ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Высшая математика»

Методические указания «Практические занятия по высшей математике» 1 семестр

Составители: Волокитин Г.И.,
Поляков А.С.
Типаева Э.Р.

Ростов-на-Дону, 2021

Аннотация

Варианты заданий практических занятий для студентов первого курса технических направлений. Методические указания / ДГТУ.

Ростов н/Д.

Методическая разработка предназначена для студентов очной и заочной форм обучения технических специальностей. Содержит задания для проведения практических занятий курса математики по разделам, изучаемым в первом семестре: «Линейная алгебра», «Векторная алгебра и аналитическая геометрия», «Введение в анализ», «Производная», «Интегрирование». Указания могут применяться как в очной форме обучения, так и в удаленном режиме.

Авторы

Составители: Волокитин Г.И., Поляков А.С. Типаева Э.Р.

Оглавление

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА **4**

Задание 1 4
Задание 2 8
Задание 3 9
Задание 4 13
Задание 5 16
Задание 6 19
Задание 7 21
Задание 8 27
Задание 9 28
Задание 10 29

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ **30**

В предлагаемых методических указаниях материал изложен в порядке проведения практических занятий. После подробного разбора типовых задач, где при необходимости даны справочные сведения и формулы, помещены задачи для самостоятельного решения. Такое построение методических указаний способствует проведению занятий как в очной форме, так при дистанционном обучении. Студенту предоставляются широкие возможности для активного самостоятельного изучения практической части курса математики

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Задание 1

Действия с матрицами, определители. Обратная матрица.

Пример 1. Решить матричное уравнение $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 9 & -16 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -4 \\ -11 & 1 \end{pmatrix}..$$

Решение. A - квадратная матрица третьего порядка. Учитывая, что матрица B имеет размер 3×2, заключаем, что искомая матрица также имеет размер 3×2, т.е.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_5 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения этой матрицы используем формулу $X = A^{-1}\cdot B$.

Обратную матрицу A^{-1} найдем методом присоединенной матрицы A^{+}. Элементы присоединенной матрицы - это алгебраические дополнения элементов строк матрицы A, расположенные по столбцам:

$$A^{+} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица определяется формулой:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{+}.$$

1). Вычислим определитель матрицы A, проверим, что матрица невырожденная, следовательно, имеет обратную матрицу. Определитель найдем, раскрывая его по элементам первой строки:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 9 & -16 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 9 & -16 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -16 \end{vmatrix} + (-4) \cdot \begin{vmatrix} -22 & 3 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = .$$

$$= 3(0 \cdot (-16) - 9 \cdot 1) - 2(32 - 5) - 4(-18 - 0) = -9 \neq 0.$$

2). Находим алгебраические дополнения всех элементов строк исходной матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 9 & -16 \end{vmatrix} = -9; \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -16 \end{vmatrix} = -27;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = -18;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 9 & -16 \end{vmatrix} = -4; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -16 \end{vmatrix} = -28;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = -17;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4.$$

3). Присоединенная матрица, элементами которой являются алгебраические дополнения, расположенные по столбцам, имеет вид:

$$A^{+} = \begin{pmatrix} -9 & -4 & 2 \\ -27 & -28 & 5 \\ -18 & -17 & 4 \end{pmatrix}.$$

4). Таким образом, обратная матрица равна

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{+} = \frac{1}{-9}\begin{pmatrix} -9 & -4 & 2 \\ -27 & -28 & 5 \\ -18 & -17 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4/9 & -2/9 \\ 3 & 28/9 & -5/9 \\ 2 & 17/9 & -4/9 \end{pmatrix}.$$

Используя операцию перемножения матриц, получим искомую матрицу:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4/9 & -2/9 \\ 3 & 28/9 & -5/9 \\ 2 & 17/9 & -4/9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -4 \\ -11 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$x_1 = 1\cdot(-1) + \frac{4}{9}\cdot(-1) + \left(-\frac{2}{9}\right)\cdot(-11) = 1;$$

$$x_2 = 1\cdot 4 + \frac{4}{9}\cdot(-4) + \left(-\frac{2}{9}\right)\cdot 1 = 2;$$

$$x_3 = 3\cdot(-1) + \frac{28}{9}\cdot(-1) + \left(-\frac{5}{9}\right)\cdot(-11) = 0;$$

$$x_4 = 3\cdot 4 + \frac{28}{9}\cdot(-4) + \left(-\frac{5}{9}\right)\cdot 1 = -1;$$

$$x_5 = 2\cdot(-1) + \frac{17}{9}\cdot(-1) + \left(-\frac{4}{9}\right)\cdot(-11) = 1;$$

$$x_6 = 2\cdot 4 + \frac{17}{9}\cdot(-4) + \left(-\frac{4}{9}\right)\cdot 1 = 0.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Варианты для самостоятельного решения:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

2. $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$;

3. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

4. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$;

5. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$;

6. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$;

7. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$;

8. $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$;

9. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$;

10. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Задание 2

Решение определенных систем линейных алгебраических уравнений. Предлагаемую СЛАУ третьего порядка следует решить тремя методами: по формулам Крамера, матричным методом и методом Гаусса.

