' \qquad (2)$$

$$(\sqrt{u})'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\quad u' \qquad (3)$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{1}{u^{2}}\quad u' \qquad (4)$$

$$\left(e^{u}\right)'=e^{u}\quad u' \qquad (5)$$

$$\left(a^{u}\right)'=a^{u}\ln a\quad u' \qquad (6)$$

$$\left(\ln u\right)'=\frac{1}{u}\quad u' \qquad (7)$$

$$\left(\log_{a}u\right)'=\frac{1}{u\ln a}\quad u' \qquad (8)$$

$$(\sin u)'=\cos u\quad u' \qquad (9)$$

$$(\cos u)'=-\sin u\quad u' \qquad (10)$$

$$(\mathrm{tg}\,u)' = \frac{1}{\cos^2 u}\;u' \qquad (11)$$

$$(\mathrm{ctg}\,u)' = -\frac{1}{\sin^2 u}\;u' \qquad (12)$$

$$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\;u' \qquad (13)$$

$$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\;u' \qquad (14)$$

$$(\mathrm{arctg}\,u)' = \frac{1}{1+u^2}\;u' \qquad (15)$$

$$(\mathrm{arcctg}\,u)' = -\frac{1}{1+u^2}\;u' \qquad (16)$$

Особое внимание следует обратить на правило 6 для производных сложных функций. В примере 3c) необходимо вычислить производную **неявной** функции, а в примере 3d) - производную функции, заданной в **параметрическом** виде.

(Можно использовать формулу $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$).

Пример 3. Для функции двух переменных $z=4x^2+2xy+2y^2-5x-3y+1$ найти:

a) полный дифференциал dz и вторые производные z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy};

b) производную $\dfrac{dz}{dt}$ сложной функции

$$z=f\left(x(t),y(t)\right), \text{ если } \begin{cases} x=\ln t-t, \\ y=\operatorname{arctg}\sqrt{t^3}. \end{cases}$$

c) исследовать функцию $z=4x^2+2xy+2y^2-5x-3y+1$ на экстремум;

d) составить уравнение касательной плоскости к поверхности $z=4x^2+2xy+2y^2-5x-3y+1$ в точке $(1;1;z_0)$;

e) вычислить градиент $\operatorname{grad} z\left(3;4;\right)$ и производную по направлению $\dfrac{\partial z}{\partial l}(3;4)$, где $\mathbf{l}=\overline{OM}$ - вектор-радиус точки $(3;4)$, плоского скалярного поля, заданного функцией

$z = 4x^2 + 2xy + 2y^2 - 5x - 3y + 1$.

Решение. а).Для функции нескольких переменных в отличие от функции одного аргумента путей приближения $M(x,y) \to M_0(x_0, y_0)$ бесконечно много. Поэтому изменение функции $z = f(x,y)$ следует рассматривать не вообще, а в определенном направлении. Скорости изменения функции в направлениях координатных осей характеризуются частными производными $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Частная производная по переменной x может обозначаться также символом z'_x. Частная производная по x является производной функции одного аргумента, которая возникает, если зафиксировать другой аргумент y:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)=\left.\frac{dz(x,y_0)}{dx}\right|_{x=x_0}$$

Отсюда следует, что при вычислении частных производных используются прежние правила дифференцирования и формулы таблицы производных. Например, для функции $z=x^3+2x^2y^2-\sqrt{y}+1$

имеем

$$z'_x=\left(x^3+2x^2y^2-\sqrt{y}+1\right)'_x=$$

$$=\left(x^3\right)'_x+2y^2\left(x^2\right)'_x-\left(\sqrt{y}\right)'_x+1'=3x^2+2y^2 2x-0+0,$$

$$z'_y=\left(x^3+2x^2y^2-\sqrt{y}+1\right)'_y=$$

$$=\left(x^3\right)'_y+2x^2\left(y^2\right)'_y-\left(\sqrt{y}\right)'+1'=0+2x^2 2y-\frac{1}{2\sqrt{y}}+0.$$

Полный дифференциал определен формулой $dz=z'_xdx+z'_ydy$. Поэтому, вычислив частные производные $z'_x=8x+2y-5,\quad z'_y=2x+4y-3$, сразу имеем

$$dz=(8x+2y-5)dx+(2x+4y-3)dy.$$

b). Производная сложной функции $z = f\left(x(t), y(t)\right)$

определяется равенством

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Подготовим выражения производных по t:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} - 1, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^3}\frac{3}{2}\sqrt{t}.$$

