ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебное пособие

по дисциплине

«Высшая математика» Аналитическая геометрия

Автор

Ермилова О.В.

Ростов-на-Дону, 2023

Аннотация

«Учебное пособие» предназначен для студентов очной формы обучения всех технических направлений подготовки бакалавриата. Содержит теоретический материал, методические рекомендации по решению задач, типовые задачи с подробными решениями, варианты типовых заданий по разделу «Аналитическая геометрия». В пособии представлены теоретические и практические задачи с подробным решением. Пособие дополнено заданиями для самостоятельного решения, для самоконтроля все примеры приведены с ответами. Цель пособия — помочь студентам в формировании их математического мышления, в выработке практических навыков решения прикладных задач.

Авторы

ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика»
Ермилова О.В.

Оглавление

ГЛАВА1.АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Основными понятиями аналитической геометрии являются простейшие геометрические образы (точки, прямые, плоскости, кривые и поверхности второго порядка), а основными методами исследования служат метод координат и методы элементарной, векторной и линейной алгебры.

1.1. Метод координат на плоскости.

Если ввести на плоскости прямоугольную систему координат x, y с началом в некоторой точке O,то точка M в этой системе координат задаётся её координатами $M(x; y)$. Вектор $\vec{a} = (x; y)$ на плоскости представляется в виде$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$,где x, y –его координаты в ортонормированном базисе $\vec{i} = (1; 0)$, $\vec{j} = (0; 1)$.

Расстояние между точками.

Требуется найти расстояние между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ плоскости Oxy(рис.1).

Искомое расстояние d равно длине вектора $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$:

$$\boldsymbol{d} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})^2 + (\boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_1})^2} \quad (\mathbf{1.1})$$

Формула (1.1) определяет расстояние между двумя точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$.

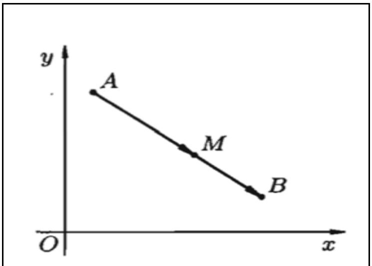

Рис.1

Деление отрезка в заданном отношении.

Требуется разделить отрезок AB, соединяющий точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ в заданном отношении $\lambda > 0$, то есть найти координаты точки $M(x; y)$ отрезка AB (см. рис.1).

Введем в рассмотрение векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$. Точка M делит отрезок AB в отношении λ , если $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$, но $\overrightarrow{AM} = (x - x_1; y - y_1)$ и $\overrightarrow{MB} = (x_2 - x; y_2 - y)$.

Учитывая, что равные векторы имеют равные координаты, получаем:

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB},$$

$$(x - x_1; y - y_1) = \big(\lambda(x_2 - x); \lambda(y_2 - y)\big) \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x) \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y)' \end{cases}$$

то есть $x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x$,

$$x(1 + \lambda) = x_1 + \lambda x_2,$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda};$$

$$y - y_1 = \lambda y_2 - \lambda y,$$

$$y(1 + \lambda) = y_1 + \lambda y_2,$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda};$$

$$\boldsymbol{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}} \quad (\mathbf{1.2})$$

Формула (1.2) называется **формулой деление отрезка AB в заданном отношении λ**.

В частности, при $\lambda = 1$, то есть при $AM = MB$, формула (1.2) принимает вид:

$$\boldsymbol{x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}} \quad (\mathbf{1.3})$$ **-координаты середины отрезка**.

В этом случае точка $M(x; y)$ является серединой отрезка AB.

Замечание: если $\lambda = 0$, то это означает, что точкиA и M совпадают;

если $\lambda < 0$, то точка M лежит вне отрезка AB.

1.2. Преобразование системы координат.

Переход от одной системы координат в какую-либо другую называется **преобразованием системы**

координат.

Рассмотрим преобразования одной прямоугольной системы координат в другую в случае параллельного переноса осей координат. Под параллельным переносом осей координат понимают переход от системы координат Oxy к новой системе $O_1x_1y_1$ при котором меняется положение начала координат, а направление осей и масштаб остаются неизменными (см.рис.2). Полученные формулы устанавливают зависимость между координатами произвольной точки плоскости в разных системах координат.

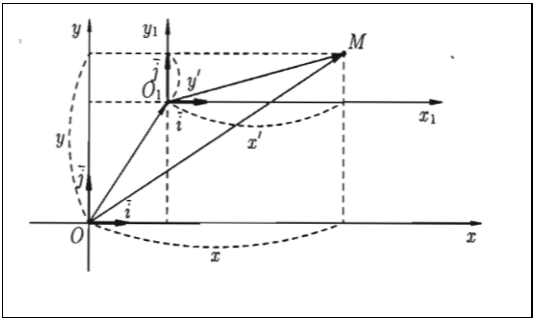

Рис.2

Пусть начало новой системы координат точка O_1 имеет координаты $(x_0; y_0)$ в старой системе координат Oxy, то есть $O_1(x_0; y_0)$. Обозначим координаты произвольной точки M плоскости в системе Oxy через $(x; y)$, а в новой системе $O_1x_1y_1$ через $(x'; y')$.

Рассмотрим векторы:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}, \overrightarrow{OO_1} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}, \overrightarrow{O_1M} = x'\vec{i} + y'\vec{j}.$$

Так как $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$, то $x\vec{i} + y\vec{j} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + x'\vec{i} + y'\vec{j}$, то есть

$$x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} = (x_0 + x') \cdot \vec{i} + (y_0 + y') \cdot \vec{j}.$$

Следовательно, $\begin{cases} \boldsymbol{x = x_0 + x'} \\ \boldsymbol{y = y_0 + y'} \end{cases}$ **(1.4)**

Полученные формулы позволяют находить старые координаты x и y по известным новым x' и y' и наоборот.

1.3. Уравнение линии на плоскости. Прямая на плоскости.

Как известно, любая точка на плоскости определяется двумя координатами в какой- либо системе координат. Системы координат могут быть различными в зависимости от выбора базиса и начала координат.

Уравнением линии (кривой) на плоскости Oxy называется уравнение

$$\boldsymbol{F(x;y)=0}\ (\mathbf{1.5}),$$

которому удовлетворяют координаты x, y каждой точки этой линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии. Переменные x и y в уравнении линии называются **текущими координатами точек** линии.

Пример 1.1. Лежат ли точки $A(-1;1)$ и $B(0;3)$ на линии $x+2y-6=0$?

Решение.

Подставив в уравнение вместо x и y координаты точки A, получим:

$-1+2\cdot1-6\neq0$, $0\neq0$, следовательно, точка A не лежит на данной линии;

Подставив в уравнение вместо x и y координаты точки B, получим:

$0+2\cdot3-6=0{,}0=0$, следовательно, точка B лежит на данной линии.

Отметим, что уравнение линии может быть задано параметрическим способом, то есть при помощи двух уравнений

$$\begin{cases}\boldsymbol{x=x(t)}\\ \boldsymbol{y=y(t)}\end{cases}\ (\mathbf{1.6}),$$

где x, y –координаты произвольной точки $M(x; y)$ лежащей на данной линии, t-переменная, называемая **параметром**-определяет положение точки $(x; y)$на плоскости. Таким образом, координаты каждой точки выражаются через некоторый независимый параметр t, например, если кривая задана параметрически уравнениями $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t^2 \end{cases}$,то значению параметра $t = 3$ соответствует на плоскости точка$(2; 9)$. Если параметр t изменяется, то точка на плоскости перемещается, описывая данную линию.

Характерный пример – траектория движущейся точки. В этом случае роль параметра играет время.

Чтобы перейти от параметрических уравнений к уравнениям вида $F(x; y) = 0$, необходимо исключить из двух уравнений параметр t.

Например, уравнения $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t^2 \end{cases}$,путём подстановки $t = x + 1$ во второе уравнение преобразуется в уравнение $y = (x + 1)^2$.

Итак, всякой линии на плоскости соответствует некоторое уравнение вида $F(x; y) = 0$.

Но есть и исключения, например, уравнению $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 0$ соответствует не линия, а точка$(-2; 3)$, так как сумма квадратов равна нулю, если $x + 2 = 0$ и $y - 3 = 0$;

уравнение $x^2 + y^2 + 5 = 0$ не определяет никакой линии, так как сумма квадратов не может быть отрицательным числом $x^2 + y^2 \neq -5$.

Уравнение прямой на плоскости.

Простейшей линией является прямая. Различным способам задания прямой соответствует в прямоугольной системе координат разные виды её уравнений.

Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка

$$\boldsymbol{Ax+By+C=0}\ \textbf{(1.7)}$$

Причем постоянные A, B не равны нулю одновременно, то есть $A^2+B^2\neq 0$,где $\bar{n}=(A;B)$-нормальный вектор прямой-любой ненулевой вектор, перпендикулярный данной прямой.

Уравнение (1.7) называют **общим уравнением прямой**.

В зависимости от значений постоянных A, B и C возможны следующие частные случаи:

1. $C=0$, $A\neq 0$, $B\neq 0$,то есть $Ax+By=0$ – прямая проходит через начало координат, так как координаты точки $O(0;0)$ удовлетворяют уравнению $Ax+By=0$;

2. $A=0$,$B\neq 0, C\neq 0$,то есть $By+C=0$ или $y=-\frac{C}{B}$- прямая параллельная оси Ox;

3. $B=0$, $A\neq 0, C\neq 0$,то есть $Ax+C=0$ или $x=-\frac{C}{A}$ – прямая параллельная оси Oy;

4. $B=C=0$, $A\neq 0$,то есть $Ax=0, x=0$ - прямая совпадает с осью Oy;

5. $A=C=0$, $B\neq 0$,то есть $By=0, y=0$ – прямая совпадает с осью Ox.

Замечание: уравнение (1.7) прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.

Найдем уравнение прямой проходящей через заданную точку $M_0(x_0;y_0)$ перпендикулярно данному ненулевому вектору $\vec{n}=(A;B)$(см.рис.3).

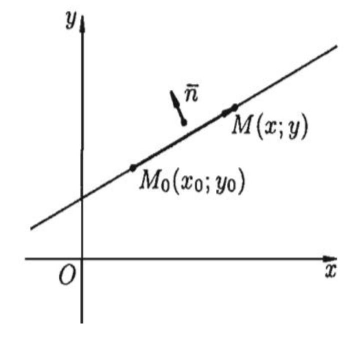

Рис.3

Возьмем на прямой произвольную точку $M(x;y)$ и рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$, так как $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$, то $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$, получим уравнение

$\boldsymbol{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0}$ **(1.8)-уравнение прямой проходящей через заданную точку** $\boldsymbol{M_0(x_0;y_0)}$**, перпендикулярно данному вектору** $\boldsymbol{\vec{n} = (A;B)}$.

Замечание: если в уравнении (1.8) раскрыть скобки $Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0$, положив $C = -Ax_0 - By_0$, так как $M_0(x_0;y_0) \epsilon l$, то $Ax_0 + By_0 + C = 0$, тогда уравнение $Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0$ можно записать в виде $Ax + By + C = 0$, где $\vec{n} = (A;B)$-называют вектором нормали (нормальный вектор) заданной прямой.

Пример 1.2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(4;-2)$, перпендикулярно вектору $\vec{n} = (-3;1)$.

Решение.

<u>1 способ:</u>

Так как $\vec{n} = (-3;1)$, то есть $A = -3, B = 1$, то уравнение будем искать в виде $-3x + y + C = 0$.

Для нахождения коэффициента C подставим в полученное выражение координаты заданной точки, имеем:

$-3 \cdot 4 - 2 + C = 0$,

$C = 14$.

Тогда искомое уравнение имеет вид:

$-3x + y + 14 = 0$ или $3x - y - 14 = 0$.

<u>2 способ:</u>

Уравнение прямой проходящей через заданную точку $M_0(x_0;y_0)$, перпендикулярно данному вектору $\vec{n} = (A;B)$, имеет вид:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0;$

В нашем случае, прямой проходящей через точку $A(4;-2)$, перпендикулярно данному вектору $\vec{n} = (-3;1)$

,уравнение принимает вид:

$A(x-x_A)+B(y-y_A)=0,$

Подставляя заданные значения имеем:

$-3(x-4)+1\big(y-(-2)\big)=0,$

$-3x+y+12+2=0|\cdot(-1),$

$3x-y-14=0.$

Векторное и параметрические уравнения прямой.

Составим уравнение прямой, проходящей через известную точку $M_0(x_0;y_0)$в заданном направлении $\vec{a}=(m;n)$. Вектор $\vec{a}$ параллельный этой прямой, называется **направляющим** вектором прямой. Возьмем на прямой произвольную точку $M(x;y)$. Обозначим радиус-векторы точек M_0 и M соответственно через $\vec{r_0}$ и $\vec{r}$. Очевидно, что векторы $\vec{r_0}$, $\vec{r}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ связаны соотношением

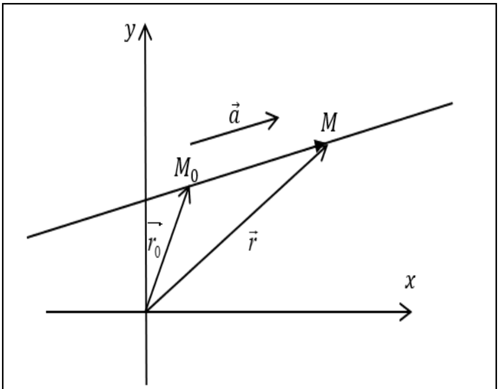

Рис.4

$\vec{r}=\vec{r_0}+\overrightarrow{M_0M}.$

Найдем координаты векторов $\vec{r}$, $\vec{r_0}$ и$\overrightarrow{M_0M}$:

$\vec{r}=\overrightarrow{OM}=(x;y),\vec{r_0}=\overrightarrow{OM_0}=(x_0;y_0),$

$\overrightarrow{M_0M}\parallel\vec{a}$,следовательно, $\overrightarrow{M_0M}=t\vec{a}$,где $t\in R,\vec{a}=(m;n).$

Отсюда, $\vec{r}=\vec{r_0}+t\vec{a}$,то $(x;y)=(x_0;y_0)+t(m;n),$

то есть$(x;y)=(x_0+tm;y_0+tn).$

Учитывая координатную форму равенства векторов, получим:

$\begin{cases} \boldsymbol{x=x_0+mt} \\ \boldsymbol{y=y_0+nt} \end{cases}$ $(\mathbf{1.9})$-**параметрические уравнения прямой на плоскости.**

Каноническое уравнение прямой.

Преобразуем параметрические уравнения прямой (1.9) $\begin{cases} x = x_0 + mt \ (1) \\ y = y_0 + nt \ (2) \end{cases}$:

$$(1)\ x = x_0 + mt \ \Rightarrow (1)\ t = \frac{x - x_0}{m};$$

$$(2)\ y = y_0 + nt \ \Rightarrow (2) t = \frac{y - y_0}{n}.$$

Очевидно, что (1) = (2) откуда получаем каноническое уравнение прямой (1.10):

$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}$ **(1.10)-каноническое уравнение прямой**, то есть уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$и имеющей направляющий вектор $\vec{a} = (m; n)$.

Замечание: уравнение (1.10) может быть получено из условия коллинеарности вектора $\vec{a} = (m; n)$ и $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$, то есть из пропорциональности соответствующих координат данных векторов (см.рис.5):

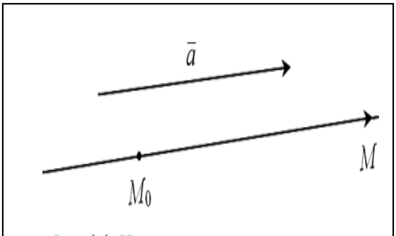

Рис.5

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{a} \Leftrightarrow \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}.$$

Пример 1.3. Найти уравнение прямой проходящей через точку $M_0(1; 2)$, с направляющим вектором $\vec{a} = (-1; 3)$.

Решение.

Уравнение прямой проходящей через заданную точку$M_0(x_0; y_0)$ параллельно вектору $\vec{a} = (m; n)$имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.$$

Подставляя наши значения получим:

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{3},$$
$$3(x-1)=-1(y-2),$$
$$3x+y-5=0$$ –уравнение искомой прямой.

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

Пусть даны две точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$ (см.рис.6), требуется написать уравнение прямой проходящей через эти точки.

Возьмем на этой прямой любую (текущую) точку $M(x;y)$и рассмотрим векторы $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;y-y_1)$и $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1)$, векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ коллинеарные, поэтому у них соответствующие координаты пропорциональны:

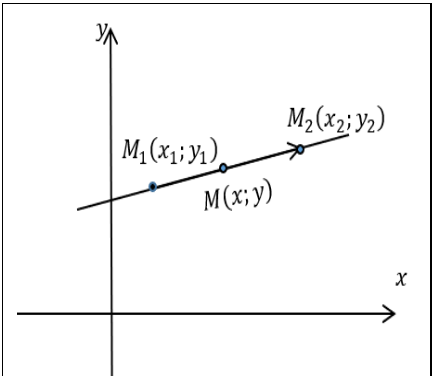

Рис.6

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad \textbf{(1.11)}$$

Уравнение (1.11) называется **уравнением прямой проходящей через две точки.**

Пример 1.4. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $A(-3;-4)$ и $B(2;-2)$.

Решение.

Применяя записанную выше формулу, получаем:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A};$$
$$\frac{x-(-3)}{2-(-3)}=\frac{y-(-4)}{-2-(-4)};$$

$$\frac{x+3}{5}=\frac{y+4}{2};$$

$2(x+3)=5(y+4)$ или

$2x-5y-14=0$ –искомое уравнение прямой.

Пример 1.5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку точки $B(1;-4)$ и начало координат.

Решение.

Уравнение искомой прямой имеет вид:

$$\frac{x-x_B}{x_O-x_B}=\frac{y-y_B}{y_O-y_B};$$

$$\frac{x-1}{0-1}=\frac{y-(-4)}{0-(-4)};$$

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+4}{4};$$

$$4(x-1)=-(y+4);$$

$$4x+y=0.$$

Пример 1.6. Даны вершины треугольника ABC: $A(4;6), B(-4;0), C(-1;-4)$. Найти уравнения сторон треугольника и высоты, опущенной из вершины B. Определить систему линейных неравенств, определяющих треугольник ABC.

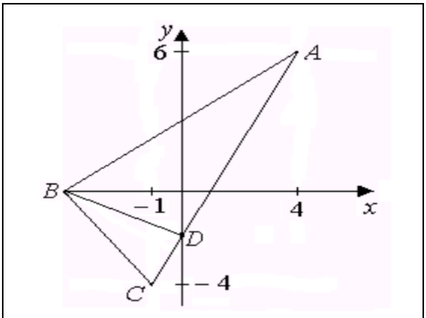

Рис.7

Решение.

Составим уравнение прямой, проходящей через точки $A(4;6)$ и $B(-4;0)$. Для этого воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A};$$

$$\frac{x-4}{-4-4}=\frac{y-6}{0-6};$$
$$\frac{x-4}{-8}=\frac{y-6}{-6};$$
$$-6(x-4)=-8(y-6)|:(-2);$$
$$3(x-4)=4(y-6);$$

$3x-4y+12=0$ – уравнение стороны AB.

Составим уравнение прямой, проходящей через точки $A(4;6), C(-1;-4)$:

$$\frac{x-x_A}{x_C-x_A}=\frac{y-y_A}{y_C-y_A};$$
$$\frac{x-4}{-1-4}=\frac{y-6}{-4-6};$$
$$\frac{x-4}{-5}=\frac{y-6}{-10};$$
$$-10(x-4)=-5(y-6)|:(-5);$$
$$2(x-4)=y-6;$$

$2x-y-2=0$ – уравнение стороны AC.

Составим уравнение прямой, проходящей через точки $B(-4;0)$ и $C(-1;-4)$:

$$\frac{x-x_B}{x_C-x_B}=\frac{y-y_B}{y_C-y_B};$$
$$\frac{x-(-4)}{-1-(-4)}=\frac{y-0}{-4-0};$$
$$\frac{x+4}{3}=\frac{y}{-4};$$
$$-4(x+4)=3y;$$

$4x+3y+16=0$ – уравнение стороны BC.

Составим уравнение высоты, опущенную из вершины B(см.рис.7). Так как высота BD перпендикулярна стороне AC , следовательно, вектор $\overrightarrow{AC}$ является нормальным вектором этой прямой $\overrightarrow{AC}=\vec{n}_{BD}=(-5;-10)$. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через точку $B(-4;0)$ с вектором нормали $\vec{n}_{BD}=(-5;-10)$:

$$-5(x+4)-10(y-0)=0|:(-5);$$

$x+4+2y=0$ или $x+2y+4=0$ –уравнение высоты BD.

Составим систему линейных неравенств, определяющих треугольник ABC . Для этого знак равенства в уравнениях, ограничивающих его прямых, заменяем на знак неравенства из тех соображений, что точка $O(0;0)$ лежит внутри треугольника:

$$\begin{cases} 4x+3y+16\geq 0 \\ 2x-y-2\leq 0 \\ 3x-4y+12\geq 0 \end{cases}.$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть дана начальная точка $M_0\,(x_0;y_0)$ прямой и её направляющий вектор

$\vec{a}=(m;n)$.

Запишем параметрические уравнение прямой:

$$\begin{cases} x-x_0=mt\;(1) \\ y-y_0=nt\;(2) \end{cases}$$

Разделив почленно второе уравнение системы на первое ($m\neq 0$), получим: $\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{n}{m}$, но $\frac{n}{m}=tg\alpha$,где α – угол, образованный прямой с положительный направлением оси абсцисс.

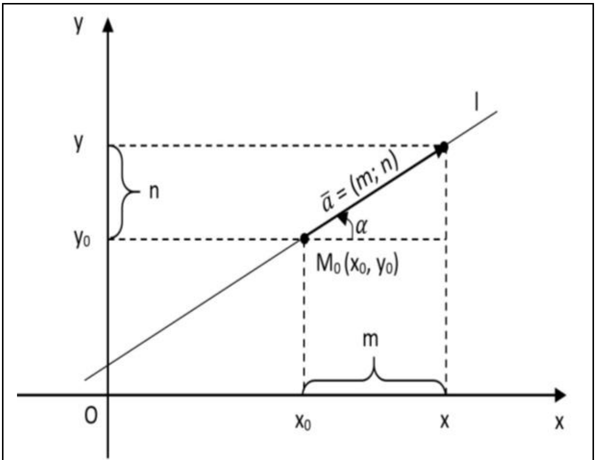

Рис.8

Число $k=tg\alpha$ - называется **угловым коэффициентом прямой**.

Заменив$\frac{n}{m}=k$, из последнего уравнения получим:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=k,$$

$\boldsymbol{y-y_0=k(x-x_0)(1.12)}$**- уравнение прямой, проходящей через точку $\boldsymbol{M_0\ (x_0;y_0)}$ с угловым коэффициентом $\boldsymbol{k}$.**

Из уравнения (1.12) получаем $y-y_0=kx-kx_0$, $y=kx+y_0-kx_0$, положим $b=y_0-kx_0$, получим уравнение:

$\boldsymbol{y=kx+b}$ **(1.13)**- уравнение прямой с угловым коэффициентом, где $k=tg\alpha$ - угловой коэффициент, b - величина отрезка, отсекаемого прямой на оси ординат.

Пример 1.7. Пусть прямая l задана общим уравнением $x-2y+3=0$. Написать уравнение прямой с угловым коэффициентом и найти угловой коэффициент прямой.

Решение.

Разрешим исходное уравнение прямой относительно y:

$$2y=x+3,$$

$y=\frac{x}{2}+\frac{3}{2}$- уравнение прямой с угловым коэффициентом, угловой коэффициент равен $k=\frac{1}{2}$.

Пример 1.8. Описать свойства уравнений прямых на плоскости, параллельных оси Ox.

Решение.

В этом случае $l\perp Oy$ и $\alpha=0$. Если прямая l задана общим уравнением $Ax+By+C=0$, то $\alpha=0, tg\alpha=0$;

С другой стороны, $tg\alpha=-\frac{A}{B}$,следовательно, $-\frac{A}{B}=0, A=0.$

Таким образом, общее уравнение любой прямой, параллельной оси Ox,имеет вид:

$By+C=0$.

Уравнение такой прямой с угловым коэффициентом имеет вид:

$y = b$,где $b = -\frac{C}{B}$.

Итак, уравнение вида$y = b$(или, в общем виде, $By + C = 0$) на плоскости описывают прямую, параллельную оси Ox и пересекающую ось Oy в точке $y = b$.

Уравнение прямой в отрезках на осях.

Пусть прямая не параллельна ни одной из координатных осей и не проходит через начало координат, то есть в уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ ни один из коэффициентов не равен нулю, прямая пересекает ось Ox в точке $M_1(a; 0)$, а ось Oy в точке $M_2(0; b)$(см.рис.9).

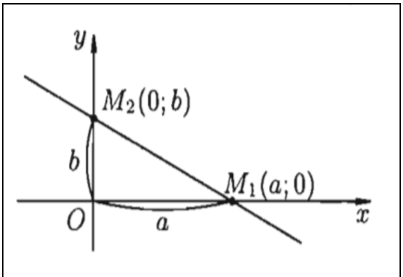

Рис.9

Поскольку прямая проходит через точки M_1, M_2,то координаты этих точек удовлетворяют уравнению прямой, подставим в общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$

координаты точек $M_1(a; 0)$, $M_2(0; b)$ и выразим коэффициенты A, B через C в уравнении прямой:

$M_1(a; 0) \epsilon l \Rightarrow A \cdot a + B \cdot 0 + C = 0,$

$A \cdot a = -C, A = -\frac{C}{a};$

$M_2(0; b) \epsilon l \Rightarrow A \cdot 0 + B \cdot b + C = 0,$

$B \cdot b + C = 0, B = -\frac{C}{b}.$

Подставляя $A = -\frac{C}{a}$ и $B = -\frac{C}{b}$ в общее уравнение прямой, имеем:

$\left(-\frac{C}{a}\right)x + \left(-\frac{C}{b}\right)y + C = 0 | : (-C)$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$,

Таким образом, уравнение прямой в отрезках имеет вид:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad (1.14)$$

Отметим, что числа a и b в уравнении (1.14) имеют простой геометрический смысл. Они равны длинам отрезков, которые отсекает прямая на осях Ox и Oy соответственно.

Замечание: направление, в котором нужно откладывать длину отрезка, определяется знаком, который стоит перед числами a и b. Знак «−» обозначает, что длину отрезка необходимо откладывать в отрицательном направлении координатной оси.

Пример 1.9. Задано общее уравнение прямой $2x-y+4=0$. Найти уравнение этой прямой в отрезках.

Решение.

Перенесём свободный член в право и разделим на него обе части уравнения:

$2x-y=-4|:(-4)$,

$\frac{x}{-2}+\frac{y}{4}=1$,

$a=-2$ –отрезок отсекаемый прямой на оси Ox,$b=4$ –отрезок отсекаемый прямой на оси Oy.

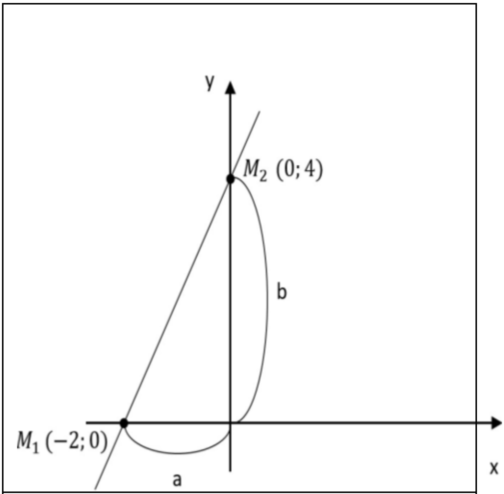

Рис.10

Нормальное уравнение прямой.

Фиксируем на плоскости систему координат, где задаем прямую с точкой A, через которую она проходит с нормальным вектором прямой $\vec{n}$. Его начало обозначено точкой O ,координатами вектора $\vec{n}$ являются $cos\alpha$ и $cos\beta$, углы которых расположены между вектором $\vec{n}$ и положительными осями Ox и Oy. Это запишется так: $\vec{n} = (cos\alpha; cos\beta)$.

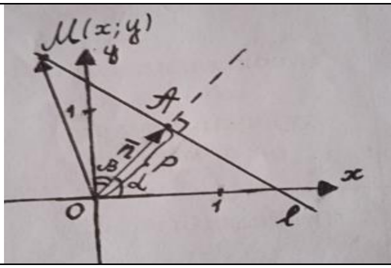

Рис.11

Прямая проходит через точку A с расстоянием равным p , ($p \geq 0$) от начальной точки при положительном направлении вектора $\vec{n}$. Если $p = 0$, тогда A считается совпадающей с точкой начала координат. Отсюда имеем, что $|\overrightarrow{OA}| = p$.

Заметим, что точка с координатами $M(x; y)$ расположена на прямой, тогда и только тогда, когда числовая проекция вектора $\overrightarrow{OM}$ по направлению вектора $\vec{n}$ равняется p , то есть

$$\text{пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{OM} = p.$$

Вектор $\overrightarrow{OM}$ является радиус-вектором точки с координатами $M(x; y)$, значит $\overrightarrow{OM}$ =$(x; y)$.

Учитывая определение скалярного произведения векторов, получим:

$$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{n} = |\overrightarrow{OM}||\vec{n}|cos\left(\widehat{\overrightarrow{OM}; \vec{n}}\right) = \text{пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{OM}|\vec{n}| = p \cdot 1 = p;$$

Тогда это же произведение будет иметь вид в координатной форме:

$$\overrightarrow{OM}\cdot\vec{n} = xcos\alpha + ycos\beta;$$

Отсюда $xcos\alpha + ycos\beta = p$, получаем искомое уравнение прямой:

$$\boldsymbol{xcos\alpha + ycos\beta - p = 0} \ \mathbf{(1.15)}$$

Уравнение вида **(1.15)** называется **нормальным уравнением прямой** или нормированным уравнением прямой. Иначе говоря, уравнение прямой в нормальном виде. Понятно, что такое уравнение представляет собой общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$, где A и Bимеют значения, при которых длина вектора $\vec{n} = (A;B)$ равна 1, а C является неотрицательным числом.

Геометрический смысл нормального уравнение прямой.

