ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Высшая математика»

Учебное пособие

по дисциплине

«Математика, математический анализ»

«Предел функции. Непрерывность функции»

Авторы
Ворович Е.И.
Коровина К.С.

Ростов-на-Дону, 2023

Аннотация

Учебное пособие предназначено для студентов всех форм обучения, для всех направлений специальностей.

Авторы

Доцент кафедры «Высшая математика»
Ворович Е.И.

Старший преподаватель кафедры «Высшая математика»
Коровина К.С.

Оглавление

1. Предел функции. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Основные определения и соотношения

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0.

<u>Определение.</u> Число y_0 называется **пределом функции** $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x таких, что $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - y_0| < \varepsilon$.

Обозначается $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$.

Смысл определения предела функции $y = f(x)$ в точке x_0 состоит в том, что для всех значений x, достаточно близких x_0, значения функции $y = f(x)$ сколь угодно мало отличаются от числа y_0 (по абсолютной величине).

Геометрически число y_0 есть предел функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности соответствующие ординаты графика функции $y = f(x)$ будут заключены в полосе $y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon$, какой бы узкой эта полоса не была.

<u>Определение.</u> Число b называется **пределом функции** $y = f(x)$ **при $x \to \infty$**, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $N > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > N$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

При этом предполагается, что функция $y = f(x)$ определена в окрестности бесконечности. Обозначается

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b.$$

Различают пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ.

Теорема 1. Предел постоянной равен самой постоянной.

$\lim\limits_{x\to x_0} C = C$, где *C = const*.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции *f(x)* и *g(x)* имеют конечные пределы при $x \to x_0$.

Теорема 2. Предел суммы конечного числа функций равен сумме пределов этих функций

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Теорема 3. Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак предела $\lim\limits_{x\to x_0} C\cdot f(x) = C \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

Теорема 4. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$

Теорема 5. Пусть $f(x), g(x), \phi(x)$ – три функции, которые определены в некоторой окрестности точки x_0 и в каждой точке *x* этой окрестности удовлетворяют неравенству

$$\phi(x) < f(x) < g(x).$$

Тогда, если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \phi(x) = b$, то $\lim\limits_{x\to x_0} = b$.

<u>Определение.</u> Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной** на некотором множестве *М*, если существует такое число *С > 0*, что для всех $x \in M$ выполняется условие $|f(x)| < C$.

<u>Теорема.</u> Если функция $y = f(x)$ имеет конечный предел при $x \to x_0$, то она ограничена в некоторой окрестности точки x_0.

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ

<u>Определение.</u> Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), если $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} \alpha(x) = 0$.

Иными словами, функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если для любого ε *> 0* существует такое число δ *> 0*, что для всех *x* таких, что

$|x - x_0| < \delta$ верно неравенство $|f(x)| < \varepsilon$.

Из определения бесконечно малой функции следует, что функции, бесконечно малые при $x \to x_0$ являются функциями, ограниченными в некоторой окрестности точки x_0.

<u>Свойства бесконечно малых функций</u>

1) Сумма фиксированного числа функций, бесконечно малых при $x \to x_0$, тоже бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

2) Произведение фиксированного числа функций, бесконечно малых при $x \to x_0$, тоже бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

3) Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки $x = x_0$ является бес- конечно малой функцией при

$x \to x_0$.

4) Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю есть величина бесконечно малая.

<u>Определение.</u> Функция *f(x)* называется **бесконечно большой** при $x \to x_0$, если для любого числа *M > 0* существует такое число *δ > 0* (зависящее от *M*), что для всех *x*≠ x_0 и удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$ будет верно неравенство $|f(x)| > M$.

Записывается $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций осуществляется в соответствии со следующей теоремой.

<u>Теорема.</u> Если функция $\alpha(x)$ есть бесконечно малая при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), то функция $f(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой. И наоборот, если функция $f(x)$ бесконечно большая при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), то функция $\alpha(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ является бесконечно малой.

Например, если $y = x^2$ при $x \to \infty$ является бесконечно большой величиной, то $y = \dfrac{1}{x^2}$ – величина бесконечно малая при $x \to \infty$.

2. Практическое вычисление пределов. Техника раскрытия неопределенностей.

<u>Пример 1.</u> Найти а) $\lim\limits_{x\to 0}(3x^2+5x+1)$, б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5}{x-3}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^x}$.

а) $\lim\limits_{x\to 0}(3x^2+5x+1)=3\cdot 0+5\cdot 0+1=1$.

Так как функция определена в точке *x=0*, предел равен значению функции в этой точке.

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5}{x-3}=\dfrac{5}{0}=\infty$

При $x\to 3$ x–3 стремится к 0, то есть знаменатель является бесконечно малой величиной.

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^x}=\dfrac{1}{\infty}=0$

При $x\to\infty$ $e^x\to\infty$, то есть знаменатель является бесконечно большой величиной.

В рассмотренных примерах пределы вычисляли как значение функции в точке или пользуясь свойствами бесконечно больших и бесконечно малых функций. Результат вычисления получали в виде числа или символа ∞. Но в большинстве случаев при вычислении пределов приходится сталкиваться с так называемыми неопределенностями, когда результат неясен. Для его получения требуется «раскрыть» неопределенность. Неопределенности, например, возникают при вычислении предела отношения двух бесконечно больших или двух бесконечно малых функций (обозначаются $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$). Кроме упомянутых в математическом анализе рассматриваются и другие неопределенности:

$$\left[\frac{\infty}{\infty}\right],\left[\frac{0}{0}\right],[\infty-\infty],[0\cdot\infty],[1^{\infty}],[0^{0}],[\infty^{0}].$$

Для раскрытия неопределенностей используются специальные приемы.

2.1. Предел отношения двух многочленов при *x*→∞. Раскрытие неопределенности вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, возникающую в пределах $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} +\ldots+a_n$, $Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} +\ldots+b_m$ – многочлены, надо и числитель и знаменатель разделить на самую высокую входящую в них степень x.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^n(a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n})}{x^m(b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots.+\frac{b_m}{x^m})}=\lim_{x\to\infty}x^{n-m}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_m}{x^m}}$$

Итого: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}0, & при \quad n<m\\ \frac{a_0}{b_0}, & при \quad n=m\\ \infty, & при \quad n>m\end{cases}$

Эту формулу называют «**правилом старших степеней**»

<u>**Пример 2.**</u>

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+2x+8}{6x^5+8x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\left(5+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}\right)}{x^5\left(6+\frac{8}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{6x^3}=0$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x^2+8}{8x^3+1}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3\left(3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{8}{x^3}\right)}{x^3\left(8+\dfrac{1}{x^3}\right)}=\dfrac{3}{8}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+1}{x+1}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\left(3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot 3=\infty$

г)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8x^3-2}+5x^2}{\sqrt{4x^4+5}-\sqrt[5]{x^2+2}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\dfrac{8x^3-2}{x^6}}+5}{\sqrt{\dfrac{4x^4+5}{x^4}}-\sqrt[5]{\dfrac{x^2+2}{x^{10}}}}==\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\dfrac{8}{x^3}-\dfrac{2}{x^6}}+5}{\sqrt{4+\dfrac{5}{x^4}}-\sqrt[5]{\dfrac{1}{x^8}+\dfrac{2}{x^{10}}}}==\frac{5}{2}$$

Здесь старшие степени числителя и знаменателя – x^2. На первом шаге разделили числитель и знаменатель на x^2.