В результате получаем

$$\frac{dz}{dt} = (8x + 2y - 5)\left(\frac{1}{t} - 1\right) + (2x + 4y - 3)\frac{1}{1+t^3}\frac{3}{2}\sqrt{t}.$$

c). Исследуем функцию на экстремум. Для этого, во-первых, найдем точки, подозрительные на экстремум, из условий стационарности

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$$

Имеем алгебраическую систему:

$$\begin{cases} 8x + 2y = 5, \\ 2x + 4y = 3. \end{cases}$$

Решив систему, получили стационарную точку

функции $M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Во-вторых, проверим наличие экстремума в найденной критической точке. Вычислим вторые производные. Подсчитываем значение выражения

$\Delta(x,y)=z''_{xx}\cdot z''_{yy}-\left(z''_{xy}\right)^2$ в точке M_0:

$$z''_{xx}=(8x+2y-5)'_x=8,\quad z''_{xy}=(8x+2y-5)'_y=2,$$

$$z''_{yy}=(2x+4y-3)'_y=4.$$

$$A=z''_{xx}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=8,\quad B=z''_{xy}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=2,\quad C=z''_{yy}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=4,$$

$$\Delta(M_0)=AC-B^2=8\cdot4-2^2>0.$$

Т.к. $\Delta>0$, то M_0 - точка экстремума, причем минимума, поскольку $A>0$. Окончательно

$$z_{\min}=z\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=4\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\frac{1}{2}\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{2}\right)^2-5\frac{1}{2}-3\frac{1}{2}+1=-1.$$

d). Определим сначала третью координату точки касания

$$z_0=f(1{,}1)=4\cdot1^2+2\cdot1\cdot1+2\cdot1^2-5\cdot1-3\cdot1+1=1$$

Касательная плоскость к поверхности $z=f(x,y)$ в точке (x_0,y_0,z_0) определяется уравнением

$$z-z_0=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Учитывая значения частных производных

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_{0,}y_0)=(8x+2y-5)\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=5,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_{0,}y_0)=(2x+4y-3)\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=3,$$ получаем уравнение

касательной плоскости

$$z-1=5(x-1)+3(y-1) \text{ , или } 5x+3y-z-7=0 \text{ .}$$

е). Градиентом скалярного поля (плоского) называется вектор, у которого координаты – частные производные:

$$\operatorname{grad} z(M_0)\equiv\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right\}.$$

Вычислим значения частных производных

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_{0,}y_0)=(8x+2y-5)\Big|_{\substack{x=3\\y=4}}=27,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=(2x+4y-3)\Big|_{\substack{x=3\\y=4}}=19.$$

Получаем $\operatorname{grad} z(M_0)\equiv\{27;19\}$. Производную по направлению найдем из соотношения

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\operatorname{grad} z(M_0)\cdot\mathbf{l}^0=\{27;19\}\cdot\frac{\{3;4\}}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{27\cdot3+19\cdot4}{5}=\frac{157}{5}$$

В задаче 6 следует вычислить интегралы. Предполагается знание основных методов интегрирования и формул таблицы интеграло

Таблица интегралов

Интегралы от степенных функций:

1. $\int dx = x + c$

2. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \qquad \alpha \neq -1$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c,$ 4. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$

5. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

Интегралы от показательных функций:

6. $\int e^x dx = e^x + c$

7. $\int a^x = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$

Интегралы от тригонометрических функций:

8. $\int \cos x dx = \sin x + c$

9. $\int \sin x dx = -\cos x + c$

10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$

11. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$

Интегралы “группы 4-х”:

12. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{x-a}{x+a} \right| + c$

- “высокий логарифм”

13. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + c$

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + c$

15. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c$$ -

"длинный log"

Интеграл в примерах 6a) вычисляется непосредственным интегрированием, используя свойства линейности. Интеграл в примере 6b) решается методом подведения выражений под знак дифференциала. Если знаменатель подынтегральной функции квадратичный трехчлен, то такой интеграл относится к интегралам «группы четырех». Для приведения таких интегралов к табличным необходимо выделять в знаменателе подынтегральных дробей полные квадраты и применить далее соответствующую подстановку. Можно, также, сразу выполнить замену переменной интегрирования по такому правилу: *новая переменная интегрирования равна старой переменной интегрировании плюс половина коэффициента при первой степени старой переменной интегрирования в приведенном квадратном* *трехчлене*. Для решения примера 6c) надо применить формулу интегрирования по частям:

$$\boxed{\int udv=uv-\int vdu}.$$

В некоторых случаях требуется проинтегрировать дробно-рациональную функцию. Если дробь под интегралом неправильная, надо выделить сначала целую часть. Это можно сделать, например, с помощью приема деление многочлена на многочлен «уголком». Затем правильную дробь следует представить суммой простых дробей в соответствии с корнями знаменателя. Неизвестные вначале коэффициенты простых дробей определяются методом неопределенных коэффициентов. Интеграл 6d) решается соответствующей подстановкой. Замену переменной интегрирования необходимо выполнить и для решения примеров, содержащих радикалы. Подстановка должна быть такой, чтобы избавиться от иррациональностей. В примерах 6e), 6f) требуется вычислить определенные интегралы. Здесь необходимо знание основной формулы интегрального исчисления – формулы Ньютона-Лейбница.

Приведем образцы решений примеров задачи 9, где более детально разъясняются вышеуказанные рекомендации.

Пример 4. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{x^2}{x^6+4}dx.$$

Решение.

$$\int \frac{x^2}{x^6+4}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^6+4}dx = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(x^3\right)}{x^6+4} = \left| \begin{matrix} x^3 = t, \\ dt = 3x^2dx \end{matrix} \right| =$$

$$. = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+2^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{2} + C$$

Пример 5. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx.$$

Решение.

$$\int \frac{x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx = \int \frac{(x+1)-4}{\sqrt{4-(x+1)^2}}dx = \begin{vmatrix} x+1=t, \\ dx=dt \end{vmatrix} =$$

$$\int \frac{t-4}{\sqrt{4-t^2}}dt = \int \frac{tdt}{\sqrt{4-t^2}} - 4\int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(4-t^2\right)}{\sqrt{4-t^2}} -$$

$$-4\arcsin\frac{t}{2} + C = -\sqrt{4-(x+1)^2} - 4\arcsin\frac{x+1}{2} + C.$$

Пример 6. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx.$$

Решение.

Интегрируя по частям, имеем

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx = \begin{vmatrix} u=\arcsin x, & du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv=\dfrac{dx}{\sqrt{x+1}}, & v=2\sqrt{x+1} \end{vmatrix} = 2\sqrt{x+1}\cdot\arcsin x -$$

$$-2\int\sqrt{x+1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=2\sqrt{x+1}\cdot\arcsin x-2\int\frac{\sqrt{x+1}dx}{\sqrt{(1+x)(1-x)}}=$$

$$=2\sqrt{x+1}\cdot\arcsin x+2\int\frac{d(1-x)}{\sqrt{1-x}}=2\sqrt{x+1}\cdot\arcsin x+4\sqrt{1-x}+C.$$

Пример 7. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int\frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx.$$

Решение.

Выделяем сначала целую часть подынтегральной дроби:

$$\int\frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx.\frac{x^3+1}{x^3-x^2}=\frac{x^3-x^2+x^2+1}{x^3-x^2}=1+\frac{x^2+1}{x^3-x^2}.$$

Знаменатель правильной дроби имеет один простой корень $x=1$ и один кратный корень $x=0$.

Поэтому дробь заменим суммой простых дробей вида:

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x}.$$

Неизвестные вначале коэффициенты находим следующим образом (метод неопределенных коэффициентов). Просуммируем дроби в правой части, приводя их к общему знаменателю. Сравнивая числители дробей, справа и слева, имеем тождество

$$Ax^2+B(x-1)+Cx(x-1)\equiv x^2+1.$$

Поочередно задавая удобные значения x, составим уравнения для нахождения неизвестных коэффициентов. Пусть $x=0$, тогда $-B=1\Rightarrow\boxed{B=-1}$. Пусть $x=1$, тогда $\boxed{A=2}$. Пусть $x=-1$, тогда $A-2B+2C=2\Rightarrow\boxed{C=-1}$. Таким образом, $\dfrac{x^2+1}{x^3-x^2}=\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}$. Следовательно,

$$\int\frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx=\int\left(1+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)dx=x+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+\frac{1}{x}+C.$$

Пример 8. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int\cos^4 xdx.$$

Решение.

$$\int \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x \right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\frac{1+\cos 4x}{2} \right) dx = \int \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x \right) dx =$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Пример 9. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5} dx.$$

