ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Прикладная математика»

Методические указания к выполнению лабораторной работы

по дисциплине

«Вычислительная математика, численные методы»

«Численные методы решения алгебраических уравнений»

Авторы
Азимова Н.Н.,
Бедоидзе М.В.,
Калякин Г.Д.,
Отраднов К.В.,
Цымбалов Д.С.

Ростов-на-Дону, 2022

Аннотация

Методические указания к выполнению лабораторной работы предназначены для студентов специальности 01.03.04 «Прикладная математика».

Авторы

Доцент кафедры «Прикладная математика»
Азимова Н.Н.

Старший преподаватель кафедры «Прикладная математика»
Бедоидзе М.В.

Старший преподаватель кафедры «Прикладная математика»
Цымбалов Д.С.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Цель расчетно-графической работы - ознакомиться с известными методами решения алгебраических уравнений и оценить их эффективность в нахождении решений конкретных задач.

Для численного решения уравнений можно использовать разные подходы, начиная от примитивных, заканчивая методами опирающиеся на серьезные математические знания, в области анализа, дифференциальной геометрии, математической логики и алгоритмов.

Найти решение $y = F(x)$ это значит: подобрать такое x, подстановка которого в данное уравнение обратит y в ноль с какой-то погрешностью эпсилон.

С геометрической точки зрения это означает найти абсциссу точки пересечения графика функции $y = F(x)$ с осью абсцисс.

В результате решения уравнения мы можем получить один, несколько, бесконечное число корней или их может вовсе не быть.

Соответственно задача отыскания корней алгебраических уравнений разбивается на несколько этапов:

1. *Классифицирующий*

   Подразумевает анализ функции на количество корней и где они локализованы (ориентировочное расположение первого, второго корня и т.д.)

2. *Уточняющий*

   После того как локализованы корни, задача сводится к их уточнению. В задаче с уточнением лучше иметь дело с одним корнем.

   Методы численного решения подразумевает, что работа идет с каким-то одним корнем. Корень должен быть локализован достаточно точно, т.е. необходимо знать, что корень находится в некотором интервале от *a* до *b*, и больше в этом интервале не находится ни одного корня.

Соответственно все методы можно классифицировать по следующим признакам (рис. 1):

1. *По подходу*: вероятностные, регулярные, комбинированные (сочетают оба подхода)
2. *По числу вычислительных операций*: объем машинных вычислений для достижения заданной точности
3. *По трудоемкости программирования*: насколько сложно запрограммировать алгоритм
4. *По робастности*: насколько метод позволяет решать уравнения различных типов

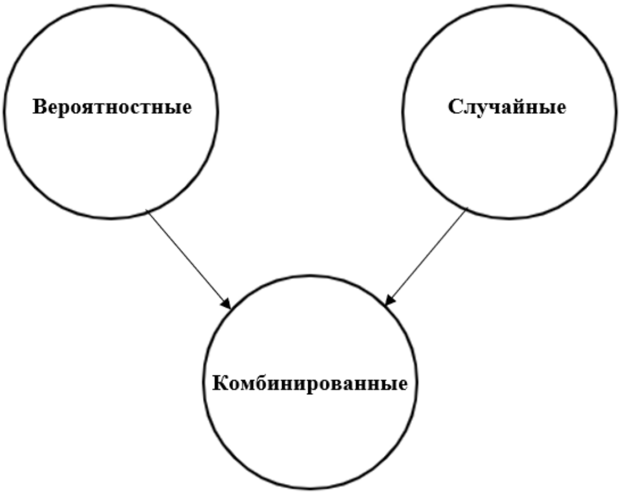


Рис. 1. Классификация алгоритмов численного решения алгебраических уравнений

Для того чтобы ориентироваться в правильности нахождения корня, будем также находить решение встроенными средствами пакета Excel и сверять результат.

На примере уравнения $\sin\left(x+\frac{1}{x^2}\right)\operatorname{th}(x) - \cos\left(x+\frac{1}{x^2}\right) *$ $*\operatorname{arctg}(x) = 0$ рассмотрим работу всех алгоритмов. С помощью встроенных средств Excel построим график функции $f(x) = \sin\left(x+\frac{1}{x^2}\right)\operatorname{th}(x) - \cos\left(x+\frac{1}{x^2}\right)\operatorname{arctg}(x)$ и найдем его пересечения с осью Ox. Для этого в столбец ячеек А впишем значения x от 1 до 25, а в ячейку B2 нашу функцию заменив все x на ячейку A2, как показано на рис. 2:

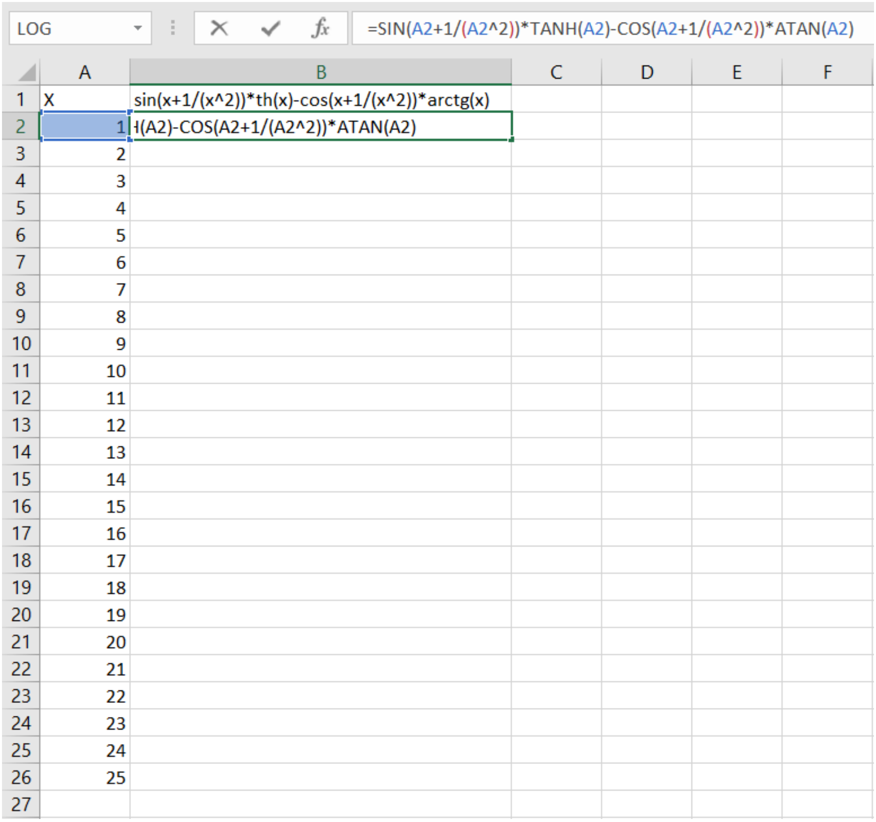


Рис. 2. Правила заполнения ячеек, содержащих значения x и $f(x)$

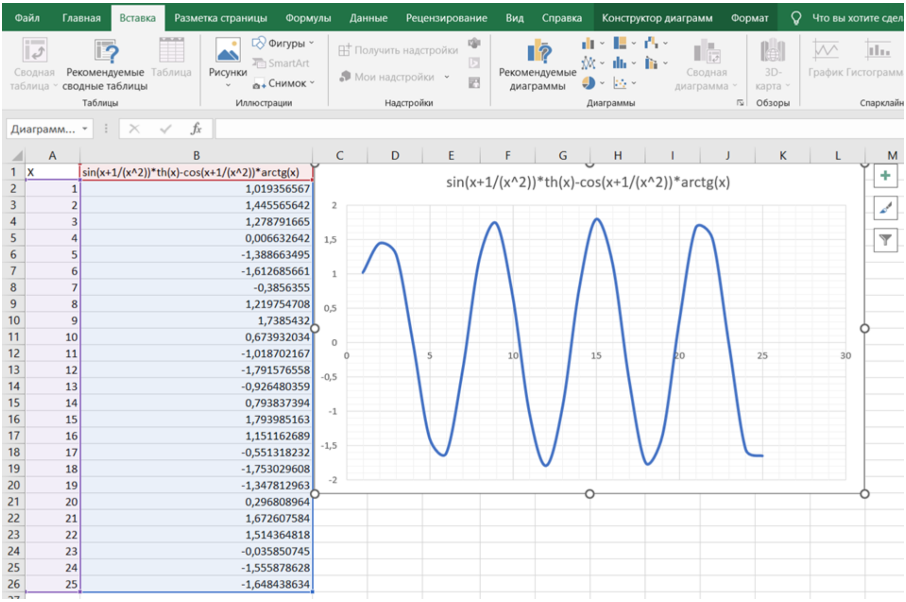
После этого протянем ячейку B2 вниз пока не закончатся значения x в столбце ячеек A (рис. 3):

B26 =SIN(A26+1/(A26^2))*TANH(A26)-COS(A26+1/(A26^2))*ATAN(A26)

	A	B	C	D	E	F	G
1	X	sin(x+1/(x^2))*th(x)-cos(x+1/(x^2))*arctg(x)					
2	1	1,019356567					
3	2	1,445565642					
4	3	1,278791665					
5	4	0,006632642					
6	5	-1,388663495					
7	6	-1,612685661					
8	7	-0,3856355					
9	8	1,219754708					
10	9	1,7385432					
11	10	0,673932034					
12	11	-1,018702167					
13	12	-1,791576558					
14	13	-0,926480359					
15	14	0,793837394					
16	15	1,793985163					
17	16	1,151162689					
18	17	-0,551318232					
19	18	-1,753029608					
20	19	-1,347812963					
21	20	0,296808964					
22	21	1,672607584					
23	22	1,514364818					
24	23	-0,035850745					
25	24	-1,555878628					
26	25	-1,648438634					
27							
28							

Рис. 3. Правило заполнения ячеек B2

Дальше выделяем все значения столбцов A и B, и в вкладке «Вставка», разделе «Рекомендуемые диаграммы» выбираем «Точечная диаграмма с гладкими кривыми». Выводим на экран график функции (рис. 4):



x	sin(x+1/(x^2))*th(x)-cos(x+1/(x^2))*arctg(x)
1	1,019356567
2	1,445565642
3	1,278791665
4	0,006632642
5	-1,388663495
6	-1,612685661
7	-0,3856355
8	1,219754708
9	1,7385432
10	0,673932034
11	-1,018702167
12	-1,791576558
13	-0,926480359
14	0,793837394
15	1,793985163
16	1,151162689
17	-0,551318232
18	-1,753029608
19	-1,347812963
20	0,296808964
21	1,672607584
22	1,514364818
23	-0,035850745
24	-1,555878628
25	-1,648438634

Рис. 4. График функции $f(x) = \sin\left(x + \frac{1}{x^2}\right) \operatorname{th}(x) - \cos\left(x + \frac{1}{x^2}\right) \operatorname{arctg}(x)$

Так как корней у данной функции бесконечно много, вычислять их всех мы, конечно же, не будем. Для проверки работы алгоритмов будет достаточно одного. Выберем корень в интервале (1; 5) и рассмотрим его малую окрестность (Рис. 5):

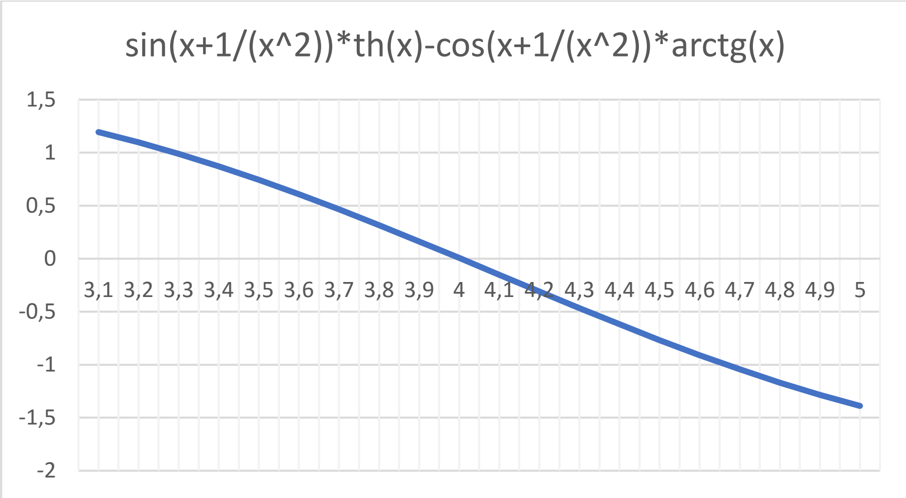


Рис. 5. Окрестность функции $f(x) = \sin\left(x + \frac{1}{x^2}\right) \operatorname{th}(x) - \cos\left(x + \frac{1}{x^2}\right) \operatorname{arctg}(x)$

Видим, что интервал локализации корня от 3,9 до 4,1. Теперь можно приступать к его вычислению.