Задачи для самостоятельного решения:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+x+3x^4}{x^4-2x+1}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-x+2}{2x^3+4x^2-5}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3x^2-x^4}{x^3+x}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-2x+2}{x^4+3}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-2x+9}{2x^5+2x-3}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+5x^2-2x^3}{x^3+2x-6}$
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+4x+7}{5x^2-2x+1}$
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-6x+1}{2x^3-5x^2+8}$
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x-7}{6x^2-3x+1}$
10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+5}{3x-7}$
11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x-2}{7x^2+9}$
12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+2x-3}{x^2+x+3}$
13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-4}{x^4+x^2+3}$
14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)(x+3)}{5x^2+x+2}$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x-8}{4x+2}$

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-7x+1}{2x-5}$

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14-6x+x^4}{-6x^4+2x+1}$

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+49)(7x-3)}{7x^2-x+2}$

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2+x+1}{3x+5}$

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3+3x-2}{6x^4-31}$

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2+2x-1)\cdot\sqrt{x^4+3x-1}}{(3x+2)(2x^3+x)}$

22. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x^3+3\sqrt{x})\cdot\sqrt[3]{4+\sqrt{x}}}{(\sqrt[5]{x}+\sqrt[3]{x})(2\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x})\sqrt[6]{x^7+\sqrt[4]{x}}}$

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\cos\dfrac{\sqrt[3]{x^6+2x}\cdot\sqrt[5]{x^2-3}}{x^2\cdot\sqrt[5]{x^3+2}+\sqrt[3]{x^5+1}}$

2.2. Предел отношения двух многочленов при $x\to x_0$. Раскрытие неопределенности вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$

Рассмотрим $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где P(x) и Q(x) – многочлены. Если число *a* является корнем обоих многочленов, то здесь возникает неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Чтобы ее раскрыть

надо и в числителе, и в знаменателе выделить множитель (x–a) и сократить дробь на него.

Пример 3.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+6x-16}{x^2-4}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+8)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+8}{x+2}=\dfrac{5}{2}$

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-27}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x^2+3x+9)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-2}{x^2+3x+9}=\dfrac{1}{27}$

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^3-8}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x^2+2x+4}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$

При разложении многочленов на множители здесь использовались формулы сокращенного умножения: $\boldsymbol{x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+b^2)}$, $\boldsymbol{x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+b^2)}$,

$\boldsymbol{x^2-a^2=(x-a)(x+a)}$ и правило разложения квадратного трехчлена на множители

$\boldsymbol{ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)}$, где x_1 и x_2 –корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Задачи для самостоятельного решения:

24. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+x-1}{x^2+3x+2}$

25. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{(x^2-9)(x-3)}$

26. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\dfrac{6x^2-x-1}{3x+1}$

27. $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{3x^2+17x-6}{x^2-36}$

28. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^4-1}$

29. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$

29. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+2x-8}$

30. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{x^2-3x-10}$

31. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^3-3x^2+2}$

32. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^3-3x^2+x-6}{x^4-2x^2-x-6}$

33. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-8x+16}{x^2-16}$

34. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{6x^2+5x-1}{5x^2+3x-2}$

35. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-1}$

36. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+6x-27}{x^3-27}$

37. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+8}$

38. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+6x+9}{(x^3+27)^2}$

39. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{1-x^2}$ 40. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}$

41. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+1}$ 42. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+6x+8}{x^3+8}$

2.3. Раскрытие неопределенностей, связанных с иррациональными выражениями

Пусть требуется раскрыть неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ или $[\infty-\infty]$, возникающую при вычислении предела функции, содержащей иррациональность. Тогда можно умножить и разделить функцию на выражение, сопряженное иррациональному, чтобы «избавиться» от иррациональности.

Пример 4.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\dfrac{1}{4}$

Выражение $\sqrt{x+4}$ +2 называем сопряженным $\sqrt{x+4}$ - 2

($\sqrt{x+4}$ +2) ($\sqrt{x+4}$ - 2)= ($\sqrt{x+4}$)^2 -2^2=$x+4-4=x$

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x^2-9)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x^2-9)(\sqrt{x+1}+2)}{x+1-4}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+3)(\sqrt{x+1}+2)=24$

Выражение $\sqrt{x+1}$ +2 называем сопряженным $\sqrt{x+1}$ - 2.

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+3x-x^2\right)}{\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

Выражение $\sqrt{x^2+3x}+x$ называем сопряженным $\sqrt{x^2+3x}-x$

Задачи для самостоятельного решения:

43. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$

44. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$

45. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

46. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$

47. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$

48. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$

49. $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{x-8}$

50. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{6+x}-2}{x+2}$

51. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$

52. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

53. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$

54. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)$

55. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)$

56. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{x^2-4x}\right)$

57. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

58. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

59. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$

60. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}\right)$

61. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-2x}$

62. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^3-2x^2-x-28}{\sqrt{x}-2}$

2.4. Первый замечательный предел. Вычисление пределов тригонометрических функций

Формула

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=\left[\frac{0}{0}\right]=1 \qquad (1)$$

называется **формулой первого замечательного предела**. Несложно вывести следующие формулы, являющиеся ее следствиями

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{tg\alpha}{\alpha}=\left[\frac{0}{0}\right]=1 \quad \lim_{\alpha\to 0}\frac{\arcsin\alpha}{\alpha}=\left[\frac{0}{0}\right]=1 \quad \lim_{\alpha\to 0}\frac{arctg\alpha}{\alpha}=\left[\frac{0}{0}\right]=1 \qquad (2)$$

Таким образом, в силу формул (1) и (2)

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=1$; Здесь $\alpha=5x, \alpha\to 0$ при $x\to 0$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\frac{x}{3}}{\frac{x}{3}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=1$; Здесь $\alpha=\frac{x}{3}, \alpha\to 0$ при $x\to 0$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{arctg(x-1)}{x-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=1$ Здесь $\alpha=x-1, \alpha\to 0$ при $x\to 1$