Решение

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5} dx = \left| \begin{array}{c} x = t^2, \\ dx = 2tdt \end{array} \right| = \int \frac{2t^2}{t+5} dt = 2\int \frac{t^2 - 25 + 25}{t+5} dt =$$

$$2\int \left(\frac{(t-5)(t+5)}{t+5} + \frac{25}{t+5} \right) dt =$$

$$=2\int(t-5)dt+50\int\frac{dt}{t+5}=(t-5)^2+50\ln|t+5|+C=$$

$$=\left(\sqrt{x}-5\right)^2+50\ln\left(\sqrt{x}+5\right)+C.$$

В задачах 6e), 6f) и 7 требуется находить определенные интегралы. Определенный интеграл вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b\equiv F(b)-F(a)}$$

Здесь $F(b)$, $F(a)$ - значения первообразной функции $f(x)$, вычисленные на концах промежутка интегрирования. Отметим, также, при использовании подстановок в определенном интеграле заменяется не только «старая» переменная интегрирования и ее дифференциал, но и границы промежутка интегрирования. Однако, обратная замена при этом не нужна. Отметим, формула интегрирования по частям для определенного интеграла принимает вид:

$$\boxed{\int_a^b u dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v du}.$$

Пример 10. Вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

Решение.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+4+1} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \begin{vmatrix} t=x+2, & dt=dx \\ t_н=2, & t_в=3 \end{vmatrix} =$$

$$= \int_2^3 \frac{dt}{(t-2)^2+4(t-2)+5} =$$

$$= \int_2^3 \frac{dx}{t^2-4t+4+4t-8+5} = \int_2^3 \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t\Big|_2^3 = \operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2.$$

Пример 11. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Решение.

Интеграл можно вычислить, применяя тригонометрическую подстановку $x = \sin t$. Однако, здесь будем использовать прием интегрирования по частям:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} u = \sqrt{1-x^2}, & du = \dfrac{-x dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx, & v = x \end{matrix} \right| =$$

$$x\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= 0 + \int_0^1 \frac{x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx + \arcsin x\Big|_0^1.$$

Итак, получено линейное уравнение для искомого интеграла:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = -\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx + \arcsin 1 - \arcsin 0.$$

$$2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} - 0.$$ Окончательно

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Часто необходимо вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость. Различают несобственные интегралы первого рода – интегралы на бесконечном промежутке и несобственные интегралы второго рода – интегралы от неограниченных функций. Эти интегралы являются обобщениями определенного интеграла: несобственный интеграл первого рода определяется как предел собственных интегралов, рассматриваемых на конечном промежутке, когда граница промежутка интегрирования устремляется в бесконечность

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Если $x = a$ - особая точка подынтегральной функции, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a-\varepsilon}^b f(x)dx.$$

В случае, когда найдена первообразная подынтегральной функции, исследование сходимости несобственных интегралов достаточно простое.

Пример 12. Вычислить несобственный интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{10}}$, или установить его расходимость.

Решение.

Это несобственный интеграл первого рода. По определению,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^{10}} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^{10}} = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{-9x^9}\Big|_1^b = \frac{1}{9} - \lim_{b\to\infty}\frac{1}{9b^9} = \frac{1}{9}.$$

Пример 13. Вычислить несобственный интеграл второго рода:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Big|_{1+\varepsilon}^2 = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\ln(1+\varepsilon)} - \frac{1}{\ln 2} = -\infty \Rightarrow$$

Интеграл расходится.

В заключение, приведем примеры решений заданий, касающихся приложений определенного интеграла.

