ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Высшая математика»

Методические указания и варианты заданий для выполнения контрольной работы №1

по дисциплине

«Математика»

Авторы
Волокитин Г.И.
Поляков А.С.

Ростов-на-Дону, 2022

Аннотация

Программа и варианты контрольной работы №1 для первого курса заочного формы обучения: Методические указания / ДГТУ. Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2022.

Авторы

Старший преподаватель кафедры ИиВТ
Поляков А.С.

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры ИиВТ
Волокитин Г.И.

Оглавление

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ 1-ГО КУРСА ЗАОЧНОГО ФАКУЛЬТЕТА.

Элементы линейной алгебры.

Матрицы, виды матриц и действия с матрицами. Числовые характеристики матриц. Определители второго и третьего порядков: определения, свойства и способы вычисления. Элементарные преобразования матриц. Обратная матрица: определение, критерий существования и способы вычисления обратной матрицы. Базисный минор и ранг матрицы. Системы линейны алгебраических уравнений, их виды. Теорема Кронекера-Капелли. Решение определенных систем третьего порядка методом Крамера, матричным методом и методом Гаусса. Общее решение однородных и неоднородных неопределенных систем. Понятие линейного пространства. Линейный оператор, матрица линейного оператора.

Векторная алгебра и аналитическая геометрия.

Понятие геометрического вектора. Проекция вектора на ось. Линейные операции над векторами. Линейная независимость векторов, базис на плоскости и в пространстве. Координаты вектора, их геометрический смысл. Действия с векторами в координатах. Условие коллинеарности векторов. Скалярное произведение двух векторов: определение, свойства, вычисление в координатах и приложения. Векторное произведение двух векторов: определение, свойства, вычисление в координатах и приложения. Смешанное произведение трех векторов, теорема о геометрическом смысле, вычисление в координатах и свойства. Условие компланарности трех векторов.

Прямая на плоскости. Угловой коэффициент прямой. Различные виды уравнений прямой (каноническое уравнение, общее, «в отрезках», нормальное). Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой.

Плоскость: нормальный вектор, общее уравнение плоскости. Различные виды уравнений плоскости («в отрезках», нормальное уравнение). Угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости.

Прямая в пространстве: канонические, параметрические уравнения. Прямая как пересечение двух плоскостей. Угол между прямыми и угол между прямой и плоскостью.

Системы координат на плоскости: прямоугольная и полярная. Системы координат в пространстве: прямоугольная, цилиндрическая и сферическая. Кривые второго порядка: определения и канонические уравнения эллипса, окружности, гиперболы и параболы. Поверхности второго порядка: Эллипсоиды, сфера, однополостный и двуполостный гиперболоиды, эллиптический и гиперболический параболоиды. Конус второго порядка. Цилиндры второго порядка.

Введение в анализ.

Функция одной переменной. Предел последовательности и функции. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Сравнение бесконечно малых. Теоремы о первом и втором специальных пределах. Число e , экспонента, натуральный логарифм. Непрерывность функции. Точки разрыва, их классификация. Свойства непрерывных на отрезке функций.

Дифференциальное исчисление.

Задачи, приводящие к понятию производной (о касательной к кривой и о скорости). Определение производной, ее геометрический и механический смысл. Правила дифференцирования. Таблица производных основных элементарных функций. Повторное дифференцирование. Вычисление производных функций, заданных неявно и в параметрическом виде. Дифференциал функции: определение, свойства, геометрический смысл, инвариантность. Применение дифференциалов в приближенных вычислениях. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей. Приложение дифференциального исчисления к исследованию функций: монотонность, экстремумы, направление выпуклости кривых и точки перегиба. Асимптоты. Общая схема исследования функции. Формула Тэйлора для многочлена и для функции с остаточным членом в форме Лагранжа, формулы для основных элементарных функций.

Функции нескольких переменных.

Основные определения. Геометрический смысл функции двух переменных. Понятие предела и непрерывность функции двух переменных. Определение частной производной и ее геометрический смысл. Полный дифференциал функции двух переменных. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости. Дифференцирование сложных функций. Касательная и нормаль к поверхности. Экстремумы функции двух переменных: необходимые и достаточные условия экстремума. Градиент скалярного поля, производная по направлению.

Неопределенный интеграл.

Первообразная функции, неопределенный интеграл и его свойства. Таблица интегралов. Основные приемы интегрирования: непосредственное интегрирование, метод подстановки, интегрирование по частям. Интегралы группы «четырех». Интегрирование дробно-рациональных функций. Интегралы от тригонометрических функций. Интегрирование некоторых иррациональностей.