Пример 2. Решить систему $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 9 & -16 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Решение. A - квадратная матрица третьего порядка, заданная в примере 1. При решении этого примера было показано, что матрица невырожденная: определитель матрицы $\Delta = -9 \neq 0$.

а). Решим по формулам Крамера: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$.

Определитель $\Delta = -9 \neq 0$ найден ранее в примере 1. Определители, указанные в числителе формул, следующие:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 9 & -16 \end{vmatrix} = -9; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -2 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & -16 \end{vmatrix} = -9; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 5 & 9 & -2 \end{vmatrix} = -9.$$

Таким образом, получаем $x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1.$

б). Матричный метод основан на применении формулы $X = A^{-1} \cdot B$. Обратная матрица была найдена в предыдущем примере 1:

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4/9 & -2/9 \\ 3 & 28/9 & -5/9 \\ 2 & 17/9 & -4/9 \end{pmatrix}$. Перемножив матрицы, получим

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 4/9 & -2/9 \\ 3 & 28/9 & -5/9 \\ 2 & 17/9 & -4/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 4/9 \cdot (-1) + (-2/9) \cdot (-2) \\ 3 \cdot 1 + 28/9 \cdot (-1) + (-5/9) \cdot (-2) \\ 2 \cdot 1 + 17/9 \cdot (-1) + (-4/9) \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

в). Решим систему методом Гаусса: $(A|B) \sim (E|X)$. Т.е. в расширенной матрице элементарными преобразованиями вместо клетки A получим единичную матрицу E. Тогда на месте клетки B появится вектор решения X. Элементарные преобразования матриц проводим по правилам Жордана.

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & 9 & -16 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & 9 & -16 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -9 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right).$$

Получаем, $x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1.$

Варианты для самостоятельного решения:

Матрицу A выбрать из своего варианта задания 1. Элементы матрицы-столбца B - суммы элементов соответствующих строк матрицы A.

Задание 3

Исследовать неоднородную систему линейных алгебраических уравнений $AX = B$. Найти общее и базисное решения.

Пример 3. Исследовать неоднородную систему линейных алгебраических уравнений: $A \cdot X = B$, где расширенная матрица системы имеет вид

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right),$$

а X - матрица-столбец неизвестных $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Решение. Учитывая правило перемножения матриц, запишем подробный вид системы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + \qquad x_4 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7 \end{cases}.$$

Получим решение методом Гаусса-Жордана. При помощи элементарных преобразований строк расширенной матрицы $(A|B)$ последовательно исключаем неизвестные в нижестоящих уравнениях.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Полученной эквивалентной матрице отвечает равносильная система:

$$\begin{cases} x_1 \qquad +6x_3 + 2x_4 = 0, \\ \qquad x_2 - 4x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Ранг матрицы A равен 2, $rang(A|B) = 2$. По теореме Кронекера-Капелли заключаем, что исходная система неопределенная, т.к. количество неизвестных в данном случае $n = 4$. Общее решение неоднородной системы складывается из общего решения соответствующей однородной системы и какого-либо частного решения неоднородной: $X_{О.Н.} = X_{О.О.} + X_{Ч.Н.}$. Здесь $X_{О.О.} = C_1\mathbf{e}_1 + C_2\mathbf{e}_2$ - общее решение однородной системы $AX = 0$, где C_1, C_2 - произвольные постоянные, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ - два линейно независимых вектора частных решений однородной СЛАУ, образующих ФСР (фундаментальную систему решений). Количество произвольных постоянных определяется по формуле $k = n - rangA$. Здесь $k = 4 - 2 = 2$. Принимаем, x_1, x_2 - *базисные переменные* (коэффициенты при этих неизвестных в полученной равносильной однородной системе – элементы минора второго порядка, отличного от 0). Переменные x_3, x_4 - *свободные*. Можно и по-другому выбрать базисные и свободные неизвестные: лишь бы минор из элементов при базисных переменных отличался от 0. Последнюю систему перепишем в виде

$$\begin{cases} x_1 = -6x_3 - 2x_4, \\ x_2 = 4x_3 - x_4. \end{cases}$$

Построим фундаментальную систему решений:

а). Пусть $x_3 = 1,\quad x_4 = 0$. Тогда из последней системы находим $x_1 = -6,\quad x_2 = 4.$

б). Пусть $x_3 = 0,\quad x_4 = 1$. Тогда $x_1 = -2,\quad x_2 = -1.$

В результате построена ФСР:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, общее решение однородной системы имеет вид

$$X_{o.o.} = C_1\mathbf{e}_1 + C_2\mathbf{e}_2 = C_1\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Получим частное решение *неоднородной* системы. Принимаем, например, свободные переменные равными 0. Такое частное решение неоднородной СЛАУ называется *базисным* решением. Итак,

$$X_{ч.н.} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ - базисное решение исходной системы.