При вычислении пределов, связанных с тригонометрическими функциями, иногда необходимо предварительно преобразовать выражения так, чтобы можно было использовать формулы первого замечательного предела. При этом могут быть полезными тригонометрические формулы преобразования суммы в произведение и другие:

$$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

Пример 5.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{nx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{nx}\cdot\dfrac{mx}{mx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{mx}{nx}=\dfrac{m}{n}$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{x^2+\pi x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{x(x+\pi)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{5x}\dfrac{5}{x+\pi}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5}{x+\pi}=\dfrac{5}{\pi}$

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{arctg(x-3)}{x^3-27}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{arctg(x-3)}{(x\ \ -3)(x^2+3x+9)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x^2+3x+9}=\dfrac{1}{27}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}\dfrac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 4x}{x+1-1}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}=8$

Задачи для самостоятельного решения:

63. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$

64. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$

65. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\arcsin(x+1)}$

66. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{arctg(x-2)}$

67. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x^2+5x}$

68. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3-\sqrt{2x+9}}$

69. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^3-3x+2}$

70. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}$

71. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^2}$

72. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}$

2.5. Второй замечательный предел.

Формула

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left[1^{\infty}\right]=e \qquad \textbf{(3)}$$

называется формулой **второго замечательного предела**.

Если ввести обозначение $\alpha=\frac{1}{x}$ (тогда $x=\frac{1}{\alpha}$ и при $x\to\infty$ $\alpha\to 0$), то ее можно записать в виде

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\left[1^{\infty}\right]=e \qquad (4)$$

Следствиями из формул второго замечательного предела являются следующие полезные на практике соотношения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1; \qquad (5)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{m}-1}{x}=m. \qquad (6)$$

Часто, если непосредственное нахождение предела какой-либо функции представляется сложным, то можно путем преобразования функции свести задачу к нахождению замечательных пределов.

<u>**Пример 6.**</u>

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x}=\left[1^{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right)^{\frac{5}{x}\cdot x}=e^{5}$

Здесь использована формула (4), $\alpha=\frac{5}{x}$. При $x\to\infty,\alpha\to 0$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x-2}\right)^{x}=\left[1^{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{10}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{10}}\right)^{\frac{10}{x-2}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x}{x-2}}=e^{10}$

Представили $\frac{x+8}{x-2}=\frac{x-2+10}{x-2}=1+\frac{10}{x-2}$. Далее воспользовались формулой (4), $\alpha=\frac{10}{x-2}$. При $x\to\infty,\alpha\to 0$

в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{4x}}=\left[1^{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{4x}\cdot\frac{3x}{3x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{3x}{4x}}=e^{\frac{3}{4}}$

Здесь использована формула (4), $\alpha=3x$. При $x\to 0,\alpha\to 0$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln(1+x)^{1/x}\right)=\ln\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\ln e=1$

Задачи для самостоятельного решения:

73. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x+1}\right)^{x+5}$

74. $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{2}{x}}$

75. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{7x-2}\right)^{3x+5}$

76. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2x}}$

77. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x-1}\right)^{4x+1}$

78. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}$

79. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^{\frac{x}{2}}$

80. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+2}{5x}\right)^{-2x}$

81. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+1}\right)^{3x}$

82. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{8+2x}{2x}\right)^{-2x}$

83. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+1}\right)^{2x-1}$

84. $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{\frac{1}{x-2}}$

85. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{x+2}$

86. $\lim\limits_{x\to 5}(6-x)^{\frac{1}{5-x}}$

87. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x-1}{x^2+3x-2}\right)^{x}$

88. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$

89. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+4}{x^2-3x+5}\right)^{2x}$

90. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{x}$

91. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$ 92. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$

93. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin 2x)^{ctg\,2x}$ 94. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+tg\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}$

95. $\lim\limits_{x\to\infty}3x[\ln(2x+1)-\ln 2x]$ 96. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}$

Указания к задаче 87. Представить выражение в виде

$$\frac{x^2+4x-1}{x^2+3x-2}=\frac{x^2+3x-2+x+1}{x^2+3x-2}=1+\frac{x+1}{x^2+3x-2}$$

Указания к задаче 89. Смотреть указание к задаче 87.

Указания к задаче 91. Смотреть указание к задаче 87.

2.6. Вычисление пределов функций с помощью эквивалентных функций

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x\to a$.

Определение. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **эквивалентными бесконечно малыми**.

Обозначают $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

В силу формул (1), (2) (первый замечательный предел) и формул (5) (следствия второго замечательного предела) при $x\to 0$

$\sin x\sim x$ $tgx\sim x$ $\arcsin x\sim x$ $arctgx\sim x$

$e^x-1\sim x$ $\ln(1+x)\sim x$.

Также $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}\sim 2\dfrac{x}{2}\dfrac{x}{2}=\dfrac{x^2}{2}$

Теорема. Предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения эквивалентных им бесконечно малых.

Пусть при $x\to a$ $\alpha(x),\alpha_1(x),\beta(x),\beta_1(x)$ – бесконечно малые функции, причем $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, $\beta(x)\sim\beta_1(x)$.

Тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)},\text{ если }\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\text{ существует.}$$

Эта теорема дает новую технику, которую можно использовать при вычислении пределов.

Пример 7.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgmx}{\arcsin nx}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{mx}{nx}=\dfrac{m}{n}$

При *x → 0 tg mx ~ mx* и *arcsin nx~ nx* . Заменив функции эквивалентными им бесконечно малыми, получили результат.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x}{x\ln(1+x)}$

Так как *sin5x ~ 5x* и *ln(1+x) ~ x* при *x → 0*, то, заменив функции эквивалентными бесконечно малыми, получим:

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{x\ln(1+x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x\cdot 5x}{x\cdot x}=25$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1-4x)}$

Так как $e^{2x}-1$ ~ 2x и *ln(1–4x) ~ –4x* при *x → 0*, то, заменив функции эквивалентными бесконечно малыми, получим:

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1-4x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{-4x}=-\frac{1}{2}$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{3x}{2}}{x^2}$

Так как $\sin\dfrac{3x}{2}\sim\dfrac{3x}{2}$ при *x → 0*, то, заменив функции эквивалентными бесконечно малыми, получим:

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{3x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\dfrac{3x}{2}\cdot\dfrac{3x}{2}}{x^2}=\frac{9}{2}$$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 9x}{1-\cos 4x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin 7x\sin(-2x)}{2\sin^2 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 2x}=\dfrac{7}{2}$

Замечание. Бесконечно малые функции можно сравнивать по быстроте их убывания, т.е. по быстроте их стремления к нулю.

Определение. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой более высокого порядка**, чем функция $\beta(x)$.