Нормальное уравнение прямой вида $xcos\alpha + ycos\beta - p = 0$ задает в системе координат на плоскости Oxy прямую с наличием нормального вектора единичной длины $\vec{n} = (cos\alpha; cos\beta)$, которая располагается на расстоянии равном p от начала координат по положительному направлению вектора $\vec{n}$.

Например, если дано уравнение прямой вида $-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 3 = 0$, то на плоскости задается прямая, у которой нормальный вектор имеет координатами $\vec{n} = \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,эта прямая удалена от начала координат на 3 единицы $(p = 3)$ по направлению, совпадающему с направлением нор-

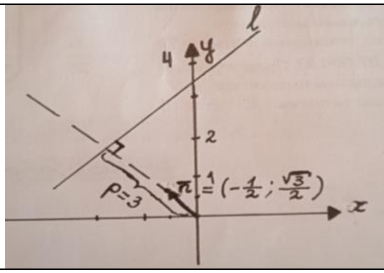

Рис.12

мального вектора $\vec{n}$ (см.рис.12).

Приведение общего уравнения прямой к нормальному виду.

Очень часто в условиях задач, решение которых подразумевает использование нормального уравнения прямой, уравнение прямой линии дается не в нормальном виде, а в каком-либо другом, поэтому встает новая задача: привести заданное уравнение прямой к нормальному виду. Сейчас мы с ней и разберемся.

Заметим, что нормальное уравнение прямой можно получить из общего уравнения прямой. Если прямая на плоскости задана иным уравнением прямой, то это уравнение следует сначала привести к общему уравнению прямой, а уже после этого приводить общее уравнение прямой к нормальному виду.

Итак, чтобы общее уравнение прямой привести к нормальному виду необходимо: обе части уравнения $Ax + By + C = 0$ умножить на число $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, так называемый нормирующий множитель.

Замечание: знак $\pm$ нормирующего множителя берется противоположным знаку слагаемого C. Если $C = 0$, то знак нормирующего множителя не имеет значения и может быть выбран произвольно.

Пример 1.10. Дано общее уравнение прямой $y = -\frac{x}{2}$. Требуется написать нормальное уравнение прямой: **а)** $4x - 3y - 1 = 0$;**б)** $y = -\frac{x}{2}$.

Решение.

а) Нам дано общее уравнение прямой, где$A = 4, B = -3, C = -1$.

Нормирующий множитель следует брать со знаком «+», так как C – отрицательное число,поэтому

$\mu = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{1}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$ -нормирующий множитель;

Умножим обе части уравнения $4x-3y-1=0$ на $\mu=\frac{1}{5}$:

$$4x-3y-1=0\left|\cdot\frac{1}{5}\right.,$$

$\frac{4x}{5}-\frac{3y}{5}-\frac{1}{5}=0$ –нормальным уравнением заданной прямой, где $cos\alpha=\frac{4}{5}, sin\beta=-\frac{3}{5}, p=\frac{1}{5}$;

б) Общее уравнение заданной прямой имеет вид:

$$y=-\frac{x}{2}|\cdot(-2);$$

$$-2y=x;$$

$$x+2y=0.$$

Так как $C=0$, то знак нормирующего множителя значения не имеет. Для удобства, возьмем нормирующий множитель со знаком «+»:$\mu=\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.После умножения на нормирующий множитель обеих частей равенства общего уравнения прямой получаем нормальное уравнение прямой:

$$x+2y=0\left|\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}\right.;$$

$\frac{\sqrt{5}}{5}x+\frac{2\sqrt{5}}{5}y=0$ – нормальное уравнение прямой.

Пример 1.11. Дано общее уравнение прямой $3x-4y+6=0$. Требуется написать уравнений этой прямой: **а)** в отрезках; **б)** с угловым коэффициентом; **в)** нормальное уравнение прямой.

Решение.

а) Уравнение прямой в отрезках имеет вид $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$,построим уравнение исходной прямой в отрезках:

$$3x-4y=-6|:(-6),$$

$$\frac{x}{-2}+\frac{y}{\frac{3}{2}}=1,$$

следует отметить, что не каждую прямую можно представить уравнением в отрезках, например, прямые, параллельные осям или проходящие через начало координат уравнением в отрезках представить нельзя.

б) Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид $y = kx + b$,приведём исходное уравнение к уравнению с угловым коэффициентом:

$$3x - 4y + 6 = 0|:4,$$

$$\frac{3}{4}x - y + \frac{3}{2} = 0,$$

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}.$$

в) Нам дано общее уравнение прямой, где$A = 3, B = -4, C = 6$.Нормирующий множитель следует брать со знаком «-», так как C – положительное число. Вычислим значение нормирующего множителя:

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = -\frac{1}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{25}} = -\frac{1}{5};$$

$$3x - 4y + 6 = 0\left|\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\right.;$$

$-\frac{3x}{5} + \frac{4y}{5} - \frac{6}{5} = 0$ –нормальное уравнение прямой.

1.4. Угол между прямыми на плоскости.

Если заданы две прямые с угловыми коэффициентами $l_1: y = k_1x + b_1$,$l_2: y = k_2x + b_2$,
где$k_1 = tg\alpha_1, k_2 = tg\alpha_2$, то острый угол между этими прямыми будет определяться по формуле:

$$\boldsymbol{tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}} \quad \textbf{(1.16)}$$

Так как, $\varphi + \alpha_1 + \pi - \alpha_2 = \pi$,то
$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$.

Из формулы тангенса суммы углов получаем:

$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \dfrac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2}$,

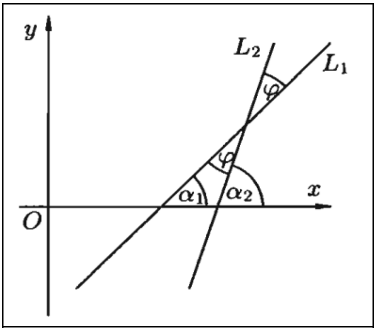

Рис.13

то есть

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

Если две прямые параллельны $l_1 \parallel l_2$, то $k_1 = k_2$.
Если две прямые перпендикулярны $l_1 \perp l_2$,
если $k_1 \cdot k_2 = -1$,то есть $k_1 = -\frac{1}{k_2}$.

Замечание:

1)если требуется вычислить острый угол между прямыми, не учитывая, какая прямая является первой, какая- второй, то правая ·часть формулы (1.16) берется по модулю, то есть

$$tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|;$$

2)если прямые заданы общими уравнениями$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$,$l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$,где $\overrightarrow{n_1} = (A_1; B_1), \overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2)$ –нормальные векторы прямых, то угол между прямыми определяется как угол между нормальными векторами, то есть

$$\boldsymbol{cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} (1.17)}$$

Очевидно, что:
$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2}$:
$\boldsymbol{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} (1.18)}$ –**условие параллельности прямых;**

$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$, то есть $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$:

$\boldsymbol{A_1A_2 + B_1B_2 = 0}$ (1.19) – **условие перпендикулярности прямых;**

3) если прямые заданы каноническими уравнениями $l_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1}$, $l_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2}$, где $\overrightarrow{a_1} = (m_1; n_1), \overrightarrow{a_2} = (m_2; n_2)$ – направляющие векторы прямых, то угол между прямыми определяется как угол между направляющими векторами, то есть

$$\boldsymbol{cos\varphi = \frac{\overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2}}{|\overrightarrow{a_1}| \cdot |\overrightarrow{a_2}|}} \quad (1.20)$$

$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{a_1} \parallel \overrightarrow{a_2}$:

$$\boldsymbol{\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}} \quad (1.21)$$

$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{a_1} \perp \overrightarrow{a_2}$, то есть $\overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2} = 0$:

$$\boldsymbol{m_1m_2 + n_1n_2 = 0} \quad (1.22)$$

Пример 1.12. Определить угол между прямыми $l_1: y = -3x + 2$, $l_2: y = 2x + 5$.

Решение.

<u>1 способ:</u>

Поскольку заданы прямые с угловыми коэффициентами $k_1 = -3, k_2 = 2$, то для нахождения угла между ними воспользуемся формулой: $tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$:

$tg\varphi = \left|\frac{2-(-3)}{1-3\cdot 2}\right| = 1$, следовательно, $\varphi = arctg1 = \frac{\pi}{4}$ - угол между прямыми.

<u>2 способ</u>:

Перейдем от уравнений прямых с угловым коэффициентов к общим уравнениям

$l_1: 3x + y - 2 = 0, \overrightarrow{n_1} = (3; 1)$,

$l_2: 2x - y + 5 = 0, \overrightarrow{n_2} = (2; -1)$, для нахождения угла между ними достаточно найти угол между их нормальными векторами $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$:

$$cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = \frac{3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{50}} =$$

$= \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, следовательно, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Пример 1.13. Определить угол между прямыми:

а) $y = 3x - 1,\ y = -2x;$

б)$3x - 4y + 1 = 0{,}4x - 3y + 7 = 0;$

в) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1}, \frac{x+3}{3} = \frac{y-3}{-5}.$

Решение.

а) Поскольку заданы прямые с угловыми коэффициентами $k_1 = 3, k_2 = -2$, то для нахождения угла между прямыми воспользуемся формулой

$$tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|:$$

$tg\varphi = \left|\frac{-2-3}{1-2\cdot3}\right| = 1$, следовательно, $\varphi = arctg1 = \frac{\pi}{4}$.

б) Поскольку прямые заданы общими уравнениями, то для нахождения угла между ними достаточно найти угол между их нормальными векторами $\overrightarrow{n_1} = (3; -4), \overrightarrow{n_2} = (4; -3)$:

$cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{3\cdot4+(-4)\cdot(-3)}{\sqrt{3^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{24}{25}$, следовательно, $\varphi = arccos\frac{24}{25}$.

в) Поскольку прямые заданы канонически, то для нахождения угла между ними достаточно найти угол между их направляющими векторами: $\overrightarrow{a_1} = (2; 2), \overrightarrow{a_2} = (0; -2)$:

$$cos\varphi = \frac{\overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2}}{|\overrightarrow{a_1}| \cdot |\overrightarrow{a_2}|} = \frac{2 \cdot 0 + 2 \cdot (-2)}{\sqrt{2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{0^2 + (-2)^2}} =$$

$= \frac{-4}{2\sqrt{8}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, следовательно, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

Пример 1.14. Показать, что прямые $6x-15y+7=0$ и $10x+4y-3=0$ перпендикулярны.

Решение.

$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$, то есть $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$.

Так как $\overrightarrow{n_1} = (6;-15), \overrightarrow{n_2} = (10;4)$,то $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 6 \cdot 10 + (-15) \cdot 4 = 0$,следовательно, прямые перпендикулярны.

Пример 1.15. Дана прямая $l: 2x-y+1=0$ и точка $A(-1;1)$. Составить: **а)** уравнение прямой l_1, проходящей через точку A параллельно прямой l ;**б)** уравнение прямой l_2, проходящей через точку A перпендикулярно прямой l.

Решение.

а)<u>1способ:</u>

Запишем заданную прямую l: $2x-y+1=0$, как прямую с угловым коэффициентом $y=2x+1$, $k=2$. Для того чтобы прямые l и l_1 были параллельны, необходимо, чтобы выполнялось условие: $k=k_1$.

Уравнение прямой l_1 с угловым коэффициентом k_1, проходящей через точку $A(-1;1)$ имеет следующий вид:

$y-y_A=k_1(x-x_A)$,

$y-1=2(x+1)$,

$2x-y+3=0$.

<u>2 способ:</u>

Поскольку искомая прямая, проходящей через данную точку $A(-1;1)$ параллельна данной прямой, то она будет перпендикулярна вектору $\vec{n} = (2; -1)$,то есть в качестве нормального вектора прямой l_1 можно взять вектор $\vec{n}$, искомое уравнение прямой имеет вид:

$$A(x - x_A) + B(y - y_A) = 0;$$
$$2(x + 1) - (y - 1) = 0;$$
$$2x - y + 3 = 0.$$

б) 1 способ:

Для того, чтобы прямые l и l_2были перпендикулярны, необходимо, чтобы выполнялось условие: $k \cdot k_2 = -1$, $k_2 = -\frac{1}{k} = -\frac{1}{2}$.

Уравнение прямой l_2 с угловым коэффициентомk_2, проходящей через точку $A(-1; 1)$ имеет вид:

$$y - y_A = k_2(x - x_A),$$
$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x + 1)| \cdot (-2),$$
$$-2y + 2 = x + 1,$$
$$x + 2y - 1 = 0.$$

2 способ:

Поскольку искомая прямая, перпендикулярна данной прямой, то она будет параллельна вектору $\vec{n} = (2; -1)$,то есть в качестве направляющего можно взять вектор $\vec{n}$, искомое уравнение имеет вид:

$$\frac{x - x_A}{A} = \frac{y - y_A}{B};$$
$$\frac{x + 1}{2} = \frac{y - 1}{-1};$$

$$-(x+1)=2(y-1);$$
$$x+2y-1=0.$$

1.5. Расстояние от точки до прямой.

Расстояние от точки до прямой – это длина перпендикуляра, проведенного из данной точки к данной прямой.

Дана точка $M_0(x_0;y_0)$ и прямая $l: Ax+By+C=0$. Требуется найти расстояние от точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ (см.рис.14). Расстояние определяется как абсолютная величина проекции вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$ на вектор $\vec{n}$, то есть $d=\left|\text{пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{M_1M_0}\right|=\frac{|\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$, где $\vec{n}=(A;B)$, $M_1(x_1;y_1)$- произвольная точка на прямой, то есть $\overrightarrow{M_1M_0}=(x_0-x_1;y_0-y_1)$ и тогда

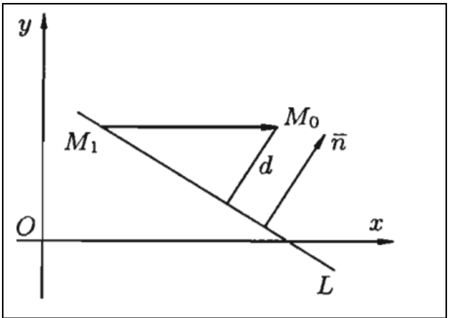

Рис.14

$d=\frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|Ax_0-Ax_1+By_0-By_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, так как $(\cdot)M_1\epsilon l$, то $Ax_1+By_1+C=0$, $C=-Ax_1-By_1$.

Таким образом,

$$\boldsymbol{d}=\frac{|\boldsymbol{Ax_0}+\boldsymbol{By_0}+\boldsymbol{C}|}{\sqrt{\boldsymbol{A^2}+\boldsymbol{B^2}}}\quad(\mathbf{1.23})$$

-расстояние от точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямой $l: Ax+By+C=0$.

Пример 1.16. Дана прямая $l: 3x+4y-22=0$ и точка $P(2;-1)$. Найти: **а)** расстояние от точки P до прямой l; **б)** проекцию точки P на прямую l; **в)** точку симметричную точке P относительно данной прямой l.

Решение.

а) Проверим, лежит ли точка P на прямой, для этого подставим координаты точки в уравнении прямой:
$3\cdot 2+4\cdot(-1)-22\neq 0$,следовательно, точка $P(2;-1)\notin l$,отсюда $d\neq 0$.
Найдём расстояние от точки P до прямой l, для этого подставим в формулу (1.23) коэффициенты прямой l и координаты точки P:

$$d=\frac{|Ax_P+By_P+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|3\cdot 2+4\cdot(-1)-22|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{20}{5}=4.$$

б) Проекция точки на прямую – это либо сама точка, если она лежит на данной прямой, либо основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на заданную прямую.
Составим уравнение прямой $l_1:(PQ)$, перпендикулярной прямой l и проходящей через точку P (рис. 15), для этого воспользуемся каноническим уравнением прямой, нормальный вектор прямой l имеет координаты $\vec{n}=(3;4)$ и является направляющим для прямой l_1,так как $\vec{n}\parallel l_1$, уравнение прямой l_1имеет вид:

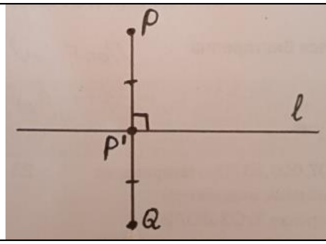

Рис.15

$$\frac{x-x_P}{A}=\frac{y-y_P}{B};$$
$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4};$$
$$4(x-2)=3(y+1);$$
$4x-3y-11=0$ – уравнение прямой l_1.
Точка P' пересечения прямых $l_1\colon 4x-3y-11=0$ и $l\colon 3x+4y-22=0$ есть проекция точки P на прямую l,найдём координаты этой точки решив систему:
$$\begin{cases}3x+4y-22=0\\ 4x-3y-11=0\end{cases};$$
Умножаем первое уравне- ние на 3, второе на 4:

$$\begin{cases}9x+12y-66=0\\16x-12y-44=0\end{cases};$$

Складываем:

$$25x=110;$$

$$x=\frac{22}{5}=4{,}4;$$

Тогда $4\cdot\frac{22}{5}-3y-11=0,$

$$3y=\frac{33}{5};$$

$$y=\frac{11}{5}=2{,}2.$$

Таким образом, проекцией точки P на прямую l является точка $P'(4{,}4;2{,}2)$.

в) Поскольку точка P' является серединой отрезка PQ, то для нахождения координат точки симметричную точке P относительно данной прямой l,то есть точкиQ, воспользуемся формулой деление отрезка AB в заданном отношении λ , при $\lambda=1$, то есть при $PP' = P'Q$ имеем:

$$x_{P'}=\frac{x_P+x_Q}{2},\qquad y_{P'}=\frac{y_P+y_Q}{2};$$

$$2x_{P'}=x_P+x_Q,\qquad 2y_{P'}=y_P+y_Q;$$

$$x_Q=2x_{P'}-x_P,\quad y_Q=2y_{P'}-y_P;$$

$$x_Q=2\cdot4{,}4-2=6{,}8,\quad y_Q=2\cdot2{,}2+1=5{,}4.$$

Итак, $Q(6{,}8;5{,}4)$.

Пример 1.17. Найти расстояние между параллельными прямыми $l_1{:}\,3x+y-2=0, l_2{:}\,y=-3x$.

.

Решение.

Для начала убедимся, что прямые $l_1{:}\,y=-3x-2=0, l_2{:}\,y=-3x$ параллельны, так как $k_1=k_2$,то $l_1\parallel l_2$.

Расстояние между двумя параллельными прямыми – это расстояние от произвольной точки одной из параллельных прямых до другой прямой.

В данном случае, для удобства, в качестве точки удобно взять точку $O(0;0)\epsilon l_2$ и найти расстояние между параллельными прямыми как расстояние от точки O до прямой $l_1: 3x + y - 2 = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 2|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{10}} =$$
$$= \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Пример 1.18. Даны вершины треугольника $A(1;-2), B(5;4), C(-2;0)$. Найти:

а) уравнение и длину стороны AB;

б) уравнение и длину медианы BM;

в) уравнение и длину высоты, проведенной из вершины C;

г) угол BAC;

д) уравнение и длину биссектрисы, проведенной из вершины A;

е) уравнение прямой, проходящей через точку C, параллельно прямой AB;

ё) уравнение прямой, проходящей через точку C, перпендикулярно прямой AB.

Решение.

а) Находим уравнение стороны AB как уравнение прямой проходящей через две точки $A(1;-2), B(5;4)$:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A};$$
$$\frac{x - 1}{5 - 1} = \frac{y - (-2)}{4 - (-2)};$$
$$\frac{x - 1}{4} = \frac{y + 2}{6};$$
$$6(x - 1) = 4(y + 2)|:2;$$
$$3(x - 1) = 2(y + 2)$$

$$3x-2y-7=0 - \text{уравнение стороны } AB;$$

Длину стороны AB найдём как длину вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2};$$

$$AB=\sqrt{(5-1)^2+\left(4-(-2)\right)^2}=\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}.$$

б) Поскольку BM медиана, то точка M является серединой отрезка BM,то есть

$$x_M=\frac{x_A+x_C}{2};\, y_M=\frac{y_A+y_C}{2};$$

$$x_M=\frac{1-2}{2}=-\frac{1}{2};\, y_M=\frac{-2+0}{2}=-1, \text{то есть } M\left(-\frac{1}{2};-1\right),$$

$$BM\colon \frac{x-x_B}{x_M-x_B}=\frac{y-y_B}{y_M-y_B};$$

$$\frac{x-5}{-\frac{1}{2}-5}=\frac{y-4}{-1-4};$$

$$\frac{x-5}{-\frac{11}{2}}=\frac{y-4}{-5};$$

$$-5(x-5)=-\frac{11}{2}(y-4)|:(-2);$$

$$10(x-5)=11(y-4);$$

$$10x-11y-11=0 \text{- уравнение стороны } BM.$$

в) Найдём уравнение высоты CH:

На высоте возьмем текущую точку $H(x;y)$ и образуем текущий вектор $\overrightarrow{CH}$.

Так как $\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,учитывая, что $\overrightarrow{CH}=(x+2;y),\overrightarrow{AB}=(4;6)$, то:

$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=4\cdot(x+2)+6\cdot y=0;$$

$$4x+6y+8=0|:2;$$

$$2x+3y+4=0 - \text{уравнение высоты } CH.$$

Найдём длину высоты CH:

Длину высоты CH можно рассматривать как расстояние от точки $C(-2;0)$ до прямой AB, уравнение прямой AB найдено в пункте 1) $AB\colon 3x-2y-7=0$.

Подставляя известные данные в формулу $d = CH = \frac{|Ax_C+By_C+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ имеем:

$$d = \frac{|3\cdot(-2)+(-2)\cdot 0-7|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \frac{13\sqrt{13}}{13} = \sqrt{13}.$$

г) Угол BAC –это угол между векторами $\overrightarrow{AB} = (4;6)$ и $\overrightarrow{AC} = (-3;2)$,поэтому

$cos < BAC = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{4\cdot(-3)+6\cdot 2}{2\sqrt{13}\sqrt{13}} = 0$,следовательно, $< BAC = 90^0$.

д) Для нахождения уравнения и длины биссектрисы найдем точку пересечения биссектрисы AK и стороны BC -точки K. Зная координаты двух точек A и K найдем длину искомого отрезка по формуле:

$$AK = \sqrt{(x_K-x_A)^2+(y_K-y_A)^2};$$

Для нахождения точки пересечения воспользуемся свойством биссектрисы угла треугольника: биссектриса внутреннего угла треугольника делит сторону, к которой она проведена, на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, то есть в нашем случае $\frac{CK}{KB} = \frac{AC}{AB} = \lambda$.

Таким образом, мы найдем коэффициент λ, а затем найдем координаты точки K, воспользовавшись формулой деления отрезка в заданном отношении λ:

$$x_K = \frac{x_C+\lambda x_B}{1+\lambda}, y_K = \frac{y_C+\lambda y_B}{1+\lambda};$$

Длину отрезка AB мы уже находили смотри пункт 1): $AB = 2\sqrt{13}$.

При известных координатах концов отрезка AC, $A(1;-2), C(-2;0)$ найдем длину отрезка AC:

$$AC = \sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2} = \sqrt{(-3)^2+2^2} = \sqrt{13}.$$

Таким образом, $\lambda = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{13}} = \frac{1}{2}$,тогда

$$x_K = \frac{-2 + \frac{1}{2} \cdot 5}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3};$$

$$y_K = \frac{0 + \frac{1}{2} \cdot 4}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}.$$

При известных координатах точек $A(1;-2)$, $K\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$ найдем уравнение биссектрисы и длину искомого отрезка AK- длину биссектрисыAK:

$$AK: \frac{x - x_A}{x_K - x_A} = \frac{y - y_A}{y_K - y_A};$$

$$\frac{x - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{y - (-2)}{\frac{4}{3} - (-2)};$$

$$\frac{x - 1}{-\frac{2}{3}} = \frac{y + 2}{\frac{10}{3}};$$

$$\frac{10}{3}(x - 1) = -\frac{2}{3}(y + 2) | \cdot 3;$$

$$10(x - 1) = -2(y + 2);$$

$10x + 2y - 6 = 0$- уравнение стороны AK.

$$AK = \sqrt{(x_K - x_A)^2 + (y_K - y_A)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{4}{3} + 2\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{4+100}{3^2}} = \frac{\sqrt{104}}{3}$$ –длина биссектрисы AK.

е) Поскольку искомая прямая параллельна прямой AB,то в качестве направляющего можно взять вектор $\overrightarrow{AB} = (4;6)$.

Согласно уравнению прямой, проходящей через точку (в нашем случае $C(-2;0)$) параллельно данному вектору (в нашем случае $\overrightarrow{AB}=(4;6)$) имеем:

$$\frac{x-x_C}{m}=\frac{y-y_C}{n};$$

$$\frac{x-(-2)}{4}=\frac{y-0}{6};$$

$$6(x+2)=4y|:2;$$

$$3(x+2)=2y;$$

$3x-2y+6=0$ –уравнение прямой проходящей через точку $C(-2;0)$,параллельно прямой AB.

ё) Поскольку искомая прямая перпендикулярна прямой AB,то в качестве нормального вектора можно взять вектор $\overrightarrow{AB}=(4;6)$.

Согласно уравнению прямой, проходящей через точку (в нашем случае $C(-2;0)$) перпендикулярно данному вектору (в нашем случае $\overrightarrow{AB}=(4;6)$) имеем:

$$A(x-x_C)+B(y-y_C)=0;$$

$$4\big(x-(-2)\big)+6(y-0)=0|:2;$$

$$2(x+2)+3y=0;$$

$2x+3y+4=0$ –уравнение прямой проходящей через точку $C(-2;0)$, перпендикулярно прямой AB.

1.Задания для самостоятельного решения.

1.Дана прямая$2x+3y+4=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;1)$:**а)** параллельно данной прямой; **б)** перпендикулярно данной прямой.

2.Найти проекцию точки $P(-5;13)$ относительно прямой $4x-5y+3=0$.

3.Найти точкуQ , симметричную точке $P(-5;13)$ относительно прямой $2x-3y-3=0$.

4. Составить уравнение прямой l, параллельной двум данным прямым l_1: $3x-2y-1=0$, l_2: $3x-2y-13=0$ и проходящей посередине между ними.

5.Даны две точки $P(2;3), Q(-1;0)$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку Q перпендикулярно к отрезку PQ.
6.Составить уравнения сторон и медиан треугольника с вершинами $A(3;2), B(5;-2), C(1;0)$.
7.Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых l_1 и l_2, $l_1{:}\,5x-y+10=0, l_2{:}\,8x+4y+9=0$ параллельно прямой $x+3y=0$.
8.Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $l_1{:}\,2x+3y+8=0$ и $l_2{:}\,x-4y+5=0$ и через точку $K(-2;3)$.
9. Дана прямая $l{:}\,x+2y-4=0$ и точка $P(5;7)$. Найти: **а)** P' – проекцию точки P на прямую l; **б)** точку Q симметричную точке P относительно данной прямой l.
10. Дана прямая $l{:}\,2x+3y+4=0$ и точка $A(2;1)$. Составить: **а)** уравнение прямой l_1, проходящей через точку A параллельно прямой l ; **б)** уравнение прямой l_2, проходящей через точку A перпендикулярно прямой l.
11.Доказать параллельность прямых $l_1{:}\,x-2y-4=0$ и $l_2{:}\,2x-4y+3=0$.
12.Доказать перпендикулярность прямых $l_1{:}\,3x-2y+7=0$ и $l_2{:}\,2x-4y+3=0$.
13. Определить угол φ между прямыми:
а) $l_1{:}\,5x-y+7=0$ и $l_2{:}\,3x+2y=0$;
б) $l_1{:}\,3x+2y-1=0$ и $l_2{:}\,5x-2y+3=0$;
в) $l_1{:}\,y=2x-1$ и $l_2{:}\,y=-3x+1$.
14.Дана прямая $2x+3y+4=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;\,1)$ под углом 45^0 к данной прямой.
15.Две стороны квадрата лежат на прямых
$l_1{:}\,5x-12y-65=0,\ l_2{:}\,5x-12y+26=0$.
Вычислить его площадь.
16.Даны уравнения сторон прямоугольника

l_1: $2x-3y+5=0$, $l_2: 3x+2y-7=0$ и одна из его вершин $A(2;-3)$.Составить уравнения двух других сторон прямоугольника.

17. Даны вершины треугольника $A(-2;0), B(2;4), C(4;0)$. Найти: **а)** уравнение высоты AD;**б)** уравнение и длину медианы AE.

18.Даны вершины треугольника $A(1;0), B(2;3), C(3;1)$. Найти длину высоты, проведенной из вершины B.

19.Составить уравнения биссектрисы острого угла между прямыми $x-7y-1=0$ и $x+y+7=0$.

.

20. Найти уравнение стороны BA и высотой BD треугольника ABC и угол между ними.

Ответы:

1.1.а)$2x+3y-7=0$;**б)**$3x-2y-4=0$. **1.2.**$P'(-2;-1)$. **1.3.**$Q(11;-11)$.**1.4.**$3x-2y-7=0$.**1.5.**$x-y+1=0$. **1.6.**$AB: 2x+y+8=0$;$AE_{BC}: x-3=0$; $BC: 2x+4y+2=0$; $BE_{AC}: x+y-3=0$;$AC: x-y-1=0$;$CE_{AB}: y=0$. **1.7.**$x+3y-2=0$. **1.8.** $5x+13y-29=0$. **1.9.а)**$P'(2;1)$;**б)**$Q(-1;-5)$. **1.10. а)** $2x+3y-7=0$; **б)**$3x-2y-4=0$.**1.13. а)**$\varphi=45^0$;**б)** $\varphi=arccos\frac{11}{\sqrt{13}\sqrt{29}}$; **в)**$\varphi=45^0$.**1.14.**$x-5y+3=0$.**1.15.**49. **1.16.**$3x+2y=0, 2x-3y-13=0$. **1.17. а)**$AD: x-2y+2=0$;**б)**$AE: x-5y+3=0$, $AE=\sqrt{29}$.**1.18.** $BH=\sqrt{5}$.**1.19.**$x+3y+9=0$. **1.20.** $BA: 3x-4y+12=0, BD: x+2y+4=0$, $\varphi\approx 63{,}4^0$.

ГЛАВА 2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

2.1. Уравнение поверхности и линии в пространстве.

Свойство общее для всех точек поверхности, можно записать в виде уравнения, связывающего координаты всех точек поверхности. Любое уравнение, связывающее координаты x, y, z любой точки поверхности, является уравнением этой поверхности.

Уравнением данной поверхности в прямоугольной системе координат $Oxyz$ называется такое уравнение $F(x; y; z) = 0$ с тремя переменными x, y, z ,которому удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на поверхности. Таким образом, уравнение

$$\boldsymbol{F(x;y;z)=0}\textbf{(2.1)}$$

определяет некоторую поверхность.