Определенный интеграл.

Задача о площади криволинейной трапеции. Понятие определенного интеграла, его геометрический и механический смысл. Свойства определенного интеграла, выражаемые равенствами. Свойства определенного интеграла, выражаемые неравенствами. Теорема о среднем. Связь определенного и неопределенного интегралов, формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям. Несобственные интегралы первого и второго рода. Приложения определенного интеграла: вычисление площадей плоских фигур. Вычисление длины дуги плоской кривой, объем тела вращения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. -М.: Наука, 1984.
2. Данко П.В., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1986.
3. Волокитин Г.И., Ларченко В.В., Азаров Д.А., Редько Ю.С. Начала линейной алгебры. Учебное пособие. – Ростов-на-Дону: Издательский центр ДГТУ, 2012.
4. Я.С. Бугров, С.М. Никольский. Элементы линейной алгебры и аналитическая геометрия. Москва «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1980.
5. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Аналитическая геометрия. Издание четвертое, дополненное. Москва «Наука» Главная редакция физико-математической литературы, 1973.
6. А.Ф. Бермант, А.Г. Араманович. Краткий курс математического анализа для втузов, ч.1. – М.: Наука, 1978.
7. С.В. Фролов, Р.Я. Шостак Курс высшей математики для втузов. – М.: Высшая школа, 1973.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1

Задача 1. Даны матрицы A и B. Проверить, что матрица A - невырожденная и найти решение матричного уравнения $A\cdot X = B$:

1. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix};$

2. $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$

3. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix};$

4. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$

5. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ -1 & 9 \end{pmatrix};$

6. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix};$

7. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 10 \end{pmatrix};$

8. $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix};$

9. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix};$

10. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$

Задача 2. Тремя методами (по формулам Крамера, матричным методом и методом Гаусса) решить систему линейных алгебраических уравнений: $A \cdot X = B$, где матрицы A и B заданы в условии задачи 1, причем B - первый столбец соответствующей матрицы задачи 1. X - матрица-столбец неизвестных $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Задача 3. В пирамиде $ABCDF$ даны вершины A, B, C, F. Основание пирамиды – параллелограмм $ABCD$. Найти:

a) Векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AF}$ и их модули;
b) вершину D;
c) внутренний угол $\angle A$;
d) площадь треугольника $\triangle ABC$;
e) объем пирамиды $ABCDF$.
f) проверить, что векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AF}$ образуют базис; выяснить, какая это тройка – правая или левая;

1. $A(1;1;1)$, $B(4;5;-11)$, $C(7;-1;-2)$, $F(2;3;-1)$.
2. $A(1;1;1)$, $B(2;3;-1)$, $C(5;-1;-3)$, $F(7;-1;-2)$.
3. $A(1;1;1)$, $B(3;7;10)$, $C(0;-1;3)$, $F(-2;5;-11)$.
4. $A(1;1;1)$, $B(5;-2;13)$, $C(3;3;0)$, $F(7;-1;10)$.
5. $A(1;1;1)$, $B(-1;2;-1)$, $C(-1;-5;10)$, $F(-11;4;5)$.
6. $A(1;1;1)$, $B(3;7;-8)$, $C(-3;3;5)$, $F(4;3;7)$.
7. $A(1;1;1)$, $B(-11;5;-2)$, $C(3;3;2)$, $F(5;13;19)$.
8. $A(1;1;1)$, $B(-1;-1;2)$, $C(3;0;3)$, $F(5;13;19)$.
9. $A(1;1;1)$, $B(5;3;5)$, $C(-1;7;10)$, $F(-5;3;4)$.
10. $A(1;1;1)$, $B(5;4;-11)$, $C(3;3;2)$, $F(5;13;19)$.

Задача 4. В плоскости Oxy построить треугольник $\triangle ABC$. Координаты вершин этого треугольника – две первые координаты точек A, B, C в задаче 3. Найти:

a) уравнение стороны AB;
b) уравнение медианы, проведенной из вершины C;
c) уравнение высоты, проведённой через вершину C;
d) угол между вышеуказанными медианой и высотой;
e) расстояние от вершины C до стороны AB;
f) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB.