Пример.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot x=0$. Поэтому x^2 – бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $\sin x$.

Определение. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A,\quad A\neq 0,\quad A=const$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **бесконечно малыми одного порядка**.

Пример.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{\sin 2x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\dfrac{5}{2}$, т.е. $tg5x$ и $\sin 2x$ – бесконечно малые одного порядка малости.

Следует отметить, что не все бесконечно малые функции можно сравнивать между собой. Например, если отношение $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не имеет предела, то функции несравнимы.

Задачи для самостоятельного решения:

97. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 10x}$

98. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{\arcsin 2x}$

99. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg4x}{\sin 2x}$

100. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x\sin x}$

101. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x(1-\cos 2x)}$

102. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{1-\cos 6x}$

103. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 6x}$

104. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{tg^2 2x}$

105. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$

106. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\arcsin x}$

107. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{x^2}$

108. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{tg^3 2x}$

109. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 2x}{x\sin^2 3x}$

110. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 x}{tg^3 4x}$

111. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$

112. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{1-\cos 6x}$

113. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$

114. $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(1-\dfrac{2}{x}\right)$

115. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}$

116. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{2x}$

117. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{5x}}{3x}$

118. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{2x}$

119. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{3x}$

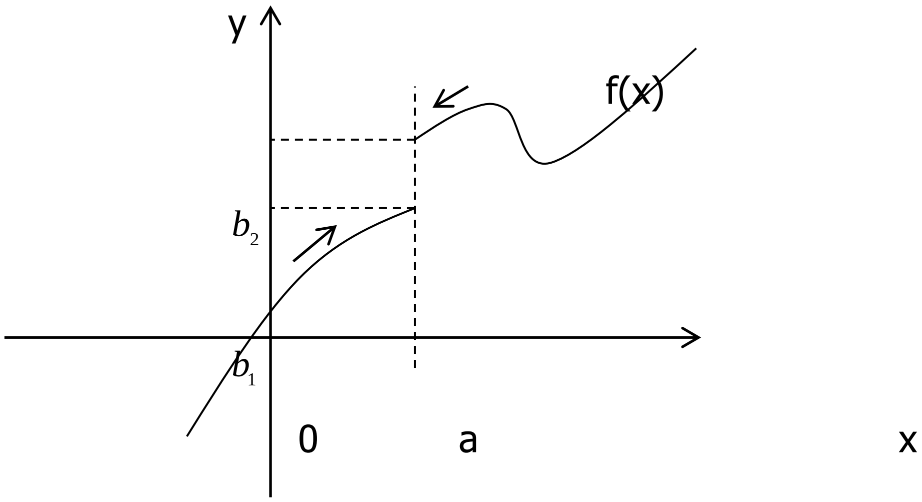
120. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 3x)}{2x}$

121. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2-x)}{1-x}$

3. Исследование функций на непрерывность.

3.1. Односторонние пределы

Определение. Если *f(x)* $\to b_1$ при *x* → *a* только при *x* < *a*, то $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b_1$ - называется **пределом** функции *f(x)* в точке *x = a* **слева**, а если *f(x)* $\to b_2$ при *x* → *a* только при *x* > *a*, то $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b_2$ называется **пределом** функции *f(x)* в точке *x = a* **справа**.



Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция *f(x)* не определена в самой точке *x = a*, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Пределы b_1 и b_2 называются также **односторонними пределами** функции *f(x)* в точке *x = a*. Используют обозначения:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a-0); \qquad \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$$

Теорема. Функция *y*= $f(x)$ имеет предел в точке *a* тогда и только тогда, когда существуют оба односторонних предела функции $f(x)$ в точке *a* и они равны между собой.

То есть

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = b \leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = b.$$

3.2Непрерывность функции в точке. Классификация точек разрыва.

Определение. Функция *f(x)*, определенная в окрестности некоторой точки x_0, называется **непрерывной в точке** x_0, если она

1) определена в точке x_0

2) существует конечный предел функции в точке x_0

3) этот предел равен значению функции в точке x_0, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Условия 1)- 3) называются **условиями непрерывности**

Определение. Пусть x_0 принадлежит области определения функции *f(x)* или ее границе. Точка x_0 называется **точкой разрыва** функции *f(x)*, если в ней нарушено хотя бы одно из условий непрерывности 1) – 3).

Определение. Точка x_0 называется **точкой разрыва 1- го рода**, если в ней оба односторонних предела функции *f(x)* существуют и конечны.

Точку разрыва 1 – го рода иногда называют **устранимой** точкой разрыва, если оба односторонних предела в этой точке равны между собой

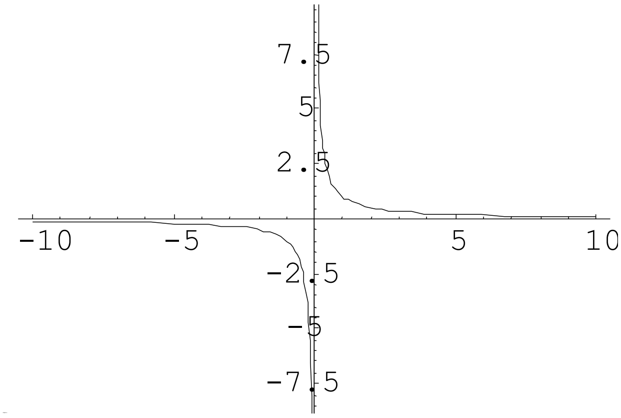
$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x)$$

Если же $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, то $\boldsymbol{x_0}$ называют точкой **неустранимого** разрыва, используется также термин **«скачок».**

Определение. Точка x_0 называется **точкой разрыва 2 – го рода**, если в этой точке функция *f(x)* не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

Пример 8. Исследовать функции на непрерывность. Указать точки разрыва и характер разрыва.

а) Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ имеет в точке $x_0 = 0$ точку разрыва 2 – го рода, так как $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = -\infty$.



б) f(x) = $\frac{\sin x}{x}$. Функция не определена в точке $x = 0$, но имеет в ней конечный предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, т.е. в точке $x = 0$ функция имеет точку разрыва 1 – го рода, причем $x = 0$ – точка устранимого разрыва.

в) $y=\frac{1}{1+3^{\frac{1}{x}}}$

Функция не определена в точке $x=0 \to x=0$- точка разрыва функции.

$\lim\limits_{x\to 0-0} \frac{1}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-0} 3^{\frac{1}{x}}=3^{-\infty}=0$.

Левый односторонний предел

$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0-0} \frac{1}{1+3^{\frac{1}{x}}}=1$.

$\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{1}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+0} 3^{\frac{1}{x}}=3^{\infty}=\infty$.