МЕТОД РЕГУЛЯРНОГО ПЕРЕБОРА

Самый простой метод вычисления корней - метод регулярного перебора. Он требует разбиения интервала локализации на I интервалов и вычисления значения функции в каждой из узловых точек. В качестве решения x^* следует принять значение x_i такое, что:

$|f(x^*)| = \min(|f(x_i)|)$, где $i = 0, \ldots, I$, i - номер интервала, I - число интервалов.

Реализуем этот метод в Excel. Разделим интервал локализации на 25 частей. После в столбцы вставляем номер итерации i, значение x_i, значение функции $f(x_i)$, значение функции по модулю. Среди этого набора значений выделяем такое значение $f(x_i)$, чтобы модуль оказался минимальным. Для этого применим встроенную функцию Excel МИН($f(x_1)$; $f(x_2)$; … ; $f(x_i)$), куда подставляем значения нашей функции в точках x_1, x_2, … , x_i. Результирующим значением этой функции, очевидно, является приближенное значение искомого корня. Погрешность найденного решения ε равняется $x_i - x_{i-1}$ (рис. 6).

H3 =МИН(G3:G28)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	МЕТОД РЕГУЛЯРНОГО ПЕРЕБОРА								
2	a	b	l	i	xi	f(xi)	abs(f(xi))	min	ε
3	3,9	4,1	25	0	3,9	0,163003	0,163003	0,000336	0,008
4				1	3,908	0,150585	0,150585		
5				2	3,916	0,138149	0,138149		
6				3	3,924	0,125694	0,125694		
7				4	3,932	0,113222	0,113222		
8				5	3,94	0,100734	0,100734		
9				6	3,948	0,088231	0,088231		
10				7	3,956	0,075713	0,075713		
11				8	3,964	0,06318	0,06318		
12				9	3,972	0,050635	0,050635		
13				10	3,98	0,038077	0,038077		
14				11	3,988	0,025507	0,025507		
15				12	3,996	0,012927	0,012927		
16				13	4,004	0,000336	0,000336		
17				14	4,012	-0,01226	0,012264		
18				15	4,02	-0,02487	0,024872		
19				16	4,028	-0,03749	0,037489		
20				17	4,036	-0,05011	0,050112		
21				18	4,044	-0,06274	0,062742		
22				19	4,052	-0,07538	0,075377		
23				20	4,06	-0,08802	0,088016		
24				21	4,068	-0,10066	0,10066		
25				22	4,076	-0,11331	0,113306		
26				23	4,084	-0,12595	0,125955		
27				24	4,092	-0,1386	0,138605		
28				25	4,1	-0,15126	0,151256		

Рис. 6. Реализация метода регулярного перебора на примере решения уравнения $\sin\left(x+\frac{1}{x^2}\right) \operatorname{th}(x) - \cos\left(x+\frac{1}{x^2}\right) \operatorname{arctg}(x) = 0$ в Excel

В данном случае за решение x^* следует принять значение x_{13} = 4,004, так как именно при таком аргументе x функция $f(x)$ имеет значение, максимально приближенное к 0.

Если необходимо уточнить результат, достаточно вдвое сократить интервал локализации и, следовательно, шаг сканирования $|x_i - x_{i-1}|$.

МЕТОД СЛУЧАЙНОГО ПЕРЕБОРА

Метод случайного перебора заключается в взятии I случайных точек на интервале локализации и вычисления значения функции в этих точках. В качестве решения x^* следует, как и в предыдущем методе, принять такое значение x_i, что:

$| f(x^*) | = \min(| f(x_i) |)$, где $i = 0, \dots, I$, i - номер интервала, I - число интервалов.

Реализуем этот метод в Excel. Возьмем в интервале локализации 25 точек. В столбцы вставляем номер i, значение x_i, значение функции $f(x_i)$, значение функции по модулю. Для того чтобы взять в Excel случайною точку используем функцию СЛЧИС(), а чтобы это точка была в интервале $[a, b]$ в ячейку напишем СЛЧИС() * $(b - a) + b$. Среди набора значений выделяем такое значение $f(x_i)$, чтобы модуль оказался минимальным. Для этого применим встроенную функцию Excel МИН($f(x_1)$; $f(x_2)$; … ; $f(x_i)$), куда подставляем значения нашей функции в точках x_1, x_2, … , x_i. Результирующим значением этой функции, очевидно, является приближенное значение искомого корня.