Задача 5. Точки A, B, C, F, координаты которых заданы в условии задачи 3, являются вершинами пирамиды. Найти:

a) угол между ребрами AB и AC;
b) уравнение грани $ABCD$;
c) угол между ребром AF и гранью $ABCD$;
d) уравнение высоты пирамиды, опущенной из вершины F;
e) расстояние от вершины пирамиды F до основания $ABCD$;
f) проекцию вершины F на плоскость основания $ABCD$.

Задача 6. Найти пределы функций.

1. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^5-4x^4+2}{(3x^2+2\sqrt{x}-1)(2x+3)^3}$; b) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x^2-11x+5}{x^2-7x+10}$;

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos4x}{x\,\mathrm{arctg}\,2x}$; d) $\lim\limits_{x\to-3}(7+2x)^{\frac{3}{x+3}}$

2. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^2\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+5\right)^4}{\left(2x+\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+1\right)^4}$; b) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{2x^2-13x-7}{x^2-9x+14}$;

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^3x}{\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)(1-\sin x)}$; d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\mathrm{tg}\,3x)}{\arcsin9x}$.

3. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(x^2-3x+1\right)^2}{5x^4+3x^3-2}$; b) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{x^2-6x-16}{x^2-8x}$;

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos3x}{x\arcsin x}$; d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{10x-3}{10x+1}\right)^{5x}$.

4. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x+3)(x-5)^2}{2x^3+10x^2+5}$; b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2+x-4}$;

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin^2 5x}{1-\cos10x}$; d) $\lim\limits_{x\to3}(4x-11)^{\frac{5x}{x-3}}$.

5. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+3)\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{2x^2+10x+1}$; b) $\lim\limits_{x\to10}\dfrac{5x^2-51x+10}{x^2-10x}$;

c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\left(\pi(x-1)\right)}{x^2+x-2}$; d) $\lim\limits_{x\to-1}(2x+3)^{\frac{1}{x+1}}$.

6. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(2x^3+\sqrt{x}+1\right)\left(3x^2+5\right)}{3x^5+x^2\sqrt{x}-2x+10}$; b) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-5x+6}$;

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}8x^2}{1-\cos4x}$; d) $\lim\limits_{x\to2}(3-x)^{\frac{5}{x-2}}$.

7. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+3)\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{2x^2+10x\sqrt{x}+1}$; b) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-6x+5}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x^2}{1-\cos 2x}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}3x\right)^{1/2x}$.

8. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(x^3+\sqrt{x}+1\right)\left(2x^2+5\right)}{4x^5+3x^2\sqrt{x}-x+10}$; b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-7x+3}{5x^2-16x+3}$;

c) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\cos 2x}{(\pi-x)\sin x}$; d) $\lim\limits_{x\to 3}\left(7-2x\right)^{1/6-2x}$.

9. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3+(x-1)^3}{\left(x+2\sqrt{x}+1\right)^3}$; b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+5x-2}{4x^3-16x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x(1-\cos x)}$; d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+2)-\ln x}{\arcsin\dfrac{3}{x}}$.

10. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^3+2x+1}+\sqrt{x^4+1}}{\left(2x-\sqrt{x}+5\right)^2}$; b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{2x-4}$;

c) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{x+2}-4}{x^2+4x}$.

Задача 7. Найти производную функции $y(x)$ в точке x_0, используя *определение* производной.

1. $y(x)=\dfrac{1}{3x+2},\quad x_0=1.$
2. $y(x)=x^2+x,\quad x_0=3.$
3. $y(x)=\left(2x+1\right)^2,\quad x_0=0.$
4. $y(x)=-\dfrac{1}{x^2+1},\quad x_0=1.$
5. $y(x)=\dfrac{2x}{x+1},\quad x_0=0.$
6. $y(x)=x^2+2x+3,\quad x_0=2.$
7. $y(x)=\sqrt{x+1},\quad x_0=3;$
8. $y(x)=e^{2x},\quad x_0=0.$
9. $y(x)=\ln\left(1+x\right),\quad x_0=4.$

10. $y(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}, \quad x_0 = 4.$

Задача 8. Используя правила дифференцирования и формулы таблицы производных, в примерах a), b), c), d) вычислить производную, в примере e) найти вторую производную:

1. a) $y = \left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sin 2x} - \dfrac{3}{\ln x} + x^2 \mathrm{e}^{2x} + 1 \right)^{12}$;

b) $y = (\operatorname{arctg} x)^{\sqrt{x}}$; c) $x + y = \sin\left(x^2 - y^2\right)$;

d) $\begin{cases} x = \cos^2 3t, \\ y = -\dfrac{\sin^3 3t}{3} \end{cases}$; e) $y = \operatorname{arcctg} \dfrac{4}{x}$

2. a) $y = \ln\left(\dfrac{\sqrt{x^3}+2}{\cos 2x} - \dfrac{1}{x} + x^2 2^x + 1 \right)$;

b) $y = \left(x^2 - \sqrt{x}\right)^{\arcsin x}$; c) $xy = \sqrt{x^2 + y^2}$

d) $\begin{cases} x = 2^t \cos t, \\ y = 2^t \sin t \end{cases}$; e) $y = \left(1 + x^2\right) \operatorname{arctg} x$.