Правый односторонний предел $f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{1}{1+3^{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{\infty}=0$.

Односторонние пределы конечны, значит $x=0$ – точка разрыва первого рода; $f(0-0)\neq f(0+0) \to x=0$ –точка неустранимого разрыва.

г) $y=arctg\frac{1}{x-4}$

Функция не определена в точке $x=4 \to x=4$- точка разрыва функции.

$f(4-0)=\lim\limits_{x\to 4-0} arctg\frac{1}{x-4}=arctg(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$; $f(4+0)=\lim\limits_{x\to 4+0} arctg\frac{1}{x-4}=arctg(\infty)=\frac{\pi}{2}$

Односторонние пределы конечны, значит $x=4$ – точка разрыва первого рода; $f(4-0)\neq f(4+0) \to x=4$ –точка неустранимого разрыва.

д) $f(x)=\begin{cases} x+2, \ x<-1, \\ x^2, -1\le x\le 2, \\ -2x+6, \ x\succ 2 \end{cases}$

Функция, очевидно, непрерывна на интервалах $(-\infty,-1)$, $(-1,2)$ и $(2,\infty)$. Исследуем непрерывность функции в точках стыка.

x=-1

$f(-1)=(-1)^2=1$; $f(-1-0)=\lim\limits_{x\to -1-0}(x+2)=1$; $f(-1+0)=\lim\limits_{x\to -1+0}x^2=1$;

$f(-1-0)=f(-1+0)=f(-1)$, то есть $x=-1$- точка непрерывности функции, существует $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$, равный значению функции в точке.

x=2

$f(2)=2^2=4$; $f(2-0)=\lim\limits_{x\to 2-0}x^2=4$; $f(2+0)=\lim\limits_{x\to 2+0}(-2x+6)=2$;

$f(2-0)\neq f(2+0)\to \lim\limits_{x\to 2}f(x)$ не существует, то есть $x=2$- точка разрыва функции, причем разрыв первого рода, неустранимый.

Свойства функций, непрерывных в точке.

1) Сумма, разность и произведение непрерывных в точке x_0 функций – есть функция, непрерывная в точке x_0.

2) Частное двух непрерывных в точке x_0 функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ – есть непрерывная в точке x_0 функция при условии, что $g(x_0)\neq 0$.

3) Суперпозиция непрерывных в точке x_0 функций – есть непрерывная в точке x_0 функция.

Это свойство может быть записано следующим образом:

Если $u = f(x)$, $v = g(x)$ – непрерывные функции в точке $x = x_0$, то функция

$v = g(f(x))$ – тоже непрерывная функция в этой точке.

Справедливость приведенных выше свойств можно легко доказать, используя теоремы о пределах.

<u>Непрерывность некоторых элементарных функций.</u>

1) Функция $f(x) = C$, $C = const$ – непрерывная функция на всей области определения.

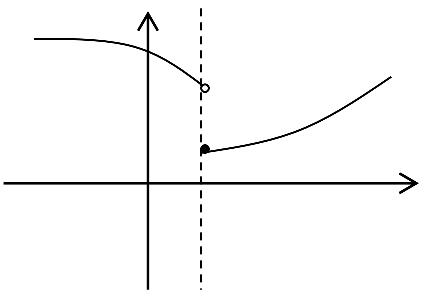
2) Рациональная функция $f(x) = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m}$ непрерывна для всех значений x, кроме тех, при которых знаменатель обращается в ноль. Таким образом, функция этого вида непрерывна на всей области определения.

3) Все основные элементарные функции непрерывны во всех точках их области определения.

4) Сложные функции, образованные из функций, непрерывных в некоторой области, непрерывны в этой области.

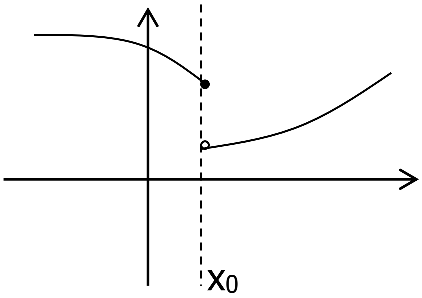
Замечание. Следует отметить также, что непрерывность функции может быть односторонней.

То есть если односторонний правый предел $\lim\limits_{x \to x+0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной справа.



x_0

Если односторонний левый предел $\lim\limits_{x \to x-0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной слева.



3.3. Непрерывность функции в области.

Определение. Функция *f(x)* называется **непрерывной в некоторой области (на интервале, отрезке)**, если она непрерывна в любой точке этой области.

При этом не требуется непрерывность функции на концах отрезка или интервала, необходима только односторонняя непрерывность на концах отрезка или интервала.

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Свойство 1: (Первая теорема Вейерштрасса). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке [*a, b*], то она ограничена на этом отрезке.

Свойство 2: (Вторая теорема Вейерштрасса). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке [*a, b*], то она достигает на этом отрезке наибольшего и наименьшего значения.

Свойство 3: (Теорема Больцано – Коши). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке [*a, b*] и значения ее на концах отрезка $f(a)$ и

$f(b)$, имеют противоположные знаки, то внутри отрезка найдется точка $\xi \in (a,b)$ такая, что $f(\xi)=0$.

Задачи для самостоятельного решения:

1. Построить схему графика функции $y=f(x)$, указать характер разрыва, если известно, что

122.	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$; $\lim\limits_{x\to4-0} f(x)=3$; $\lim\limits_{x\to4+0} f(x)=-1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
123.	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to3-0} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to3+0} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
124.	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$; $\lim\limits_{x\to1-0} f(x)=3$; $\lim\limits_{x\to1+0} f(x)=3$; $\lim\limits_{x\to4-0} f(x)=2$; $\lim\limits_{x\to4+0} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$.
125.	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-3$; $\lim\limits_{x\to-2-0} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-2+0} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to2-0} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to2+0} f(x)=4$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2. Исследовать функции на непрерывность. Указать точки разрыва и характер разрыва.

126. $y=\dfrac{x+3}{(x-1)^2}$	127. $y=\dfrac{x+4}{(x-1)(x+1)}$
128. $y=\begin{cases} x^2+1, & x\le1, \\ 2x, & 1\le x\le3, \\ x+2, & x>3 \end{cases}$	129. $y=e^{\frac{1}{x-2}}$
130. $y=\dfrac{\cos x}{x}$	131. $y=\dfrac{x-1}{x^2-1}$
132. $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x+1}}}$	133. $y=\dfrac{\sin x}{2x-\pi}$
134. $y=\dfrac{x+5}{x^2+6x+5}$	135. $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+3x-4}$
136. $y=arctg\dfrac{1}{x}$	137. $y=\begin{cases} 2x, & x<1, \\ x+1, & 1\le x<3, \\ \dfrac{1}{x-4}, & x\ge3 \end{cases}$
138. $y=\begin{cases} -x, & x<-1, \\ x+1, & -1\le x<0, \\ e^x, & x\ge0 \end{cases}$	139. $y=2^{\frac{5}{x-1}}$

140. $y=\begin{cases} x^2+1, & x\le -1,\\ \dfrac{2}{x}, & -1<x<2,\\ x-1, & x\ge 2 \end{cases}$	141. $y=\begin{cases} 2-x, & x<0,\\ \sin x, & 0<x<\pi,\\ 0, & x>\pi \end{cases}$

4. Индивидуальные задания

В заданиях 1-9 необходимо найти пределы, не используя правило Лопиталя.