E3 =СЛЧИС()*(B3-A3)+A3

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	МЕТОД СЛУЧАЙНОГО ПЕРЕБОРА							
2	a	b	l	i	xi	f(xi)	abs(f(xi))	min
3	3,9	4,1	25	1	3,900189	0,162711	0,162711	0,002032
4				2	4,01842	-0,02238	0,022381	
5				3	3,926451	0,121875	0,121875	
6				4	4,084732	-0,12711	0,127112	
7				5	3,92163	0,129385	0,129385	
8				6	4,022917	-0,02947	0,029471	
9				7	4,063855	-0,09411	0,094108	
10				8	3,925223	0,123789	0,123789	
11				9	3,931232	0,11442	0,11442	
12				10	3,981689	0,035424	0,035424	
13				11	4,071833	-0,10672	0,106719	
14				12	4,079782	-0,11929	0,119285	
15				13	3,932975	0,111701	0,111701	
16				14	3,921509	0,129574	0,129574	
17				15	4,005504	-0,00203	0,002032	
18				16	4,071618	-0,10638	0,106379	
19				17	3,988162	0,025253	0,025253	
20				18	3,910284	0,147037	0,147037	
21				19	3,914158	0,141014	0,141014	
22				20	4,075513	-0,11254	0,112536	
23				21	3,940091	0,100593	0,100593	
24				22	3,910211	0,14715	0,14715	
25				23	3,97692	0,042913	0,042913	
26				24	4,017054	-0,02023	0,020228	
27				25	3,938257	0,103456	0,103456	

Рис. 7. Реализация метода случайного перебора на примере решения уравнения $\sin\left(x+\frac{1}{x^2}\right)\operatorname{th}(x)-\cos\left(x+\frac{1}{x^2}\right)\operatorname{arctg}(x)=0$ в Excel

В данном случае за решение x^* следует принять значение x_{13} = 4,005504, так как именно при таком аргументе x функция $f(x)$ имеет наименьшее, максимально приближенное к 0, значение.

Если необходимо уточнить результат вдвое, достаточно вдвое сократить интервал локализации или же увеличить количество случайных точек, стараясь найти меньшее значение функции $f(x)$.

МЕТОД ДЕЛЕНИЯ ОТРЕЗКА ПОПОЛАМ

Еще один простой метод вычисления корней – метод деления отрезка пополам. Возьмем интервал локализации [*a*, *b*], на котором известно, что на концах отрезка принимает значения разных знаков. Следовательно интервал [*a*, *b*] будет содержать решение нашего уравнения. В качестве *x* мы примем середину отрезка [*a*, *b*]. Следующим шагом исследуем функцию *f(x)* на двух образовавшихся отрезках [*a*, *x*] и [*x*, *b*].

Тот отрезок, на концах которого функция будет принимать значения одинакового знака, мы отбрасываем и продолжаем делить пополам оставшийся отрезок. Если мы продолжаем делить отрезок [*a, x*], то *b* принимает значение *x*, если мы продолжаем делить отрезок [*x*, *b*], то *a* принимает значение *x*. Итерационный процесс будем продолжать до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше погрешности:

$$|b - a| < \varepsilon$$

Реализуем этот метод в Excel. Так как нами ранее был локализован корень, то значение *a* мы возьмем равным 3,9, а значение *b* равным 4,1. В столбцах *f* (*a*), *f* (*b*), мы будем вычислять значение функции на концах отрезка. Середину отрезка (*x*) вычислим по формуле:

$$x = \frac{a + b}{2}$$

В столбце *f* (*x*) будем вычислять значение функции в середине нашего отрезка. Вычислим погрешность, как *b* – *a*, и зададим условие продолжения итераций: ЕСЛИ(*f* (*a*)* *f* (*b*) < *0* ; "продолжаем цикл")

E3 =(A3+B3)/2

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	МЕТОД ДЕЛЕНИЯ ОТРЕЗКА							
2	a	b	f(a)	f(b)	x	f(x)	ε	f(a)*f(b)
3	3,9	4,1	0,163003481	-0,151255847	4	0,006632642	0,2	продолжаем цикл
4	4	4,1	0,006632642	-0,151255847	4,05	-0,072217321	0,1	продолжаем цикл
5	4	4,05	0,006632642	-0,072217321	4,025	-0,03275676	0,05	продолжаем цикл
6	4	4,025	0,006632642	-0,03275676	4,0125	-0,013051669	0,025	продолжаем цикл
7	4	4,0125	0,006632642	-0,013051669	4,00625	-0,00320673	0,0125	продолжаем цикл
8	4	4,00625	0,006632642	-0,00320673	4,003125	0,001713675	0,00625	продолжаем цикл
9	4,003125	4,00625	0,001713675	-0,00320673	4,0046875	-0,00074635	0,003125	продолжаем цикл
10	4,003125	4,0046875	0,001713675	-0,00074635	4,00390625	0,000483707	0,0015625	продолжаем цикл
11	4,00390625	4,0046875	0,000483707	-0,00074635	4,004296875	-0,00013131	0,00078125	продолжаем цикл
12	4,00390625	4,004296875	0,000483707	-0,00013131	4,004101563	0,000176201	0,000390625	продолжаем цикл
13	4,004101563	4,004296875	0,000176201	-0,00013131	4,004199219	2,24461E-05	0,000195312	продолжаем цикл
14	4,004199219	4,004296875	2,24461E-05	-0,00013131	4,004248047	-5,4432E-05	9,76563E-05	продолжаем цикл
15	4,004199219	4,004248047	2,24461E-05	-5,4432E-05	4,004223633	-1,59929E-05	4,88281E-05	продолжаем цикл
16	4,004199219	4,004223633	2,24461E-05	-1,59929E-05	4,004211426	3,22657E-06	2,44141E-05	продолжаем цикл
17	4,004211426	4,004223633	3,22657E-06	-1,59929E-05	4,004217529	-6,38318E-06	1,2207E-05	продолжаем цикл
18	4,004211426	4,004217529	3,22657E-06	-6,38318E-06	4,004214478	-1,57831E-06	6,10352E-06	продолжаем цикл
19	4,004211426	4,004214478	3,22657E-06	-1,57831E-06	4,004212952	8,24129E-07	3,05176E-06	продолжаем цикл
20	4,004212952	4,004214478	8,24129E-07	-1,57831E-06	4,004213715	-3,7709E-07	1,52588E-06	продолжаем цикл
21	4,004212952	4,004213715	8,24129E-07	-3,7709E-07	4,004213333	2,23519E-07	7,62939E-07	продолжаем цикл
22	4,004213333	4,004213715	2,23519E-07	-3,7709E-07	4,004213524	-7,67855E-08	3,8147E-07	продолжаем цикл
23	4,004213333	4,004213524	2,23519E-07	-7,67855E-08	4,004213428	7,33669E-08	1,90735E-07	продолжаем цикл
24	4,004213428	4,004213524	7,33669E-08	-7,67855E-08	4,004213476	-1,70932E-09	9,53674E-08	продолжаем цикл
25	4,004213428	4,004213476	7,33669E-08	-1,70932E-09	4,004213452	3,58288E-08	4,76837E-08	продолжаем цикл
26	4,004213452	4,004213476	3,58288E-08	-1,70932E-09	4,004213464	1,70597E-08	2,38419E-08	продолжаем цикл
27	4,004213464	4,004213476	1,70597E-08	-1,70932E-09	4,00421347	7,6752E-09	1,19209E-08	продолжаем цикл