Например, уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$определяет сферу радиуса R с центром в точке$O(0; 0; 0)$, то есть геометрическое место всех точек пространства, находящихся от точкиO на расстоянии R.

Замечание: в отдельных случаях уравнение $F(x; y; z) = 0$ может определять точку, например, уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ определяет точку $O(0; 0; 0)$; либо не определять никакой геометрический образ, например, уравнение $3x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ не определять никакой геометрический образ, так как сумма квадратов действительных чисел не может быть отрицательна,то есть

$$3x^2 + y^2 + z^2 \neq -1.$$

Уравнение (2.1) называется **уравнением линии в пространстве**. Переменные x, y, z в уравнении поверхность называются **текущими координатами точек поверхности.**

2.2. Уравнение плоскости в пространстве.

Простейшей поверхностью является плоскость. Плоскость в пространстве можно задать различными способами. Каждому из них соответствует определённый вид её уравнения.

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно данному вектору.

Пусть в пространстве $Oxyz$ задана точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ принадлежащей плоскости α и вектор $\vec{n}=(A;B;C)$ перпендикулярный плоскости, напишем уравнение данной плоскости. Для этого возьмём на плоскости точку $M(x;y;z)$ и построим вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$.

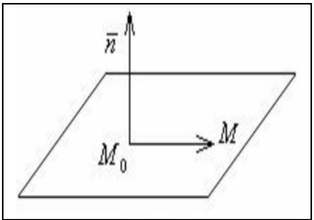

Рис.16

Так как вектор $\vec{n}$ - вектор нормали (вектор, который перпендикулярен плоскости, то есть любому объекту, находящемуся в плоскости), следовательно, перпендикулярен и вектору $\overrightarrow{M_0M}$:

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \Leftrightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0,$$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.0$$

Таким образом, **уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору нормали $\vec{n}=(A;B;C)$ имеет вид:**

$$\boldsymbol{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0} \quad \textbf{(2.2)}$$

Пример 2.1. Составить уравнение плоскости α_1, проходящей через точку $M_0(1;2;-3)$ параллельно плоскости $\alpha: 2x-y+5z-1=0$.

Решение.

Выпишем нормаль к плоскости α, то есть вектор перпендикулярный данной плоскости: $\vec{n}=(2;-1;5)$. Так как необходимо построить плоскость параллельную данной, то можно использовать вектор $\vec{n}$ в качестве нормали к искомой плоскости α_1. Составляем уравнение плоскости α_1 по точке M_0 и нормали $\vec{n}$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0;$$

$$2(x-1)-(y-2)+5(z+3)=0;$$

$2x-y+5z+15=0$ – уравнение искомой плоскости.

Пример 2.2. Найти уравнение плоскости, зная, что точка $P(4;-2;-1)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

Решение.

Находим координаты вектора нормали $\overrightarrow{OP}=(4;-2;-1)$. Искомое уравнение плоскости имеет вид: $4x-2y-z+D=0$. Для нахождения коэффициента D подставим в уравнение координаты точки P:

$4\cdot 4-2\cdot(-2)-(-1)+D=0;$

$16+4+1+D=0;$

$D=-21;$

Итак, $4x-2y-z-21=0$ – уравнение искомой плоскости.

Пример 2.3. В треугольнике с вершинами в точках $A_1(-5;2;7)$, $A_2(2;0;-5)$, $A_3(0;-2;1)$ проведена медиана A_1M_0. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно медиане A_1M_0.

Решение.

В качестве нормального вектора плоскости можно взять вектор $\overrightarrow{A_1M_0}$. Определим его координаты, для этого найдём координаты точки M_0— середины отрезка $A_2\ A_3$:

$$x_0=\frac{x_2+x_3}{2};\ y_0=\frac{y_2+y_3}{2};\ z_0=\frac{z_2+z_3}{2};$$

$$x_O = \frac{2+0}{2} = 1; y_O = \frac{0-2}{2} = -1;\ z_O = \frac{-5+1}{2} = -2,$$

Итак, $M_0(1;-1;-2)$, тогда нормальный вектор искомой

плоскости имеет следующие координаты:

$\vec{n} = \overrightarrow{A_1M_0} = (1-(-5);-1-2;-2-7) = (6;-3;-9)$.

Таким образом, уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно медиане A_1M_0 имеет вид:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0;$$

$$6(x-1) - 3(y+1) - 9(z+2) = 0 \Big| \cdot \frac{1}{3};$$

$$2(x-1) - (y+1) - 3(z+2) = 0;$$

$$2x - y - 3z - 9 = 0.$$

Общее уравнение плоскости.

Рассмотрим уравнение первой степени с тремя переменными x, y и z:

$$\boldsymbol{Ax + By + Cz + D = 0}\ \textbf{(2.3)},$$

где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$,то есть хотя бы одно из действительных чисел A, B, C не равно нулю, A, B, C координаты вектора $\vec{n} = (A; B; C)$-вектор нормали к плоскости. Уравнение (2.3) называется **общим уравнением плоскости**.

Полагая, например, что $B \neq 0$,перепишем уравнение (2.3) в виде

$$A(x-0)+B\left(y+\frac{D}{B}\right)+C(z-0)=0 \quad (2.4)$$

Сравнивая уравнение (2.4) с уравнением (2.2), получим, что уравнение (2.4) является уравнением плоскости, проходящей через точку $M_1\left(0;-\frac{D}{B};0\right)\perp\vec{n}=(A;B;C)$.

Таким образом, уравнение (2.3) определяет в системе координат некоторую плоскость.

Возможны следующие частные случаи общего уравнения плоскости:

1)$A=0$, $By+Cz+D=0$ – плоскость параллельна оси Ox;

2)$B=0$, $Ax+Cz+D=0$ – плоскость параллельна оси Oy;

3)$C=0$, $Ax+By+D=0$ плоскость параллельна оси Oz;

4)$D=0$, $Ax+By+Cz=0$ – плоскость проходит через начало координат;

5)$A=B=0, Cz+D=0$ – плоскость параллельна плоскости Oxy;

6)$A=C=0, By+D=0$ – плоскость параллельна плоскости Oxz;

7)$B=C=0, Ax+D=0$ – плоскость параллельна плоскости Oyz;

8)$A=D=0$,$By+Cz=0$ – плоскость проходит через ось Ox;

9)$B=D=0, Ax+Cz=0$ – плоскость проходит через ось Oy;

10)$C=D=0$, $Ax+By=0$ – плоскость проходит через ось Oz;

11)$A=B=D=0, Cz=0, z=0$ – плоскость совпадает с плоскостью Oxy;

12)$A=C=D=0, By=0, y=0$ – плоскость совпадает с плоскостью Oxz;

13)$B=C=D=0, Ax=0, x=0$ – плоскость совпадает с плоскостью Oyz.

Приведём примеры построения некоторых плоскостей, например 3),1),2),5)-7):

3) Уравнение плоскости параллельной оси Oz- $Ax + By + D = 0$ можно представить в виде $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$,где

a –отрезок, отсекаемый плоскостью от оси Ox, b –отрезок, отсекаемый плоскостью от оси Oy(см.рис.17)

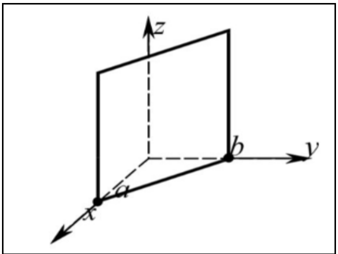

Рис.17

Действительно,

$Ax + By = -D|:(-D)$,

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} = 1,$$

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} = 1,$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \text{где } a = -\frac{D}{A}; b = -\frac{D}{B}.$$

Размышляя аналогично для 1) и 2) случая соответственно имеем:

Уравнение плоскости параллельной оси Ox: $By + Cz + D = 0$ можно представить в виде $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$,где

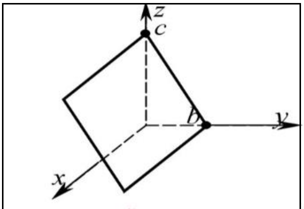

Рис.18

b –отрезок, отсекаемый плоскостью от оси Oy, c –отрезок, отсекаемый плоскостью от оси Oz(см. рис.18);

Уравнение плоскость параллельна оси Oy: $Ax + Cz + D = 0$ можно представить в виде $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1$,где

a –отрезок, отсекаемый плоскостью от оси Ox, c –отрезок, отсекаемый плоскостью от оси Oz(см. рис.19);

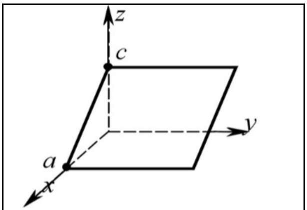

Рис.19

Таким образом, плоскость в уравнении которой отсутствует одна из координат, параллельна оси отсутствующей в уравнении координаты.

5)Уравнение плоскости параллельной плоскости Oxy: $Cz + D = 0$ можно представить в виде $\frac{z}{c} = 1$, где c –отрезок, отсекаемый плоскостью от оси Oz(см. рис.20 нижний справа);

6)Уравнение плоскости параллельной плоскости Oxz: $By + D = 0$ можно представить в виде $\frac{y}{b} = 1$,где b –отрезок, отсекаемый плоскостью от оси Oy(см. рис.20 нижний слева);

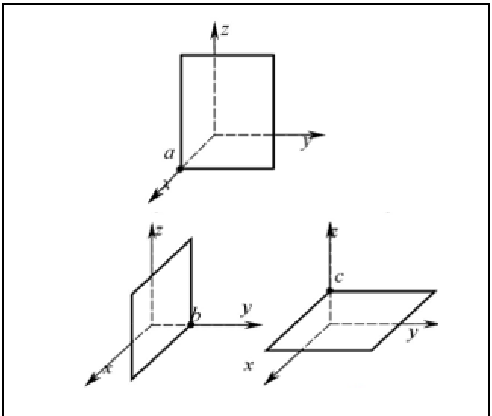

Рис.20

7)Уравнение плоскости параллельной плоскости Oyz: $Ax + D = 0$ можно представить в виде $\frac{x}{a} = 1$,где a –отрезок, отсекаемый плоскостью от оси Ox(см. рис.20 -верхний).

Пример 2.4. Составить уравнения плоскости, проходящей через: **а)** ось Oz и точку $K(-1; 2; 3)$;**б)** точку K

параллельно плоскости Oxy.

Решение.

а) Поскольку плоскость проходит через ось Oz,то

её уравнение будем искать в виде:

$Ax + By = 0;$

Так как плоскость проходит через точку K,то координаты этой точки удовлетворяют уравнению искомой плоскости:

$$A \cdot (-1) + B \cdot 2 = 0, A = 2B.$$

Подставляя $A = 2B$ в уравнение $Ax + By = 0$ имеем:

$$2Bx + By = 0 | : B;$$

$2x + y = 0$ –уравнение искомой плоскости.

б) Уравнение плоскости, параллельной плоскости Oxy, имеет вид: $Cz + D = 0;$

Подставляя в него координаты точки $K(-1; 2; 3)$, получим:

$$3C + D = 0; D = -3C;$$

Подставляя $D = -3C$ в уравнение $Cz + D = 0$, получим:

$$Cz - 3C = 0 | : C; z - 3 = 0.$$

Пример 2.5. Найти уравнение плоскости, параллельной оси Oz и проходящей через точки $M_1(1;2;2)$, $M_2(2;-2;-3)$.

Решение.

Так как плоскость параллельна оси Oz, то в её общем уравнении плоскости отсутствует координата z, то есть искомое уравнение имеет вид:

$$Ax + By + D = 0;$$

Если плоскость проходит через данную точку, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению плоскости. Подставляя координаты точек M_1 и M_2 в уравнение $Ax + By + D = 0$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} A + 2B + D = 0 \\ 2A - 2B + D = 0 \end{cases};$$

Складываем уравнения, получаем:

$$3A + 2D = 0 | : 3;$$

$$A = -\frac{2D}{3};$$

Отнимая от первого уравнения системы второе имеем:

$$-A + 4B = 0;$$

$$A = 4B, \text{ то есть } 4B = -\frac{2D}{3} \,|: 4;$$

$$B = -\frac{D}{6};$$

Подставляя $A = -\frac{2D}{3}$ и $B = -\frac{D}{6}$ в уравнение

$Ax + By + D = 0$,получим:

$$-\frac{2D}{3}x - \frac{D}{6}y + D = 0 \Big| \cdot \left(-\frac{6}{D}\right);$$

$4x + y - 6 = 0 -$ уравнение искомой плоскости.

Пример 2.6. Найти уравнение плоскости, перпендикулярной оси Ox и проходящей через точку$M_1(3;1;1)$.

Решение.

Так как плоскость перпендикулярна оси Ox, то она параллельна плоскости Oyz и потому ее уравнение имеет вид: $Ax + D = 0$.

Подставляя в это уравнение координаты точки $M_1(3;1;1)$, получаем:

$$3A + D = 0;$$

$$D = -3A.$$

Подставляя значение $D = -3A$ в уравнение плоскости $Ax + D = 0$ и делим обе его части на A , получаем уравнение искомой плоскости:

$Ax - 3A = 0|:A;$

$x - 3 = 0 -$ уравнение искомой плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки.

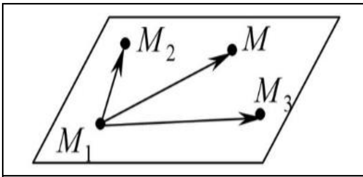

Рис.21

Как известно, три точки, не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость.

Найдем уравнение плоскости α,

проходящей через три данные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$не лежащие на одной прямой (см. рис.21).

Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x;y;z)$ и построим векторы

$$\overrightarrow{M_1M} = (x-x_1;y-y_1;z-z_1),$$
$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1),$$
$$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1)$$

Для того, чтобы произвольная точка лежала в одной плоскости с точками M_1, M_2, M_3 необходимо, чтобы векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ были компланарны.

Используя условие компланарности трех векторов (их смешанное произведение равно нулю) имеем:

$$\overrightarrow{M_1M}\ \overrightarrow{M_1M_2}\ \overrightarrow{M_1M_3} = 0$$

То есть,

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x-x_1} & \boldsymbol{y-y_1} & \boldsymbol{z-z_1} \\ \boldsymbol{x_2-x_1} & \boldsymbol{y_2-y_1} & \boldsymbol{z_2-z_1} \\ \boldsymbol{x_3-x_1} & \boldsymbol{y_3-y_1} & \boldsymbol{z_3-z_1} \end{vmatrix} = \boldsymbol{0} \quad \textbf{(2.5)}$$

Таким образом, уравнение (2.5) определяет плоскость, проходящую через три точки.

Пример 2.7. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(1;2;-1)$, $M_2(2;4;0)$, $M_3(3;6;5)$.

Решение.

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки M_1, M_2, M_3 записывается следующим образом:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0, \text{ так как}$$

$\overrightarrow{M_1M} = (x-1;y-2;z+1)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (1;2;1)$, $\overrightarrow{M_1M_3} = (2;4;6)$,то уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0 \text{ или}$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + (z+1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 8(x-1) - 4(y-2) = 8x - 4y = 0,$$

$$8x - 4y = 0|:4\,,$$

$$2x - y = 0.$$

Итак, $2x - y = 0$ –искомое уравнение плоскости.

Уравнение плоскости по двум точкам и вектору, коллинеарному плоскости.

Пусть заданы точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ лежащие в плоскости и вектор $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$(см. рис.22).

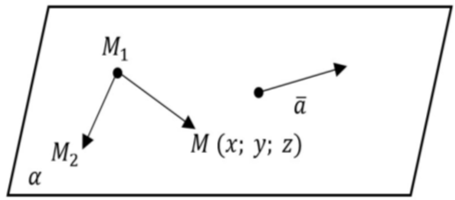

Рис.22

Составим уравнение плоскости, проходящей через данные точки M_1 и M_2 параллельно вектору $\vec{a}$.Для этого возьмем на плоскости произвольную точку $M(x; y; z)$ и составим векторы

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Поскольку вектор $\vec{a}$ параллелен искомой плоскости, то он должен лежать в ней, следовательно векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}$ компланарны, то есть

$$\overrightarrow{M_1M}\ \overrightarrow{M_1M_2}\ \overrightarrow{a} = 0$$

Таким образом, уравнение искомой плоскости имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x-x_1} & \boldsymbol{y-y_1} & \boldsymbol{z-z_1} \\ \boldsymbol{x_2-x_1} & \boldsymbol{y_2-y_1} & \boldsymbol{z_2-z_1} \\ \boldsymbol{a_x} & \boldsymbol{a_y} & \boldsymbol{a_z} \end{vmatrix} = \mathbf{0}\ \mathbf{(2.6)}$$

Пример 2.8. Написать уравнение плоскости, проходящей через две точки $M_1(1;1;-1)$, $M_2(2;-3;0)$, параллельно вектору $\vec{a}=(2;1;-1)$.

Решение.

Уравнение плоскости, проходящей через две точки M_1, M_2 параллельно вектору $\vec{a}$ записывается следующим образом:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}=0;$$

Так как $\overrightarrow{M_1M}=(x-1;y-1;z+1)$, $\overrightarrow{M_1M_2}=(1;-4;1)$, $\vec{a}=(2;1;-1)$,то уравнение искомой плоскости определяется следующим равенством:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}+(z+1)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=3(x-1)+3(y-1)+9(z+1)=0,$$

$$(x-1)+(y-1)+3(z+1)=0,$$

$$x+y+3z+1=0.$$

Уравнение плоскости по одной точке и двум векторам, коллинеарным плоскости.

Пусть дана точка $M_1(x_1;y_1;z_1)\in\alpha$ и два вектора $\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)$, $\vec{b}=(b_x;b_y;b_z)$ коллинеарные плоскости.

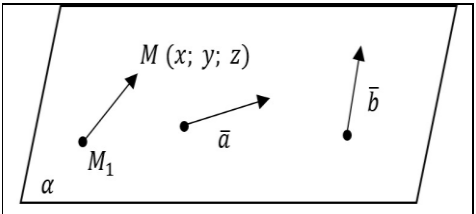

Рис.23

Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x;y;z)$ и составим векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$,которые должны быть компланарны, так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны плоскости, то есть лежат в данной плоскости(см. рис.23), из условия компланарности следует:

$$\overrightarrow{M_1M}\,\vec{a}\,\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0;$$

Таким образом, уравнение искомой плоскости имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x - x_1} & \boldsymbol{y - y_1} & \boldsymbol{z - z_1} \\ \boldsymbol{a_x} & \boldsymbol{a_y} & \boldsymbol{a_z} \\ \boldsymbol{b_x} & \boldsymbol{b_y} & \boldsymbol{b_z} \end{vmatrix} = \mathbf{0}\ \mathbf{(2.7)}$$

Пример 2.9. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(2;1;0)$ параллельно векторам $\vec{a} = (4;0;-1)$, $\vec{b} = (0;2;0)$.

Решение.

Уравнение плоскости, проходящей через точку параллельно двум векторам, имеет вид:

$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0$, подставляя наши данные имеем:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} x-2 & z \\ 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$= -2(2 - x - 4z) = 0$ или $x + 4z - 2 = 0$.

Пример 2.10. Найти уравнение плоскости α_1, проходящей через точки $A(2;1;0)$, $B(1;-3;1)$ перпендикулярно плоскости $\alpha: x - y - 4z - 2 = 0$.

Решение.

Заданная плоскость α, перпендикулярная искомой имеет вектор нормали $\vec{n} = (1;-1;-4)$.

Искомое уравнение плоскости имеет вид: $Ax + By + Cz + D = 0$,её вектор нормали $\overrightarrow{n_1} = (A;B;C)$. Вектор $\overrightarrow{AB} = (-1;-4;1)$ и вектор $\vec{n} = (1;-1;-4)$ при-

надлежит плоскости α_1.
Так как плоскость α перпендикулярна плоскости α_1, то $\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{AB}, \vec{n}$, то есть

$$\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{AB} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} - -\vec{j}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 17\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}.$$

Таким образом, $\overrightarrow{n_1} = (17; -3; 4)$ -вектор нормали, искомой плоскости, следовательно уравнение плоскости α_1 имеет вид: $17x - 3y + 4z + D = 0$, осталось найти свободный член D,этим и займёмся:
так как точка $A(2; 1; 0)$принадлежит искомой плоскости, то ее координаты должны удовлетворять уравнению этой плоскости, то есть

$$17 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + D = 0,$$
$$D = 31.$$

Итого, получаем искомое уравнение плоскости: $17x - 3y + 4z + 31 = 0$.

Пример 2.11. Составить уравнение плоскости α, которая проходит через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям α_1: $x - y + 3z - 1 = 0$,
α_2: $2x - y + z = 0$.

Решение.

Нормальный вектор первой плоскости $\overrightarrow{n_1} = (1; -1; 3)$, второй $\overrightarrow{n_2} = (2; -1; 1)$.

Поскольку $\alpha_1, \alpha_2 \perp \alpha$,следовательно, $\vec{n} \perp \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$, то есть

$$\vec{n} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+\vec{k}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}.$$

Уравнение искомой плоскости имеет вид:

$$2x + 5y + z + D = 0;$$

Найдём свободный член D,учитывая, что плоскость проходит через точку$(0; 0; 0)$:

$$D = 0.$$

$2x + 5y + z = 0 -$ уравнение искомой плоскости.

Уравнение плоскости в отрезках.

Если в общем уравнении плоскости поделить обе части равенства на $(-D)$:

$Ax + By + Cz + D = 0|:(-D);$

$-\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z - 1 = 0$ и заменить $-\frac{D}{A} = a,$ $-\frac{D}{B} = b, -\frac{D}{C} = c$ получим уравнение:

$$\boldsymbol{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 (2.8)}$$

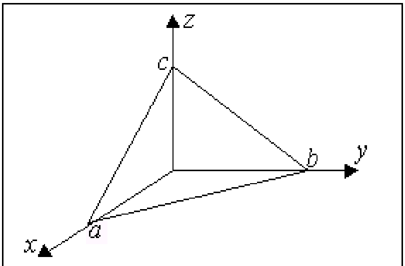

Рис.24

Уравнение (2.8) определяет **уравнение плоскости в отрезках.**

Числа a, b, c являются точками пересечения плоскости соответственно с осями Ox, Oy, Oz.

Замечание: длины отрезков a, b, c откладываются от начала координат. Направление, в котором необходимо отложить длину отрезка, определяет знак, стоящий перед числом. Наличие «-» свидетельствует о том, что отрезок надо откладывать от нуля в отрицательном направлении оси.

Пример 2.12. Плоскость задана уравнением$2x-6y+z-6=0$. Получите уравнение этой плоскости в отрезках.

Решение

Исходное уравнение является общим уравнением плоскости для того, чтобы привести его к уравнению плоскости в отрезках. Перенесем - 6 в правую часть и разделим обе части полученного равенства на шесть:

$$2x-6y+z-6=0;$$
$$2x-6y+z=6|:6;$$
$$\frac{2x}{6}-\frac{6y}{6}+\frac{z}{6}=1;$$

$\frac{x}{3}+\frac{y}{(-1)}+\frac{z}{6}=1-$ уравнение плоскости в отрезках, $a=3, b=-1, c=6-$отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных осях Ox, Oy, Oz соответственно.

Пример 2.13. Построить плоскость, заданную уравнением $3x+4y+6z-12=0$ и вычислить площади треугольников, отсекаемых плоскостью от координатных углов.

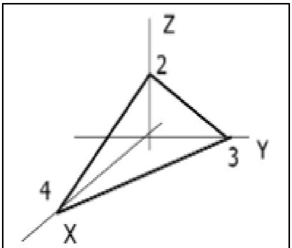

Рис.25

Решение.

Поскольку все коэффициенты уравнения плоскости отличны от нуля, то плоскость не параллельна ни одной из координатных осей, поэтому для удобства построения плоскости составим уравнение плоскости в отрезках.

Переносим свободный член вправо и делим обе части полученного равенства на 12:

$$3x+4y+6z-12=0;$$
$$3x+4y+6z=12|:12;$$
$$\frac{3x}{12}+\frac{4y}{12}+\frac{6z}{12}=1;$$

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=1.$$

Уравнение $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=1$ содержит длины трёх отрезков $a=4, b=3, c=2$, которые «исходят» из начала координат и однозначно определяют плоскость (см. рис.25).Таким образом, плоскость проходит через точки $(4;0;0)$, $(0;3;0)$, $(0;0;2)$.

Вычислим площади треугольников, которые эта плоскость отсекает от координатных углов:

$$S_{Oxy}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3=6;$$

$$S_{Oxz}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2=4;$$

$$S_{Oyz}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=3.$$

Нормальное уравнение плоскости.

Нормальное уравнение плоскости имеет вид

$$\boldsymbol{x cos\alpha+y cos\beta+z cos\gamma-p=0 (2.9)},$$

где $p\geq 0$ –расстояние от начала координат до плоскости;

$\vec{r}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$ - радиус- вектор текущей точки $M(x;y;z)$,

$\vec{n}=\vec{\imath}cos\alpha+\vec{\jmath}cos\beta+\vec{k}cos\gamma=(cos\alpha;cos\beta;cos\gamma)$ –единичный вектор, имеющий направление, перпендикуляра, опущенного на плоскость из начала координат,

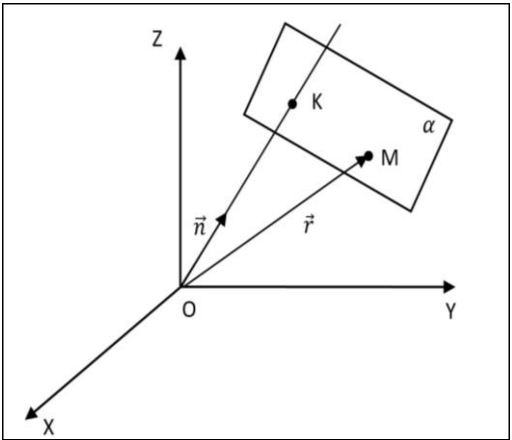

Рис.26

α, β и γ - углы, образованные этим вектором с осями Ox, Oy, Ozсоответственно.

Отсюда ясно, что нормальное уравнение плоскости представляет собой общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, где $A, B, C -$ некоторые действительные числа, при которых длина нормального вектора плоскости$\vec{n} = (A; B; C)$ равняется 1, причем D является неотрицательным числом.

Чтобы выявить, является представленное уравнение нормальным уравнением плоскости, необходимо выполнение двух условий:

1) $|\vec{n}| = \sqrt{cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma} = 1;$

2) $p \geq 0.$

Только в этом случае получим уравнение плоскости нормального вида. При невыполнении хотя бы одного условия, уравнение не является нормальным. Рассмотрим пример нормального уравнения плоскости:

$-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}z - 3 = 0$- нормального уравнения плоскости.

Действительно, сравнивая выражения

$-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y+\frac{1}{2}z-3=0$ и $xcos\alpha+ycos\beta+zcos\gamma-p=0$, находим $cos\alpha=-\frac{1}{2}$, $cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $cos\gamma=\frac{1}{2}$,следовательно,

$\vec{n}=\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{1}{2}\right)-$ координаты нормального вектора, его длина вычисляется по формуле:$|\vec{n}|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$,

$p=3\geq 0-$расстояние от начала координат до плоскости. Оба условия выполняются, следовательно, данное уравнение является нормальным уравнением плоскости.

Приведение общего уравнения плоскости к нормальному виду.

Итак, чтобы общее уравнение прямой привести к нормальному виду необходимо: обе части уравнения $Ax+By+Cz+D=0$умножить на число $\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, так называемый **нормирующий множитель.**

Замечание: знак $\pm$ нормирующего множителя берется противоположным знаку слагаемого D. Если $D=0$, то знак нормирующего множителя не имеет значения и может быть выбран произвольно.

Пример 2.14. Дано общее уравнение плоскости$5x-3y-z-1=0$.Требуется написать нормальное уравнение плоскости.

Решение.

Нам дано общее уравнение плоскости, где$A=5, B=-3, C=-1, D=-1.$

Чтобы привести общее уравнение плоскости к нормальному виду необходимо умножить обе его части на нормирующий множитель $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$;

Нормирующий множитель следует брать со знаком «+», так как D – отрицательное число:

$\mu = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{1}{\sqrt{5^2+(-3)^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{35}}$;

Умножим обе части уравнения $5x-3y-z-1=0$ на $\mu = \frac{1}{\sqrt{35}}$, получим нормальное уравнение плоскости:

$$5x-3y-z-1=0\left|\cdot\frac{1}{\sqrt{35}}\right.;$$

$$\frac{5}{\sqrt{35}}x-\frac{3}{\sqrt{35}}y-\frac{1}{\sqrt{35}}z-\frac{1}{\sqrt{35}}=0-$$

нормальное уравнение заданной плоскости, где

$cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{35}}, cos\beta = -\frac{3}{\sqrt{35}}, cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{35}}, p = \frac{1}{\sqrt{35}}$.

Пример 2.15. Является ли данное уравнение плоскости **а)** $\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y+\frac{1}{2}z-11=0$; **б)** $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{2}}{2}z+11=0$;

в) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{2}}{2}z-5=0$ нормальным уравнением плоскости?

Решение.

Чтобы выявить, является представленное уравнение нормальным уравнением плоскости, необходимо проверить выполнение следующих условий:

1) $|\vec{n}| = \sqrt{cos^2\alpha+cos^2\beta+cos^2\gamma} = 1$;2) $p \geq 0$.

а) 1) $\vec{n}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{1}{2}\right)$,$|\vec{n}|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\neq 1$,

данное уравнение не является нормальным уравнением плоскости, так как первое условие не выполняется-длина нормального вектора не равняется единице.

б)1)$\vec{n}=\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$|\vec{n}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$ –выполняется;

2)второе условие не выполняется, так как $p=-11<0$.Значит, заданное уравнение плоскости

нельзя считать нормальным уравнением плоскости.

в) 1) $\vec{n}=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$|\vec{n}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$ –выполняется;2) $p=5\geq 0$.

Оба условия выполняются, следовательно, данное уравнение является нормальным уравнением плоскости.

2.3. Угол между плоскостями.

Углом между плоскостями $\alpha_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$,$\alpha_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ называется угол между их нормальными векторами (см.рис.27).