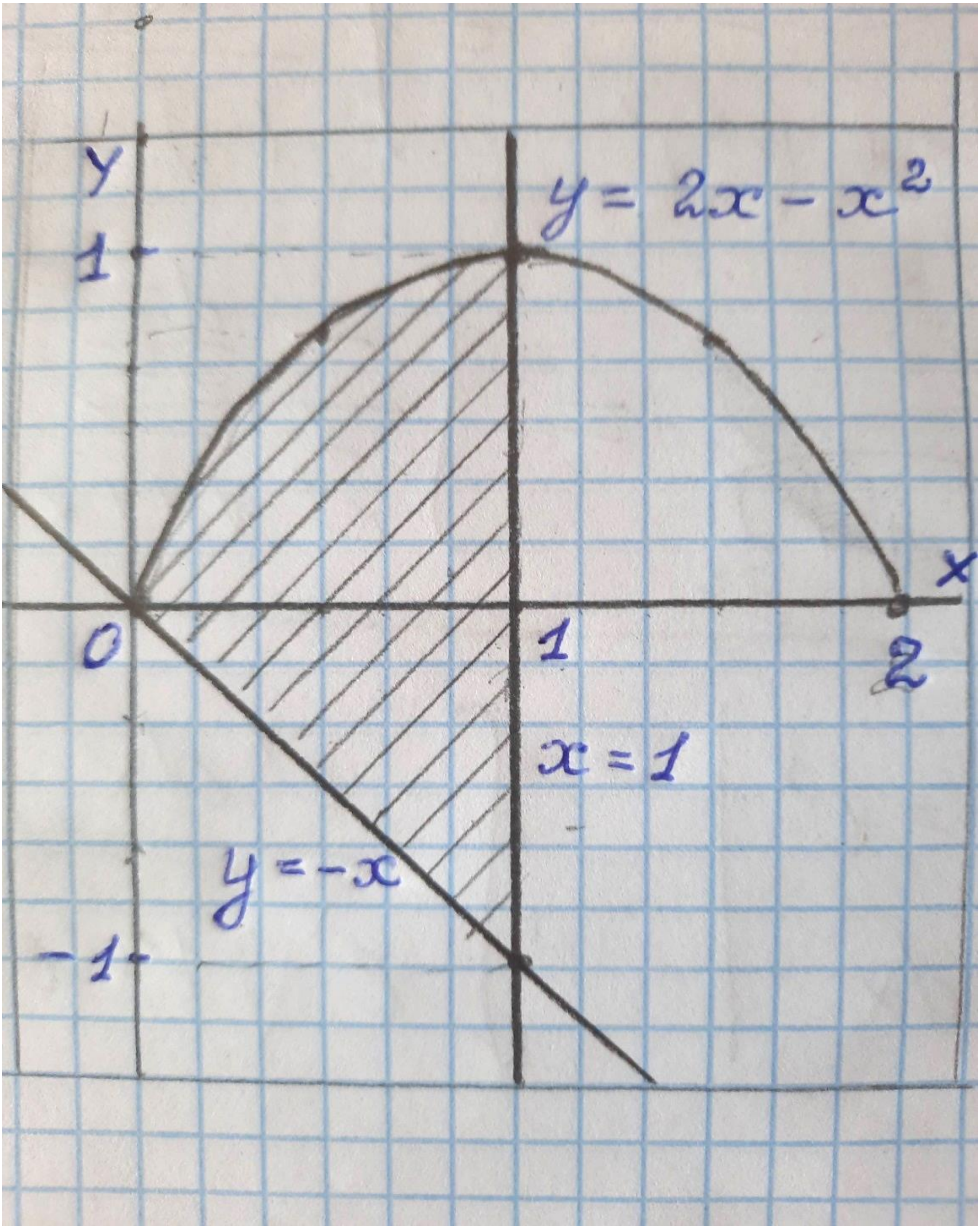
Пример 14. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями

$$y = 2x - x^2, \quad y = -x, \quad x = 1.$$

Решение.

Строим граничные линии фигуры, которую обозначаем штриховкой. Определяем точки пересечения граничных линий. Напомним, для построения прямой откладываем координаты двух точек. Чтобы построить другие линии, требуется указать хотя бы три точки, которые затем плавно соединяем непрерывной линией. Точки пересечения линий находим, решая систему, составленную из уравнений линий. Так, в данном случае точка пересечения параболы $y = 2x - x^2$ и прямой линии $y = -x$ имеет координаты

$x=0, \quad y=0$. $(1;1)$ - точка пересечения параболы и вертикальной прямой $x=1$. $(1;-1)$ - точка пересечения указанных прямых.


y
$y = 2x - x^2$
1
x
0
1
2
$x = 1$
$y = -x$
-1

Используем формулу

$S=\int\limits_a^b\left[y_1(x)-y_2(x)\right]dx$, где a, b - абсциссы точек пересечения граничных линий. $y_1(x)$ - уравнение «верхней» кривой ($y_1(x)=2x-x^2$), $y_2(x)$ - уравнение «нижней» кривой ($y_2=-x$).

$a=0,\quad b=1$. Получаем

$$S=\int\limits_0^1\left[\left(2x-x^2\right)-(-x)\right]dx=\int\limits_0^1\left(3x-x^2\right)dx=\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{3}{2}-\frac{1}{3}=\frac{7}{6}$$

Пример 15. Вычислить длину дуги плоской кривой – цепной линии $y=\operatorname{ch}x$ от точки $A(0;1)$ до точки $B\left(\ln 2;\frac{5}{4}\right)$.

Решение.