Рис. 8. Реализация метода деления отрезка пополам на примере решения уравнения $\sin\left(x+\frac{1}{x^2}\right)\operatorname{th}(x)-\cos\left(x+\frac{1}{x^2}\right)\operatorname{arctg}(x)=0$ в Excel

Алгоритм будет работать до тех пор пока не найдет значение x^*, при котором $f(x^*)$ будет равен 0. Мы же остановим действие алгоритма на 25й итерации, приняв за x^* значение $x = 4{,}00421347$, значение функции в этой точке $f(x)$ = 0,0000000076752, погрешность ε такого решения равна 0,0000000119209.

МЕТОД ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ

Метод вычисления корней, похожий на метод деления отрезка пополам – метод золотого сечения. Возьмем интервал локализации [a, b], на котором известно, что функция непрерывна и на концах отрезка принимает значения разных знаков. Следовательно интервал [a, b] будет содержать решение нашего уравнения. По формуле золотого сечения вычисляем x:

$$x = a + 0{,}38 * (b - a)$$

Следующим шагом исследуем функцию $f(x)$ на двух образовавшихся отрезках [a, x] и [x, b]. Тот отрезок, на концах которого функция будет принимать значения одинакового знака, мы отбрасываем. После если мы оставили отрезок [a, x], то b принимает значение x, если мы оставили отрезок [x, b], то a принимает значение x. Далее вычисляем новый x для нового отрезка [a, b]. Итерационный процесс будем продолжать до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше погрешности:

$$|b - a| < \varepsilon$$

Реализуем этот метод в Excel. Так как нами ранее был локализован корень, то значение a мы возьмем равным 3,9, а значение b равным 4,1. В столбцах $f(a)$, $f(b)$, мы будем вычислять значение функции на концах отрезка. Используя формулу золотого сечения, вычислим x:

$$x = a + 0{,}38 * (b - a)$$

В столбце $f(x)$ будем вычислять значение функции в точке x. Вычислим погрешность, как $b - a$, и зададим условие продолжения итераций:

ЕСЛИ($f(a) * f(b) < 0$; "продолжаем цикл").

E3 =A3+0,38*(B3-A3)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	МЕТОД ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ							
2	a	b	f(a)	f(b)	x	f(x)	ε	f(a)*f(b)
3	3,9	4,1	0,163003481	-0,151255847	3,976	0,044357364	0,2	продолжаем цикл
4	3,976	4,1	0,044357364	-0,151255847	4,02312	-0,029791904	0,124	продолжаем цикл
5	3,976	4,02312	0,044357364	-0,029791904	3,9939056	0,016221336	0,04712	продолжаем цикл
6	3,9939056	4,02312	0,016221336	-0,029791904	4,005007072	-0,001249533	0,0292144	продолжаем цикл
7	3,9939056	4,005007072	0,016221336	-0,001249533	3,998124159	0,009584635	0,011101472	продолжаем цикл
8	3,998124159	4,005007072	0,009584635	-0,001249533	4,000739666	0,005468489	0,006882913	продолжаем цикл
9	4,000739666	4,005007072	0,005468489	-0,001249533	4,00236128	0,002915958	0,004267406	продолжаем цикл
10	4,00236128	4,005007072	0,002915958	-0,001249533	4,003366681	0,001333192	0,002645792	продолжаем цикл
11	4,003366681	4,005007072	0,001333192	-0,001249533	4,00399003	0,000351803	0,001640391	продолжаем цикл
12	4,00399003	4,005007072	0,000351803	-0,001249533	4,004376506	-0,000256687	0,001017042	продолжаем цикл
13	4,00399003	4,004376506	0,000351803	-0,000256687	4,004136891	0,000120579	0,000386476	продолжаем цикл
14	4,004136891	4,004376506	0,000120579	-0,000256687	4,004227944	-2,27813E-05	0,000239615	продолжаем цикл
15	4,004136891	4,004227944	0,000120579	-2,27813E-05	4,004171491	6,61021E-05	9,10538E-05	продолжаем цикл
16	4,004171491	4,004227944	6,61021E-05	-2,27813E-05	4,004192943	3,23265E-05	5,64533E-05	продолжаем цикл
17	4,004192943	4,004227944	3,23265E-05	-2,27813E-05	4,004206244	1,13855E-05	3,50011E-05	продолжаем цикл
18	4,004206244	4,004227944	1,13855E-05	-2,27813E-05	4,00421449	-1,59787E-06	2,17007E-05	продолжаем цикл
19	4,004206244	4,00421449	1,13855E-05	-1,59787E-06	4,004209377	6,45184E-06	8,24625E-06	продолжаем цикл
20	4,004209377	4,00421449	6,45184E-06	-1,59787E-06	4,00421132	3,39295E-06	5,11268E-06	продолжаем цикл
21	4,00421132	4,00421449	3,39295E-06	-1,59787E-06	4,004212525	1,49644E-06	3,16986E-06	продолжаем цикл
22	4,004212525	4,00421449	1,49644E-06	-1,59787E-06	4,004213271	3,20602E-07	1,96531E-06	продолжаем цикл
23	4,004213271	4,00421449	3,20602E-07	-1,59787E-06	4,004213734	-4,08417E-07	1,21849E-06	продолжаем цикл
24	4,004213271	4,004213734	3,20602E-07	-4,08417E-07	4,004213447	4,3575E-08	4,63028E-07	продолжаем цикл
25	4,004213447	4,004213734	4,3575E-08	-4,08417E-07	4,004213557	-1,28182E-07	2,87077E-07	продолжаем цикл
26	4,004213447	4,004213557	4,3575E-08	-1,28182E-07	4,004213489	-2,16926E-08	1,09089E-07	продолжаем цикл
27	4,004213447	4,004213489	4,3575E-08	-2,16926E-08	4,004213463	1,87733E-08	4,14539E-08	продолжаем цикл

Рис. 9. Реализация метода золотого сечения на примере решения уравнения $\sin\left(x+\frac{1}{x^2}\right)\operatorname{th}(x)-\cos\left(x+\frac{1}{x^2}\right)\operatorname{arctg}(x)=0$ в Excel

Алгоритм будет работать до тех пор пока не найдет значение x^*, при котором $f(x^*)$ будет равен 0. Мы же остановим действие алгоритма на 25 итерации, приняв за x^* значение $x=4{,}004213463$, значение функции в этой точке $f(x) = 0{,}0000000187733$, погрешность ε такого решения равна 0,0000000414539.