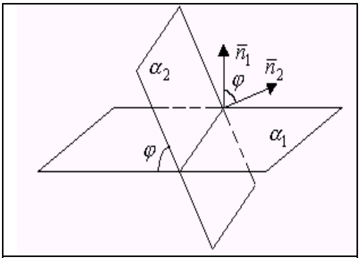

Рис.27

Нормальные векторы к этим плоскостям соответственно равны: $\overrightarrow{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$,

$\overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$.

Как известно (из векторной алгебры) для того, чтобы найти угол между векторами, необходимо найти косинус угла, то есть

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{n_1}; \overrightarrow{n_2}}) = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} \quad (2.10)$$

Условие параллельности плоскостей

Условие параллельности плоскостей равносильна условию коллинеарности нормальных векторов этих плоскостей, то есть

$$\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2}:$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad (2.11)$$

Условие перпендикулярности плоскостей

Условие перпендикулярности плоскостей совпадает с условием перпендикулярности нормальных векторов этих плоскостей,то есть

$$\alpha_1 \perp \alpha_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}: \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0,$$

$$A_1 A_1 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0 \quad (2.12)$$

Пример 2.16. Найти угол между плоскостями $\alpha_1: x - \sqrt{2}y + z - 1 = 0$,$\alpha_2: x + \sqrt{2}y - z + 3 = 0$.

Решение.

Угол между плоскостями определяется как угол между их нормалями $\overrightarrow{n_1} = (1; -\sqrt{2}; 1)$, $\overrightarrow{n_2} = (1; \sqrt{2}; -1)$, $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{n_1}; \overrightarrow{n_2}})$,

$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = \frac{1 \cdot 1 + (-\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{1+2+1} \cdot \sqrt{1+2+1}} = -\frac{1}{2}$, следовательно, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

Пример 2.17. Определить, при каком значении m, n плоскости $\alpha_1: 3x + my + 4z - 1 = 0$,

$\alpha_2: 9x + 2y - nz + 3 = 0$ параллельны.

Решение.

Параллельность плоскостей равносильна коллинеарности векторов $\overrightarrow{n_1} = (3; m; 1)$ и $\overrightarrow{n_2} = (9; 2; -n)$, то есть $\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2}$: $\frac{3}{9} = \frac{m}{2} = \frac{4}{-n}$, следовательно,

$\frac{3}{9} = \frac{m}{2}, \frac{1}{3} = \frac{m}{2}, m = \frac{2}{3};$

$\frac{1}{3} = \frac{4}{-n}, n = -12.$

Таким образом, данные плоскости параллельны при $m = \frac{2}{3}, n = -12.$

Пример 2.18. Определить, при каком значении k плоскости перпендикулярны $\alpha_1: 7x - 2y - z = 0$,

$\alpha_2: kx + y - 3z - 1 = 0.$

Решение.

Перпендикулярность плоскостей равносильна перпендикулярности векторов $\overrightarrow{n_1} = (7; -2; -1)$ и $\overrightarrow{n_2} = (k; 1; -3)$, то есть

$\alpha_1 \perp \alpha_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}: \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0,$

$7 \cdot k + (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot (-3) = 0,$

$7k = -1,$

$k = -\frac{1}{7}.$

Таким образом, данные плоскости перпендикулярны при $k = -\frac{1}{7}$.

2.Задания для самостоятельного решения.

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-3; 4; 7)$, перпендикулярно вектору $\vec{n} = (1; -2; 6)$.

2. Даны точки $M_1(2; -1; 3)$, $M_2(4; 5; 0)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_2 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

3. Составьте уравнение плоскости, если она проходит через точку $M_0(4; 3; 0)$, и параллельна плоскости $2x - y + 3z - 2 = 0$.

4. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;-1;3)$ и $M_2(3;1;2)$ параллельно вектору $\vec{a}=(3;-1;4)$.

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(3;4;-5)$, параллельно двум векторам $\overrightarrow{a_1}$ =(3; 1; –1) и $\overrightarrow{a_2}$ =(1; –2; 1).

6. Найти уравнение плоскости, проходящей через две точки $M_1(2;0;-1)$ и $M_2(1;-1;3)$ перпендикулярно плоскости $3x+2y-z+5=0$.

7. Построить плоскости и вычислить площади треугольников, которые эти плоскости отсекают от координатных углов $x+2y+3z-6=0$.

8. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;3;1)$ параллельно плоскости $2x-3y+5z-4=0$.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;2;6)$, $M_2(5;4;2)$ и отсекающей равные отрезки на осях Ox и Oy .

10. Найти угол между плоскостями:

а) $\alpha_1: x-\sqrt{2}y+z-1=0, \alpha_2: x+\sqrt{2}y-z+3=0$;

б) $\alpha_1: x+2z-1=0, \alpha_2: x-z+3=0$.

11. При каких значениях l и m плоскости $\alpha_1: 2x+ly+3z-1=0, \alpha_2: mx-3y-3z+3=0$ параллельны?

12. При каком значении k плоскости $\alpha_1: 3x-5y+kz=0$,

$\alpha_2: x+3y+z-3=0$ перпендикулярны?

13. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;-3;5)$ параллельно плоскости Oxy.

14. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точки $M_1(7;2;-3)$ и $M_2(5;6;-4)$ параллельно

оси Ox.

15.Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки$M_1(3;-2;2)$, $M_2(1;-3;1)$, $M_3(2;0;4)$.

16. Напишите уравнение плоскости, которая проходит через начало координат и параллельна плоскости ABC , если $A(2;0;-4)$, $B(3;2;-2)$, $C(5;3;0)$.

17. Привести уравнение плоскости$2x-3y+z+5=0$ к

нормальному виду.

18.Является ли данное уравнение плоско-сти$\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}z-11=0$ нормальным уравнением

плоскости?

19. Составить уравнение плоскости, которая проходит через ось Oy и точку $A(1;4;3)$.

20. Составить уравнение плоскости, которая проходит через ось Ox и через точку $B(1;1;1)$.

Ответы:

2.1.$x-2y+6z-31=0$.**2.2.** $2x+6y-3z-38=0$.
2.3.$2x-y+3z-5=0$.**2.4.**$x-y-z=0$.

2.5.$x+4y+7z+16=0$.**2.6.**$-7x+11y+z+15=0$.
2. 7.$S_{Oxy}=9$; $S_{Oxz}=6$; $S_{Oyz}=3$.**2.8.**$2x-3y+5z+10=0$.
2.9.$4x+4y+z-2=0$.**2.10. а)** $\varphi=120^0$;**б)**$\varphi=\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$.
2. 11. $l=3, m=-2$.**2. 12.** $k=12$. **2. 13.** $z-5=0$.
2.14. $y+4z+10=0$.**2.15.**$y-z+4=0$.**2.16.**$2x+2y-3z=0$.
2.17. $-\frac{2}{\sqrt{14}}x+\frac{3}{\sqrt{14}}y-\frac{1}{\sqrt{14}}z-\frac{5}{\sqrt{14}}=0$.**2.18**. Данное уравнение нельзя считать уравнением плоскости в нормальном виде, так как $|\vec{n}|\neq 1$.**2.19.** $3x+z=0$.
2.20. $y-z=0$.

2.4. Уравнение прямой в пространстве.

Различным способам задания прямой в пространстве соответствует различные виды её уравнений. Рассмотрим все возможные варианты:

Векторное и параметрические уравнения прямой.

Составим уравнение прямой, проходящей через известную точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$в заданном направлении $\vec{a}=(m;n;p)$. Вектор $\vec{a}$ параллельный этой прямой, называется **направляющим** вектором прямой.

Возьмем на прямой l произвольную точку $M(x;y;z)$. Обозначим радиус-векторы точек M_0 и M соответственно через $\overrightarrow{r_0}$ и $\vec{r}$.Очевидно, что

$$\vec{r}-\overrightarrow{r_0}=\overrightarrow{M_0M}, \vec{r}=\overrightarrow{r_0}+\overrightarrow{M_0M}.$$

Так как $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{a}$, то $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}, t\epsilon R$ - скалярный множитель, называемый параметром.

Итак, можно записать:

$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{a}$ **(2.13)– векторное уравнение прямой**

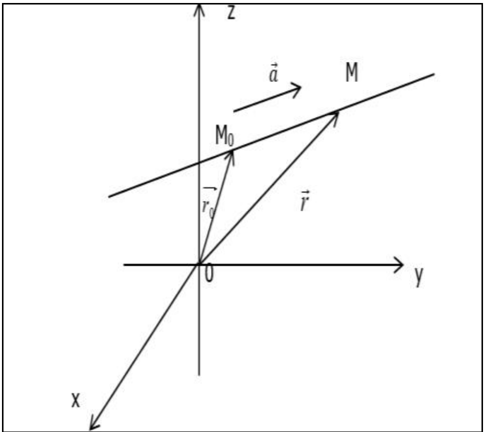

Рис.28

Так как равенство векторов означает равенство всех их соответствующих координат, то уравнение (2.13) равносильно системе:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \quad \mathbf{(2.14)}$$

– уравнения (2.14) называются **параметрическими уравнениями прямой** в пространстве.

Канонические уравнения прямой.

Имеется направляющий вектор $\vec{a} = (m; n; p)$ прямой l и точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ лежащая на этой прямой. Возьмем на прямой l произвольную точку $M(x; y; z)$ и построим вектор

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$$

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{a} \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ **(2.15) – канонические уравнения прямой** в пространстве.

Замечание: уравнения (2.15) можно было бы получить сразу из параметрических уравнений прямой (2.14) исключив параметр t,покажем, как это сделать:

Из первого уравнения в системе, получим

$x = x_0 + mt;$
$mt = x - x_0;$
$t = \dfrac{x - x_0}{m}.$

Размышляя аналогично, получим:

$t = \frac{y-y_0}{n}$; $t = \frac{z-z_0}{p}$,следовательно

$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} = t,$

исключая t получим$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}.$

Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки.

Если на прямой в пространстве отметить две произвольные точки$M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Возьмем на прямой l произвольную точку $M(x; y; z)$ и построим векторы $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$. Получим, что векторы$\overrightarrow{M_1M}$ и$\overrightarrow{M_1M_2}$ коллинеарны, то есть

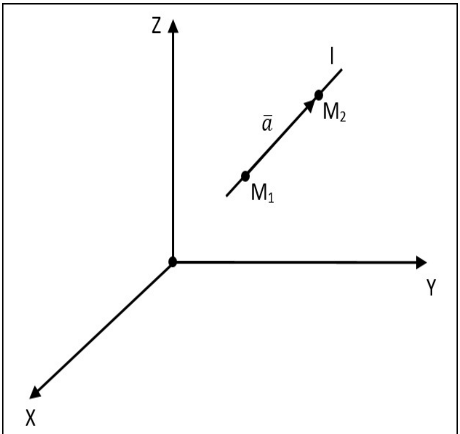

Рис.29

$$\overrightarrow{M_1M} \parallel \overrightarrow{M_1M_2} \Leftrightarrow \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Таким образом, уравнение

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ (2.16) – **уравнение прямой, проходящей через две точки в пространстве.**

Замечание: заметим, что данные уравнения можно рассматривать как канонические уравнения прямой с заданной точкой $M_1(x_1;y_1;z_1)$и направляющим вектором прямой $\vec{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$=$(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$(см.рис.29).

Пример 2.19. Составить канонические и параметрические уравнения прямых проходящих через точку $M_0(2;-3;1)$:**а)**∥вектору $\vec{a}=(1;5;-2)$; **б)** ∥прямой$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+3}{-3}$;**в)** ∥ оси Ox.

Решение.

а) Воспользуемся каноническими уравнениями прямой в пространстве:

$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$– канонические уравнения, то есть уравнение прямой, которая проходит через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ параллельно вектору$\vec{a}=(m;n;p)$.

В нашем случае, точка через которую проходит прямая имеет координаты $M_0(2;-3;1)$,поскольку искомая прямая ∥вектору $\vec{a}=(1;5;-2)$он является направляющим вектором данной прямой.

Таким образом, искомое уравнение прямой имеет вид:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-1}{-2};$$

Напишем параметрические уравнения прямой, для этого придадим каноническим уравнениям прямой значение параметра t:

$\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-1}{-2}=t$, то есть

$\frac{x-2}{1}=t, \frac{y+3}{5}=t, \frac{z-1}{-2}=t$, откуда

$x-2=t, y+3=5t, z-1=-2t.$

Таким образом,$\begin{cases} x=2+t \\ y=-3+5t \\ z=1-2t \end{cases}$– параметрические уравнения прямой.

б) Прямая, параллельная заданной прямой $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+3}{-3}$, параллельна её направляющему вектору, следовательно направляющий вектор прямой имеет координаты $\vec{a}=(-1;1;-3)$. Далее, находим уравнение прямой проходящей точку $M_0(2;-3;1)$ параллельно вектору $\vec{a}=(-1;1;-3)$ как и в пункте а) воспользуемся каноническими уравнением прямой:

$\frac{x-2}{-1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{-3}$ –канонические уравнения прямой.

Напишем параметрические уравнения прямой:

$\frac{x-2}{-1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{-3}=t$, то есть

$\begin{cases} x=2-t \\ y=-3+t \\ z=1-3t \end{cases}$ – параметрические уравнения прямой.

в) Ось Ox имеет направляющий вектор $\vec{i}=(1;0;0)$. Таким образом, ищем уравнение прямой проходящей точку $M_0(2;-3;1)$ параллельно вектору $\vec{i}=(1;0;0)$:

$\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-1}{0}$ –канонические уравнения прямой;

Напишем параметрические уравнения прямой:

$\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-1}{0}=t$, то есть

$\begin{cases} x=2+t \\ y=-3 \\ z=1 \end{cases}$ – параметрические уравнения прямой.

Пример 2.20. Составить канонические и параметрические уравнения прямой проходящей через две точки $M_1(5;-2;1)$ и $M_2(1;-3;4)$.

Решение.

Для нахождения канонических уравнений прямой, проходящей через две точки $M_1(5;-2;1)$ и $M_2(1;-3;4)$, используем уравнение (2.16):

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1};$$

$$\frac{x-5}{1-5}=\frac{y-(-2)}{-3-(-2)}=\frac{z-1}{4-1};$$

$\frac{x-5}{-4}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{3}$ – канонические уравнения прямой.

Найдём параметрические уравнения прямой:

$$\frac{x-5}{-4}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{3}=t,$$

$\begin{cases} x=5-4t \\ y=-2-t \\ z=1+3t \end{cases}$ – параметрические уравнения прямой.

Пример 2.21. Составить параметрические уравнения следующих прямых: **а)** $\frac{x-1}{0}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{2}$;

б) $\frac{x-5}{-4}=\frac{y+2}{-1}, z-3=0.$

Решение.

а) Придадим каноническим уравнениям значение параметра t:

$\frac{x-1}{0}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{2}=t$, то есть,

$\frac{x-1}{0}=t, \frac{y+2}{-1}=t, \frac{z-1}{2}=t$, откуда

$x-1=0\cdot t, y+2=-t, z-1=2t$,то есть,

$\begin{cases} x=1 \\ y=-2-t \\ z=1+2t \end{cases}$ -параметрические уравнение прямой.

б) Напишем параметрические уравнения прямой:

$\frac{x-5}{-4}=\frac{y+2}{-1}=t$,следовательно,

$\frac{x-5}{-4}=t$, то есть, $x=5-4t$;

$\frac{y+2}{-1}=t, y=-2-t$;

$z-3=0$, $z=3$.

Таким образом, $\begin{cases} x=5-4t \\ y=-2-t- \\ z=3 \end{cases}$ параметрические уравнения прямой.

Уравнение прямой, как линии пересечения двух плоскостей.

Уравнение прямой может быть рассмотрено как уравнение **линии пересечения двух плоскостей:** $\begin{cases} \boldsymbol{A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0} \\ \boldsymbol{A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0} \end{cases} \boldsymbol{(2.17)}$

Практическая задача, часто, состоит в приведении прямой заданной как линии пересечения двух плоскостей к каноническому виду.

Алгоритм приведения прямой к каноническому виду

1.Проверяем, что векторы $\overrightarrow{n_1}=(A_1;B_1;C_1)$, $\overrightarrow{n_2}=(A_2;B_2;C_2)$неколлинеарные и, следовательно, плоскости пересекаются по некоторой прямой.

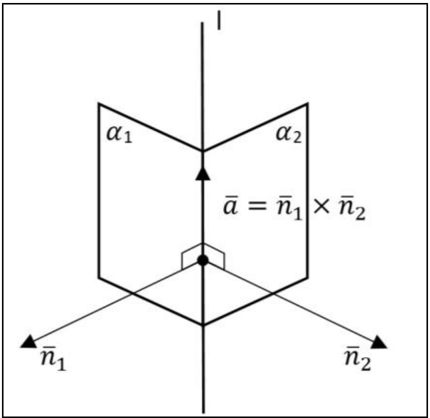

Рис.30

Канонические уравнения прямой имеют вид $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$,следовательно, чтобы написать уравнения прямой, необходимо найти какую-нибудь точку на прямой $M_0(x_0; y_0; z_0)$и направляющий вектор прямой $\vec{a} = (m; n; p)$.

2.Так как прямая принадлежит одновременно обеим плоскостям, то её направляющий вектор$\vec{a}$ перпендикулярен нормальным векторам обеих плоскостям, то есть $\vec{a} \perp \overrightarrow{n_1}, \vec{a} \perp \overrightarrow{n_2}$, следовательно, направляющий вектор $\vec{a}$ находим по формуле:

$$\vec{a} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}.$$

3.Теперь выберем какую-нибудь точку на прямой. В качестве точки, через которую проходит прямая можно взять точку пересечения её с одной из координатных плоскостей.

4.Подставляем найденный направляющий вектор и точку в канонические уравнения прямой и записываем ответ.

Пример 2.22. Найти канонические уравнения прямой, если прямая задана в виде: $\begin{cases} 5x - y + 2z + 4 = 0 \\ 7x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$.

Решение.

1.Выпишим нормальные векторы плоскостей $\overrightarrow{n_1} = (5; -1; 2)$, $\overrightarrow{n_2} = (7; 2; -1)$ и заметим, что $\overrightarrow{n_1} \nparallel \overrightarrow{n_2}$: $\frac{5}{7} \neq \frac{-1}{2} \neq \frac{2}{-1}$,следовательно плоскости пересекаются по прямой.

Канонические уравнение прямой имеют вид $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$,следовательно, чтобы написать искомое уравнение прямой, необходимо найти какое-нибудь точку на прямой $M_0(x_0; y_0; z_0)$и направляющий вектор прямой $\vec{a} = (m; n; p)$,этим и займемся в следующих пунктах;

2.Найдём направляющий вектор$\vec{a}$ искомой прямой:

$$\vec{a} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -1 & 2 \\ 7 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= -3\vec{i} + 19\vec{j} + 17\vec{k}.$$

3.Найдём точку $M_0 \epsilon l$:

Так как координаты направляющего вектора отличны от нуля, то прямая пересекает все три координатные плоскости, то есть в качестве точки, через которую проходит прямая, можно взять точку пересечения её с одной из координатных плоскостей. Пусть $x = 0$(уравнение плоскости Oyz),то есть найдём точку пересечения прямой с плоскостью Oyz, для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y + 2z + 4 = 0 \\ 7x + 2y - z + 1 = 0; \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y + 2z + 4 = 0 \\ 2y - z + 1 = 0; \\ x = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} -y + 2z + 4 = 0 \\ z = 2y + 1 \\ x = 0 \end{cases}$, подставляем $z = 2y + 1$ в первое уравнение имеем:

$\begin{cases} -y + 4y + 2 + 4 = 0 \\ z = 2y + 1 \\ x = 0 \end{cases}$, откуда,

$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ z = -3 \end{cases}$, то есть $M_0(0; -2; -3)$.

4.Тогда канонические уравнения прямой имеет вид:

$$\frac{x}{-3} = \frac{y+2}{19} = \frac{z+3}{17}.$$

Пример 2.23. Составить канонические уравнения прямой проходящих через точку $M_0(2; -3; 1)$ ∥ прямой заданной как линия пересечение двух плоскостей: $l: \begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x + 3y - 2z - 3 = 0 \end{cases}$.

Решение.

Прямая $l: \begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x + 3y - 2z - 3 = 0 \end{cases}$, заданная как линия пересечение двух плоскостей- перпендикулярна нормалям обеих плоскостей, поэтому направляющий вектор данной прямой можно задать как векторное произведение нормалей заданных плоскостей, то есть $\vec{a} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$.

Для плоскости $\alpha_1: 3x - y + 2z - 7 = 0$ нормальный вектор имеет координаты $\overrightarrow{n_1} = (3; -1; 2)$, для плоскости $\alpha_2: x + 3y - 2z - 3 = 0$, нормальный вектор имеет координаты $\overrightarrow{n_2} = (1; 3; -2)$.

Находим векторное произведение:

$$\vec{a} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \vec{k}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 8\vec{j} + 10\,\vec{k} = (-4; 8; 10).$$

Напишем каноническое уравнение искомой прямой-уравнение прямой проходящей точку $M_0(2; -3; 1)$, параллельно вектору $\vec{a} = (-4; 8; 10)$:

$$\frac{x-2}{-4} = \frac{y+3}{8} = \frac{z-1}{10}$$

2.5. Расстояние от точки до прямой.

Расстояние от точки до прямой — равно длине перпендикуляра, опущенного из точки на прямую (см.рис.31).Если $\vec{a} = (m; n; p)$ – направляющий вектор прямой l, $M(x; y; z)$ - точка лежащей на прямой, тогда расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$до прямой l можно найти, используя формулу:

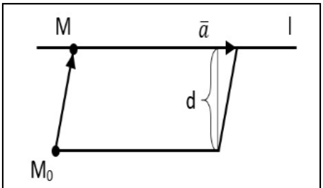

Рис.31

$$\boldsymbol{d} = \frac{|\overrightarrow{\boldsymbol{M_0M}} \times \vec{\boldsymbol{a}}|}{|\vec{\boldsymbol{a}}|} \quad (\mathbf{2.18})$$

Рассмотрим вывод данной формулы:

Если задано уравнение прямой, то несложно найти $\vec{a} = (m; n; p)$ - направляющий вектор прямой и

$M(x; y; z)$ - координаты точки, лежащей на этой пря-

мой. Из свойств векторного произведения, известно, что модуль векторного произведения векторов равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах, то есть

$S = \left|\overrightarrow{M_0M} \times \vec{a}\right|;$

С другой стороны площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне: $S = |\vec{a}|d.$

В нашем случае высота d будет равна расстоянию от

точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до прямой l, а сторона параллелограмма равна длине направляющего вектора $\vec{a}$.

Приравняв площади несложно получить формулу расстояния от точки до прямой:

$$\left|\overrightarrow{M_0M} \times \vec{a}\right| = |\vec{a}|d,$$
$$d = \frac{\left|\overrightarrow{M_0M} \times \vec{a}\right|}{|\vec{a}|}.$$

Пример 2.24. Найти расстояние от точки $M_0(-4; 3; 5)$ до заданной прямой

$$l: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z+1}{4}.$$

Решение.

Расстояние от точки M_0 до прямой l,вычисляется по формуле:

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{M_0M} \times \vec{a}\right|}{|\vec{a}|};$$

Из уравнения прямой получим: $\vec{a} = (-2; 3; 4)$- направляющий вектор прямой, $M(1; -5; -1)$ - точка, лежащая на прямой.

Тогда $\overrightarrow{M_0M} = (1 - (-4); -5 - 3; -1 - 5) = (5; -8; -6)$,

$$\overrightarrow{M_0M} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -8 & -6 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -8 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+\ \vec{k}\begin{vmatrix} 5 & -8 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -14\vec{i} - 8\vec{j} - \vec{k} = (-14; -8; -1),$$

$$\left|\overrightarrow{M_0M} \times \vec{a}\right| = \sqrt{(-14)^2 + (-8)^2 + (-1)^2} =$$

$$= \sqrt{196 + 64 + 1} = \sqrt{261}.$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29}.$$

Таким образом, $d = \frac{\sqrt{261}}{\sqrt{29}} = 3.$

Пример 2.25. Найти расстояние от точки $M_0\ (2; 3; -1)$ до заданной прямой $l: \begin{cases} 2x - 2y + z + 3 = 0 \\ 3x - 2y + 2z + 17 = 0 \end{cases}.$

Решение.

Для того, чтобы найти расстояние от точки M_0 до прямой l , нам необходимо выбрать произвольную точку M, принадлежащую прямой l и найти направляющий вектор этой прямой.

Выбираем точку M. Пусть координата $z = 0$. Подставим это значение в данную систему:

$$\begin{cases} 2x - 2y + 3 = 0 \\ 3x - 2y + 17 = 0 \end{cases} |(-);$$

$$-x - 14 = 0;$$

$$x = -14.$$

Подставим $x = -14$ в первое уравнение системы и найдём y:

$$2 \cdot (-14) - 2y + 3 = 0;$$

$$2y = -25;$$

$$y = -\frac{25}{2}.$$

Таким образом, $M\left(-14; -\frac{25}{2}; 0\right)$.

Направляющий вектор найдем, как векторное произведение нормалей заданных плоскостей $\overrightarrow{n_1} = (2; -2; 1)$, $\overrightarrow{n_2} = (3; -2; 2)$:

$$\vec{a} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} = (-2; -1; 2).$$

Таким образом, направляющий вектор прямой имеет координаты $\vec{a} = (-2; -1; 2)$.

Теперь можно воспользоваться формулой:

$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times\vec{a}|}{|\vec{a}|}$,где

$$\overrightarrow{M_0M}=\left(-14-2;-\frac{25}{2}-3;0-(-1)\right)=(-16;-15{,}5;1),$$

$$\overrightarrow{M_0M}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -16 & -15{,}5 & 1\\ -2 & -1 & 2\end{vmatrix}$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix}-15{,}5 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-16 & 1\\ -2 & 2\end{vmatrix}+$$

$$+\vec{k}\begin{vmatrix}-16 & -15{,}5\\ -2 & -1\end{vmatrix}=-30\vec{i}+30\vec{j}-15\vec{k}=(-30;30;-15),$$

$$|\overrightarrow{M_0M}\times\vec{a}|=\sqrt{(-30)^2+30^2+(-15)^2}$$

$$=\sqrt{900+900+225}=\sqrt{2025}=45,$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{9}=3.$$

Следовательно, $d=\frac{45}{3}=15$.

2.6. Угол между прямыми в пространстве.

Пусть в пространстве заданы две прямые каноническими уравнениями (или параметрическими) $l_1\colon\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$, $l_2\colon\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$ с направляющими векторами $\overrightarrow{a_1}=(m_1;n_1;p_1)$, $\overrightarrow{a_2}=(m_2;n_2;p_2)$.

Под углом между прямыми понимают угол между направляющими векторами (см.рис.32), таким образом, для косинуса этого угла справедлива формула:

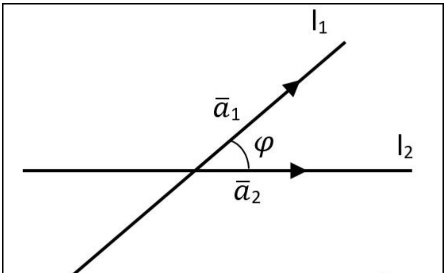

Рис.32

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{a_1};\overrightarrow{a_2}})=\frac{\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}}{|\overrightarrow{a_1}|\cdot|\overrightarrow{a_2}|} \quad (2.19)$$

Условие параллельности прямых в пространстве.

Параллельность прямых l_1, l_2равносильна коллинеарности направляющих векторов этих прямых, то есть

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{a_1} \parallel \overrightarrow{a_2}:$$

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2} \quad (2.20)$$

Условие перпендикулярности прямых в пространстве.

Перпендикулярность прямых равносильна перпендикулярности направляющих векторов этих прямых, то есть

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{a_1} \perp \overrightarrow{a_2},\ \overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}=0:$$

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0 \quad (2.21)$$

Пример 2.26. Найти угол между прямыми:

а) $l_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+1}{\sqrt{2}}$и $l_2:\begin{cases} x=t-3 \\ y=-1+t; \\ z=\sqrt{2}t \end{cases}$

б)$l_1:\frac{x-3}{-1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{0}$ и$l_2:\frac{2-x}{\sqrt{2}}=1-\frac{y}{\sqrt{2}}=\frac{z+1}{\sqrt{2}}$.

Решение.

а) Для решения данной задачи найдем направляющие векторы этих прямых.

Уравнение первой прямой задано в канонической форме, поэтому направляющий вектор имеет вид: $\overrightarrow{a_1}=\left(1;-1;\sqrt{2}\right)$.

Вторая прямая задана параметрическими уравнениями, тогда $\overrightarrow{a_2}=\left(1;1;\sqrt{2}\right)$ -направляющий вектор второй прямой.

Применяя формулу (2.19), имеем:

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{a_1};\overrightarrow{a_2}}\right)=\frac{\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}}{|\overrightarrow{a_1}|\cdot|\overrightarrow{a_2}|}=$$

$$=\frac{1\cdot 1-1\cdot 1+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}}=\frac{1}{2},$$

следовательно, $\varphi=\left(\widehat{\overrightarrow{a_1};\overrightarrow{a_2}}\right)=\frac{\pi}{3}$.

б) Первое уравнение прямой задано в канонической форме, направляющий вектор имеет вид: $\overrightarrow{a_1}=(-1;1;0)$.

Для того, чтобы найти направляющий вектор второй прямой $l_2:\frac{2-x}{\sqrt{2}}=1-\frac{y}{\sqrt{2}}=\frac{z+1}{\sqrt{2}}$ преобразуем его к каноническому виду:

$$\frac{2-x}{\sqrt{2}}=\frac{x-2}{-\sqrt{2}};\ 1-\frac{y}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-y}{\sqrt{2}}=\frac{y-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}};$$

$l_2:\frac{x-2}{-\sqrt{2}}=\frac{y-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}=\frac{z+1}{\sqrt{2}}$ –канонические уравнения прямой,

следовательно,

$\overrightarrow{a_2}=\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{a_1};\overrightarrow{a_2}})=\frac{\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}}{|\overrightarrow{a_1}|\cdot|\overrightarrow{a_2}|}=$$

$$=\frac{-1\cdot(-\sqrt{2})+1\cdot(-\sqrt{2})+0\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{(-\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}}=\frac{0}{\sqrt{2}\sqrt{6}}=0,$$ следовательно, $\varphi=(\widehat{\overrightarrow{a_1};\overrightarrow{a_2}})=\frac{\pi}{2}$.