В задании 10 необходимо исследовать функцию на непрерывность. Указать точки разрыва и характер разрыва.

ВАРИАНТ 1

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{10-7x+x^2}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-5x+6}{10-7x+x^2}$. **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+6}{10-7x+x^2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$. **5.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+3}+5x}{2x-3}$. **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x+4}-\sqrt{x^2+x+1})$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\pi x)}{x}$. **8.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^{3x+1}$. **9.** $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} e^{x/(1-x)}$.

10. $y=\begin{cases} x-3, & x<1,\\ x+1, & 0\le x\le 4,\\ x+2, & x>4 \end{cases}$

ВАРИАНТ 2

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{8-9x+x^2}{10-9x-x^2}$. **2.** $\lim\limits_{x\to -10}\dfrac{8-9x+x^2}{10-9x-x^2}$. **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8-9x+x^2}{10-9x-x^2}$.

4. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{\sqrt{x^2-2}-1}{x^2-3}$. **5.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2-4}+4x}{3x-4}$. **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2+x})$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(3x)}{x^2}$. **8.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+7}{x+5}\right)^{2x-1}$. **9.** $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} e^{1/(x-1)}$.

10. $y=\dfrac{x-2}{(x+1)^2}$

Вариант 3

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-8x+12}{8x-20+x^2}$. **2.** $\lim\limits_{x\to -10}\dfrac{x^2-8x+12}{8x-20+x^2}$. **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-8x+12}{8x-20+x^2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+4}-2}$. **5.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4x+5}{\sqrt{x^2-1}-x}$. **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+x-1})$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(x/5)}{x^2}$. **8.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+9}{x+5}\right)^{x/2+2}$. **9.** $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}5^{1/(x-2)}$.

10. $y=\dfrac{x^3+4}{(x-1)(x+2)}$

Вариант 4

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-5+3x}{x-3+2x^2}$. **2.** $\lim\limits_{x\to -3/2}\dfrac{2x^2-5+3x}{x-3+2x^2}$. **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5+3x}{x-3+2x^2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}$. **5.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+4}+2\sqrt{3}\,x}{1-2x}$. **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+5x}-x)$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}(x/7)}{x}$. **8.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+7}\right)^{x/2-2}$. **9.** $\lim\limits_{x\to 3\pm 0}2^{1/(x-3)}$.

10. $y=2^{\frac{3x}{x+3}}$

Вариант 5

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{2x^2+x-3}$. **2.** $\lim\limits_{x\to -3/2}\dfrac{3x^2-x-2}{2x^2+x-3}$. **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x-2}{2x^2+x-3}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^3}-1}{\sqrt{x}-1}$. **5.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x-5}{\sqrt{25x^2+7}+6x}$. **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-3x+2})$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2(2x)}{x^2}$. **8.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)^{2x+3}$. **9.** $\lim\limits_{x\to 5\pm 0}5^{1/(x-5)}$.

10. $y=\begin{cases}2x^2,\ x\le 0,\\ x,\ 0<x\le 1,\\ 5,\ x>1\end{cases}$

Вариант 6

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-4x-1}{3x^2-2x-1}$. **2.** $\lim\limits_{x\to -1/3}\dfrac{5x^2-4x-1}{3x^2-2x-1}$. **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-4x-1}{3x^2-2x-1}$. **4.** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^3}-8}{\sqrt{x}-2}$.

5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x+\sqrt[3]{x^3+x^2}}{\sqrt{x^2-1}-2x}$. **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+5x+6}-\sqrt{4x^2-3x+2})$.

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}$. **8.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+7}{2x+3}\right)^{3x-3}$. **9.** $\lim\limits_{x\to -1\pm 0}3^{1/(x+1)}$.

10. $y=\dfrac{x+5}{(x-1)^2}$

Вариант 7

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-7x+6}{3x^2-2x-8}$. **2.** $\lim\limits_{x\to -4/3}\dfrac{2x^2-7x+6}{3x^2-2x-8}$. **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-7x+6}{3x^2-2x-8}$.

4. $\lim\limits_{x\to 25}\dfrac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x^3}-125}$.**5.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^3+5x^2}-6x}{\sqrt{4x^2-3}+4x}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+3x}-\sqrt{4x^2-x+1})$.

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{tg}(x-2)}{x^2-4}$. **8.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-5}{2x-9}\right)^{x/2+1}$. **9.** $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} e^{x/(2-x)}$.

10. $y=\dfrac{x^2+4}{(x-4)(x+2)}$

Вариант 8

1.. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-5x-6}{x^2-8x+12}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{4x^2-5x-6}{x^2-8x+12}$. **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-5x-6}{x^2-8x+12}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$. **5.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{16x^2+9x}+20x}{\sqrt[3]{3x-x^3}+5x}$. **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+5x+7}-2x)$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{\operatorname{tg}3x}$. **8.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x-11}\right)^{2x+4}$. **9.** $\lim\limits_{x\to 3\pm 0} e^{1/(x-3)}$.

10. $y=2^{\frac{4x}{x-5}}$

ВАРИАНТ 9

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x^2-x-5}{7x^2-4x-3}$. **2.** $\lim\limits_{x\to -3/7}\dfrac{6x^2-x-5}{7x^2-4x-3}$. **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-x-5}{7x^2-4x-3}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+8}-3}{\sqrt{x^2+63}-8}$. **5.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x-\sqrt{3x+25x^2}}{4x+\sqrt[3]{1-x^3}}$. **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-\sqrt{4x^2-8x})$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}(x\operatorname{ctg}3x)$. **8.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x-5}\right)^{3x-4}$. **9.** $\lim\limits_{x\to 3\pm 0} 4^{2/(x-3)}$.

10. $y=\begin{cases}\sqrt{1-x^2},\ x\le 0,\\ 1,\ 0<x\le 1,\\ x-2,\ x>1\end{cases}$

Вариант 10

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+4x-7}{4x^2-13x+9}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 9/4}\dfrac{3x^2+4x-7}{4x^2-13x+9}$. **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-7}{4x^2-13x+9}$.