МЕТОД БОКСА

Следующий метод вычисления корней, который мы рассмотрим, – метод Бокса.

Для решения уравнения методом Бокса мы берем начальный коэффициент k и x_1 приближенное к нашему решению. Далее вычисляем значение нашей функции в точке x_1. Если значение функции в точке x_1 больше нуля, то k остается неизменным, а x_2 равен:

$$x_2 = x_1 + k \quad (1)$$

Если значение нашей функции в точке x_1 меньше нуля, то k равен:

$$k = k * 0{,}1 \quad (2)$$

Следующим шагом вычисляем значения функции в точке x_2 и так далее, пока значение нашего k не станет меньше или равно требуемой погрешности ε.

Подробно рассмотрим метод Бокса в Excel на нашем уравнении

$\sin\left(x + \frac{1}{x^2}\right) \operatorname{th}(x) - \cos\left(x + \frac{1}{x^2}\right) \operatorname{arctg}(x) = 0$. Возьмем начальный коэффициент $k_1 = 0{,}1$ и $x_1 = 3{,}97$. Как показано на рис. 10.

Далее вычислим значение функции и исследуем её на знакоопределенность, после чего вычислим значение x и k по формуле (1) или (2).

=ЕСЛИ(BQ7<0;BM6*0,1;BM6)

BM ЕСЛИ(**лог_выражение**; [значение_если_истина]; [значение_

МЕТОД БОКСА		
k	x	f
0,01	3,97	0,0537724
0,01	3,98	0,03807689
0,01	3,99	0,02236313
=ЕСЛИ(BQ7<0;B	4	0,00663264
0,001	4,01	-0,00911305
0,001	4,001	0,00505873
0,001	4,002	0,00348467
0,001	4,003	0,00191046
0,001	4,004	0,0003361
0,0001	4,005	-0,0012384
0,0001	4,0041	0,00017866
0,0001	4,0042	2,1216E-05
0,00001	4,0043	-0,00013623
0,00001	4,00421	5,4714E-06
0,000001	4,00422	-1,0273E-05
0,000001	4,004211	3,8969E-06
0,000001	4,004212	2,3225E-06
0,000001	4,004213	7,4802E-07
0,0000001	4,004214	-8,2644E-07
0,0000001	4,0042131	5,9057E-07
0,0000001	4,0042132	4,3313E-07
0,0000001	4,0042133	2,7568E-07
0,0000001	4,0042134	1,1823E-07
0,00000001	4,0042135	-3,9211E-08

Рис. 10 Реализация метода Бокса на примере решения уравнения $\sin\left(x+\frac{1}{x^2}\right)\operatorname{th}(x)-\cos\left(x+\frac{1}{x^2}\right)\operatorname{arctg}(x)=0$ в Excel

Алгоритм будет работать до тех пор пока не найдет значение x^*, при котором $f(x^*)$ будет равен 0. Мы же остановим действие алгоритма на 25 итерации, приняв за x^* значение $x = 4{,}0042135$, значение функции в этой точке $f(x)$ = - 0,000000039211.

МЕТОД КАСАТЕЛЬНЫХ НЬЮТОНА

Основная идея метода касательных Ньютона заключается в следующем: задаётся начальная точка приближения в окрестности предположительного корня, после чего строится касательная к графику исследуемой функции в этой точке приближения. Далее находится точка пересечения касательной с осью абсцисс. Эта точка берётся в качестве следующего приближения. И так далее, пока не будет достигнута необходимая точность.

Реализуем этот метод в Excel. Так как наш корень локализован в интервале от 3,9 до 4,1, то за начальную точку приближения возьмем значение $x = 4$. Далее построим касательную к графику исследуемой функции в точке $x = 4$, для этого нам необходимо вычислить производную исследуемой функции. Ввиду сложности дифференцируемой функции ее производную вычислим с помощью математического пакета MathCad (Рис.10):

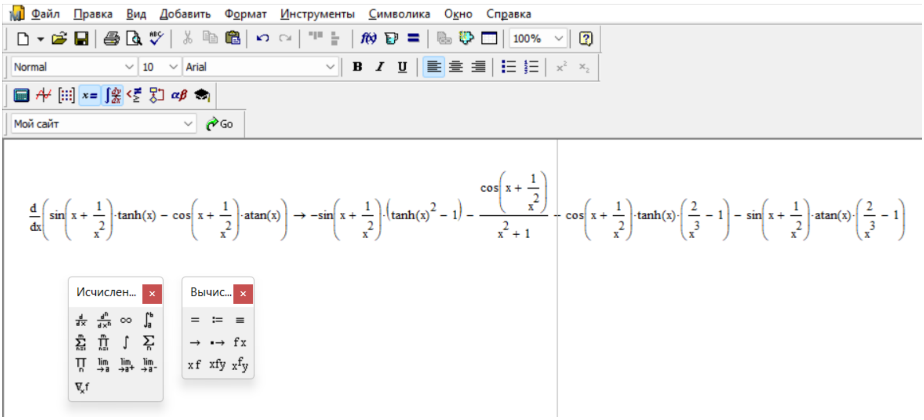


Рис. 10. Вычисление производной от функции
$f(x) = \sin\left(x + \frac{1}{x^2}\right) \operatorname{th}(x) - \cos\left(x + \frac{1}{x^2}\right) \operatorname{arctg}(x)$ в MathCad

Теперь строим касательную к графику исследуемой функции, уравнение касательной:

$y = f'(x_0) * (x - x_0) + f(x_0)$, где x_0 – начальная точка приближения.