Пример 2.27. Доказать параллельность прямых $l_1:\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-1}{1}$ и $l_2:\frac{x-2}{-9}=\frac{y+3}{6}=\frac{z-1}{-3}$.

Решение.

Выпишем направляющие векторы прямых l_1, l_2и воспользуемся условием параллельности двух прямых:

$\overrightarrow{a_1}=(3;-2;1),\overrightarrow{a_2}=(-9;6;-3)$,

$l_1\parallel l_2\Leftrightarrow\overrightarrow{a_1}\parallel\overrightarrow{a_2}:\frac{3}{-9}=\frac{-2}{6}=\frac{1}{-3}$,равенство выполняется-

соответствующие координаты пропорциональны, следовательно, прямые параллельны, что и требовалось доказать.

Пример 2.28. Доказать перпендикулярность прямых $l_1:\frac{x-2}{-1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-1}{3}$и $l_2:\begin{cases}x=2+2t\\ y=-t\\ z=4\end{cases}$.

Решение.

Выпишем направляющий векторы прямых $l_1,\ l_2$и воспользуемся условием перпендикулярности двух прямых:

$\overrightarrow{a_1} = (-1; -2; 3), \overrightarrow{a_2} = (2; -1; 0),$

$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{a_1} \perp \overrightarrow{a_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2} = 0,$

$\overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2} = -1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow l_1 \perp l_2$, что и требовалось доказать.

3.Задания для самостоятельного решения:

1.Составить канонические уравнения прямой проходящей через точку$M_0\ (2; 0; -3)$ параллельно вектору $\vec{a} = (2; -3; 5)$.

2. Составить канонические уравнения прямой проходящей через точку$M_0\ (-2; 0; 1)$ параллельно прямой $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

3. Составить канонические уравнения прямой проходящей через точку $M_0\ (1;1;-1)$ параллельно оси Ox.

4. Составить канонические уравнения прямой проходящей через точку $M_0\ (-4;2;3)$ параллельно прямой $\begin{cases} x=-2+t \\ y=2t \\ z=1-\frac{t}{2} \end{cases}$.

5. Составить канонические и параметрические уравнения прямой проходящей через две точки $M_1(1;-2;1)$ и $M_2(3;1;-1)$.

6. Написать канонические уравнения прямой, если прямая задана в виде: $\begin{cases} 3x-y+2z-7=0 \\ x+3y-2z-3=0 \end{cases}$.

7. Доказать параллельность прямых $l_1: \frac{x}{4}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z+5}{2}$ и $l_2: \begin{cases} x=3+2t \\ y=2-t \\ z=t-7 \end{cases}$.

8. Доказать перпендикулярность прямых:

$l_1: \begin{cases} 2x-2y+z+3=0 \\ 3x-2y+2z+17=0 \end{cases}$ и $l_2: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-t \\ z=\frac{3}{2}t \end{cases}$.

9. Доказать перпендикулярность прямых

$l_1:\begin{cases} x = 1+2t \\ y = t \\ z = -t-1 \end{cases}$ и $l_2:\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-2t \\ z = 1 \end{cases}$.

10. Найти угол между прямыми $l_1:\begin{cases} 2x-2y-z+7=0 \\ x+2y-2z+3=0 \end{cases}$ и $l_2:\begin{cases} 4x+y+3z-5=0 \\ 2x+2y-3z+10=0 \end{cases}$.

11. Найти угол между прямыми $l_1:\frac{x}{11}=\frac{y+1}{8}=\frac{z-1}{7}$ и $l_2:\frac{x-4}{7}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{8}$.

12. Найти канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0\,(-4;2;3)$ параллельно прямой: $\begin{cases} x-y+z-1=0 \\ 2x+y-4z+3=0 \end{cases}$.

13. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0\,(1;-1;2)$ и перпендикулярно

векторам $\overrightarrow{a_1}=(2;2;3)$ и $\overrightarrow{a_2}=(-2;5;0)$.

14. Привести уравнение прямой $\begin{cases} 2x-y-z=0 \\ x+y+z-3=0 \end{cases}$ к каноническому виду.

15. При каком значении k прямые $l_1:\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4}$ и $l_2:\frac{x-3}{k}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-7}{2}$ пересекаются

16. При каком значении m прямые $l_1:\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{k}$ и $l_2:\frac{x-3}{m}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-7}{2}$ параллельны.

17. Составить параметрические уравнения следующих прямых:

а) $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{0}$;**б)**$\frac{z-5}{-4}=\frac{y+2}{-1}$; $x-7=0$.

18. Найти точкуM_0 пересечения двух прямых, первая из которых проходит через точки$M_1(1;-2;5)$ и $M_2(2;1;4)$, а вторая — через точки $M_3(6;3;-2)$ и $M_4(4;2;1)$.

19.Найти расстояние от точки $M_0(0;2;3)$ до пря-

$$l: \frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}.$$

мой

20. Найти расстояние между параллельными прямыми

$l_1: \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2}$и $l_2: \frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}$.

Ответы:

3.1.$\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{5}$. **3.2.** $\frac{x+2}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-1}$.**3.3.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+1}{0}$.

3.4. $\frac{x+4}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{-1}$.**3.5.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-2}$; $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+3t. \\ z=1-2t \end{cases}$

3.6.$\frac{x-2}{-4}=\frac{y}{8}=\frac{z+3}{10}$.**3.10.**$\varphi=\frac{\pi}{4}$.**3.11.** $\varphi=arccos\frac{4}{21}\approx 79^0$.

3.12. $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-5}{1}$.**3.13.**$\frac{x-1}{-15}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z-2}{14}$.

3.14. $\frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{1}$.**3.15.** $k=3$. **3.16.** $k=-3, m=-2$.

3.17.а) $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 \\ z = 1 \end{cases}$; **б)** $\begin{cases} x = 7 \\ y = -2 - t \\ z = 5 - 4t \end{cases}$. **3.18.** $M_0(2;1;4)$.
3.19. $d = 5$. **3.20.** $d = 3$.

2.7. Угол между прямой и плоскостью.

Пусть в пространстве заданы плоскость $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$ с нормальным вектором $\vec{n} = (A; B; C)$ и прямая $l: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ с направляющим вектором $\vec{a} = (m; n; p)$.

Углом между **прямой и плоскостью** в пространстве называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость, $0 \le \beta \le 90^0$, таким образом

β -угол между плоскостью α и прямой l; γ- угол между

нормальным вектором плоскости $\vec{n} = (A; B; C)$ и направляющим вектором прямой $\vec{a} = (m; n; p)$.

Найдем угол $\gamma = (\widehat{\vec{n}; \vec{a}})$ -

угол между векторами $\vec{n}$ и $\vec{a}$:

$$cos\gamma = \frac{\vec{n} \cdot \vec{a}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|}$$

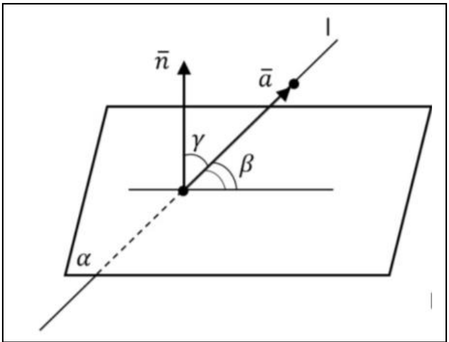

Рис.33

Найдем синус угла β:

$$\gamma + \beta = 90^0,$$

$\gamma = 90^0 - \beta$,то есть

$$cos\gamma = cos(90^0 - \beta) = sin\beta.$$

Угол между прямой и плоскостью считается положительной величиной (см.рис.33), так как $0 \leq \beta \leq 90^0$,

$sin\beta \geq 0$, получаем:

$$sin\beta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

Таким образом, получим формулу для вычисления синуса **угла между прямой и плоскостью**

$$\boldsymbol{sin\beta = \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}} \quad \textbf{(2.22)}$$

Существует несколько вариантов расположения прямой и плоскости: прямая параллельна плоскости, прямая перпендикулярна плоскости (прямая перпендикулярна плоскости, в частности), прямая лежит в плоскости. Рассмотрим каждую ситуацию в отдельности.

Условие параллельности прямой и плоскости

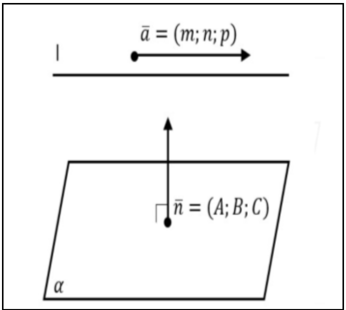

Рис.34

Прямая l параллельна плоскости α, в этом случае, когда $\vec{a} \perp \vec{n}$(см. рис.34), то есть

$\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$,отсюда получим:

$$\boldsymbol{l \parallel \alpha \Leftrightarrow \quad Am + Bn + Cp = 0} \quad \textbf{(2.23)}$$

- условие параллельности прямой и плоскости.

Условие перпендикулярности прямой и плоскости.

Прямая пересекает плоскость в некоторой (·).

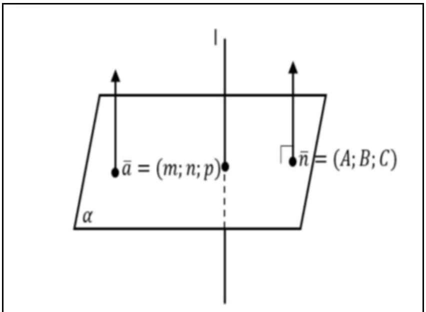

Рис.35

В частности, прямая l перпендикулярна плоскости α (см. рис.35)

Если прямая l перпендикулярна плоскости α, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{n}$параллельны, то есть

$\boldsymbol{l \perp \alpha \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}}$ (2.24) – **условие перпендикулярности прямой и плоскости.**

Условие принадлежности прямой плоскости.

Если прямая l лежит в плоскости α, то она параллельна этой плоскости и любая точка $M_0\ (x_0; y_0; z_0)$ прямой принадлежит уравнению плоскости.

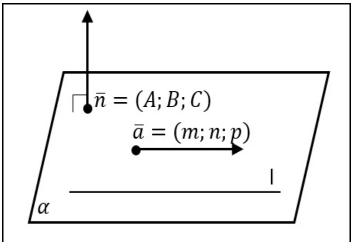

Рис.36

То есть выполняется условие

$l \parallel \alpha : \vec{a} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \quad Am + Bn + Cp = 0$(1);

Любая точка $M_0\ (x_0; y_0; z_0)$ прямой удовлетворяет уравнению плоскости $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$ (см. рис.36), то есть выполняется условие:

$\alpha(M_0): Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0(2).$

Таким образом, **условие принадлежности прямой плоскости** имеет вид**:**

$$\begin{cases} \boldsymbol{Am + Bn + Cp = 0} \\ \boldsymbol{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0} \end{cases} (\mathbf{2.25})$$

Пример 2.29. Найти угол между прямой

$l: \frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-1}{1}$ и плоскостью

$\alpha: 4x - y - 3z + 1 = 0.$

Решение.

Из канонических уравнений прямой выписываем координаты направляющего вектора- их показывают числа в знаменателях дробей: $\vec{a} = (5; -1; 1)$.Из общего

уравнение плоскости выписываем координаты нормального вектора плоскости - коэффициентов при переменных x, y и z:$\vec{n} = (4; -1; -3)$.

Подставляем координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{n}$ в формулу

для вычисления синуса угла между прямой и плоскостью:

$$sin\beta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|} = \frac{|4 \cdot 5 - 1 \cdot (-1) - 3 \cdot 1|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{5^2 + (-1)^2 + 1^2}} =$$

$$= \frac{18}{\sqrt{26}\sqrt{27}} = \frac{18}{\sqrt{702}}, \beta = arcsin\frac{18}{\sqrt{702}}$$ — угол между прямой и плоскостью.

Пример 2.30. Являются ли параллельными прямая $l: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{3}$ и плоскость $\alpha: 2x + y - z = 0.$

Решение.

Чтобы прямая $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{3}$ была параллельна плоскости $2x+y-z=0$ необходимо и достаточно, чтобы её направляющий вектор $\vec{a}=(2;-1;3)$ был параллелен данной плоскости, то есть перпендикулярен нормальному вектору данной плоскости $\vec{n}=(2;1;-1)$, то есть $l \parallel \alpha \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{n}$. Чтобы проверить перпендикулярность векторов вычислим их скалярное произведение, если оно равно 0 - векторы перпендикулярны:

$$\vec{a}\cdot\vec{n}=2\cdot 2+(-1)\cdot 1+3\cdot(-1)=0.$$

Таким образом, $\vec{a}\cdot\vec{n}=0$, то есть прямая и плоскость параллельны.

Пример 2.31. При каких значениях A и B прямая l: $\begin{cases} x=3+2t \\ y=5-3t \\ z=-2-2t \end{cases}$ перпендикулярна плоскости

$\alpha: Ax+By+3z-5=0.$

Решение.

Прямая перпендикулярна плоскости, тогда и только тогда, когда направляющий вектор прямой $\vec{a} = (2; -3; -2)$ параллелен нормальному векто-

ру $\vec{n} = (A; B; 3)$ плоскости, то есть

$$l \perp \alpha \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{n}: \frac{2}{A} = \frac{-3}{B} = \frac{-2}{3};$$

$$\frac{2}{A} = \frac{-2}{3}, A = \frac{2 \cdot 3}{-2} = -3;$$

$$\frac{-3}{B} = \frac{-2}{3}, B = \frac{-3 \cdot 3}{-2} = \frac{9}{2}.$$

Таким образом, при $A = -3, B = \frac{9}{2}$ прямая перпендику-

лярна плоскости.

Пример 2.32. Показать, что прямая $l: \frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$

лежит в плоскости $\alpha: x + 2y - 4z + 1 = 0$.

Решение.

Чтобы прямая $\frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$ лежала в плоскости

$x + 2y - 4z + 1 = 0$ необходимо, чтобы выполнились 2

условия: 1) прямая была параллельна плоскости, то есть $\vec{a} \perp \vec{n}$;2) хотя бы одна (одна и более) точка прямой принадлежит плоскости.

Выпишем нормальный вектор плоскости$\vec{n} = (1; 2; -4)$ и направляющий вектор прямой $\vec{a} = (8; 2; 3)$,и для начала проверим первое условие:

$l \parallel \alpha \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{n} = 0;$

$\vec{a} \cdot \vec{n} = 8 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-4) \cdot 3 = 0$,выполняется!

Проверим второе условие: мы точно знаем одну точку (из уравнения прямой- по условию), принадлежащую данной прямой $(13; 1; 4)$. Подставляем ее координаты в уравнение плоскости $x + 2y - 4z + 1 = 0$:

$13 + 2 \cdot 1 - 4 \cdot 4 + 1 = 0, 0 = 0$,выполняется!

Два условия выполняются, следовательно, прямая лежит в плоскости.

2.8. Расстояние от точки до плоскости.

Расстояние от точки до плоскости — равно длине перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.

Если плоскость задана уравнением $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$,то **расстояние от произвольной точки** $\boldsymbol{M_1(x_1; y_1; z_1)}$ **до плоскости** вычисляется по формуле:

$$\boldsymbol{d} = \frac{|\boldsymbol{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}|}{\sqrt{\boldsymbol{A^2 + B^2 + C^2}}} \quad (\mathbf{2.26})$$

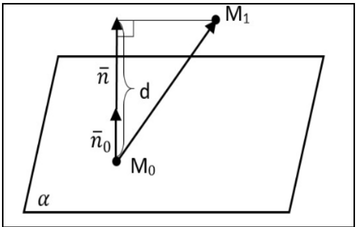

Рис.37

Расстояние определяется как абсолютная величина проекции вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ на вектор $\vec{n}$ (см.рис.37), то есть

$$d = \left|\text{пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_0M_1}\right| = \left|\frac{\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}\right| = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|},$$ где

$\vec{n} = (A; B; C)$, $M_0(x_0; y_0; z_0)$-произвольная точка плоскости, то есть

$\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0)$ и тогда

$$d = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$

$$= \frac{|Ax_1 - Ax_0 + By_1 - By_0 + Cz_1 - Cz_0|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$

$$= \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

так как $(\cdot)M_0 \epsilon \alpha$, то $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$,следовательно,$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Таким образом,

$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$-расстояние от точки до плоскости.

Второй способ: нахождения расстояния от точки до плоскости.

Для этого составим уравнение прямой –как прямой проходящей через точку$M_0(x_0;y_0;z_0)$ параллельно нормальному вектору плоскости$\vec{n}=(A;B;C)$:

$$l:\begin{cases}x=x_0+At\\y=y_0+Bt\\z=z_0+Ct\end{cases};$$

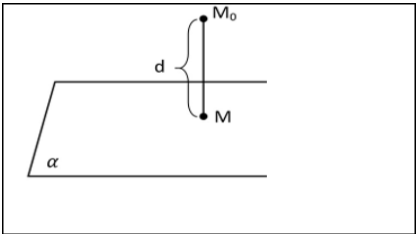

Рис.38

Находим координаты точки M– точки пересечения прямой
$l:\begin{cases}x=x_0+At\\y=y_0+Bt\\z=z_0+Ct\end{cases}$ и плоскости α: $Ax+By+Cz+D=0$.

Для этого решим систему:

$$\begin{cases}x=x_0+At\\y=y_0+Bt\\z=z_0+Ct\\Ax+By+Cz+D=0\end{cases}$$

$$A(x_0+At)+B(y_0+Bt)+C(z_0+Ct)+D=0,$$

$(A^2+B^2+C^2)t=-(Ax_0+By_0+Cz_0+D)$,учитывая, что$(A^2+B^2+C^2)\neq 0$,находим значения параметра t соответствующей точки M, единственным образом:

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A^2+B^2+C^2};$$

Далее находим **расстояние от точки до плоскости** -как длину вектора $\overrightarrow{M_0M}$:

$$d=|\overrightarrow{M_0M}|=\sqrt{(x_M-x_0)^2+(y_M-y_0)^2+(z_M-z_0)^2}.$$

Пример 2.33. Найти расстояние от точки $M_1(0;-5;10)$ до плоскости $\alpha: 5x+2y-z-10=0$.

Решение.

1 способ:

Подставим в формулу (2.26) координаты нормального вектора $\vec{n}=\left(\overset{A}{\overbrace{5}};\overset{B}{\overbrace{2}};\overset{C}{\overbrace{-1}}\right)$ плоскости и координаты точки $M_1\left(\overset{x_1}{\overbrace{0}};\overset{y_1}{\overbrace{-5}};\overset{z_1}{\overbrace{10}}\right)$:

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|5\cdot 0+2\cdot(-5)+(-1)\cdot 10-10|}{\sqrt{5^2+2^2+(-1)^2}}=$$

$=\frac{30}{\sqrt{30}}=\frac{30\sqrt{30}}{30}=\sqrt{30}$ –расстояние от точки до плоскости.

2 способ:

Для этого составим уравнение прямой –как прямой проходящей через точку $M_1\left(\overset{x_1}{\overbrace{0}};\overset{y_1}{\overbrace{-5}};\overset{z_1}{\overbrace{10}}\right)$ параллельно нормальному вектору $\vec{n}=\left(\overset{A}{\overbrace{5}};\overset{B}{\overbrace{2}};\overset{C}{\overbrace{-1}}\right)$:

$$l:\begin{cases} x=5t \\ y=-5+2t; \\ z=10-t \end{cases}$$

Находим координаты точки M– точки пересечения прямой

$l: \begin{cases} x = 5t \\ y = -5 + 2t \\ z = 10 - t \end{cases}$ и плоскости $\alpha: 5x + 2y - z - 10 = 0.$

Для этого решим систему:

$$\begin{cases} x = 5t \\ y = -5 + 2t \\ z = 10 - t \\ 5x + 2y - z - 10 = 0 \end{cases}$$

$$5 \cdot 5t + 2(-5 + 2t) - (10 - t) - 10 = 0,$$

решая полученное уравнение, находим значения параметра t :

$30t - 30 = 0, t = 1,$подставляя t в уравнение $\begin{cases} x = 5t \\ y = -5 + 2t \\ z = 10 - t \end{cases}$ получим координаты искомой точки $M: \begin{cases} x = 5 \\ y = -3. \\ z = 9 \end{cases}$

Таким образом,

$$d = |\overrightarrow{M_1M}| = \sqrt{(5-0)^2 + \left(-3-(-5)\right)^2 + (9-10)^2} = \sqrt{30}.$$

Пример 2.34. Найти расстояние между параллельными плоскостями $\alpha_1: 3x - y + 2z + 3 = 0$ и $\alpha_2: 6x - 2y + 4z - 1 = 0$.

Решение.

Учитывая, что расстояние между плоскостями — равно длине перпендикуляра, опущенного с одной плоскости на другую. Следовательно, для вычисления расстояния между параллельными плоскостями, необходимо, на какой-нибудь из этих плоскостей взять произвольную точку, например, на первой плоскости возьмем точку M_1, для которой $x_1 = 0, z_1 = 0$ и определим ординату y_1 этой точки: $3 \cdot 0 - y_1 + 2 \cdot 0 + 3 = 0; y_1 = 3$. Итак, на первой плоскости взята точка $M_1\left(\overset{x_1}{\overset{\frown}{0}};\overset{y_1}{\overset{\frown}{3}};\overset{z_1}{\overset{\frown}{0}}\right)$, найдём расстояние между параллельными плоскостями-как расстояние от точки M_1 до второй плоскости $\alpha_2: 6x - 2y + 4z - 1 = 0$, где $\vec{n} = \left(\overset{A}{\overset{\frown}{6}};\overset{B}{\overset{\frown}{-2}};\overset{C}{\overset{\frown}{4}}\right), D = -1$ по формуле (2.26):

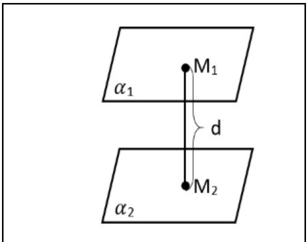

Рис.39

$$d = \frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|6\cdot0+(-2)\cdot3+4\cdot0-1|}{\sqrt{6^2+(-2)^2+4^2}} = \frac{7}{\sqrt{48}} = \frac{7\sqrt{48}}{48}.$$

4.Задания для самостоятельного решения:

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;-3;-5)$ перпендикулярно к плоскости

$\alpha: 6x - 3y - 5z + 2 = 0.$

2. При каком значении m прямая $l: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{m} = \frac{z-1}{-2}$ параллельна плоскости $\alpha: x - 3y + 6z + 7 = 0.$

3. При каких значениях A и B прямая $l: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 - 3t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$ перпендикулярна плоскости $Ax + By + 3z - 5 = 0$.

4. Найти угол между прямой $l: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-2}$ и плоскостью $\alpha: 4x - 2y - 2z - 1 = 0$.

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2; -2; 1)$ перпендикулярно прямой

$l: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

6. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(-3; 4; -1)$ на плоскость

$\alpha: 3x - 2y + z - 3 = 0$.

7. Найти проекцию точки $P(5; 2; -1)$ на плоскость $\alpha: 2x - y + 3z + 23 = 0$.

8. Напишите уравнение плоскости, которая проходит через начало координат и перпендикулярна прямой $l: \frac{x}{-3} = \frac{y+1}{-7} = \frac{z+\sqrt{5}}{2}$.

9. При каком значении параметра a прямая $l: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-1}$ и плоскость

α: $2x + (a + 2)y - 2z + 11 = 0$ перпендикулярны.

10. Найдите точку пересечения прямой $l: \frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{2}$ и плоскости α: $x - 3y + z - 8 = 0$.

11. Найдите точку пересечения прямой, проходящей через точки $M_1(1;1;1)$,$M_2(1;2;3)$ и плоскости

α: $x - y - 3z - 11 = 0$.

12. При каком значении параметра a плоскость α: $x + y + az - 4 = 0$ и прямая $l: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$: **а)** пересекаются; **б)** параллельны?

13. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку$A(2;3;-4)$ и перпендикулярной прямой $l: \frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$.

14. Напишите уравнение плоскости, проходящей через прямую $l: \frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{2}$ и точку $M(3;4;5)$.

15. Найдите координаты проекции точки $P(-1;2;0)$ на плоскость $\alpha: 4x - 5y - z - 7 = 0$.

16. Найдите расстояние от точки $M_0(1;2;-3)$ до плоскости $\alpha: 2x - 2y + z + 4 = 0$.

17. Показать, что прямая $l: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{3}$лежит в

плоскости $\alpha: 2x + y - z = 0$.

18. Найти расстояние между параллельными плоскостями$\alpha_1: 2x - y + 2z + 9 = 0$ и $\alpha_2: 4x - 2y + 4z - 21 = 0$.

19. Составить уравнение плоскость, проходящей через точку $M_0(1;-1;-1)$ перпендикулярно к прямой

$l: \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{4}$.

20. Составить уравнение плоскость, проходящей через точку $M_0(1;-2;1)$ перпендикулярно к прямой

$l: \begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$.

Ответ:

4.1. $\frac{x-2}{6} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+5}{-5}$. **4.2.** $m = -3$. **4.3.** $A = -3$, $B = \frac{9}{2}$. **4.4.** $\gamma = 30^0$. **4.5.** $2x - y + 2z - 8 = 0$. **4.6.** $\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+1}{1}$. **4.7.** $P'(1;4;-7)$. **4.8.** $3x + 7y - 2z = 0$. **4.9.** $a = 4$. **4.10.** $(2;-1;3)$. **4.11.** $(1;-1;-3)$. **4.12.** **а)** $a \neq -1$; **б)** $a = -1$. **4.13.** $y + z + 1 = 0$. **4.14.** $x - 2y + z = 0$. **4.15.** $(1;-0{,}5;-0{,}5)$. **4.16.** $d = \frac{1}{3}$. **4.18.** $d = 6{,}5$. **4.19.** $2x - 3y + 4z - 1 = 0$. **4.20.** $x + 2y + 3z = 0$.

ГЛАВА 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Порядком алгебраического уравнения называется высшая степень входящего в уравнение неизвестного. Линии, определяемые алгебраическими уравнениями второй степени относительно переменных x и y, то есть уравнениями вида

$$\boldsymbol{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0} \quad \textbf{(3.1)},$$

где хотя бы один из коэффициентов A, B, C отличен от нуля $(A^2+B^2+C^2\neq 0)$,называются **кривыми второго порядка**.

Кривые второго порядка делятся на вырожденные и невырожденные. Вырожденные кривые второго порядка — это прямые и точки, которые задаются уравнением второй степени, например, уравнение $x^2+y^2=0$ определяет на плоскости точку $O(0;0)$, в этом случае говорят, что окружность вырождается в точку. Если уравнению второго порядка не удовлетворяет ни одна точка плоскости, то тоже говорят, что уравнение определяет вырожденную кривую (мнимую кривую второго порядка), например, уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ задаёт «мнимый» эллипс.

К невырожденным кривыми второго порядка относятся: окружность, эллипс, гипербола и парабола.

Замечание: уравнение (3.1) всегда определяет: либо окружность $A=C$; либо эллипс $A\cdot C>0$; либо гиперболу $A\cdot C<0$; либо параболу $A\cdot C=0$.
При этом возможны случаи вырождения: для эллипса (окружности) - в точку или мнимый эллипс (окружность), для гиперболы - в пару пересекающихся прямых, для параболы - в пару параллельных прямых.

3.1. Окружность.

Простейшей кривой второго порядка является окружность.

Окружность-окружностью радиуса R с центром в точке $M_0(x_0;y_0)$ называется множество всех точек $M(x;y)$плоскости удовлетворяющих условию $M_0M=R$,то есть множество точек плоскости, равноудалённых от данной точки (центра) на расстояние R.Из определения получаем уравнение:

$$M_0M = R;$$
$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = R;$$
$$\boldsymbol{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2} \quad \textbf{(3.2)}$$

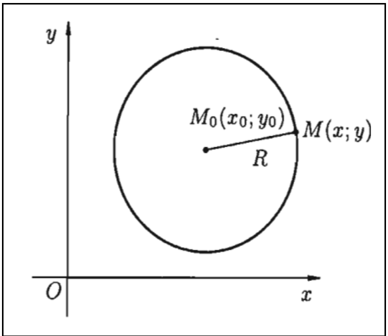

Рис.40

Уравнение (3.2) задаёт **окружности радиуса $\boldsymbol{R}$, с центром в точке $\boldsymbol{M_0(x_0;y_0)}$**(см.рис.40).

В частности, полагая в формуле (3.2) $x_0 = 0, y_0 = 0$,получим:

$\boldsymbol{x^2+y^2 = R^2}$ (3.3) – **уравнение окружности с центром в начале координат $\boldsymbol{O(0;0)}$ и радиусом $\boldsymbol{R}$.**

Замечание: при сравнении уравнения (3.2) с общим уравнением (3.1), легко заметить, что если кривая определяет окружность, то.

Пример 3.1. Найти координаты центра и радиус окружности и построить её, если её уравнение задано в виде $x^2+2x+y^2-6y+6 = 0.$

Решение.

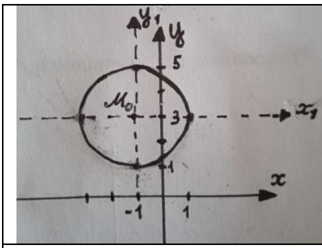

Рис.41

При сравнении исходного уравнения с уравнением (3.1) легко заметить, что $A = C, B = 0$,поэтому данное уравнение определяет окружность. Для нахождения координат центра и радиуса окружности данное уравнение необходимо привести к виду $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2$.

Для этого преобразуем левую часть данного уравнения и выделим полные квадраты относительно x и y:

$$\left(x^2+2\cdot\overset{b}{\widehat{1}}\cdot\overset{a}{\widehat{x}}+\overset{b^2}{\widehat{1}}\right)-1+\left(y^2-2\cdot\overset{b}{\widehat{3}}\cdot\overset{a}{\widehat{y}}+\overset{b^2}{\widehat{9}}\right)-9+6=0,$$

$(x+1)^2+(y-3)^2=2^2$, сравнивая полученное уравнение с уравнением (3.2) определяем: $M_0(-1;3)$ -центр окружности, $R=2$ –радиус окружности (см.рис.40).

Пример 3.2. Показать, что уравнение $2x^2+4x+2y^2-12y+33=0$ не определяет никакой линии.

Решение.