Общее решение неоднородной исходной системы имеет вид

$$X_{о.н.}=C_1\begin{pmatrix}-6\\4\\1\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Принимая во внимание действия с матрицами, это решение можно переписать в компонентном виде:

$$\begin{cases}x_1=-6C_1-2C_2,\\x_2=4C_1+C_2+1,\\x_3=C_1,\\x_4=C_2.\end{cases}.$$

Варианты для самостоятельного решения:

1. $$A=\begin{pmatrix}5&24&-7&-1\\-1&-2&7&3\\3&20&7&5\\2&4&-14&-6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\\4\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}.$$

2. $$A=\begin{pmatrix}2&3&-1&0\\-1&-2&0&1\\3&4&-2&1\\5&7&-3&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2\\1\\5\\7\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}.$$

3. $$A=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\1&1&-2&1\\3&1&-3&1\\3&-1&0&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2\\3\\8\\7\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}.$$

4. $$A=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\1&1&3&-2\\3&-1&5&-4\\2&0&4&-3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1\\2\\4\\3\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}.$$

5. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$

6. $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -4 & 2 \\ 7 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$

7. $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$

8. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$

9. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 6 & -13 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$

10. $A=\begin{pmatrix} 11 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & -1 \\ -4 & 4 & -13 & 4 \\ 7 & 5 & -14 & 5 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$

Задание 4

Даны точки

$A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$, $D(x_4; y_4; z_4)$. Найти:

а). Координаты, модуль и направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$;

б). Проекцию вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{CD}$;

в). Скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, а также угол между ними;

г). Векторное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, а также площадь треугольника $\triangle ABC$;

д). Смешанное произведение векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, а также объем пирамиды *ABCD*.

Пример 4. Даны точки

$A(1;0;-1)$, $B(2;2;-3)$, $C(3;1;1)$, $D(4;-3;5)$. Найти:

а). Координаты, модуль и направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$;

б). Проекцию вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{CD}$;

в). Скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, а также угол между ними;

г). Векторное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, а также площадь треугольника $\triangle ABC$;

д). Смешанное произведение векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, а также объем пирамиды *ABCD*.

Решение. а) Вектор $\overline{AB}$ найдем по формуле $\overline{AB}=\{x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A\}$: $\overline{AB}=\{2-1;2-0;-3-(-1)\}=\{1;2;-2\}$. Модуль вектора $\mathbf{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$ определяется соотношением $|\mathbf{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$. Получаем отсюда $|\overline{AB}|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=3$. Направляющие косинусы – это координаты орта вектора $\overline{AB}$. Т.е. вектора $\overline{AB}^0=\dfrac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|}=\dfrac{\{1;2;-2\}}{3}=\left\{\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3}\right\}$. Направляющие косинусы равны:

$$\cos\alpha=\frac{1}{3},\quad \cos\beta=\frac{2}{3},\quad \cos\gamma=-\frac{2}{3}.$$

б). Проекцию вектора вычислим с помощью скалярного произведения:

$$np_{\overline{CD}}\overline{AB}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{\left|\overline{CD}\right|}.$$

Найдем вектор $\overline{CD}=\{1;-4;4\}$. Учитывая формулу вычисления скалярного произведения векторов в координатах

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,$$

найдем проекцию

$$np_{\overline{CD}}\overline{AB}=\frac{1\cdot1+2\cdot(-4)+(-2)\cdot4}{\sqrt{1^2+(-4)^2+4^2}}=\frac{-15}{\sqrt{33}}.$$

в). Найдем вектор $\overline{BC}$ и вычислим скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$. $\overline{BC}=\{1;-1;4\}$. $\overline{AB}\cdot\overline{BC}=\{1;2;-2\}\cdot\{1;-1;4\}=1\cdot1+2\cdot(-1)+(-2)\cdot4=-9$.

Косинус угла φ между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ определяется равенством

$$\cos\varphi=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{\left|\overline{AB}\right|\left|\overline{BC}\right|}=\frac{-9}{3\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда заключаем, что угол $\varphi=\frac{3}{4}\pi$.

Найдем вектор $\overline{AC}$ и вычислим векторное произведение векторов с помощью формулы

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}.$$

$\overline{AC}=\{2;1;2\}$. $\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&2&-2\\2&1&2\end{vmatrix}=6\mathbf{i}-6\mathbf{j}+(-3)\mathbf{k}=\{6;6;-3\}$. Учитывая, что модуль векторного произведения – площадь параллелограмма, для площади треугольника имеем соотношение

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|\{6;6;-3\}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+6^2+(-3)^2}=\frac{9}{2}.$$

д). Найдем вектор $\overline{AD}$ и вычислим смешанное произведение по формуле

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Имеем $\overline{AD}=\{3;-3;6\}$. $\left(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}\right)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix}=18$.