4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{\sqrt{x^2+27}-6}$. **5.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{7x+\sqrt{4x^2+7x}}{\sqrt[3]{8x^3+7x}+3x}$. **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+6x+7}-x)$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$. **8.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+10}{3x-2}\right)^{x/2+1}$. **9.** $\lim\limits_{x\to 4\pm 0}5^{3/(4-x)}$.

10. $y=\dfrac{x^3+5}{(x+7)^2}$

ВАРИАНТ 11

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-14x+16}{2x^2+5x-18}$. **2.** $\lim\limits_{x\to -9/2}\dfrac{3x^2-14x+16}{2x^2+5x-18}$. **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-14x+16}{2x^2+5x-18}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{3}}$. **5.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1-125x^3}+10x}{2x-\sqrt{9x^2+5x}}$. **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+7x+10})$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos 4x}$. **8.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+7}{3x+1}\right)^{x/2-1}$. **9.** $\lim\limits_{x\to \pi/2\pm 0}2^{\mathrm{tg}x}$.

10. $y=\dfrac{x^2+4}{(x-3)(x+2)}$

Вариант 12

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^2-14x+8}{4x^2-13x+10}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 5/4}\dfrac{5x^2-14x+8}{4x^2-13x+10}$. **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-14x+8}{4x^2-13x+10}$.

4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}{x-3}$. **5.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt[3]{64x^3+6x^2}-x}{2x+\sqrt{x^2+2x}}$. **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x-2})$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x^2}$. **8.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x+4}\right)^{3x+2}$. **9.** $\lim\limits_{x\to \pi/4\pm 0}3^{\mathrm{tg}2x}$.

10. $y=2^{\frac{4x}{x+5}}$

Вариант 13

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-3x-9}{x^2-7x+12}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-3x-9}{x^2-7x+12}$. **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x-9}{x^2-7x+12}$. **4.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x+8}-2}$.

5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt[3]{27x^3+8}}{\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x^2+1}}$. **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-2x})$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\frac{\pi}{2}(3-x))}{x}$. **8.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-8}\right)^{2x-2}$. **9.** $\lim\limits_{x\to \pi/4\pm 0}4^{\mathrm{tg}6x}$.

10. $y=\begin{cases}\sin x,\ x\le 0,\\ x,\ 0<x\le 2,\\ 0,\ x>2\end{cases}$

Вариант 14

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-7x+3}{x^2-8x+15}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-7x+3}{x^2-8x+15}$. **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-7x+3}{x^2-8x+15}$. **4.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}$.

5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^3+1}-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt{x^2+2}}$. **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+2x+5})$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2}(x+1))}{x}$. **8.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x-13}\right)^{x/3+3}$. **9.** $\lim\limits_{x\to 0\pm 0}\dfrac{1}{2^{\operatorname{ctg}x}}$.

10. $y=\dfrac{x^2-3}{(x-1)(x+2)}$

Вариант 15

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-7x-6}{x^2-9x+18}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{3x^2-7x-6}{x^2-9x+18}$. **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-7x-6}{x^2-9x+18}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+27}-3}{x}$. **5.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{16x^2+5}+2x}{3-2x}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{x^2-2x+1})$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x/2)}{\operatorname{tg}^2 3x}$. **8.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-7}{3x-19}\right)^{x/4-3}$. **9.** $\lim\limits_{x\to\pi/2\pm 0}\dfrac{1}{3^{\operatorname{ctg}2x}}$.

10. $y=\dfrac{x^2}{x+7}$

Вариант 16

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-17x+15}{2x^2-3x-9}$. **2.** $\lim\limits_{x\to -3/2}\dfrac{4x^2-17x+15}{2x^2-3x-9}$. **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-17x+15}{2x^2-3x-9}$.

4. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x-10}{\sqrt[3]{x+17}-3}$. **5.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4+9x^2}+4x}{\sqrt[3]{2-x^3}}$. **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+6x+7}-3x)$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2(3x)}{\sin^2 4x}$. **8.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{3+2x}\right)^{7x}$. **9.** $\lim\limits_{x\to 1\pm 0}10^{2/(x-1)}$.

10. $y=4^{\frac{7x}{x+5}}$

ВАРИАНТ 17

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5x^2-16x+3}{2x^2-5x-3}$. **2.** $\lim\limits_{x\to -1/2}\dfrac{5x^2-16x+3}{2x^2-5x-3}$. **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-16x+3}{2x^2-5x-3}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x+64}-4}$. **5.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{25x^2-10x+1}+7x}{5-3x}$. **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}(3x-\sqrt{9x^2-18x+5})$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(2x)}{\mathrm{tg}^2 3x}$. **8.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}$. **9.** $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} 9^{3/(x-2)}$.

10. $y=\begin{cases} x-1,\ x\le 0,\\ x^2,\ 0<x\le 2,\\ 2x,\ x>2\end{cases}$

Вариант 18

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-14x+8}{2x^2-11x+12}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 3/2}\dfrac{3x^2-14x+8}{2x^2-11x+12}$. **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-14x+8}{2x^2-11x+12}$.

4. $\lim\limits_{x\to -36}\dfrac{\sqrt[3]{x+100}-4}{x+36}$. **5.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{7x-\sqrt{4x^2+5x}}{\sqrt[3]{9-27x^3}}$. **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{16x^2+8x-7}-4x)$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^3(2x)}{\sin^2 3x}$. **8.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x^2-5}\right)^{x^2+1}$. **9.** $\lim\limits_{x\to 3\pm 0} 8^{2/(3-x)}$.

10. $y=\dfrac{x^4-3}{(x-1)(x+8)}$

Вариант 19

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x^2-23x+12}{2x^2-7x-4}$. **2.** $\lim\limits_{x\to -1/2}\dfrac{5x^2-23x+12}{2x^2-7x-4}$. **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-23x+12}{2x^2-7x-4}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{2-\sqrt[3]{x+7}}$. **5.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+2}-x}{\sqrt[3]{x^3-1}}$. **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}(4x-\sqrt{16x^2-6x+5})$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$. **8.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{(x+1)/3}$. **9.** $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} 7^{4/(2-x)}$.

10. $y=\dfrac{x^2+1}{x^3+8}$

Вариант 20

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{3x^2-8x-16}$. **2.** $\lim\limits_{x\to -4/3}\dfrac{2x^2-9x+4}{3x^2-8x-16}$. **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-9x+4}{3x^2-8x-16}$.

4. $\lim\limits_{x\to 81}\dfrac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}}$. **5.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-x}{\sqrt[3]{2-8x^3}}$. **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+7x}-\sqrt{9x^2+x})$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\, 2x}{x}$. **8.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+2x}{2x+3}\right)^{x/2}$. **9.** $\lim\limits_{x\to 5\pm 0} 6^{3/(5-x)}$.