Преобразуем уравнение к виду $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$:

$2x^2+4x+2y^2-12y+33=0$,

$2(x^2+2\cdot1\cdot x+1)-2+2(y^2-2\cdot3\cdot y+9)-18+33=0$,

$(x+1)^2+(y-3)^2=-13$,

Поскольку сумма квадратов двух вещественных чисел не может быть числом отрицательным, то на плоскости Oxy не существует точек, которые удовлетворяли бы данному уравнению, поэтому уравнение не определяет никакой кривой.

Иногда говорят, что уравнение является уравнением мнимой окружности.

Пример 3.3. Установить, какая линия определяется уравнением $x^2+4x+y^2-y+4{,}25=0$.

Решение.

Приведем уравнение к каноническому виду $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$:

$$(x^2+2\cdot 2\cdot x+4)-4+\left(y^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot y+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+4{,}25=0$$

,

$(x+2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=0$ – окружность, вырожденная в точку $M_0\left(-2;\frac{1}{2}\right)$.

Пример 3.4. Напишите уравнение окружности с центром в точке $C(2;1)$, проходящей через точку $D(-1;1)$.

Решение.

Уравнение окружности радиуса R с центром в точке $M_0(x_0;y_0)$имеет вид:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

То есть для того, чтобы написать уравнение окружности необходимо знать координаты её центра (они известны по условию) и радиус.

Радиус окружности определяет расстояние от центра окружности до любой точки, лежащей на окружности. В нашем случае, радиус будет равен расстоянию от точки $C(2;1)$ до точки $D(-1;1)$, то есть $CD=R$ или

$$R=\sqrt{(x_D-x_C)^2+(y_D-y_C)^2}=$$
$$=\sqrt{(-1-2)^2+(1-1)^2}=3.$$

Подставим известные значения центра- $C(2;1)$ и радиуса $R=3$ в уравнение окружности (3.2), получим:

$(x-2)^2+(y-1)^2=3^2$ – уравнение искомой линии.

Пример 3.5. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(7;-7), B(-2;-4)$ и $C(6;0)$.

Решение.

Уравнение окружности будем искать в виде: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$;

Поскольку окружность проходит через заданные точки, координаты каждой из этих точек удовлетворяют уравнению окружности. Подставляя поочередно в искомое уравнение координаты данных точек, получим три уравнения для определения $x_0, y_0,$ и R:

$$\begin{cases}(7-x_0)^2+(-7-y_0)^2=R^2\\(-2-x_0)^2+(-4-y_0)^2=R^2\\(6-x_0)^2+(0-y_0)^2=R^2\end{cases} \text{ или}$$

$$\begin{cases}(7-x_0)^2+(7+y_0)^2=R^2\\(2+x_0)^2+(4+y_0)^2=R^2.\\(6-x_0)^2+{y_0}^2=R^2\end{cases}$$

Приравняем первое и второе уравнения (правые части этих уравнений между собой равны, значит, равны и левые их части), а потом первое и третье, раскрывая скобки и упрощая, имеем:

$$\begin{cases}(7-x_0)^2+(7+y_0)^2=(2+x_0)^2+(4+y_0)^2\\(7-x_0)^2+(7+y_0)^2=(6-x_0)^2+{y_0}^2\end{cases};$$

$$(7-x_0)^2+(7+y_0)^2=(2+x_0)^2+(4+y_0)^2;$$

$$49-14x_0+{x_0}^2+49+14b+b^2$$
$$=4+4x_0+{x_0}^2+16+8b+{y_0}^2;$$

$$18x_0-6y_0=78|:6;$$

$$3x_0-y_0=13\,.$$

$$(7-x_0)^2+(7+y_0)^2=(6-x_0)^2+{y_0}^2;$$

$$49-14x_0+{x_0}^2+49+14y_0+{y_0}^2$$
$$=36-12x_0+{x_0}^2+{y_0}^2;$$

$$2x_0-14y_0=62|:2;$$

$$x_0-7y_0=31.$$

Решая систему $\begin{cases}3x_0-y_0=13\\x_0-7y_0=31\end{cases}$, находим x_0, y_0:

$$\begin{cases}y_0=3x_0-13\\x_0-7y_0=31\end{cases};$$

$$x_0 - 7(3x_0 - 13) = 31;$$
$$20x_0 = 91 - 31;$$
$x_0 = 3$,следовательно, $y_0 = 3x_0 - 13 = 9 - 13 = -4$.

Подставляя полученные значения x_0 и y_0 в третье уравнений системы$(6 - x_0)^2 + {y_0}^2 = R^2$, получим:

$(6 - 3)^2 + (-4)^2 = R^2$;

$R^2 = 25$.

. Искомое уравнение имеет вид: $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$.

Пример 3.6. Установить, какая линия определяется уравнением:

а) $y = -\sqrt{4 - x^2}$;**б)** $x = \sqrt{16 - y^2}$.

Решение

а) Заметим, что подкоренное выражение не может быть отрицательным, то есть $4 - x^2 \geq 0$, поэтому $y \leq 0$.

Чтобы установить вид линии возведем обе части равенства $y = -\sqrt{4 - x^2}$в квадрат:

$y^2 = \left(-\sqrt{4 - x^2}\right)^2$,

$y^2 = 4 - x^2$,

$x^2 + y^2 = 4$.

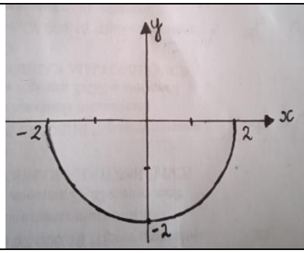

Рис.42

Так как $y \leq 0$,то полученная линия определяет полуокружность с центром $O(0;0)$и радиусом $R = 2$, расположенную в нижней полуплоскости, то есть там, где $y \leq 0$(см. рис.42).

б) Заметим, что $x \geq 0$,так как $16 - y^2 \geq 0$,то есть данное уравнение будет определять часть линии, которая располагается в правой полуплоскости, то есть там, где $x \geq 0$.

Избавляемся от иррациональности и приводим уравнение к виду $x^2 + y^2 = R^2$:

$x^2 = \left(\sqrt{16 - y^2}\right)^2$;

$x^2 = 16 - y^2$;

$x^2 + y^2 = 16 -$ уравнение окружности с центром в точке $O(0;0)$, радиуса $R = 4$.

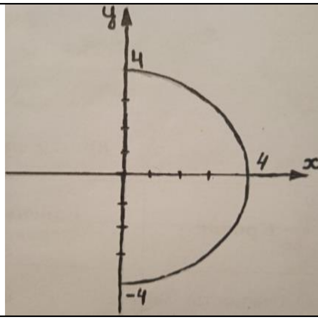

Рис.43

Итак, уравнение $x = \sqrt{16 - y^2}$ определяет полуокружность, расположенную в правой полуплоскости, то есть там, где $x \geq 0$(см.рис.43).

3.2. Эллипс.

Каноническое уравнение эллипса.

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых **фокусами**, есть величина постоянная, равная $2a$,то есть $F_1M + F_2M = 2a$.

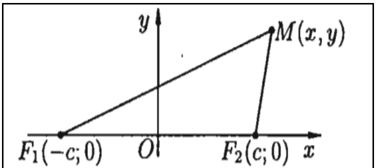

Рис.44

Если известно расстояние между фокусами эллипса $F_1(-c;0)$и $F_2(c;0)$,равное $2c$, то в прямоугольной декартовой системе координат, где ось Ox проходит через фокусы F_1, F_2,а начало координат находится посередине между ними, уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \textbf{(3.4)}$$

Доказательство.

Пусть $M(x; y)$ произвольная точка эллипса, по определению эллипса:

$$F_1M + F_2M = 2a,$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$
$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2,$$
$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

$$x^2 + 2cx + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2,$$
$$4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \,|:4,$$
$$cx = a^2 - a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$
$$(a^2 - cx)^2 = \left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2,$$
$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2((x-c)^2 + y^2),$$
$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2,$$
$$a^4 + c^2x^2 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2,$$
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2,$$
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2),$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Очевидно,что$2a > 2c$,то $a > c$,следовательно, $a^2 > c^2, a^2 - c^2 > 0.$

Введём обозначение:

$$\boldsymbol{a^2 - c^2 = b^2} \textbf{(3.5)},$$

то есть $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Уравнение (3.4) называется каноническим уравнением эллипса.

Исследование канонического уравнения эллипса.

Установим форму эллипса, пользуясь ее каноническим уравнением.

1)Уравнение (3.4) содержит x и y только в четных степенях. Следовательно, эллипс симметричен относительно осей Ox и Oy, а также относительно точки 0(0;0), которую называют центром эллипса. Центр симметрии эллипса называют центром эллипса.

2)Найдем точки пересечения эллипса с осями координат.

Положив $y = 0$ в уравнении (3.4), находим точки пересечения эллипса с осью Ox:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1| \cdot a^2;$$
$$x^2 = a^2;$$
$$x_{1,2} = \pm a.$$

Следовательно, эллипс пересекает ось Ox в точках$A_1(a;0), A_2(-a;0)$.

Положив $x = 0$ в (3.4), находим точки пересечения эллипса с осью Oy:

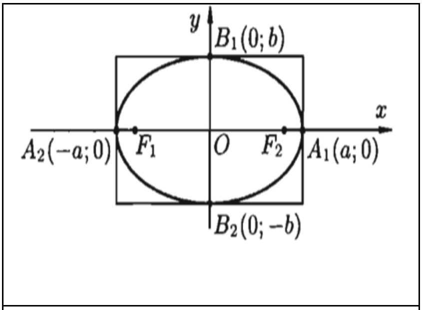

Рис.45

$$\frac{y^2}{b^2} = 1| \cdot b^2;$$
$$y^2 = b^2;$$
$$y_{1,2} = \pm b.$$

Следовательно, эллипс пересекает ось Oy в точках$B_1(0;b)$,$B_2(0;-b)$.

Точки$A_1(a;0)$,$A_2(-a;0)$, $B_1(0;b), B_2(0;-b)$ называются **вершинами эллипса**, а отрезки $A_1A_2 = 2a$ и $B_1B_2 = 2b$ называются соответственно **большой и малой осями эллипса**.

Числа a и b называются соответственно большой и малой **полуосями эллипса**.

Дополнительная информация о эллипсе.

Итак,в уравнении $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,когда $a > b$, a –

большая полуось, b – малая полуось, $2a$ – большая ось, $2b$ – малая ось, точки $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$ фокусы эллипса, $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

Форма эллипса (мера его сжатости) характеризуется эксцентриситетом $\varepsilon=\frac{c}{a}$, то есть отношением фокусного расстояния к большей оси, так как $a>c$, то $\varepsilon<1$. Чем меньше эксцентриситет эллипса, тем эллипс будет менее сплющенным.

Фокальным радиусом называется расстояние от некоторой точки кривой до фокуса. Фокальные радиусы эллипса r_1 и r_2 связаны соотношением $r_1+r_2=2a$.

С эллипсом связаны две прямые d_1 и d_2, называемые его **директрисами**, уравнения которых имеют вид $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ (см.рис.46)

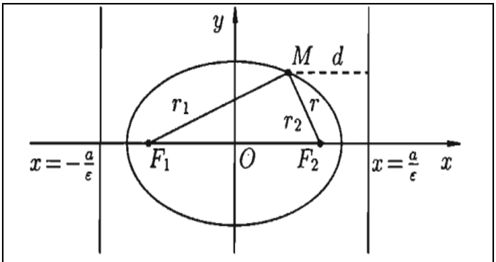

Рис.46

Теорема 3.1. Для произвольной точки $M(x;y)$, принадлежащей эллипсу верны соотношения: $r_1=a+\varepsilon x, r_2=a-\varepsilon x$.

Доказательство.

Из определения эллипса известно, что $r_1+r_2=2a$, где $r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, $r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$, тогда

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2,$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$$

$$4cx=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\,|:\,4a,$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{c}{a}x,$$

$$r_2=a-\varepsilon x.$$

Таким образом, $r_2=a-\varepsilon x$.

Аналогично доказывается, что $r_1=a+\varepsilon x$.

Теорема доказана.

Замечание:

1)если $a=b$ $\left(\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=0\right)$, эллипс превращается в окружность;

2) если выбрать систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 были на оси Oy и на одинаковом расстоянии от начала координат, то уравнение эллипса будет иметь вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, a>b$,(см.рис.47).

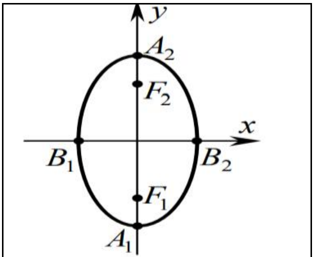

Рис.47

Для этого эллипса $2b$ – большая ось, $2a$ – малая ось,

фокусы имеют координаты $F_1(0;-c)$и $F_2(0;c)$.

Эксцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{b}$.

Уравнения директрис имеет вид:

$$y=\pm\frac{b}{\varepsilon}.$$

Фокальные радиусы точки $M(x;y)$, находятся по формулам: $r_1=a-\varepsilon y, r_2=a+\varepsilon y$.

Уравнение эллипса с осями симметрии параллельными координатным осям.

Найдем уравнение эллипса с центром в точке $O_1(x_0;y_0)$, оси симметрии которого параллельны координатным осям Ox и Oy и полуоси соответственно равны a и b. Поместим в центре эллипса O_1 начало новой системы координат $O_1x'y'$, оси которой O_1x' и O_1y'параллельны соответствующим осям Ox и Oy и одинаково с ними направленны (см. рис.48). В этой системе координат уравнение эллипса имеет вид:

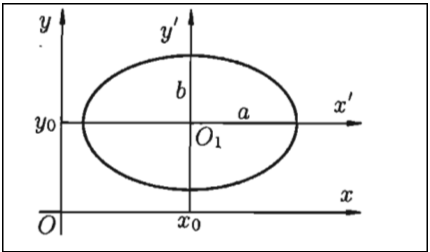

Рис.48

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1,$$

так как $x'=x-x_0$, $y'=y-y_0$ (формулы параллельного переноса, см. стр.6), то в старой системе координат уравнение эллипса запишется в виде:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0\ )^2}{b^2}=1\ (3.6)$$

-уравнение эллипса с центром в точке $O_1(x_0;y_0)$ с осями симметрии параллельными координатным осям.

Пример 3.7. Дан эллипс $9x^2+25y^2=225$. Найти: **а)** полуоси; **б)** фокусы; **в)** эксцентриситет; **г)** уравнения директрис. Сделать чертёж.

Решение.

Приведем заданное уравнение к каноническому уравнению$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$:

$9x^2+25y^2=225|:225;$

$\frac{9x^2}{225}+\frac{25y^2}{225}=1;$

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$

а) $a^2=25,\ a=5;$

$b^2=9, b=3.$

б) $a>b$,следовательно, фокусы эллипса лежат на оси

Ox, то есть $F_1(-c;0)$и $F_2(c;0)$ фокусы эллипса,

где $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=4,$

тогда $F_1(-4;0),\ F_2(4;0).$

в)$a>b, \varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}=0{,}8;$

г) уравнения директрис:

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{5}{\frac{4}{5}} = \pm\frac{25}{4} = \pm 6{,}25.$$

Сделаем чертёж: см.рис.49

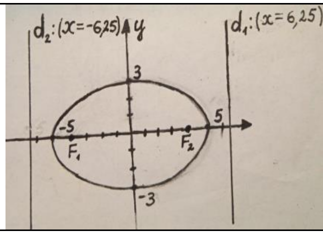

Рис.49

Пример 3.8. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса, заданного уравнением $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Решение

Построим эллипс и найдём координаты его нижней вершины:

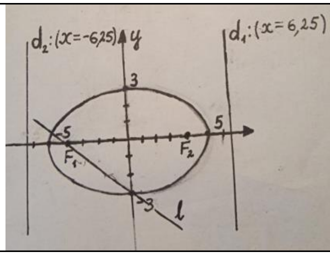

Рис.50

$a^2 = 25, a = 5; b^2 = 9, b = 3,$ следовательно,$(0;-3)$ –нижняя вершина эллипса;

Найдём координаты левого фокуса:

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25-9} = 4$, $F_1(-4;0)$;

Уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса, то есть две точки$(0;-3)$ и $(-4;0)$ (см.рис.50) имеет вид:

$$\frac{x-0}{-4-0} = \frac{y-(-3)}{0-(-3)},$$

$$\frac{x}{-4} = \frac{y+3}{3},$$

$$3x = -4(y+3),$$

$$3x + 4y + 12 = 0.$$

Пример 3.9. Дан эллипс $9x^2 + 5y^2 = 45$. Найти: **а**) его

полуоси; **б)** фокусы; **в)** эксцентриситет; **г)** уравнения директрис. Сделать чертёж.

Решение.

Приведем заданное уравнение к каноническому уравнению

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$:

$9x^2 + 5y^2 = 45|:45;$

$$\frac{9x^2}{45} + \frac{5y^2}{45} = 1;$$

$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$ –уравнение эллипса с центром $O(0;0)$.

а) $a^2 = 5,\ a = \sqrt{5};$

$b^2 = 9, b = 3.$

б) $b > a$,следовательно, фокусы эллипса лежат на оси

Oy, то есть

$F_1(0;-c)$и $F_2(0;c)$ фокусы эллипса,

где $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{9-5} = 2$,

тогда $F_1(0;-2)$, $F_2(0;2)$.

в) $b > a, \varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{2}{3}$;

г) уравнения директрис:

$$y = \pm\frac{b}{\varepsilon} = \pm\frac{3}{\frac{2}{3}} = \pm\frac{9}{2} = \pm 4{,}5.$$

Сделаем чертёж: см.рис.51

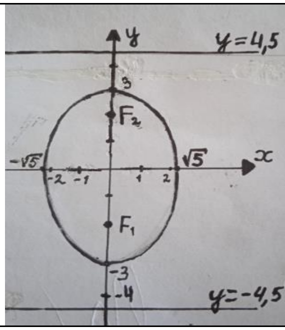

Рис.51

Пример 3.10. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная:
а) малую полуось $b = 8$ и эксцентриситет $\varepsilon = 0{,}6$; **б)** сумму полуосей $a + b = 12$ и расстояние между фокусами $2c = 6\sqrt{2}$.

Решение.

а) Так как $a > b, \varepsilon = \frac{c}{a} = 0{,}6$, то $c = 0{,}6a$. Подставляя в соотношение $a^2 - c^2 = b^2$ известные величины $b = 8$ и $c = 0{,}6a$, получим:

$$a^2 - (0{,}6a)^2 = 8^2;$$
$$a^2 - 0{,}36a^2 = 64;$$
$$0{,}64a^2 = 64;$$
$$a^2 = 100.$$

Уравнение эллипса будет иметь вид: $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1.$

б) Для определения уравнения эллипса по известным соотношениям $a+b=12$ и $2c=6\sqrt{2}\left(c=3\sqrt{2}\right)$ необходимо определить a и b,из соотношения $a^2-c^2=b^2$ имеем:

$$a^2-b^2=c^2;$$

$$a^2-b^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2;$$

$$a^2-b^2=18;$$

$(a-b)(a+b)=18$, подставляя $a+b=12$ в полученное равенство, имеем:

$$12(a-b)=18;$$

$$a-b=1{,}5.$$

Решая систему уравнений $\begin{cases}a-b=1{,}5\\a+b=12\end{cases}$, получим: $a=6{,}75, b=5{,}25.$

Уравнение эллипса принимает вид:

$$\frac{x^2}{6{,}75^2}+\frac{y^2}{5{,}25^2}=1.$$

.

Пример 3.11. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат симметрично относительно начала координат, зная, что:

а) большая ось равна 10 и расстояние между фокусами равно 8; **б)** расстояние между фокусами равно 24 и эксцентриситет $\varepsilon=\frac{12}{13}$.

Решение.

а) Так как $a>b, \varepsilon=\frac{c}{a}=0{,}6,$ то $c=0{,}6a$. Подставляя в соотношение

$$a^2-c^2=b^2$$

известные величины $b=8$ и $c=0{,}6a$, получим:

$$a^2 - (0{,}6a)^2 = 8^2;$$
$$a^2 - 0{,}36a^2 = 64;$$
$$0{,}64a^2 = 64;$$
$$a^2 = 100.$$

Уравнение эллипса будет иметь вид: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1.$

б) Так как $2c = 24$,то $c = 12$.Учитывая, что $\varepsilon = \frac{c}{b}$,с другой стороны

$\varepsilon = \frac{12}{13}$, то$\frac{c}{b} = \frac{12}{13}$,$\frac{12}{b} = \frac{12}{13}$,$b = 13.$

Найдём a из соотношения:

$c^2 = b^2 - a^2;$

$a = \sqrt{b^2 - c^2};$

$a = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5.$

Таким образом, искомое уравнение эллипса будет иметь вид: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1.$

Пример 3.12. Определить, какие из точек $A_1(-2;3)$, $A_2(0;-2)$, $A_3(0;3)$ лежат на эллипсе $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$, какие внутри эллипса и какие вне эллипса.

Решение.

Для удобства дальнейшего решения преобразуем уравнение эллипса:

$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1|\cdot 45$,

$9x^2+5y^2=45.$

Если координаты точки удовлетворяют уравнению эллипса, значит точка лежит на эллипсе:

$A_1(-2;3)\colon 9\cdot(-2)^2+5\cdot 3^2>45 \Rightarrow$ точка A_1 лежит вне эллипса;

$A_2(0;-2)\colon 9\cdot 0^2+5\cdot(-2)^2<45 \Rightarrow$ точка A_2 лежит внутри эллипса;

$A_3(0;3)\colon 9\cdot 0^2+5\cdot 3^2=45 \Rightarrow$ точка A_3 лежит на эллипсе.

Пример 3.13. Привести общее уравнение кривой второго порядка:
а)$5x^2-30x+9y^2+18y+9=0$;

б)$4x^2-8x+3y^2+12y-32=0$ к каноническому виду. Найти координаты центра, координаты вершин и фокусов, уравнения асимптот и директрис, и построить кривую.

Решение.

а) При сравнении исходного уравнения с уравнением (3.1) легко заметить, что$A\cdot C>0$,поэтому данное уравнение определяет эллипс. Приведем общее уравнение кривой второго порядка к каноническому виду, выделяя полные квадраты:

$5(x^2-6x)+9(y^2+2y)+9=0;$
$5(x^2-2\cdot3\cdot x+9)-45+9(y^2+2\cdot1\cdot y+1)-9+9=0;$
$5(x-3)^2+9(y+1)^2=45|:45;$
$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{5}=1-$ уравнение эллипса с центром в точке $O_1(3;-1)$ и полуосями $a=3, b=\sqrt{5}$.

Оси симметрии кривой: $x'=x-3, y'=y+1$ (см. рис.51).
Уравнение эллипса имеет вид:
$\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{5}=1,\ a>b$,следовательно, фокусы эллипса лежат на оси O_1x' то есть

$F_1'(-c;0)$и $F_2'(c;0)$ фокусы эллипса,

где $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-5}=2,$

тогда $F_1'(-2;0),\ F_2'(2;0)$ –координаты фокусов в новой системе координат $O_1x'y'$,

пересчитаем координаты фокусов в старой системе координат Oxy:

$F_1(-2+3;0-1),\ F_2(2+3;0-1)$ или

$F_1(1;-1),\ F_2(5;-1);$

Эксцентриситет: так как $a>b$,то

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2}{3};$$

Уравнения директрис:

$$x' = \pm\frac{a}{\varepsilon};$$

$$x' = \pm\frac{3}{\frac{2}{3}};$$

$$x - 3 = \pm\frac{9}{2};$$

$x_{1,2} = 3 \pm 4{,}5$,то есть

$x_1 = 7{,}5, x_2 = -1{,}5.$

Сделаем чертеж: см.рис.52

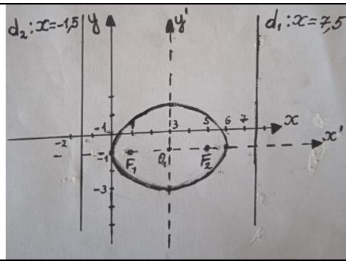

Рис.52

б) $4x^2 - 8x + 3y^2 + 12y - 32 = 0$

Приведем общее уравнение кривой второго порядка к каноническому виду, выделяя полные квадраты:

$4(x^2 - 2x) + 3(y^2 + 4y) - 32 = 0;$

$4(x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x + 1) - 4 + 3(y^2 + 2 \cdot 2 \cdot y + 4) - 12 - 32 = 0;$

$4(x-1)^2 + 3(y+2)^2 = 48;$

$\frac{(x-1)^2}{12}+\frac{(y+2)^2}{16}=1-$ уравнение эллипса с центром$(1;-2)$ и полуосями $a=\sqrt{12}=2\sqrt{3}(\approx 3{,}5), b=4.$

Оси симметрии для кривой: $x'=x-1, y'=y+2$ (см. рис.53).

Уравнение эллипса имеет вид:

$\frac{x'^2}{12}+\frac{y'^2}{16}=1,\ a<b,$следовательно, фокусы эллипса лежат на оси O_1y' то есть

$F_1'(0;-c)$и $F_2'(0;c)$ фокусы эллипса,

где $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{16-12}=2,$тогда

$F_1'(0;-2),\ F_2'(0;2)$ –координаты фокусов в новой системе координат $O_1x'y'$,пересчитаем координаты фокусов в старой системе координат Oxy:

$F_1(0+1;-2-2),\ F_2(0+1;2-2)$ или

$F_1(1;-4),\ F_2(1;0);$

Найдем эксцентриситет: так как $a<b,$то

$$\varepsilon=\frac{c}{b}=\frac{2}{4}=0{,}5;$$

Уравнения директрис:

$y' = \pm \frac{b}{\varepsilon};$

$y' = \pm \frac{4}{\frac{1}{2}};$

$y + 2 = \pm 8;$

$y_{1,2} = -2 \pm 8$,то есть

$y_1 = 6, y_2 = -10.$

Сделаем чертеж: см.рис.53

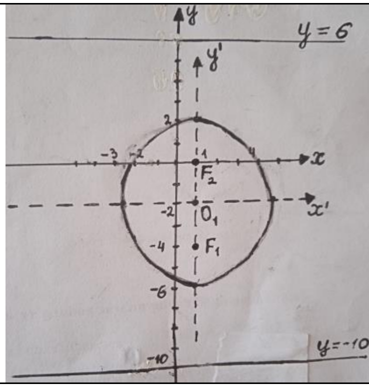

Рис.53

Пример 3.14. Установить, какая линия определяется уравнением $y = -\frac{5}{3}\sqrt{9 - x^2}$.

Решение.

Заметим, что $Oy \le 0$,так как $\sqrt{9 - x^2} \ge 0$,то есть это будет часть линии, которая располагается в нижней полуплоскости.

Избавляемся от иррациональности и приводим уравнение к виду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$:

$$y^2 = \left(-\frac{5}{3}\sqrt{9 - x^2}\right)^2, y^2 = \frac{25}{9}(9 - x^2), \frac{y^2}{25} = \frac{1}{9}(9 - x^2),$$

$$\frac{y^2}{25} = 1 - \frac{x^2}{9},$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1.$$

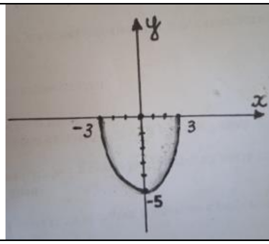

Рис.54

Итак, уравнение $y=-\frac{5}{3}\sqrt{9-x^2}$ определяет половину эллипса, расположенную в нижней полуплоскости, то есть там, где $y\le 0$.

3.3. Гипербола.

Каноническое уравнение гиперболы.

Гиперболой называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых **фокусами** есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами, то есть $|F_1M-F_2M|=2a$,

$2a<2c$, $a<c$.

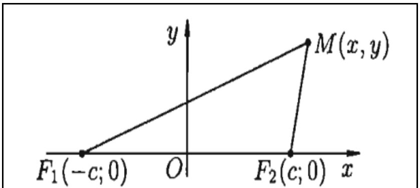

Рис.55

Если за ось Ox принять прямую F_1F_2, а за ось Oy прямую перпендикулярную ей и проходящую через середину отрезка F_1F_2, получим уравнение гиперболы (3.7):

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ \textbf{(3.7)}$$

Доказательство.

Пусть $M(x;y)$ произвольная точка гиперболы, по определению гиперболы

$$|r_1-r_2|=2a;$$

$$r_1-r_2=\pm 2a;$$

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2},r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2};$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a;$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2};$$
$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(\pm 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2;$$
$$(x+c)^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2;$$

$$x^2+2cx+c^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2;$$
$$4cx=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}|:4;$$
$$cx=a^2+a\sqrt{(x-c)^2+y^2};$$
$$(cx-a^2)^2=\left(a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2;$$
$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2((x-c)^2+y^2);$$
$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2;$$
$$c^2x^2+a^4=a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2;$$
$$c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4;$$
$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)|:a^2(c^2-a^2);$$
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1,$$ так как $c>a$,

Обозначим: $\boldsymbol{c^2-a^2=b^2}$ **(3.8)**,

тогда уравнение гиперболы примет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Исследование канонического уравнения гиперболы.

Установим форму гиперболы, пользуясь ее каноническим уравнением.

1) Уравнение (3.7) содержит x и y только в четных степенях. Следовательно, гипербола симметрична относительно осей Ox и Oy, а также относительно точки $O(0;0)$, которую называют центром гиперболы.

2) Найдем точки пересечения гиперболы с осями координат. Положив $y=0$ в уравнении (3.7), находим точки пересечения гиперболы с осью Ox:

$$\frac{x^2}{a^2}=1|\cdot a^2;$$
$$x^2=a^2;$$

$x_{1,2} = \pm a.$

Следовательно, гипербола пересекает ось Ox в точках$A_1(a;0), A_2(-a;0)$.

Положив $x = 0$ в (3.7), получаем:

$-\frac{y^2}{b^2} = 1 | \cdot (-b^2);$

$y^2 = -b^2$,чего не может быть, следовательно, гипербола ось Oy не пересекает.

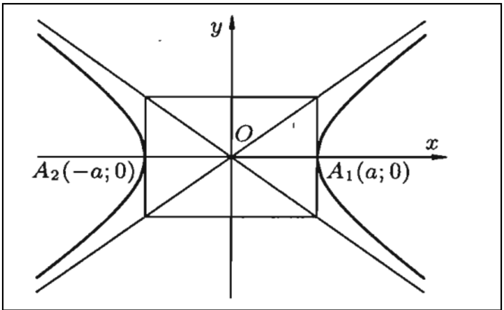

Рис.56

Точки$A_1(a;0)$ и$A_2(-a;0)$ называются вершинами гиперболы, а отрезок $A_1A_2 = 2a$ **действительной осью** гиперболы, отрезок $OA_1 = OA_2 = a$ **действительной полуосью** гиперболы. Отрезок $B_1B_2 = 2b$, соединяющий точки $B_1(0;b)$ и $B_2(0;-b)$ называется **мнимой осью**, число b **мнимой полуосью**. Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$ называется **основным прямоугольником гиперболы.**

Дополнительная информация о гиперболе.