Учитывая, что модуль смешанного произведения численно равен объему параллелепипеда, построенного па векторах-сомножителях, а объем пирамиды составляет шестую часть объема параллелепипеда, получаем

$$V_{пир}=\frac{18}{6}=3.$$

Задание 5

На плоскости даны вершины треугольника $\triangle ABC$. Найти:

а). Канонические уравнения сторон AB и AC;

б). Уравнение высоты, опущенной из вершины *B*;

в). Внутренний угол $\angle A$;

г). Уравнение медианы, проведенной из вершины *B*;

д). Расстояние от точки *B* до стороны AC. Сделать чертеж:

Пример 5. $A(1;0)$, $B(2;2)$, $C(3;1)$.

Решение. а). Уравнения сторон найдем, используя уравнение прямой, проходящей через две заданные точки: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$.

$AB: \frac{y-0}{2-0}=\frac{x-1}{2-1}, \quad y=2x-2.$ $\quad AC: \frac{y-0}{1-0}=\frac{x-1}{3-1}, \quad y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$. Угловой коэффициент прямой AC равен $k_{AC}=\frac{1}{2}$.

б). Угловой коэффициент высоты BH связан с угловым коэффициентом стороны AC соотношением $k_{AC}\cdot k_{BH}=-1$. Отсюда находим, $k_{BH}=-2$. Уравнение высоты составим, используя уравнение прямой, имеющей заданный наклон и проходящей через заданную точку: $y-y_0=k(x-x_0)$.

$BH: y-2=-2(x-2), \quad y=-2x+6$.

в). Для нахождения внутреннего угла $\angle A$ используем формулу

$$tg\angle A=\frac{k_{AB}-k_{AC}}{1+k_{AB}\cdot k_{AC}}.$$

Получаем, $tg\angle A=\frac{2-1/2}{1+2\cdot 1/2}=\frac{3}{4}$. $\angle A=arctg\frac{3}{4}$.

г). Чтобы составить уравнение медианы, найдем координаты точки M - середины стороны AC: $x_M=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{1+3}{2}=2, \quad y_M=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$.

$BM: \frac{y-2}{1/2-2}=\frac{x-2}{2-2}, \quad x=2$ (каноническое уравнение вертикальной прямой).

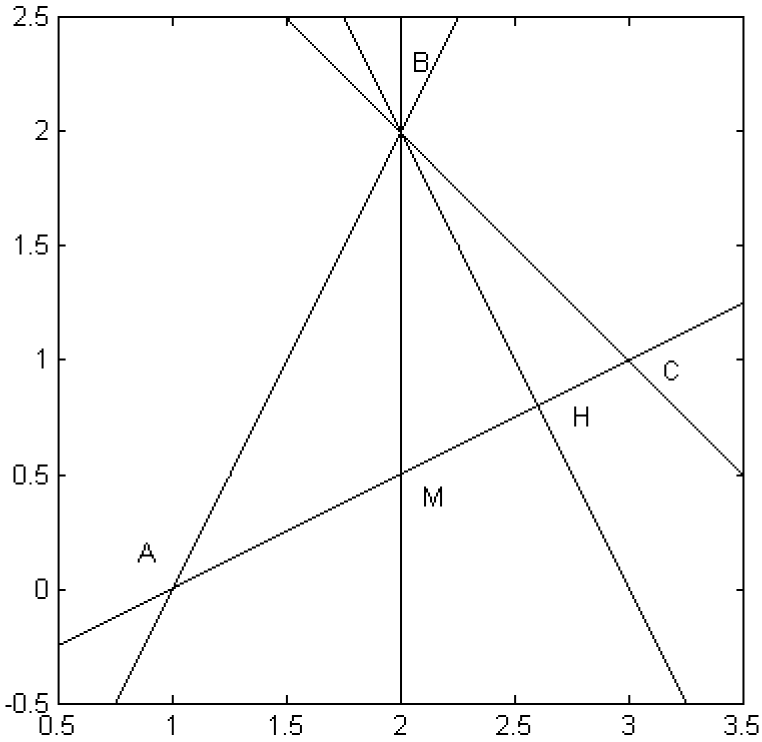
д). Расстояние от вершины B до стороны AC найдем по формуле:

$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, где $Ax+By+C=0$ - общее уравнение прямой,

$(x_0;y_0)$ -

точка, от которой определяется расстояние. Общее уравнение стороны AC имеет вид: $x-2y-1=0$. Поэтому $d=\frac{|2-2\cdot 2-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Строим треугольник в координатных осях:



Варианты для самостоятельного решения:

1. $A(1;3)$, $B(2;3)$, $C(-1;2)$;
2. $A(2;-1)$, $B(5;5)$, $C(3;2)$;
3. $A(1;0)$, $B(3;2)$, $C(-1;4)$;
4. $A(2;-1)$, $B(5;3)$, $C(3;-2)$;
5. $A(2;3)$, $B(4;1)$, $C(6;3)$;
6. $A(2;0)$, $B(0;3)$, $C(0;0)$;
7. $A(1;3)$, $B(2;1)$, $C(-1;2)$;
8. $A(5;1)$, $B(1;2)$, $C(3;3)$;
9. $A(2;1)$, $B(3;-1)$, $C(1;-2)$;
10. $A(1;2)$, $B(9;6)$, $C(3;0)$.

Задание 6

Точки A, B, C, D, координаты которых заданы в условии задания 4, являются вершинами пирамиды. Найти:

а). Уравнения ребра AB;

б). Угол между ребрами AB и AC;

в). Уравнение грани ABC;

г). Угол между ребром AD и гранью ABC;

д). Уравнение высоты пирамиды, опущенной из вершины D, а также проекцию этой вершины на плоскость ABC.

Пример 6. $A(1;2;3)$, $B(3;0;2)$, $C(6;3;-1)$, $D(4;1;5)$

Решение. а). Канонические уравнения прямой в пространстве, проходящей через две заданные точки, определяются соотношениями

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Следовательно, уравнения ребра AB имеют вид

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-2}{0-2}=\frac{z-3}{2-3}, \quad \text{или} \quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{-1}.$$

б). Угол между ребрами - это угол φ между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

Эти векторы соответственно равны $\overline{AB}=\{2;-2;-1\}$ и $\overline{AC}=\{5;1;-4\}$. Поэтому

$$\cos\varphi=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\left|\overline{AC}\right|}=\frac{2\cdot 5+(-2)\cdot 1+(-1)\cdot(-4)}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}\sqrt{5^2+1^2+(-4)^2}}=\frac{4}{\sqrt{42}}.$$

в). Составим уравнение грани ABC, используя условие компланарности векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и текущего вектора $\overline{AM}=\{x-1;y-2;z-3\}$:

$$\left(\overline{AM},\overline{AB},\overline{AC}\right)=\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & -4 \end{vmatrix}=0.$$

Раскрывая определитель, получим

$$(x-1)\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & -4\end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix}2 & -1\\ 5 & -4\end{vmatrix}+(z-3)\begin{vmatrix}2 & -2\\ 5 & 1\end{vmatrix}=0,$$

или

$$3x+y+4z-17=0.$$

г). Угол α между прямой с направляющим вектором $\mathbf{a}$ и плоскостью с нормальным вектором $\mathbf{N}$ определяется формулой

$$\sin\alpha=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{N}}{|\mathbf{a}||\mathbf{N}|}.$$

Направляющий вектор ребра равен $\mathbf{a}=\overline{AD}=\{3;-1;2\}$, координаты нормального вектора плоскости – это коэффициенты в общем уравнении плоскости, т.е. $\mathbf{N}=\{3;1;4\}$. Отсюда получаем

$$\sin\alpha=\frac{3\cdot3+(-1)\cdot1+2\cdot4}{\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{3^2+1^2+4^2}}=\frac{8}{\sqrt{91}},\qquad \alpha=\arcsin\frac{8}{\sqrt{91}}.$$

д). Направляющим вектором высоты пирамиды, опущенной из вершины D, является нормальный вектор плоскости $\mathbf{N}=\{3;1;4\}$. Поэтому канонические уравнения высоты следующие

$$\frac{x-4}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-5}{4}.$$

Проекцию P вершины D на плоскость основания найдем как пересечение прямой DP и плоскости ABC. Для этого от канонических уравнений высоты перейдем к параметрическим уравнениям:

$$\frac{x-4}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-5}{4}=t,\quad x=3t+4,\quad y=t+1,\quad z=4t+5$$

Подставляя последние соотношения в уравнение плоскости ABC, получаем уравнение для определения значения параметра t, соответствующего точке P:

$$3(3t+4)t+1+4(4t+5)-17=0,\quad t=-\frac{8}{13}.$$

Подставляя полученное значение t в параметрические уравнения высоты, находим координаты точки P:

$$x=3\left(-\frac{8}{13}\right)+4=\frac{28}{13},\quad y=-\frac{8}{13}+1=\frac{5}{13},\quad z=4\left(-\frac{8}{13}\right)+5=\frac{33}{13}.$$

Варианты для самостоятельного решения:

1. $A(1;3;1)$; $B(2;3;-2)$; $C(-1;2;1)$; $D(1;3;2)$;
2. $A(2;-1;1)$; $B(5;5;4)$; $C(3;2;-1)$; $D(4;1;3)$;
3. $A(1;0;1)$; $B(3;2;4)$; $C(-1;4;4)$; $D(1;1;3)$;
4. $A(2;-1;-1)$; $B(5;5;4)$; $C(3;2;-1)$; $D(9;0;1)$;
5. $A(2;3;1)$; $B(4;1;-2)$; $C(6;3;7)$; $D(-5;-4;8)$;
6. $A(2;0;0)$; $B(0;3;0)$; $C(0;0;6)$; $D(2;3;8)$;
7. $A(1;3;1)$; $B(2;1;-1)$; $C(-1;2;-2)$; $D(1;1;1)$;
8. $A(5;1;-4)$; $B(1;2;-1)$; $C(3;3;-4)$; $D(2;2;2)$;
9. $A(2;1;-3)$; $B(3;-1;3)$; $C(1;-2;4)$; $D(2;-1;3)$;
10. $A(1;2;3)$; $B(9;6;4)$; $C(3;0;4)$; $D(5;2;6)$.

Задание 7

Вычислить пределы:

Пример 7.

а). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(3x+\sqrt{x+2}\right)^3}{(9x^2-1)(x+1)}$; б). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-3x+2}$;

в). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{1-\cos 6x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^x$.

Решение. а). Чтобы раскрыть неопределенность $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ следует и в числителе, и в знаменателе в каждом из сомножителей вынести за скобки старшие степени. После сокращения повторно совершить предельный переход:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(3x+\sqrt{x+2}\right)^3}{\left(9x^2-1\right)\left(x+1\right)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(3+\sqrt{\frac{x+2}{x^2}}\right)^3}{x^3\left(9-\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{(3+0)^3}{(9-0)(1+0)}=3.$$

б). При вычислении предела при $x\to a$, содержащего неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$ следует и числитель, и знаменатель разложить на множители. В разложениях обязательно появятся скобки $(x-a)\to 0$, которые затем сокращаем. (Неопределенность исчезает).

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-3x+2}=\frac{2^3-8}{2^2-3\cdot 2+2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2+2x+4\right)}{(x-1)}=\frac{4+4+4}{2-1}=12.$$

в). Неопределенности, содержащие тригонометрические или обратные тригонометрические функции, раскрывают с помощью *первого замечательного предела*:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Удобны в использовании эквивалентные бесконечно малые, представленные цепочкой:

$$x\sim\sin x\sim\operatorname{tg} x\sim\arcsin x\sim\operatorname{arctg} x,\qquad \text{если}\quad x\to 0.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{1-\cos 6x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 2x}{2\sin^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 2x}{2\cdot(3x)^2}=\frac{1}{9}.$$

г). Здесь неопределенность типа $\left[1^\infty\right]$. Она раскрывается с помощью *второго замечательного предела*:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^x=\left[1^\infty\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1+2}{2x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{2}\cdot\frac{2}{2x-1}\cdot x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{2}{2x-1}\cdot x}=e^2.$$

Варианты для самостоятельного решения:

1. а). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(3x+\sqrt{x}+1\right)^3}{\left(9x^2-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)^2}$; б). $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^2-3x+2}$;

   в). $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\,\mathrm{arctg}\,2x}{1-\cos x}$; г). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^x$.

2. а). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$; б). $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$;

   в). $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$; г). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{2x}$.

3. а). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-1}{3x^2+1}$; б). $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$;

   в). $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{1-\dfrac{x^2}{\pi^2}}$; г). $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{2/x}$.

4. а). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-x+1}-x\right)$; б). $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\left(x^2-9\right)\sqrt{4-x}}{x^2-7x+12}$;

   в). $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,x}\right)$; г). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+3}{x^3-2x^2}\right)^x$.

5. а). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-2x}{\left(\sqrt{x-1}+3\right)^2}$; б). $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}$;

   в). $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{\sin(x-\pi/6)}{\sqrt{3}/2-\cos x}$; г). $\lim\limits_{x\to\infty}x\ln(1+3/x)$.

6. а). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n+2)^2}{\left(\sqrt{5n}+1\right)^4}$; б). $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{x^3-1}$; в). $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$;

г). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{e^{4x}-1}$.

7. а). $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$; б). $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2-12}$; в). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$;

г). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-3x+1}{x^2-2x+2}\right)^x$.

8. а). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n+2)^4}{\left(\sqrt{5n^4+3}+n\right)^2}$; б). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^3-8}$; в). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arcsin x}{1-\cos x}$;

г). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3x+4}{x^2-2x+2}\right)^x$.

9. а). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-2x+3}-x\right)$; б). $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-2x-8}$;

в). $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin(x-\pi/4)}{\sqrt{2}/2-\cos x}$; г). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1}$.

10. а). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$; б). $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$;

в). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arcsin^2 x}{\operatorname{tg} x-\sin x}$; г). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x+4}{x^2-2x+3}\right)^x$.