Так как нам необходимо найти точку пересечения касательной с осью абсцисс, следовательно в уравнении касательной $y = 0$, разделим все уравнение на $f'(x_0)$ и выведем из уравнения переменную x в левую часть, получаем:

$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, где x_0 – начальная точка приближения, $f(x_0)$ – значение функции в точке x_0, $f'(x_0)$ – значение производной в точке x_0.

Далее вычисляем x и берем его за следующую точку приближения (Рис. 11):

A4 =A3-B3/C3

	A	B	C
1	МЕТОД КАСАТЕЛЬНЫХ НЬЮТОНА		
2	x	f(x)	f'(x)
3	4	0,006632642	-1,573834213
4	4,004214321	-1,33135E-06	-1,574461522
5	4,004213475	-5,11813E-14	-1,574461399
6	4,004213475	8,88178E-16	-1,574461399
7	4,004213475	0	-1,574461399
8	4,004213475	0	-1,574461399
9	4,004213475	0	-1,574461399
10	4,004213475	0	-1,574461399
11	4,004213475	0	-1,574461399
12	4,004213475	0	-1,574461399
13	4,004213475	0	-1,574461399
14	4,004213475	0	-1,574461399
15	4,004213475	0	-1,574461399
16	4,004213475	0	-1,574461399
17	4,004213475	0	-1,574461399
18	4,004213475	0	-1,574461399
19	4,004213475	0	-1,574461399
20	4,004213475	0	-1,574461399
21	4,004213475	0	-1,574461399
22	4,004213475	0	-1,574461399
23	4,004213475	0	-1,574461399
24	4,004213475	0	-1,574461399
25	4,004213475	0	-1,574461399
26	4,004213475	0	-1,574461399
27	4,004213475	0	-1,574461399
28			

Рис. 11. Реализация метода касательных Ньютона на примере решения уравнения $\sin\left(x + \frac{1}{x^2}\right) \operatorname{th}(x) - \cos\left(x + \frac{1}{x^2}\right) \operatorname{arctg}(x) = 0$ в Excel

Как видно на рис. 11 точное значение $x = 4{,}004213475$, при котором значение функции равно нулю, нашлось на четвертой итерации алгоритма.

МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

Сущность метода простой итерации заключается в следующем:

Пусть функция $f(x)$ имеет корень в интервале $[a, b]$. Задается начальная точка приближения x_0. Далее заменяется исходное уравнение $f(x)$ на эквивалентное ему уравнение вида: $x = g(x)$. Подставляя начальную точку приближения x_0 в правую часть, получаем новое приближение: $x_1 = g(x_0)$. Аналогичным образом получаем: $x_2 = g(x_1)$. Затем, подставляя каждый раз новое значение корня, получаем последовательность значений: $x_i = g(x_{i-1})$. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не получим $x_i = x_{i-1}$, это и будет корнем уравнения $f(x)$. Достаточным условием сходимости метода простых итераций является условие: $|g'(x)| < 1$ в интервале $[a, b]$. Если это условие не выполняется, следует взять другое уравнение $x = g(x)$.

Реализуем этот метод в Excel. За начальную точку приближения возьмем $x_0 = 4$. Заменим исходное уравнение $f(x) = \sin\left(x + \frac{1}{x^2}\right) \operatorname{th}(x) - \cos\left(x + \frac{1}{x^2}\right) \operatorname{arctg}(x)$ на эквивалентное ему уравнение вида: $x = g(x)$. Для этого разделим все уравнение на $\cos\left(x + \frac{1}{x^2}\right)$ и на $\operatorname{th}(x)$: $\operatorname{tg}\left(x + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{\operatorname{arctg}(x)}{\operatorname{th}(x)} = 0$. Потом перенесем $\frac{\operatorname{arctg}(x)}{\operatorname{th}(x)}$ в правую часть уравнения и преобразуем к виду: $x + \frac{1}{x^2} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{arctg}(x)}{\operatorname{th}(x)}\right)$. Осталось перенести $\frac{1}{x^2}$ в правую часть и получаем уравнение вида $x = g(x)$: $x = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{arctg}(x)}{\operatorname{th}(x)}\right) - \frac{1}{x^2}$. Так как наша функция тригонометрическая, а корень находится в интервале [3,9; 4,1], то есть в отрезке 2□, значит к $\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{arctg}(x)}{\operatorname{th}(x)}\right)$ следует прибавить □. Конечная функция: $x = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{arctg}(x)}{\operatorname{th}(x)}\right) +$ □ $- \frac{1}{x^2}$.

Проверим условие сходимости ($|g'(x)| < 1$), для этого найдем значение производной по формуле: $g'(x) = \frac{g(x) - g(x + \Delta x)}{\Delta x}$, где за Δx возьмем малое изменение равное 0,001.

Вычислим все описанное выше (Рис. 12):

B4 =ATAN(ATAN(B3)/TANH(B3))+ПИ() -1/((B3)^2)

	A	B	C	D	E	F
1	МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ					
2	x	g(x)	x+delx	g(x+delx)	g'(x)	
3	4	4,003994961	4,001	4,004046875	-0,051914334	
4		4,004202157				
5		4,004212889				
6		4,004213445				
7		4,004213474				
8		4,004213475				
9		4,004213475				
10		4,004213475				
11		4,004213475				
12		4,004213475				
13		4,004213475				
14		4,004213475				
15		4,004213475				
16		4,004213475				
17		4,004213475				
18		4,004213475				
19		4,004213475				
20		4,004213475				
21		4,004213475				
22		4,004213475				
23		4,004213475				
24		4,004213475				
25		4,004213475				
26		4,004213475				
27		4,004213475				

Рис. 12. Реализация метода простых итераций на примере решения уравнения $\sin\left(x+\frac{1}{x^2}\right)\operatorname{th}(x)-\cos\left(x+\frac{1}{x^2}\right)\operatorname{arctg}(x)=0$ в Excel

Как видно на рис. 12 значение производной $g'(x)$ = - 0,051914334 по модулю меньше 1, значит условие сходимости выполняется. Алгоритм привел нас к верному результату x = 4,004213475 всего за пять итераций.

ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ

Крайний метод, который мы рассмотрим – это генетический метод.

Так как метод называется генетическим, то и рассматривать его мы будем на примере живой природы. Рассмотрим семью гермафродитных особей. Для удобства маму обозначим как mo (от англ. mother), папу как fa (от англ. father), ребенка как ch (от англ. child). Задаем начальные значения для m и fa.

После чего по формуле вычисляем значение ch:

$$ch = mo + (fa - m) * СЛЧИС() \qquad (3)$$

И вычисляем значение нашей функции в значениях *mo*, *fa*, *ch*.

После чего мы сравниваем значение наших функций в точках *fa* и *mo*, со значением функции в точке *ch*:

$$ЕСЛИ\,(ABS\,(\,f\,(ch)\,) < ABS\,(\,f\,(mo)\,) * И\,(\,f\,(ch) > 0\,);\ ch;\ mo) \qquad (4)$$

Если условия выполняются, то особь mo_1 мы больше не рассматриваем, ее место занимает особь ch_1.

Далее повторяем этот алгоритм еще несколько раз.

Рассмотрим этот метод на нашем примере. Возьмем *mo* = 3,9; *fa* = 4,1. *ch* вычисляем по формуле (3), затем сравниваем значение *f* (*ch*) со значениями *f* (*mo*) и *f* (*fa*) по формуле (4). Как показано на рис. 13:

C3 =A3+(B3-A3)*СЛЧИС()

	A	B	C	D	E	F
1	ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ					
2	xm	xf	xch	f(xm)	f(xf)	f(xch)
3	3,9	4,1	4,095803081	0,163003481	-0,151255847	-0,144618964
4	3,9	4,095803081	3,911372278	0,163003481	-0,144618964	0,145345008
5	3,911372278	4,095803081	3,985942649	0,145345008	-0,144618964	0,028740853
6	3,985942649	4,095803081	4,036364129	0,028740853	-0,144618964	-0,050686775
7	3,985942649	4,036364129	4,005811062	0,028740853	-0,050686775	-0,002515524
8	3,985942649	4,005811062	4,003462258	0,028740853	-0,002515524	0,001182721
9	4,003462258	4,005811062	4,004482332	0,001182721	-0,002515524	-0,00042331
10	4,003462258	4,004482332	4,003487434	0,001182721	-0,00042331	0,001143085
11	4,003487434	4,004482332	4,003580189	0,001143085	-0,00042331	0,000997055
12	4,003580189	4,004482332	4,004453845	0,000997055	-0,00042331	-0,000378457
13	4,003580189	4,004453845	4,004081493	0,000997055	-0,000378457	0,000207799
14	4,004081493	4,004453845	4,004326424	0,000207799	-0,000378457	-0,000177835
15	4,004081493	4,004326424	4,004281617	0,000207799	-0,000177835	-0,000107288
16	4,004081493	4,004281617	4,004131281	0,000207799	-0,000107288	0,000129411
17	4,004131281	4,004281617	4,004260886	0,000129411	-0,000107288	-7,46473E-05
18	4,004131281	4,004260886	4,0042326	0,000129411	-7,46473E-05	-3,01119E-05
19	4,004131281	4,0042326	4,004146942	0,000129411	-3,01119E-05	0,000104754
20	4,004146942	4,0042326	4,004215086	0,000104754	-3,01119E-05	-2,53575E-06
21	4,004146942	4,004215086	4,004201888	0,000104754	-2,53575E-06	1,8243E-05
22	4,004201888	4,004215086	4,004207431	1,8243E-05	-2,53575E-06	9,51698E-06
23	4,004207431	4,004215086	4,004208444	9,51698E-06	-2,53575E-06	7,92083E-06
24	4,004208444	4,004215086	4,0042092	7,92083E-06	-2,53575E-06	6,73154E-06
25	4,0042092	4,004215086	4,004213907	6,73154E-06	-2,53575E-06	-6,79656E-07
26	4,0042092	4,004213907	4,004212284	6,73154E-06	-6,79656E-07	1,87585E-06
27	4,004212284	4,004213907	4,004212509	1,87585E-06	-6,79656E-07	1,52062E-06

Рис. 13. Реализация генетического метода на примере решения уравнения $\sin\left(x+\frac{1}{x^2}\right)\operatorname{th}(x)-\cos\left(x+\frac{1}{x^2}\right)\operatorname{arctg}(x)=0$ в Excel

Остановим действие алгоритма на 25 итерации, приняв за решение x^* значение $x = 4{,}004212509$, значение функции в этой точке $f(x) = 0{,}00000152062$.

ВАРИАНТЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. $x * \mathrm{arctg}(e^x) - \frac{10000}{5\ln(x)} = 0$;

2. $x * e^{\sqrt{x}} - \frac{13}{x} = 0$;

3. $x * \mathrm{th}(\sqrt{x}) + \sin(x) * \mathrm{arctg}(x * \sqrt{x}) - \frac{2}{x} = 0$;

4. $x * \mathrm{arctg}(\sqrt{x}) - \frac{2\Pi}{x} - \sin(x) = 0$;

5. $\sin(13x + \frac{13}{x}) + 13x - \frac{2}{x * \sqrt{x}} = 0$;

6. $x * \sin\left(\frac{2}{x^2} + x^2\right) - \frac{3}{\sqrt{x}} = 0$;

7. $x + \frac{1}{x^2} + 2x^3 + \frac{3}{x^4} + 4x^5 + \frac{5}{x^6} - 13 = 0$;

8. $\cos((\ln(3x) - x^{\frac{1}{3333}}) * x) - 1 = 0$;

9. $\mathrm{ch}(3x) * \sin\left(\frac{x}{10} + \frac{10}{x}\right) - \mathrm{sh}(3x) * \cos\left(\frac{x}{10} + \frac{10}{x}\right) = 0$;

10. $x * \ln(2x) - \sin(x) - \frac{5}{\sqrt{x}} = 0$.