3. a) $y=\cos\left(\dfrac{\sqrt{x}+3}{\ln x}-\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}+x^2 3^x+1\right)$;

b) $y=\left(x^3-\sqrt{x^3}\right)^{\operatorname{ctg} x}$; c) $e^{xy}=x^2+y^2$;

d) $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$; e) $y=\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

4. a) $y=\dfrac{1}{\left(x\sin x-\ln^2 x+3\right)}$; b) $y=\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^{\arcsin\sqrt{x}}$;

c) $2^x+2^y=x^2+y^2$; d) $\begin{cases} x=\cos^4 t, \\ y=\sin^4 t. \end{cases}$;

e) $y=x\sqrt{1+x^2}$

5. a) $y=\sin^2\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}-x^3e^{2x}+1\right)$; b) $y=(\operatorname{tg} 2x)^{\sqrt{x}}$;

c) $\arcsin(xy)-x=y$; d) $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t, \\ y=\sin t-t\cos t. \end{cases}$;

e) $y=x\lg x$.

6. a) $y=\dfrac{1}{\left(\sqrt{x}\arcsin x+\dfrac{x^2}{\operatorname{tg}2x}-5^{-x}+1\right)^2}$;

b) $y=\left(1+x^2\right)^{\operatorname{arctg}x}$; c) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=xy$;

d) $\begin{cases} x=2t-t^2, \\ y=3t-t^3 \end{cases}$; e) $x^2-xy+y^2=1$.

7. a) $y=\sqrt{x}\operatorname{ctg}^2\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)$; b) $y=(\sin 3x)^x$;

c) $y^3+3y=x$; d) $\begin{cases} x=e^{2t}\cos^2 t, \\ y=e^{2t}\sin^2 t \end{cases}$;

e) $y=\operatorname{tg}2x$.

8. a) $y=\dfrac{1}{\ln\left(x^2\cos 3x+\dfrac{2\sqrt{x}}{\arcsin x}+1\right)}$;

b) $y=x^{\operatorname{arcctg}5x}$; c) $y=1+xe^{2y}$;

d) $\begin{cases} x=\ln t-\dfrac{1}{t}, \\ y=\dfrac{t^2+2t+1}{t} \end{cases}$; e) $y=\operatorname{ctg}2x$.

9. a) $y=\arcsin^2\sqrt{1-4x^2}$; b) $y=(\operatorname{tg}2x)^{1+2x}$;

c) $x\sin y-\cos y+2y=0$; d) $\begin{cases} x=e^{2t}\cos 2t, \\ y=e^{2t}\sin 2t \end{cases}$;

e) $y=\ln\left(x-\sqrt{x^2-3}\right)$.

10. a) $y=\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}+x^2 10^x-3\right)^5$; b) $y=(\arccos x)^{\ln x}$;

c) $x^y=y^x$; d) $\begin{cases} x=a\sin^3 t, \\ y=a\cos^3 t \end{cases}$;

e) $y=e^{-3x^2}$.

Задача 9. Найти интегралы: в заданиях a), b), c) и d) вычислить неопределенные интегралы, применяя таблицу интегралов. В заданиях e), f) вычислить определенные интегралы с помощью неопределенных

1. a) $\int\dfrac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$; b) $\int\dfrac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^3 x}$;

c) $\int(2x-3)\ln x dx$ d) $\int\dfrac{e^x dx}{e^{2x}+4e^x+3}$;

e) $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$; f) $\int_0^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$.

2. a) $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$; b) $\int \frac{x^2\,dx}{x^6-25}$;

c) $\int x\,\mathrm{arctg}\,2x\,dx$; d) $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$;

e) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}}$; f) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 4x\,dx$.

3. a) $\int \frac{2^{x+1}-5^{x+1}+10^x \cos x}{10^x}\,dx$; b) $\int \frac{dx}{(x-1)\ln(x-1)}$;

c) $\int x^3 e^{-x^2}\,dx$; d) $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$;

e) $\int_0^7 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$; f) $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x\,dx$.