Используем формулу:

$$l_{\overset{\smile}{AB}}=\int\limits_{x_A}^{x_B}\sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx.$$

Далее,

$$y'=(\operatorname{ch}x)'=\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=\operatorname{sh}x.$$

Здесь $\operatorname{ch}x$, $\operatorname{sh}x$ - соответственно косинус и синус гиперболический. Учитывая, что

$$\sqrt{1+\left(y'\right)^2}=\sqrt{1+\frac{\left(e^{x}-e^{-x}\right)^2}{4}}=\sqrt{\frac{4+e^{2x}-2e^{x}e^{-x}+e^{-2x}}{4}}=\operatorname{ch}x$$

,

Получаем

$$l_{\overset{\smile}{AB}}=\int_0^{\ln 2}\operatorname{ch}x\,dx=\operatorname{sh}x\Big|_0^{\ln 2}=\operatorname{sh}(\ln 2)-\operatorname{sh}0=\frac{e^{\ln 2}-e^{\ln\frac{1}{2}}}{2}=\frac{3}{4}.$$

Пример 16. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линией $x^4+y^4=x^2$.

Решение.

Т.к. переменные входят в уравнение в четной степени, то фигура симметрична относительно обеих координатных осей. Поэтому можно рассмотреть вращение «четвертинки» фигуры, которая ограничена линией от точки $(0;0)$ до точки $(1;0)$ и прямой $y=0$. Объем тела вращения вокруг оси абсцисс определяется формулой $V=\pi\int_a^b y^2(x)dx$. Поскольку в данном случае $y^2=x\sqrt{1-x^2}$, то половина искомого объема определяется соотношением

$$\frac{1}{2}V=\pi\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx=-\frac{\pi}{2}\int_0^1\sqrt{1-x^2}d\left(1-x^2\right)=-\frac{\pi}{2}\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{3}.$$

Окончательно получаем $V=\frac{2}{3}\pi.$

К вычислению определенных интегралов приводятся криволинейные интегралы. Различают криволинейные интегралы 1-го рода (интегралы по дуге) и криволинейные интегралы 2-го рода (интегралы по координате). Ниже рассмотрим криволинейные интегралы 2-го рода

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy .$$

Здесь $P(x,y)$, $Q(x,y)$ - заданные функции двух переменных, а L = кривая на плоскости, где определены эти функции. Если принять, что функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ координаты переменной силы, то криволинейный интеграл – это работа, которую совершает переменная сила при перемещении точки приложения вдоль дуги кривой L:

$$\mathrm{A} = \int_L \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_L (P\mathbf{\imath} + Q\mathbf{j})\cdot(\mathbf{\imath}dx + \mathbf{j}dy) = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

.

Если кривая L задана уравнением $y=\varphi(x)$, то вычисление криволинейного интеграла проводится по формуле

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_1}^{x_2}\left[P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\varphi'(x)\right]dx$$

,

где x_1, x_2 - абсциссы точек начала и конца пути интегрирования.

Пример 17. Проверить , что переменная сила $\mathbf{F}=\{P(x,y),Q(x,y)\}$, где $P(x,y)=xy$, $Q(x,y)=y-x$ не является потенциальной. Применяя криволинейный интеграл второго рода, найти работу силового поля $\mathbf{F}$ вдоль дуги параболы $y=x^2$, проходящей через точки $O(0,0)$ и $M(1,1)$.

Решение.

Сила $\mathbf{F}=\{P(x,y),Q(x,y)\}$ называется потенциальной, если выполняется условие $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$. В данном случае имеем

$P=xy,\quad Q=y-x$ и далее

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial (xy)}{\partial y}=x,\quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial (y-x)}{\partial x}=-1\neq\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$$

, условие не выполняется.

Вычислим работу

$$A=\int_0^1\left[P\left(x,\varphi(x)\right)+Q\left(x,\varphi(x)\right)\varphi'(x)\right]dx=$$

$$=\int_0^1\left[x\cdot x^2+\left(x^2-x\right)(2x)\right]dx=\int_0^1\left[3x^3-2x^2\right]dx=\left(\frac{3}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{12}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данко П.В., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. I – М.: Высшая школа, 1986, 2003.

2. Данко П.В., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я., Данко С.П. Высшая математика в упражнениях и задачах. Мир и Образование, 2023.

3. Бермант А.Ф., Араманович А.Г.. Краткий курс математического анализа для втузов. – Лань, 2010.

4. Соболь Б.В., Мишняков Н.Т., Поркшеян В.М. Практикум по высшей математике. – Феникс, Ростов-на-Дону, 2010.