10. $y=4^{\frac{5}{x-9}}$

ВАРИАНТ 21

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{7x^2-6x-1}{3x^2-2x-1}$. **2.** $\lim\limits_{x\to -1/3}\dfrac{7x^2-6x-1}{3x^2-2x-1}$. **3.** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^2-6x-1}{3x^2-2x-1}$.

4. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$. **5.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt[3]{27x^3+25x^2}-2x}{2x+\sqrt{x^2+x+1}}$. **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{16x^2+25x}-\sqrt{16x^2+1})$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{x}$. **8.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{1+2x}\right)^{3x}$. **9.** $\lim\limits_{x\to \pi/2\pm 0} 3^{1/\cos x}$.

10. $y=\begin{cases}\sin x,\ x\le 0,\\ x^2,\ 0<x\le 2,\\ 2-x,\ x>2\end{cases}$

Вариант 22

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{8x^2-7x-1}{2x^2-x-1}$. **2.** $\lim\limits_{x\to -1/2}\dfrac{8x^2-7x-1}{2x^2-x-1}$. **3.** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{8x^2-7x-1}{2x^2-x-1}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$. **5.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt[3]{125x^3-100x^2}+3x}{3x-\sqrt{x^2+2x}}$. **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{25x^2+11x}-\sqrt{25x^2+x})$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{x}$. **8.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\ln(1+3x)}$. **9.** $\lim\limits_{x\to \pi/4\pm 0} 2^{1/\cos 2x}$.

10. $y=\dfrac{x^2-3}{(x-8)(x+1)}$

Вариант 23

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{9x^2-2x-7}{3x^2-2x-1}$. **2.** $\lim\limits_{x\to -1/3}\dfrac{9x^2-2x-7}{3x^2-2x-1}$. **3.** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{9x^2-2x-7}{3x^2-2x-1}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{3x^2}$. **5.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x}+x}{\sqrt{x^2+4x+5}}$. **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{36x^2+25x}-\sqrt{36x^2-x})$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}$. **8.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{x}$. **9.** $\lim\limits_{x\to \pi/4\pm 0} 4^{1/\cos 6x}$.

10. $y=\dfrac{x^2-7}{x^2-5}$

Вариант 24

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{8x^2-23x+14}{2x^2-5x+2}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{8x^2-23x+14}{2x^2-5x+2}$. **3.** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{8x^2-23x+14}{2x^2-5x+2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$. **5.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x+2}{\sqrt{9x^4+7}+5x}$. **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{25x^2+20x}-5x)$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sin 3x}$. **8.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$. **9.** $\lim\limits_{x\to \pi\pm 0} 3^{\operatorname{ctg}x}$.

10. $y=9^{\frac{5}{x+3}}$

Вариант 25

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{7x^2-18x+8}{2x^2-3x-2}$. **2.** $\lim\limits_{x\to -1/2}\dfrac{7x^2-18x+8}{2x^2-3x-2}$. **3.** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^2-18x+8}{2x^2-3x-2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$. **5.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-1}+x}{2x+3}$. **6.** $\lim\limits_{x\to \infty}(5x-\sqrt{25x^2-x+1})$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\sin x}$. **8.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$. **9.** $\lim\limits_{x\to \pi/2\pm 0} 5^{\operatorname{ctg}2x}$.

10. $y=\begin{cases} x,\ x\le 0, \\ tgx,\ 0<x\le\dfrac{\pi}{2}, \\ x,\ x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Вариант 26

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{9x^2-11x-14}{3x^2-7x+2}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{9x^2-11x-14}{3x^2-7x+2}$. **3.** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{9x^2-11x-14}{3x^2-7x+2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$. **5.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x+13}{2x+\sqrt{9x^2+3}}$. **6.** $\lim\limits_{x\to \infty}(\sqrt{36x^2+13x}-\sqrt{36x^2+x})$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg}x}{1-\cos 2x}$. **8.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{x}$. **9.** $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} 2^{x/(x-1)}$.

10. $y=\dfrac{x^2+1}{(x+1)(x+7)}$

Вариант 27

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-15x+9}{3x^2-17x+24}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 8/3}\dfrac{4x^2-15x+9}{3x^2-17x+24}$. **3.** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^2-15x+9}{3x^2-17x+24}$.

4. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$. **5.** $\lim\limits_{n\to -\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}-n}{n+1}$.

6. $\lim\limits_{x\to \infty}(\sqrt{25x^2+6x+1}-\sqrt{25x^2+x+6})$.

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\sin(x-1)}$. **8.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-3^x}{x}$. **9.** $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} 3^{2x/(x-1)}$.

10. $y=\dfrac{x^2+7}{x-5}$

Вариант 28

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{7x^2-22x+3}{3x^2-8x-3}$. **2.** $\lim\limits_{x\to -1/3}\dfrac{7x^2-22x+3}{3x^2-8x-3}$. **3.** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^2-22x+3}{3x^2-8x-3}$.

4. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{25-x^2}{\sqrt{5x}-5}$. **5.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+3}+x}{\sqrt{4x^2+1}+x}$. **6.** $\lim\limits_{x\to \infty}(\sqrt{4x^2+9x+5}-\sqrt{4x^2+x+9})$.

7. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\operatorname{tg}(x+1)}$. **8.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+10x)}{2x}$. **9.** $\lim\limits_{x\to 1\pm 0}4^{x/(1-x)}$.

10. $y=\dfrac{x^2+1}{(x-1)(x-11)}$

Вариант 29

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$. **3.** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$.

4. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{3-\sqrt{x-1}}{100-x^2}$. **5.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+x}-x}{x+1}$. **6.** $\lim\limits_{x\to \infty}(\sqrt{4x^2+17x+6}-\sqrt{4x^2+x+5})$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\operatorname{tg}3x}$. **8.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\ln(1+9x)}$. **9.** $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}5^{x/(2-x)}$.

10. $y=\dfrac{x^2-17}{x^3+8}$

Вариант 30

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+6x-7}{x^2+4x-5}$. **2.** $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+6x-7}{x^2+4x-5}$. **3.** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+6x-7}{x^2+4x-5}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-\sqrt[3]{3x+1}}$. **5.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{9x^4+1}+x}{2x+1}$. **6.** $\lim\limits_{x\to \infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x-1})$.

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{tg}(x-1)}{\sqrt{x}-1}$. **8.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^x-1}{2x}$. **9.** $\lim\limits_{x\to 3\pm 0}6^{2x/(3-x)}$.

10. $y=\dfrac{x-7}{x^2-5}$