;

4. a) $\int \frac{8^x - 1}{2^x - 1} dx$; b) $\int \frac{\cos 2x dx}{\sqrt[4]{\sin^3 2x}}$;

c) $\int \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) dx$; d) $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx$;

e) $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^8 + 3}$; f) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin 5x \cos x dx$.

5. a) $\int \sqrt{1 - \sin 2x} dx \quad (0 \le x \le \pi)$; b) $\int x^2 5^{-x^3} dx$;

c) $\int \arcsin 2x dx$; d) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$;

e) $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{\left(1 - x^2\right)^3}}$; f) $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1 + x + x^2}}$.

6. a) $\int \frac{\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 - x^4}} dx$; b) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^{2x}}}$;

c) $\int x^3 \ln x dx$; d) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$;

e) $\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$; f) $\int_{0}^{1} \arccos x dx$.

7. a) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4-1}} dx$; b) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$;

c) $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$; d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x+1}}$;

e) $\int_{0}^{1} x^2\sqrt{1-x^2} dx$; f) $\int_{1}^{e} \ln x dx$.

8. a) $\int x(1-x)^{10} dx$; b) $\int \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$;

c) $\int (2x-3)\sin 4x dx$; d) $\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)(x+1)} dx$;

e) $\int_{0}^{\pi} \cos^4 x dx$; f) $\int_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} dx$.

9. a) $\int \frac{xdx}{(1-x)^{10}}$; b) $\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^{10}}}dx$;

c) $\int (2x-3)\cos 4xdx$; d) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x+1}}$;

e) $\int\limits_0^{\pi/12} \mathrm{tg}^2\, 3xdx$; f) $\int\limits_0^1 \arcsin xdx$.

10. a) $\int \frac{e^{2x}+1}{e^x+1}dx$; b) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4+x^6}}$;

c) $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$; d) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}$;

e) $\int\limits_3^4 \frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx$; f) $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Задача 10. Приложения определенного интеграла: a) вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями; b) вычислить длину дуги плоской кривой; c) найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями.

Вариант 1.

a) $y = x^2, \quad y = 2 - x, \quad y = 0;$

b) $y = \ln\cos x, \quad 0 \le x \le \pi/6;$

c) $y = x^3, \quad y = x.$

Вариант 2.

a) $y = 2x, \quad y = x, \quad x = 1;$

b) $y = 1 - \ln\sin x, \quad \pi/3 \le x \le \pi/2;$

c) $y = x^2, \quad y = 4.$

Вариант 3.

a) $y = e^x, \quad y = e^{-x}, \quad x = 1;$

b) $y = \sqrt{x^3}, \quad 0 \le x \le 4;$

c) $y = \cos x, \quad y = 0, \quad -\pi/2 \le x \le \pi/2.$

Вариант 4.

a) $y = 2x, \quad y = \dfrac{x}{2}, \quad yx = 2$;

b) $y = \dfrac{1}{3}\ln\sin 3x, \quad \pi/6 \le x \le 2\pi/9$;

c) $y = x^2, \quad y = 1.$

Вариант 5.

a) $y^2 = 3x, \quad x^2 = 3y$;

b) $y = \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}\ln x, \quad 1 \le x \le 2$;

c) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1.$

Вариант 6.

a) $yx = 2, \quad x + 2y - 5 = 0$;

b) $y = \sqrt{(x-2)^3}, \quad 2 \le x \le 6$;

c) $y = x^2, \quad y = 2 - x$.

Вариант 7.

a) $y = -x^2 + 6x - 5, \quad y = 0$;

b) $y = \ln x, \quad \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$;

c) $y = 4^x, \quad y = 1, \quad x = 2$.

Вариант 8.

a) $y=\sqrt{x}, \quad y=\frac{1}{x}, \quad 4;$

b) $y=\frac{1}{2}\ln\cos x, \quad 0\le x\le \pi/12;$

c) $y=\sin\frac{x}{2}, \quad y=0, \quad x=\pi.$

Вариант 9.

a) $y=2x^2, \quad y=-2x+4;$

b) $y=7+x\sqrt{x}, \quad 0\le x\le 1;$

c) $y=x^2, \quad y=-x+2, \quad y=0.$

Вариант 10.

a) $y=x^2, \quad y=2-x, \quad x=0;$

b) $y=1+\ln\cos x, \quad 0\le x\le \pi/6;$

c) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$