Для выполнения *заданий 8 , 9* необходимо освоить базовое понятие высшей математики – понятие производной. В задании 8 производную следует вычислять из определения. В задании 9 при решении примеров использовать правила дифференцирования и таблицу производных. Таблица, которая приведена ниже, дана с учетом сложной функции, т.е. функций, имеющих промежуточные аргументы. Решение примера вычисления производной сложной функции должно содержать все звенья цепочки дифференцирования.

Правила дифференцирования

1. $c'=0, \qquad c-const$
2. $(ku)'=ku', \qquad k-const$
3. $(u+v)'=u'+v'$ - производная суммы
4. $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$ - производная произведения
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$ - производная дроби
6. Производная сложной функции:

$$\left[y(u(x))\right]'=y_u'\cdot u_x'$$

(вначале производная внешней функции по промежуточному аргументу)

Таблица производных

$x'=1$ (1)

$(u^\alpha)'=\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$ (2)

$(\sqrt{u})'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$ (3)

$\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{1}{u^2}\cdot u'$ (4)

$(e^u)'=e^u\cdot u'$ (5)

$(a^u)'=a^u\ln a\cdot u'$ (6)

$(\ln u)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'$ (7)

$(\log_a u)'=\dfrac{1}{u\ln a}\cdot u'$ (8)

$(\sin u)'=\cos u\cdot u'$ (9)

$(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$ (10)

$(\mathrm{tg}\, u)'=\dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$ (11)

$(\mathrm{ctg}\, u)'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$ (12)

$(\arcsin u)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$ (13)

$(\arccos u)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$ (14)

$(\mathrm{arctg}\, u)'=\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$ (15)

$(\mathrm{arcctg}\, u)'=-\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$ (16)

Пример 8. Найти производную функции $y(x)=\dfrac{1}{x+2}$ в точке $x_0=1$.

Решение. По определению $y'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{y(x_0+\Delta x)-y(x_0)}{\Delta x}$.

$$y'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(1+\Delta x)-y(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+\Delta x+2}-\dfrac{1}{1+2}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{3+\Delta x}-\dfrac{1}{3}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{3-(3+\Delta x)}{3(3+\Delta x)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x\cdot 3\cdot(3+\Delta x)}=-\frac{1}{9}.$$

Пример 9. Найти производную функции $y(x)$:

а). $y(x)=\dfrac{1}{\left(\arcsin x-\dfrac{1}{x}+2\ln x\right)^3}$. Здесь сложная степенная функция.

Применяем на первом шаге формулу: $\left(u^{-3}\right)'=-3u^{-4}\cdot u'$. Получаем цепочку

$$y'=\left(\left(\arcsin x-\frac{1}{x}+2\ln x\right)^{-3}\right)'=-3\left(\arcsin x-\frac{1}{x}+2\ln x\right)^{-4}\cdot\left(\arcsin x-\frac{1}{x}+2\ln x\right)'=$$

$$=-3\left(\arcsin x-\frac{1}{x}+2\ln x\right)^{-4}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\left(-\frac{1}{x^2}\right)+2\frac{1}{x}\right).$$

б). $\cos\left(x^2+y^2\right)=3^{xy}$. Здесь функция задана неявно, т.е. уравнением. Если $y(x)$ решение этого уравнения (теоретически), то при подстановке $y(x)$ в уравнение получаем тождество. Тождество можно дифференцировать – равенство не нарушится. Поэтому, считая, что y зависит от x, продифференцируем левую и правую части уравнения. Получим линейное уравнение относительно y'.

$$\left(\cos\left(x^2+y^2\right)\right)'=\left(3^{xy}\right)';\qquad -\sin\left(x^2+y^2\right)\cdot\left(x^2+y^2\right)'=3^{xy}\cdot\ln 3\cdot(xy)';$$

$-\sin\left(x^2+y^2\right)\cdot\left(2x+2y\cdot y'\right)=3^{xy}\cdot\ln 3\cdot\left(y+xy'\right)$. Отсюда выразим y':

$$y'=-\frac{2x\sin\left(x^2+y^2\right)+3^{xy}y\ln 3}{2y\sin\left(x^2+y^2\right)+3^{xy}x\ln 3}.$$

в). $\begin{cases} x=\lg(2t+1), \\ y=t^2-\sqrt{t}+2. \end{cases}$ Здесь функция задана параметрически.

Производная вычисляется по формуле $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Имеем $y'_x=\dfrac{\left(t^2-\sqrt{t}+2\right)'}{\left(\lg(2t+1)\right)'}=\dfrac{2t-\dfrac{1}{2\sqrt{t}}}{\dfrac{2}{(2t+1)}\ln 10}$.

Варианты для самостоятельного решения:

Задание 8

Найти производную функции $y(x)$ в точке x_0, используя *определение* производной.