Напомним: прямая l называется асимптотой кривой, если расстояние от точки M кривой до прямой l стремится к нулю при удалении точки M от начала координат. Наклонные асимптоты кривой $y = f(x)$имеют уравнение $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \frac{b}{a} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}{x} = \pm\frac{b}{a};$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{b}{a}x\right) =$$

$$= \frac{b}{a} \lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right) = (\infty-\infty) =$$

$$= \frac{b}{a} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)\left(\sqrt{x^2-a^2}+x\right)}{\sqrt{x^2-a^2}+x} =$$

$$= \frac{b}{a} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-a^2+x^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x} =$$

$$= -ab \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}+x} = 0.$$

Таким образом, гипербола имеет две наклонные асимптоты $y = \pm \frac{b}{a}x$,эти прямые не пересекают гиперболу.

Эксцентриситетом гиперболы (3.7) называется отношение расстояния между фокусами $2c$ к величине действительной оси гиперболы$2a$, то есть отношение$\frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$.

Обозначение: $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{c}{a}$, где c – половина расстояния между фокусами, a – действительная полуось.

Учитывая, что $c^2 = a^2 + b^2$, $c = \sqrt{a^2+b^2}$, то

$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} > 1.$

Эксцентриситет характеризует форму гиперболы, чем меньше эксцентриситет гиперболы, тем более вытянут ее основной прямоугольник.

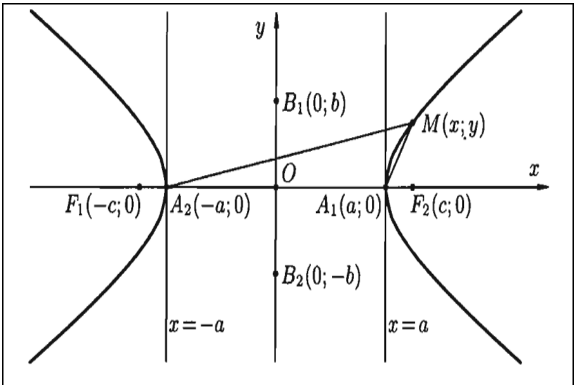

Рис.57

Две прямые, перпендикулярные действительной оси гиперболы и расположенные симметрично относительно центра гиперболы на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от него, называются **директрисами** гиперболы. Их уравнения имеют вид: $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$.

Каждая директриса обладает следующим свойством: если r– расстояние от произвольной точки М гиперболы до какого- либо фокуса, d– расстояние от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ – величина постоянная, равная эксцентриситету.

Замечания:

1)При построении гиперболы (3.7) целесообразно сначала построить основной прямоугольник гиперболы (см. рис. 58), провести прямые, проходящие через противоположные вершины этого прямоугольника, асимптоты гиперболы и отметить вершины гиперболы;

2)Если $a = b$,то гипербола называется **равнобочной** (равносторонней), её каноническое уравнение имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 | \cdot a^2$,
$x^2 - y^2 = a^2$.

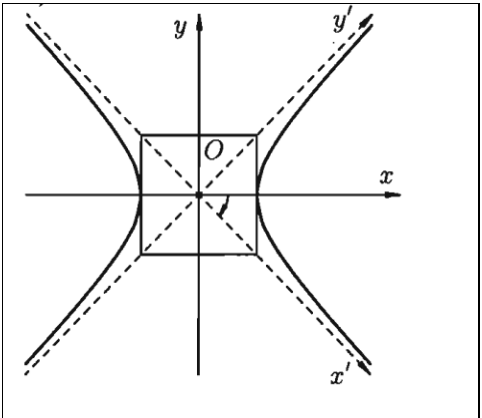

Рис.58

3) Если выбрать систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 были на оси Oy и на одинаковом расстоянии от начала координат $O(0; 0)$(см.рис.58-пунктирная линия), то уравнение гиперболы будет иметь вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Для этой гиперболы: действительная ось – ось Oy , мнимая ось – ось Ox, фокусы имеют координаты $F_1(0; -c)$и $F_2(0; c)$;

Асимптоты имеют вид: $y = \pm \frac{b}{a} x$.

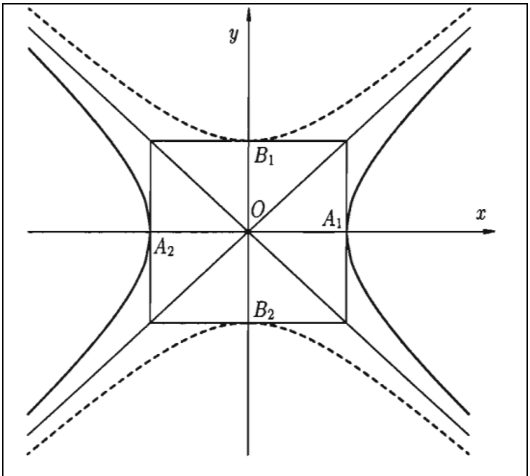

Рис.59

Уравнения директрис имеет вид:

$$y = \pm\frac{b}{\varepsilon}.$$

Уравнение гиперболы с осями симметрии параллельными координатным осям.

Найдем уравнение гиперболы с центром в точке $O_1(x_0;y_0)$, оси симметрии которой параллельны координатным осям Ox и Oy и полуоси соответственно равны a и b. Поместим в центре гиперболы O_1 начало новой системы координат $O_1x'y'$, оси которой O_1x' и O_1y' параллельны соответствующим осям Ox и Oy и одинаково с ними направленны (см. рис.60). В этой системе координат уравнение гиперболы имеет вид:

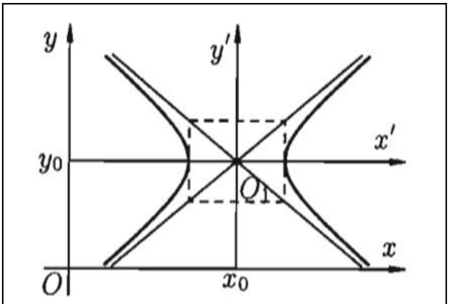

Рис.60

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

так как $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$ (формулы параллельного переноса, см. стр.6), то в старой системе координат уравнение гиперболы запишется в виде:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0\ )^2}{b^2} = 1 \ (3.8)$$

-уравнение гиперболы с центром в точке $O_1(x_0;y_0)$ с осями симметрии параллельными координатным осям.

Пример 3.15. Дана гипербола $16x^2 - 9y^2 = 144$. Найти: **а)** полуоси; **б)** фокусы; **в)** эксцентриситет; **г)**

уравнения асимптот; **д)** уравнения директрис. Сделать чертеж.

Решение.

Найдем стандартную форму уравнения-приведем заданное уравнение к каноническому уравнению гиперболы$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1$, для этого разделим обе части данного уравнения на 144, чтобы правая часть была равна единице:

$16x^2-9y^2=144|:144;$

$\frac{16x^2}{144}-\frac{9y^2}{144}=1;$

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ –уравнение гиперболы с центром $O(0;0)$.

а) Находим полуоси:

$a^2=9,\ a=3;$

$b^2=16, b=4.$

б) Так как уравнение имеет вид$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, фокусы гиперболы лежат на оси Ox, то есть $F_1(-c;0)$и $F_2(c;0)$ фокусы гиперболы, где $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5,$

тогда $F_1(-5;0),\ F_2(5;0).$

в) Эксцентриситет:$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}.$

г) Асимптоты гиперболы находим по формулам:

$$y=\pm\frac{b}{a}x;$$

$$y=\pm\frac{4}{3}x.$$

д) Уравнения директрис находим по формулам:

$$x=\pm\frac{a}{\varepsilon};$$

$$x=\pm\frac{3}{\frac{5}{3}}=\pm\frac{9}{5}=\pm1{,}8.$$

Сделаем чертеж:

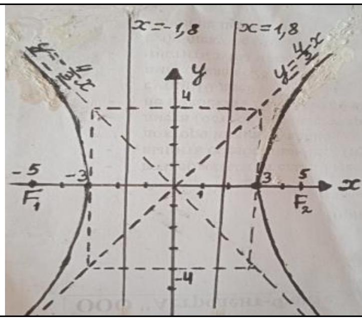

Рис.60

Пример 3.16. Дана гипербола$16x^2-9y^2=-144$. Найти: **а)** полуоси a и b ; **б)** фокусы; **в)** эксцентриситет; **г)** уравнения асимптот; **д)** уравнения директрис. Сделать чертеж.

Решение.

$16x^2 - 9y^2 = -144|:144;$

$\frac{16x^2}{144} - \frac{9y^2}{144} = -1;$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$ –уравнение гиперболы с центром $O(0;0)$.

а) Находим полуоси:

$a^2 = 9,\ a = 3;$

$b^2 = 16, b = 4.$

б) Так как уравнение имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, фокусы гиперболы лежат на оси Oy, то есть

$F_1(0;-c), F_2(0;c)$ – фокусы гиперболы,

где $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5,$

тогда $F_1(0;-5),\ F_2(0;5).$

в) Эксцентриситет:

$$\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{5}{4}.$$

г) Асимптоты гиперболы находим по формулам:

$$y = \pm\frac{b}{a}x;$$

$$y = \pm\frac{4}{3}x.$$

д) Уравнения директрис:

$$y = \pm\frac{b}{\varepsilon} = \pm\frac{4}{\frac{5}{4}} = \pm\frac{16}{5} = \pm 3{,}2.$$

Сделаем чертеж: см.рис.61.

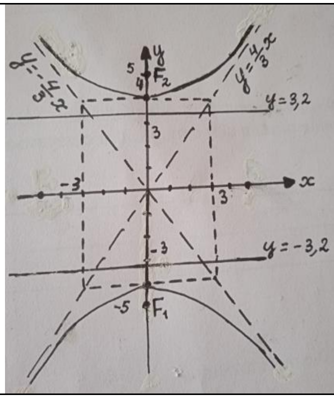

Рис.61

Пример 3.17. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что: **а)** ее оси $2a = 10$ и $2b = 8$;**б)** расстояние между фокусами$2c = 10$ и ось$2b = 8$;**в)** расстояние между фокусами $2c = 10$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$;**г)** уравнения асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами $2c = 20$;

д) $\varepsilon = \sqrt{3}$ и точка $M(\sqrt{5}; \sqrt{2})$ лежит на гиперболе;

е) расстояние между директрисами равно $\frac{228}{13}$ и

расстояние между фокусами $2c = 26$.

Решение

Поскольку фокусы гиперболы расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, уравнение гиперболы будем искать в виде:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

а) Так как $2a = 10$,то $a = 5$,

$$2b = 8, b = 4.$$

Уравнение гиперболы будет иметь вид: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1.$

б) Так как $2c = 10, c = 5$,

$2b = 8, b = 4$,известно, что $c^2 = a^2 + b^2$,тогда

$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3.$

Уравнение гиперболы будет иметь вид:

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$

в) Так как $2c = 10$, $c = 5$,

$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$, то $\frac{5}{a} = \frac{3}{2}$, $a = \frac{10}{3}$,
подставляя в соотношение $c^2 = a^2 + b^2$
известные величины $a = \frac{10}{3}$ и $c = 5$, получим:
$b^2 = c^2 - a^2$;

$$b = \sqrt{25 - \frac{100}{9}} = \frac{\sqrt{125}}{3}.$$

Уравнение гиперболы будет иметь вид: $\frac{x^2}{\frac{100}{9}} - \frac{y^2}{\frac{125}{9}} = 1$.

г) Так как $2c = 20$, $c = 10$.

Уравнения асимптот гиперболы имеет вид:

$y = \pm\frac{b}{a}x$, следовательно,

$\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$, $b = \frac{3}{4}a$, из соотношения $c^2 = a^2 + b^2$ находим a:

$$a^2 + \frac{9}{16}a^2 = 100,$$

$$\frac{25}{16}a^2 = 100,$$

$a^2 = 100 \cdot \frac{16}{25} = 64$, следовательно,

$b^2 = \frac{9}{16}a^2 = \frac{9}{16} \cdot 64 = 36.$

Таким образом, уравнение гиперболы имеет вид:
$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$

д) Так как, точка $M(\sqrt{5}; \sqrt{2})$ лежит на гипербо-

ле$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,то ее координаты удовлетворяют уравне-

нию гиперболы:
$\frac{5}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1.$

Учитывая, что $\varepsilon = \frac{c}{a}$, $\sqrt{3} = \frac{c}{a}, c = \sqrt{3}a.$

Из соотношения $c^2 = a^2 + b^2$,получим:

$3a^2 = a^2 + b^2,$

$2a^2 = b^2.$

Получим систему:

$$\begin{cases} \frac{5}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1; \\ 2a^2 = b^2 \end{cases}$$

$$\frac{5}{a^2} - \frac{2}{2a^2} = 1;$$

$$\frac{5}{a^2} - \frac{1}{a^2} = 1;$$

$$\frac{4}{a^2} = 1;$$

$a^2 = 4$,тогда $b^2 = 8$.

Уравнение гиперболы будет иметь вид:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1.$$

е) $2c = 26, c = 13;$

$$\frac{2a}{\varepsilon} = \frac{228}{13};$$

$\frac{a}{\varepsilon} = \frac{114}{13}$,поскольку $\varepsilon = \frac{c}{a}$,то

$$\frac{a}{\frac{c}{a}} = \frac{114}{13};$$

$$\frac{a^2}{c} = \frac{114}{13};$$

$$\frac{a^2}{13} = \frac{114}{13};$$

$$a^2 = 114,$$

$b^2 = c^2 - a^2,$

$b^2 = 169 - 114 = 55.$

Уравнение гиперболы будет иметь вид: $\frac{x^2}{114} - \frac{y^2}{55} = 1.$

Пример 3.18. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси ординат симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что: **а)** ее оси $2a = 12{,}2b = 18$; **б)** расстояние между фокусами $2c = 10$и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$; **в)** уравнения асимптот $y = \pm\frac{12}{5}x$ и расстояние между вершинами равно 48;**г)** расстояние между директрисами равно $\frac{12}{7}$и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{7}{6}$.

Решение.

Поскольку фокусы гиперболы расположены на оси ординат симметрично относительно начала координат, уравнение гиперболы будем искать в виде:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

а) Так как её оси равны $2a = 12$, $2b = 18$,то полуоси

$$a = 6, b = 9.$$

Уравнение гиперболы будет иметь вид: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{81} = 1.$

б) Так как $2c = 10$, $c = 5$,

$\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{5}{3}$, то $\frac{5}{b} = \frac{5}{3}, b = 3,$
подставляя в соотношение $c^2 = a^2 + b^2$
известные величины $b = 3$ и $c = 5$, получим:
$a^2 = c^2 - b^2;$
$a = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4.$

Уравнение гиперболы будет иметь вид: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1.$

в) Уравнения асимптот имеет вид
$y = \pm\frac{12}{5}x, \left(y = \pm\frac{b}{a}x\right)$,то есть $b = n \cdot 12, a = n \cdot 5,$

так как $2b = 48$, $b = 24$,следовательно,

$n = 2, a = 2 \cdot 5 = 10.$

Таким образом, уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{576} = -1.$$

г) $\frac{2b}{\varepsilon} = \frac{72}{7}$, $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{7}{6}$,тогда $\frac{2b}{\frac{7}{6}} = \frac{72}{7}$, $2b = \frac{7}{6} \cdot \frac{72}{7}, b = 6.$

Следовательно, $\frac{c}{6} = \frac{7}{6}$, $c = 7$. Следовательно,

$a = \sqrt{49 - 36} = \sqrt{13}.$

Таким образом, $\frac{x^2}{13} - \frac{y^2}{36} = -1.$

Пример 3.19. Найти уравнение асимптот гиперболы $2x^2 - 3y^2 = 6$.

Решение.

Разделив обе части уравнения гиперболы на 6, получим:

$2x^2 - 3y^2 = 6|:6,$

$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$, отсюда $a = \sqrt{3}, b = \sqrt{2}$.

Найдем уравнения асимптот: $y = \pm\frac{b}{a}x$, $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x$ – искомые уравнения асимптот гиперболы.

Пример 3.20. Найти площадь прямоугольника, вершины которого лежат на гиперболе $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{10} = 1$, а две стороны проходят через фокусы параллельно оси Oy.

Решение.

воспользуемся формулой $c^2 = a^2 + b^2 = 20 + 10 = 30$, откуда $c = \sqrt{30}$.

Из условий задачи следует, что длина прямоугольника равна фокальному расстоянию гиперболы, то есть $2c = 2\sqrt{30}$.

Найдем ординаты вершин прямоугольника, учитывая, что они лежат на данной гиперболе и что их абсциссы: $x = \pm\sqrt{30}$.

Имеем:

$$\frac{30}{20} - \frac{y^2}{10} = 1;$$

$\frac{y^2}{10}=\frac{10}{20}, y^2=5, y=\pm\sqrt{5}$. Тогда высота прямоугольника равна $2\sqrt{5}$.

Таким образом, искомая площадь равна: $S=2\sqrt{30}\cdot 2\sqrt{5}=20\sqrt{6}$.

Пример 3.21. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса, заданного уравнением $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Решение.

Найдем фокусное расстояние $2c$:

$c=\sqrt{25-9}=4,$

$2c=8.$

Для гиперболы $\varepsilon=\frac{c}{a}, \varepsilon=2$,то есть $\frac{c}{a}=2, c=2a, 2c=4a, 8=4a, a=2$,следовательно, $b=\sqrt{c^2-a^2}==\sqrt{16-4}=\sqrt{12}.$

Таким образом, $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ – искомое уравнение гиперболы.

Пример 3.22. Найти уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах эллипса $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$,а фокусы в вершинах эллипса.

Решение.

Найдём фокусы эллипса: $c^2=a^2-b^2, c=\sqrt{8-5}=\sqrt{3}$,то есть вершины гиперболы находятся в точках$\left(\sqrt{3};0\right)$, $\left(-\sqrt{3};0\right)$,то есть $a'=\sqrt{3}$.

Вершинами эллипса являются точки $\left(\sqrt{8};0\right)$, $\left(-\sqrt{8};0\right)$,следовательно фокусы гиперболы имеют такие же координаты, то есть $c'=\sqrt{8}$,отсюда

$b'=\sqrt{c'^2-a'^2}=\sqrt{8-3}=\sqrt{5};$

Таким образом, уравнение гиперболы имеет вид: $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$.

Пример 3.23. Установить какую линию определяет уравнение и найти все его параметры, построить кривую: **а)**$x^2-8x-4y^2=0$;**б)** $4x^2+8x-y^2+6y+11=0$; **в)** $9x^2-90x-4y^2-8y+185=0$.

Решение.

а) При сравнении исходного уравнения с уравнением (3.1) легко заметить, что $A\cdot C<0$, поэтому данное

уравнение определяет гиперболу.

Для нахождения всех параметров данного уравнения, необходимо привести его к виду:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm 1;$$

Выделим полные квадраты:

$$(x^2-2\cdot 4\cdot x+16)-16-4y^2=0,$$
$$(x-4)^2-4y^2=16|:16,$$
$$\frac{(x-4)^2}{4^2}-\frac{y^2}{2^2}=1,$$
$$x'=x-4, y'=y,$$

$\frac{x'^2}{4^2}-\frac{y'^2}{2^2}=1-$ уравнение гиперболы со смещённым центром $O_1(4;0)$и полуосями$a=4, b=2$, фокусы лежат

на оси O_1x', то есть

$F_1'(-c;0)$и $F_2'(c;0)$,

где $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}(\approx 4{,}5)$

тогда $F_1{}'(-2\sqrt{5};0)$, $F_2{}'(2\sqrt{5};0)$ –координаты фокусов в новой системе координат $O_1x'y'$,пересчитаем координаты фокусов в старой системе координат Oxy:

$F_1(-2\sqrt{5}+4;0)$, $F_2(2\sqrt{5}+4;0)$.

Эксцентриситет гиперболы: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
Асимптоты гиперболы:

$$y' = \pm\frac{b}{a}x';$$

$$y = \pm\frac{2}{4}(x-4);$$

$$y = \pm\frac{1}{2}(x-4);$$

Уравнения директрис находим по формулам:

$$x' = \pm\frac{a}{\varepsilon};$$

$$x - 4 = \pm\frac{4}{\frac{\sqrt{5}}{2}};$$

$x = 4 \pm \dfrac{8}{\sqrt{5}}.$

Сделаем чертеж: см.рис.62.

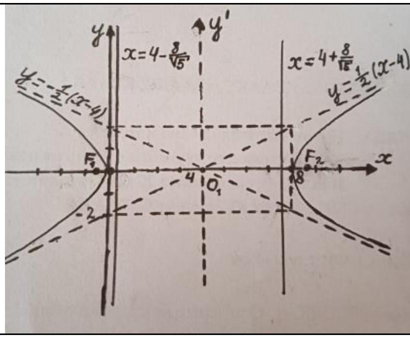

Рис.62

б) $A \cdot C < 0$, поэтому данное уравнение определяет гиперболу.

Выделим полные квадраты:

$$4(x^2 + 2x + 1) - 4 - (y^2 - 6y + 9) + 9 + 11 = 0,$$
$$4(x + 1)^2 - (y - 3)^2 = -16|:16,$$
$$\frac{(x + 1)^2}{2^2} - \frac{(y - 3)^2}{4^2} = -1,$$
$$x' = x + 1, y' = y - 3,$$

$\dfrac{x'^2}{2^2} - \dfrac{y'^2}{4^2} = -1$ – уравнение гиперболы со смещённым центром $O_1(-1;3)$ – и полуосями$a = 2, b = 4$, фокусы лежат на оси O_1y', то есть $F_1'(0;-c)$и $F_2'(0;c)$,

где $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$,

тогда $F_1'(0;-2\sqrt{5})$, $F_2'(0;2\sqrt{5})$ –координаты фокусов в новой системе координат $O_1x'y'$,пересчитаем координаты фокусов в старой системе координат Oxy:

$F_1(0 - 1;-2\sqrt{5} + 3)$, $F_2(0 - 1;2\sqrt{5} + 3)$ или

$$F_1\left(-1;3-2\sqrt{5}\right),\ F_2\left(-1;3+2\sqrt{5}\right).$$

Эксцентриситет гиперболы: $\varepsilon=\frac{c}{b}=\frac{2\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.
Асимптоты гиперболы:

$$y'=\pm\frac{b}{a}x';$$

$$y-3=\pm\frac{4}{2}(x+1);$$

$$y=3\pm\ 2(x-4);$$

$$y=2x-5, y=-2x+11.$$

Уравнения директрис находим по формуле:

$$y'=\pm\frac{b}{\varepsilon};$$

$$y-3=\pm\frac{4}{\frac{\sqrt{5}}{2}};$$

$$y=3\pm\frac{8}{\sqrt{5}}.$$

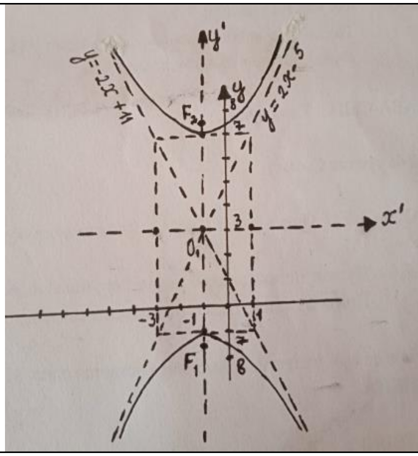

Рис.63

Сделаем чертеж: см.рис.63.

в) Приведем уравнение кривой к каноническому виду, выделяя полные квадраты:

$$9x^2 - 90x - 4y^2 - 8y + 185 = 0$$

$$9(x^2 - 2 \cdot 5 \cdot x + 25) - 225 - 4(y^2 + 2y + 1) + 4 + 185 = 0,$$

$$4(x-5)^2 - (y+1)^2 = 36|:36,$$

$$\frac{(x-5)^2}{3^2} - \frac{(y+1)^2}{6^2} = 1,$$

$$x' = x - 5, y' = y + 1,$$

$\frac{x'^2}{3^2} - \frac{y'^2}{6^2} = 1$-уравнение гиперболы с центром $O_1(5;-1)$ – и полуосями$a = 2, b = 4,$ фокусы лежат на оси O_1x', то есть

и $F_2'(c;0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5},$

тогда $F_1'(-3\sqrt{5};0), F_2'(3\sqrt{5};0)$ –координаты фокусов в новой системе координат $O_1x'y'$,пересчитаем координаты фокусов в старой системе координат Oxy:

$F_1(-3\sqrt{5} + 5; 0 - 1), F_2(3\sqrt{5} + 5; 0 - 1)$ или

$F_1(5 - 3\sqrt{5}; -1), F_2(5 + 3\sqrt{5}; -1).$

Эксцентриситет гиперболы: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5}$.

Асимптоты гиперболы:

$$y' = \pm \frac{b}{a} x';$$

$$y + 1 = \pm \frac{6}{3}(x - 5);$$

$$y + 1 = \pm 2(x - 5).$$

Уравнения директрис находим по формулам:

$$x' = \pm \frac{a}{\varepsilon};$$

$$x - 5 = \pm \frac{3}{\sqrt{5}};$$

$$x = 5 \pm \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Сделаем чертеж: см.рис.64

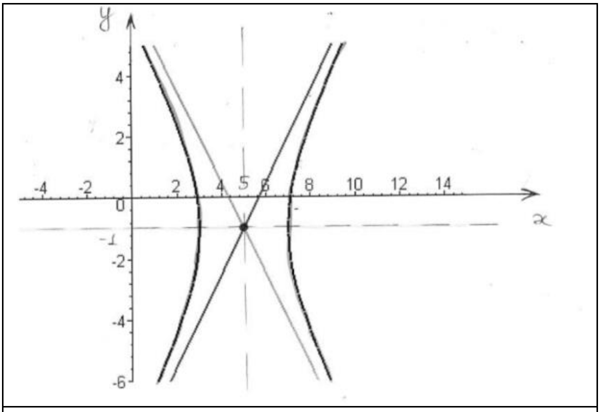

Рис.64

3.4. Парабола.

Каноническое уравнение параболы. Парабола.

Параболой называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой. Расстояние от фокуса F до директрисы называется **параметром параболы** и обозначается через p ($p > 0$). Геометрический смысл параметра p состоит в том, что, чем больше его величина, тем ближе к оси симметрии лежат ветви параболы.

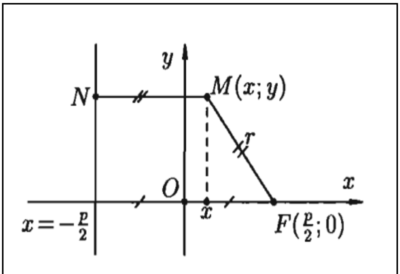

Рис.65

Для вывода уравнения параболы выберем систему координат Oxy так, чтобы ось Oxпроходила через фокус F перпендикулярно директрисе в направлении от директрисы к фокусу, а начало координат O расположим посередине между фокусом и директрисой (см.рис.65). В выбранной системе фокус F имеет координаты $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, а уравнение директрисы имеет вид $x = -\frac{p}{2}$.

Выведем каноническое уравнение параболы: пусть $M(x;y)$ - произвольная точка параболы. Соединим точку M с точкой F. Проведем отрезок MN перпендикулярно директрисе.

Из определения параболы имеем:

$NM = FM$, где $N\left(-\frac{p}{2};y\right), F\left(\frac{p}{2};0\right), M(x;y)$,

тогда $FM = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+(y-0)^2}$,

$$NM=\sqrt{\left(x-\left(-\frac{p}{2}\right)\right)^2+(y-y)^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}$$, то есть

$$\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+(y-0)^2},$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2,$$

$$x^2+xp+\frac{p^2}{4}=x^2-xp+\frac{p^2}{4}+y^2,$$

$$\boldsymbol{y^2=2px}\ \textbf{(3.9)}$$

Уравнение (3.9) называется каноническим уравнением параболы.

Исследование канонического уравнения параболы.

Установим форму параболы, пользуясь ее каноническим уравнением.

1)Уравнение (3.9) содержит y в четной степени. Следовательно, парабола симметрична относительно оси Ox;

2)Так как $p>0$, то из (3.9) следует, что $x\geq 0$. Следовательно, парабола расположена справа от оси Oy.

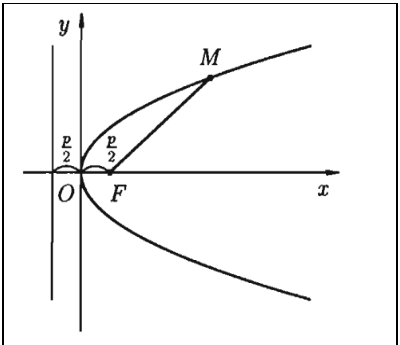

Рис.66

3)При $x=0$ имеем $y=0$. Следовательно, парабола проходит через начало координат. При неограниченном возрастании x неограниченно возрастает y. Парабола $y^2=2px$ имеет вид изображенный на рис.66.Точка $O(0;0)$ называется **вершиной параболы**, отрезок $FM=r$ называется **фокальным радиусом точки** M.

Аналогично выводится уравнение параболы симметричной относительно оси $Oy, x^2 = 2py$ (см.рис.67) и каждое из следующих уравнений параболы $y^2 = -2px$ (см. рис.68),$x^2 = -2py$ (см. рис.69) и называются каноническим.

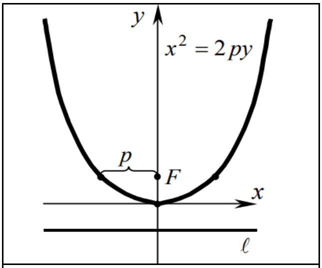

Рис.67

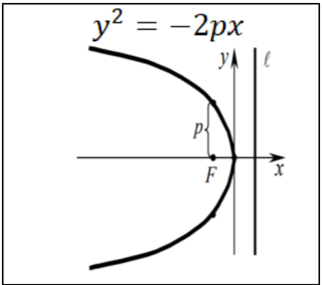

Рис.68

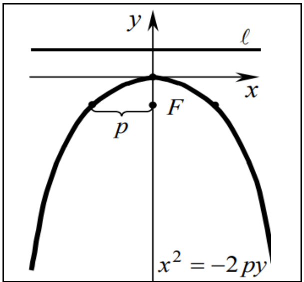

Рис.69

Уравнение параболы с осями симметрии параллельными координатным осям.

Найдем уравнение параболы с центром в точке $O_1(x_0; y_0)$, осью симметрии которой является ось O_1x', параллельная координатной оси Ox. Поместим в вершине параболы O_1 начало новой системы координат $O_1x'y'$, оси которой O_1x' и O_1y'параллельны соответствующим осям Ox и Oy и одинаково с ними направленны (см. рис.70). В этой системе координат уравнение параболы имеет вид:

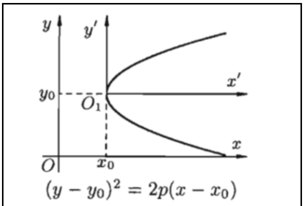

Рис.70

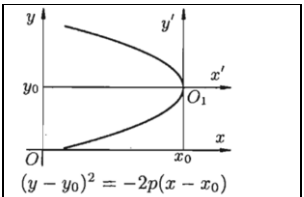

Рис.71

$$(y-y_0)^2=2p(x-x_0).$$

Запишем и изобразим все возможные варианты:

$(y-y_0)^2=-2p(x-x_0)$(см.рис.71),

$(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$(см.рис.72),

$(x-x_0)^2=-2p(y-y_0)$(см.рис.73).

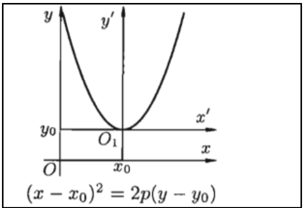

Рис.72

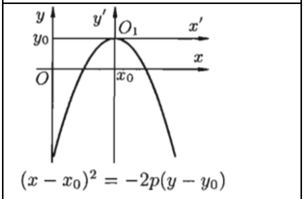

Рис.73

Пример 3.24. На параболе $y^2=8x$ найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.

Решение.

Из уравнения параболы получаем, что $2p=8, p=4, \frac{p}{2}=2$.

$r=x+\frac{p}{2}=4$, следовательно, $x=2$.

При $x=2$ имеем:

$y^2=16$,

$y=\pm4$.

Искомые точки: $M_1(2;4), M_2\,(2;-4)$.

Пример 3.25. Дано уравнение параболы$y^2=6x$.

Составьте уравнение ее директрисы и найти координаты фокуса.

Решение.

Сравнивая данное уравнение с каноническим уравнением параболы, получим, что$2p=6$, откуда $p=3$. Так

как фокус данной параболы имеет координаты $F\left(\frac{p}{2};0\right)$,

а директриса - уравнение $x=-\frac{p}{2}=-\frac{3}{2}$,получим:

$F(1{,}5;0)$- координаты фокуса и $x=-1{,}5-$ уравнение директрисы.

Пример 3.26. Составить каноническое уравнение параболы с фокусом в точке $F(0;-4)$.

Решение.

Так как фокус имеет координаты $F(0;-4)$,то вершина искомой параболы имеет координаты $O(0;0)$. Так как фокус лежит на отрицательной полуоси Oy ветви искомой параболы направлены вниз, каноническое уравнение следует искать в виде $x^2=-2py$. Фокусное расстояние $OF=\frac{p}{2}$, с другой стороны $OF=4$,поэтому $\frac{p}{2}=4$, $p=8$, уравнение искомой параболы имеет вид:

$x^2=-16y$.

Пример 3.27. Составить уравнение параболы, если даны её фокус $F(4;3)$ и директриса $y+1=0$. Найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.

Решение.

Пусть $M(x;y)$ - произвольная точка искомой кривой. Тогда расстояние до точки $F(4;3)$,то есть FM равно:

$$FM=\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2};$$

Поскольку, директриса имеет вид $y=-1$,то точка N имеет координаты$(x;-1)$,отсюда

$$NM = \sqrt{(x-x)^2 + \left(y-(-1)\right)^2} = \sqrt{(y+1)^2}.$$

Из определения параболы, имеем:

$$FM = NM;$$

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(y+1)^2};$$
$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = (y+1)^2;$$
$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = y^2 + 2y + 1;$$
$$x^2 - 8x - 8y + 24 = 0;$$
$$x^2 - 8x + 16 = 8y - 8;$$
$$(x-4)^2 = 8(y-1).$$

Таким образом, искомое уравнение параболы имеет вид: $(x-4)^2 = 8(y-1)$.

Пример 3.28. Составить уравнение параболы, которая симметрична относительно оси Ox, проходит через точку $A(4;-1)$, а вершина ее лежит в начале координат.

Решение.

Так как парабола проходит через точку $A(4;-1)$ с положительной абсциссой, а осью симметрии служит ось Ox, то уравнение параболы будем искать в виде

$$y^2 = 2px.$$

Подставляя в это уравнение координаты точки A, имеем:

$$(-1)^2 = 2p \cdot 4;$$
$$2p = \frac{1}{4}.$$

Таким образом, искомым уравнением параболы будет иметь вид: $y^2 = \frac{1}{4}x$.

Пример 3.29. Определить координаты вершины, ось симметрии и директрису параболы:

а) $x^2 - 2y - 8x + 6 = 0$;**б)** $y^2 + 6x + 6y + 15 = 0$;

в) $y = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 17$.

Решение.

а) Преобразуем данное уравнение к виду$(\ x-x_0)^2=2p(y-y_0)$, выделив полный квадрат:

$x^2-2y-8x+6=0,$

$(x^2-2\cdot4\cdot x+16)-16-2y+6=0,$

$(x-4)^2-2(y+5)=0,$

$(x-4)^2=2(y+5)-$-уравнение параболы с вершиной $O_1(4;-5)$.

Найдем значение параметра p:

$2p=2$,следовательно, $p=1$.

В результате параллельного переноса координатных осей $x-4=x', y+5=y'$ в новое начало$O'x'y'$, то есть в точку O_1, получим каноническое уравнение параболы:

$x'^2=2y'$ –парабола симметричная относительно оси $O'y'$, то есть прямая

$x=4$является осью симметрии параболы.

В соответствии с видом параболы координаты фокуса в новой системе координат имеет вид $F'\left(0;\frac{p}{2}\right)$, то есть

$F'\left(0;\frac{1}{2}\right)$,в старой системе координат

$F\left(0+4;\frac{1}{2}-5\right)$ или $F(4;-4{,}5)$.

Уравнение директрисы в новой системе координат имеет вид:

$y'=-\frac{p}{2};$

$y+5=-\frac{1}{2};$

$y=-5{,}5.$

Для более точного построения параболы, найдём её точки пересечения с осями координат.

С ось Oy:

$\begin{cases} x=0 \\ (x-4)^2=2(y+5) \end{cases};$

$(0-4)^2 = 2(y+5);$
$16 = 2(y+5)|:2;$
$y+5 = 8;$
$y = 3.$

Таким образом, парабола пересекает ось Oy в точке $(0;3)$.

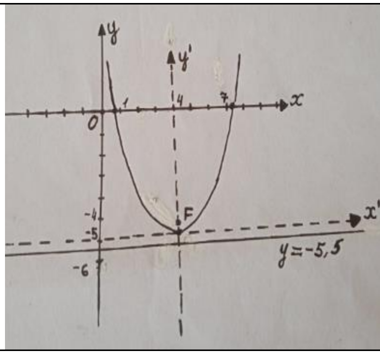

Рис.74

Найдём точки пересечения параболы с осью Ox:

$$\begin{cases} y = 0 \\ (x-4)^2 = 2(y+5) \end{cases};$$

$(x-4)^2 = 2(0+5);$
$(x-4)^2 = 10;$
$x-4 = \pm\sqrt{10};$
$x_1 = 4+\sqrt{10}(\approx 7{,}2), x_2 = 4-\sqrt{10}(\approx 0{,}8).$
$\left(4+\sqrt{10};0\right), \left(4-\sqrt{10};0\right)$ – точки пересечения параболы с осью Ox.

Сделаем чертёж: см. рис.74.

б) Преобразуем данное уравнение к виду$(y-y_0)^2 = -2p(x-x_0)$:

$y^2+6x+6y+15 = 0;$
$(y^2+2\cdot 3\cdot y+9)-9+6x+15 = 0;$
$(y+3)^2+6x+6 = 0;$
$(y+3)^2+6(x+1) = 0;$
$(y+3)^2+6(x+1) = 0;$
$(y+3)^2 = -6(x+1)$ – уравнение параболы с вершиной $O_1(-1;-3)$.

Найдем значение параметра p:

$2p = 6$,следовательно, $p = 3$.

Тогда в результате параллельного переноса координатных осей $x = x'-1, y = y'-3$ в новое начало$O_1x'y'$, то есть в точку O_1, получим каноническое уравнение параболы:

${y'}^2 = -6x'$ – парабола симметричная относительно оси O_1x',ветви направлены в противоположную сторону (за счёт минуса перед$2p$) ,прямая $y=-3$ является осью симметрии параболы.

В соответствии с видом параболы координаты фокуса в новой системе координат имеет вид $F'\left(-\frac{p}{2};0\right)$, то есть

$F'\left(-\frac{3}{2};0\right)$,в старой системе координат

$F\left(-\frac{3}{2}-1;0-3\right)$ или $F(-2{,}5;-3)$.

Уравнение директрисы в новой системе координат имеет вид:

$$x'=\frac{p}{2};$$

$$x+1=\frac{3}{2};$$

$$x=0{,}5.$$

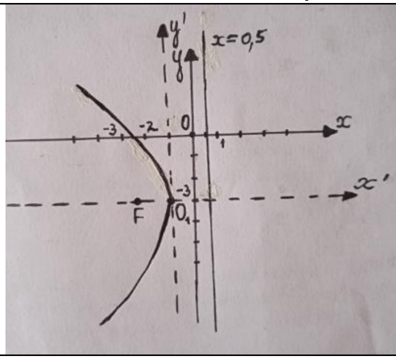

Рис.75

Найдём точки пересечения параболы с ось Oy:

$$\begin{cases} x=0 \\ (y+3)^2=-6(x+1) \end{cases};$$

$$(y+3)^2=-6(0+1);$$

$(y+3)^2=-6-$ ось Oy парабола не пересекает. Найдём точки пересечения параболы с осью Ox:

$$\begin{cases} y=0 \\ (y+3)^2=-6(x+1) \end{cases};$$

$$(0+3)^2=-6(x+1);$$

$$9=-6(x+1)|:(-6);$$

$$x+1=-1{,}5;$$

$x=-2{,}5;(-2{,}5;0)-$точка пересечения параболы с осью Ox.Сделаем чертёж: см. рис.75.

в) Преобразуем данное уравнение $y=\frac{1}{4}x^2+2x+7$ к виду($x-x_0)^2=2p(y-y_0)$:

$$y=\frac{1}{4}(x^2+8x+16)+3;$$

$y=\frac{1}{4}(x+4)^2+3;$

$\frac{1}{4}(x+4)^2=y-3|\cdot 4;$

$(x+4)^2=4(y-3)$-уравнение параболы с вершиной $O_1(-4;3)$.

Найдем значение параметра p:

$2p=4$,следовательно, $p=2$.

В результате параллельного переноса координатных осей $x+4=x',y-3=y'$ в новое начало $O_1x'y'$, то есть в точку O_1, получим каноническое уравнение параболы:

$x'^2=4y'$ –парабола симметричная относительно оси O_1y', то есть прямая $x=-4$является осью симметрии параболы.

В соответствии с видом параболы координаты фокуса в новой системе координат имеет вид $F'\left(0;\frac{p}{2}\right)$, то есть

$F'(0;1)$,в старой системе координат

$F(0-4;1+3)$ или $F(-4;4)$.

Уравнение директрисы в новой системе координат имеет вид:

$y'=-\frac{p}{2};$

$y-3=-1;$

$y=2.$

Найдём точки пересечения параболы с ось Oy:

$\begin{cases} x=0 \\ (x+4)^2=4(y-3) \end{cases};$

$(0+4)^2=4(y-3);$

$16=4(y-3)|:4;$

$y-3=4;$

$y=7.$

Таким образом, парабола пересекает ось Oy в точке $(0;7)$.

Найдём точки пересечения параболы с осью Ox:

$$\begin{cases} y = 0 \\ (x+4)^2 = 4(y-3) \end{cases};$$

$(x+4)^2 = 4(0-3);$

$(x-4)^2 = -12$, точек пересечения с осью Ox парабола не имеет.

Чертёж сделайте самостоятельно.

Пример 3.30. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями: **а)** $x = \sqrt{5y}$;

б) $y = -3\sqrt{-2x}$; **в)** $x = 2 - \sqrt{6-2y}$.

Решение.

а) $x = \sqrt{5y}$, заметим, что $x \geq 0$,так как $5y \geq 0$;

$x^2 = \left(\sqrt{5y}\right)^2$;

$x^2 = 5y -$ это парабола, симметричная относительно оси Oy,ветви направлены вверх, вершина находится в точке $(0;0)$.

Но, так как нам нужно выбрать ту часть параболы, которая соответствует неравенству $x \geq 0$, то от всей параболы надо взять только ту её часть, которая лежит правее прямой $x = 0$, то есть правую половину параболы (см. рис.76).

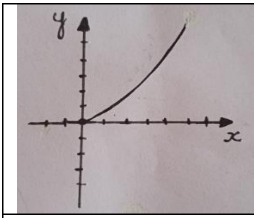

Рис.76

б) $y = -3\sqrt{-2x}$ заметим, что $y \leq 0$,так как $-2x \geq 0, (x \leq 0)$;

$y^2 = \left(-3\sqrt{-2x}\right)^2$;

$y^2 = -18x$— это парабола, симметричная относительно оси Ox,

ветви направлены в отрицательном направлении,

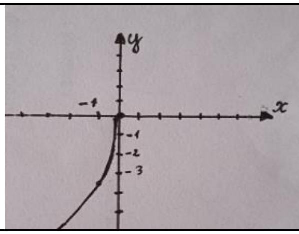

Рис.77

вершина находится в точке $(0;0)$.
Но, так как нам нужно выбрать ту часть параболы, которая соответствует неравенству $y \le 0$, то от всей параболы надо взять только ту её часть, которая лежит ниже прямой $x = 0$, то есть нижнюю половину параболы (см. рис.77).

в) $x - 2 = -\sqrt{6-2y}$, заметим, что $x - 2 \le 0$,так как$6 - 2y \ge 0$;

$(x-2)^2 = \left(-\sqrt{6-2y}\right)^2$;

$(x-2)^2 = 6 - 2y$;

$(x-2)^2 = -2(y-3)$ – это парабола, симметричная относительно прямой $x = 2$, ветви направлены вниз, вершина в точке $(2;3)$.

Найдём точки пересечения параболы с ось Oy:

$\begin{cases} x = 0 \\ (x-2)^2 = -2(y-3) \end{cases}$;

$(0-2)^2 = -2(y-3)$;

$4 = -2(y-3)|:(-2)$;

$y - 3 = -2$;

$y = 1$.

Таким образом, парабола пересекает ось Oy в точке $(0;1)$.

Найдём точки пересечения параболы с осью Ox:

$\begin{cases} y = 0 \\ (x-2)^2 = -2(y-3) \end{cases}$;

$(x-2)^2 = -2(0-3)$;

$(x-2)^2 = 6$;

$x - 2 = \pm\sqrt{6}$;

$x_1 = 2 + \sqrt{6}, x_2 = 2 - \sqrt{6}$.

$(2+\sqrt{6};0), (2-\sqrt{6};0)$ –точки пересечения параболы с осью Ox.

Но, так как нам нужно выбрать ту часть

параболы,
которая соответствует неравенству $x-2\le 0(x\le 2)$, то от всей параболы надо взять только ту её часть, которая лежит левее прямой $x=2$, то есть левую половину параболы (см. рис.78).

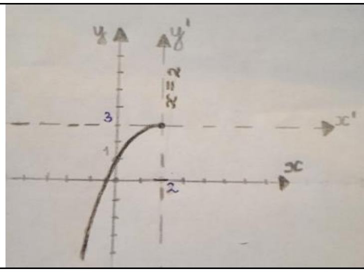

Рис.78

3.5. Полярная система координат.

Любая точка на плоскости может быть однозначно определена при помощи различных координатных систем, выбор которых определяется различными факторами.

Способ задания начальных условий для решения какой – либо конкретной технической задачи может определить выбор той или иной системы координат. Наряду с широко распространенной декартовой системой координат практически важной является полярная система координат. Она представляет собой выбранную на плоскости точку O, называемую **полюсом** и проходящую через эту точку полярную ось Op (луч Op).

Суть задания какой- либо системы координат на плоскости состоит в том, чтобы каждой точке плоскости поставить в соответствие пару действительных чисел, определяющих положение этой точки на плоскости. В случае полярной системы координат роль этих чисел играют расстояние точки от полюса и угол между полярной осью и радиус– вектором этой точки. Этот угол φ называется **полярным углом**, то естьφ– угол между положительным направлением действительной оси Ox и радиус-векторомr точки $M(x;y)$ (рис.79).

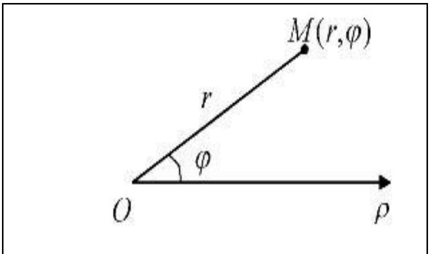

Рис.79

Связь между декартовыми и полярными координатами точки.

Установим связь между декартовыми $M(x;y)$ и полярными координатами точки $M(r;\varphi)$. Для этого совместим полюс O с началом координат системы Oxy,а полярную ось Op – с положительной полуосью Ox. Из прямоугольного треугольника на рис.80 имеем

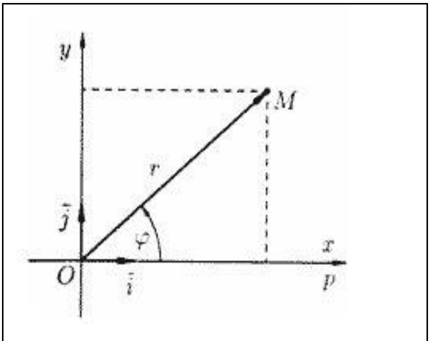

Рис.80

$\cos\varphi = \dfrac{x}{r}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{r}$, отсюда прямоугольные координаты точки M выражаются через полярные следующим образом: $\begin{cases} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \end{cases}$;

Возведем оба уравнения полученной системы в квадрат и сложив их, получим формулу для нахождения модуля:

$$x^2 + y^2 = (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2,$$
$$x^2 + y^2 = r^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi),$$
$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$\underline{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Таким образом, координаты произвольной точки в двух различных системах координат связываются соотношениями:$x = rcos\varphi, y = rsin\varphi, x^2 + y^2 = r^2$.

Пример 3.31. Уравнение кривой в полярной системе координат имеет вид: **а)**$r = \frac{4}{3-cos\varphi}$;**б)** $r = \frac{9}{4-5cos\varphi}$. Найти уравнение кривой в декартовой прямоугольной системе координат, определит тип кривой, найти фокусы и эксцентриситет.

Решение.

Воспользуемся связью декартовой прямоугольной и полярной системы координат $r = \sqrt{x^2 + y^2}, cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$:

а) Подставим в заданное уравнение формулы, связывающие полярную и декартову прямоугольную системы координат:

$$r = \frac{4}{3-cos\varphi};$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{4}{3 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}};$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{4}{3-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}};$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{3\sqrt{x^2+y^2}-x};$$

$$3\sqrt{x^2+y^2}-x=\frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$3\sqrt{x^2+y^2}-x=4;$$

$$3\sqrt{x^2+y^2}=x+4;$$

$$\left(3\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=(x+4)^2;$$

$$9(x^2+y^2)=(x+4)^2;$$

$$9x^2+9y^2=x^2+8x+16;$$

$$8x^2-8x+9y^2-16=0;$$

$$8\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-2+9y^2-16=0;$$

$$8\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+9y^2=18|:18;$$

$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}}+\frac{y^2}{2}=1$ – получили каноническое уравнение эллипса, со смещённым центром $O_1\left(\frac{1}{2};0\right)$, $x'=x-\frac{1}{2}$, $y'=y$,то есть в новой системе координат имеет вид:

$$\frac{x'^2}{\frac{9}{4}}+\frac{y'^2}{2}=1,$$

$a=\frac{3}{2}$ -большая полуось, $b=\sqrt{2}$- меньшая полуось, половина расстояния между фокусами равно $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{\frac{9}{4}-2}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$.

Эксцентриситет равен $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$. Фокусы $F_1{}'\cdot\left(-\frac{1}{2};0\right), F_2{}'\cdot\left(\frac{1}{2};0\right)$,тогда

$F_1{}^{\cdot}(0;0), F_2{}^{\cdot}(1;0)$.

б) $r = \frac{9}{4-5cos\varphi}$;

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{9}{4-\frac{5x}{\sqrt{x^2+y^2}}};$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{9\sqrt{x^2+y^2}}{4\sqrt{x^2+y^2}-5x};$$

$$4\sqrt{x^2+y^2}-5x = \frac{9\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$4\sqrt{x^2+y^2}-5x = 9;$$

$$4\sqrt{x^2+y^2} = 5x+9;$$

$$\left(4\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = (5x+9)^2;$$

$$16(x^2+y^2) = (5x+9)^2;$$

$$16x^2+16y^2 = 25x^2+90x+81;$$

$$9x^2+90x-16y^2+81 = 0;$$

$$9(x^2+10x+25-25)-16y^2+81 = 0;$$

$$9(x+5)^2-225-16y^2+81 = 0;$$

$$9(x+5)^2-16y^2 = 144|:144;$$

$\frac{(x+5)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ –каноническое уравнение гиперболы,

со смещённым центром $O_1(-5;0), x' = x+5, y' = y$,то есть в новой системе координат имеет вид:

$$\frac{x'^2}{16} - \frac{y'^2}{9} = 1,$$

$a = 4 -$ действительная полуось; $b = 3 -$ мнимая полуось.

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5.$

Эксцентриситет: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}.$

Фокусы:

$F_1{'}^{\cdot}(-5; 0), F_2{'}^{\cdot}(5; 0),$

$F_1^{\cdot}(-10; 0), F_2^{\cdot}(0; 0).$

5.Задания для самостоятельного решения:

1.Установить, какую линию следующее уравнение:

а) $x^2 - 4x + y^2 + 6y - 12 = 0$; **б)** $x^2 + y^2 + 2x + 1 = 0$;

в) $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 7 = 0.$

2.Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(1; 2)$,$B(0; -1)$,$C(-3; 0)$.

3. Установить, какую линию следующее уравнение $y = \sqrt{9 - x^2}$.

4. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что: **а)** его полуоси равны 5 и 2; **б)** его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами 2c=8; **в)** его малая ось равна 24, а расстояние между фокусами 2c=10; **г)** расстояние между его фокусами 2c=6 и эксцентриситет$\varepsilon = \frac{3}{5}$;**д)** его большая ось равна 20, а эксцентриситет$\varepsilon = \frac{3}{5}$; **е)** его малая ось равна 10, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$; **ё)** расстояние между его директрисами равно 5 и расстояние между фокусами 2c=4; **ж)** его большая ось равна 8, а расстояние между директрисами $\frac{2a}{\varepsilon}$ равно 16.

5. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат симметрично относительно начала координат, если: **а)** полуоси эллипса равны 7 и 4; **б)** расстояние между фокусами равно 24, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$;**в)** его малая ось равна 16, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;**г)** расстояние между его фокусами$2c = 6$ и расстояние между директрисами$\frac{2b}{\varepsilon}$ равно$\frac{50}{3}$.

6. Определить полуоси каждого из следующих эллипсов: **а)** $x^2 + 25y^2 - 25 = 0$; **б)** $4x^2 + 9y^2 = 25$; **в)** $9x^2 + y^2 = 1$.

7.Составить уравнение эллипса, проходящего через точки $M_1(2;3), M_2\left(1;\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$.

8.Определить при каком значении m прямая

$y = m - x$:**а)**пересекает; **б)** касается; **в)** проходит вне

эллипса $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$.

9.Установить, что уравнение:

а) $9x^2 + 25y^2 - 18x - 100y - 116 = 0$;

б) $2x^2 + y^2 - 8x - 6y + 1 = 0$определяет эллипс, и найти координаты его центра, полуоси, эксцентриситет и уравнения директрис.

10. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что: **а)** ее оси 2a = 10 и 2b = 8; **б)** расстояние между фокусами 2c =10 и ось 2b = 8; **в)** расстояние между фокусами 2c = 6 и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$; **г)**уравнения асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами 2с = 20;**д)** расстояние между директрисами$\frac{2a}{\varepsilon}$ равно $\frac{8}{3}$и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$.

11.Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси ординат, симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что: **а)** ее полуоси a = 6, b = 18; **б)** расстояние между фокусами 2с=10 и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$; **в)** уравнения асимптот

$y = \pm\frac{12}{5}x$, расстояние между вершинами равно 48; **г)**

расстояние между директрисами$\frac{2b}{\varepsilon}$ равно$\frac{50}{7}$ и эксцен-

триситет $\varepsilon = \frac{7}{5}$.

12.Вычислить площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ и прямой.

13. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет гиперболу, и найти координаты ее центра, полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот и уравнения директрис:
а) $3x^2 - 6y^2 - 12x - 108y - 492 = 0$;
б) $4y^2 - x^2 - 4x + 8y - 4 = 0$.

14. Установить, какую линию определяет уравнение $y = 3 - 4\sqrt{x - 1}$.

15. Фокусы параболы с вершиной в начале координат лежит в точке $F(0; -4)$. Написать уравнение этой параболы.

16. Установить, что уравнение: **а)** $y^2 = 4x - 8$;

б) $x^2 = 2 - y$ определяет параболу, найти координаты

её вершины, величину параметра p и уравнение ди-

ректрисы.

17. Составить уравнение параболы, если даны её фокус $F(-7;0)$ и директриса $x - 7 = 0$.

18. Установить, что уравнение: **а)** $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 2$;

б) $x = 2y^2 - 12y + 14$ определяет параболу, найти координаты её вершины, величину параметра p.

19. Найти уравнения параболы и её директрисы, если известно, что парабола имеет вершину в начале координат и симметрична относительно оси Ox и что точка пересечения прямых $y = x$ и $x - y - 2 = 0$ лежит на параболе.

20. Определить при каком значении k прямая $y = kx + 2$:**а)**пересекает; **б)** касается; **в)** проходит вне параболы $y^2 = 4x$.

Ответы:

5.1. а) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5^2$ - окружность радиуса $R = 5$ с центром в точке $C(2;-3)$;

б) $(x+1)^2+y^2=0$ – точка $C(-1;0)$;

в) $(x+2)^2+(y+1)^2=-2$ – никакой вещественной

кривой не определяет (мнимая окружность).**5.2.**$(x+1)^2+(y+3)^2=5^2$.**5.3.** Уравнение полуокружности $x^2+y^2=9$,где $y\geq 0$.**5.4.а)** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$;

б) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$;**в)** $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$;**г)** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

д) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$;**е)** $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$;**ё)** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$;

ж) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.**5.5. а)** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{49}=1$;**б)** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{169}=1$;

в) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$;**г)** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$;**д)** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$;

е) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$;**ё)** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$;**ж)** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

5.6. а) $a=5, b=1$;**б)** $a=\frac{5}{2}, b=\frac{5}{3}$; **в)** $a=\frac{1}{3}, b=1$.

5.7. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.**5.8. а)** $-5<m<5$;**б)** $m<-5, m>5$; **в)**

$m_{1,2} = \pm 5$.**5.9. а)** $\frac{(x-1)^2}{5^2} + \frac{(y-1)^2}{3^2} = 1,$

$C(1;2), a = 5, b = 3, \varepsilon = \frac{4}{5},\ F_1(-3;2),\ F_2(5;2), x_{1,2} = 1 \pm 6{,}25;$

б) $\frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1, C(2;3), a = 2\sqrt{2}, b = 4, \varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2},$

$F_1\left(2; 3 - 2\sqrt{2}\right),\ F_2\left(2; 3 + 2\sqrt{2}\right), y = 3 \pm 4\sqrt{2}.$

5.10. а) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$;**б)** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$;**в)** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1;$

г) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$.**д)** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.**11. а)** $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{324} = -1;$

б) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$;**в)** $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{576} = -1$;**г)** $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{25} = -1$

5.12.12. **5.13. а)** $\frac{(x-2)^2}{6} - \frac{(y+9)^2}{3} = 1,$

$C(2;-9), a = \sqrt{6}, b = \sqrt{3}, \varepsilon = \sqrt{\frac{3}{2}},$

$F_1(5;-9),\ F_2(-1;-9), x_{1,2} = 2 \pm 2; y + 9 = \pm\sqrt{2}(x-2);$

б) $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{1} = -1, C(-2;-1), a = 2, b = 1, \varepsilon = \sqrt{5},$

$F_1(-2;-1-\sqrt{5}),\ F_2(-2;-1+\sqrt{5}), y_{1,2} = -1 \pm \frac{\sqrt{5}}{5},$

$y + 1 = \pm\frac{1}{2}(x+2)$.**5.14.** часть параболы

$(y-3)^2 = 16(x-1)$,расположенной под прямой

$y - 3 = 0$.**5.15.** $x^2 = -16y$.**5.16. а)** $y^2 = 4(x-2)$- парабола с вершиной в точке $C(2;0)$,параметр $p = 2$,

$x - 1 = 0$;**б)** $x^2 = -(y-2)$- парабола с вершиной в точке $C(0;2)$,параметр $p = \frac{1}{2}$, $4y - 9 = 0$.**5.17.**$y^2 = -28x$.

5.18. а) $C(-2;1)$, $p = 2$;б) $C(-4;3)$, $p = \frac{1}{4}$.

5.19. $y^2 = x$.**5.20. а)** $k < \frac{1}{2}$;**б)** $k = \frac{1}{2}$; **в)** $k > \frac{1}{2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б. В. Соболь, Н. Т. Мишняков, В. М. Поркшеян. Практикум по высшей математике. 3-е изд. Ростов н \ Д: Феникс, 2010.
2. Д. Т. Письменный. Конспект лекций по высшей математике (полный курс). 2-е изд. Москва: «Айрис-пресс», 2014.
3. Данко П. Е., Попов, А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах (1 том). — М.: Высш. шк., 2002.