1. $y(x)=\dfrac{1}{3x+2}$, $x_0=1$.
2. $y(x)=x^2+x$, $x_0=3$.
3. $y(x)=(2x+1)^2$, $x_0=0$.
4. $y(x)=-\dfrac{1}{x^2+1}$, $x_0=1$.
5. $y(x)=\dfrac{2x}{x+1}$, $x_0=0$.
6. $y(x)=x^2+2x+3$, $x_0=2$.
7. $y(x)=\sqrt{x+1}$, $x_0=3$;
8. $y(x)=e^{2x}$, $x_0=0$.
9. $y(x)=\ln(1+x)$, $x_0=4$.
10. $y(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$, $x_0=4$.

Задание 9

Вычислить производную функции $y(x)$, применяя правила дифференцирования и формулы таблицы производных основных элементарных функций.

1. а). $y=\dfrac{1}{\left(\operatorname{arctg}x+\ln x-1/x\right)^3}$; б). $\sin\left(x^2-y^2\right)=\sqrt{x+y}$;

   в). $\begin{cases} y=t^3-\sqrt{t}+2, \\ x=\lg\left(t^2+1\right). \end{cases}$

2. а). $y=\cos^2\left(3x+2\sqrt{x}\right)$; б). $x^3-y^3=\ln\left(x+y\right)$;

   в). $\begin{cases} y=\cos^2\left(3x+4\right), \\ x=e^{2t}+\sqrt[3]{t^2}+\dfrac{1}{t}. \end{cases}$

3. а). $y=\operatorname{arctg}^5\sqrt{x^2+2x-1}$; б). $\dfrac{y}{x}-\ln\left(x^2+y^2\right)=0$;

   в). $\begin{cases} y=\sin^2\left(3x+4\right), \\ x=e^{-t}+\sqrt[5]{t^2}-\dfrac{1}{t}. \end{cases}$

4. а). $y=\dfrac{x^2\ln\left(4x+3\right)}{\sqrt{2x-1}}$; б). $y=\operatorname{tg}\left(x+y\right)$;

   в). $\begin{cases} y=t-\operatorname{arctg}t, \\ x=\ln\left(1+t^2\right). \end{cases}$

5. а). $y=\dfrac{\lg\sin x}{\lg\cos x}$; б). $y^3-yx+\sqrt{y}+x^3=0$;

   в). $\begin{cases} y=\dfrac{t-1}{t}, \\ x=\dfrac{t+1}{t}. \end{cases}$

6. а). $y = \dfrac{1}{\cos\left(x - 3^x\right)}$; б). $x + y = 1 + xe^y$;

в). $\begin{cases} y = a\left(1 - \cos t\right), \\ x = a\left(t - \sin t\right). \end{cases}$

7. а). $y = e^{2x+3}\left(x^2 - 2x + 4\sqrt{x}\right)$; б). $x^4 + y^4 = x^2y^2$;

в). $\begin{cases} y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}, \\ x = \dfrac{3t}{1+t^3}. \end{cases}$

8. а). $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$; б). $x - y = \arcsin x - \arcsin y$;

в). $\begin{cases} y = \dfrac{t}{t^2 - 1}, \\ x = \dfrac{t^3+1}{t^2-1}. \end{cases}$

9. а). $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$; б). $x^y = y^x$;

в). $\begin{cases} y = e^t \cos t, \\ x = e^t \sin t. \end{cases}$

10. а). $y = 10^{x \operatorname{tg} x}$; б). $\ln^2\left(x - y\right) = x + y$;

в). $\begin{cases} y = \sin^3 t, \\ x = \cos^3 t. \end{cases}$

Задание 10

Найти интегралы:

Задание 10 относятся к разделу «Интегрирование». В задании 10а при интегрировании применяем свойства линейности. Для решения примера 10б необходимо воспользоваться приемом подведения выражения под знак дифференциала. В задании 10в рассмотрены интегралы «группы четырех», которые предполагают при интегрировании выделение полного квадрата. Можно иначе решать этот пример – применить подстановку:

$t = x +$ *полкоэффициента при* x в *приведенном квадратном трехчлене*. Здесь t - новая переменная интегрирования. Эта подстановка автоматически выделяет полный квадрат и дает возможность использовать табличный интеграл. Пример 10г решается приемом интегрирования по частям: $\int udv = uv - \int vdu$. При решении всех примеров задания 10 предполагается применение формул таблицы интегралов:

Таблица интегралов

Интегралы от степенных функций:

1. $\int dx = x + c$

2. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \qquad \alpha \neq -1$

3. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c,$ 4. $\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + c$

5. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c$

Интегралы от показательных функций:

6. $\int e^x dx = e^x + c$

7. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$

Интегралы от тригонометрических функций:

8. $\int \cos x dx = \sin x + c$

9. $\int \sin x dx = -\cos x + c$

10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$

11. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$

Интегралы "группы 4-х":

12. $\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$ - "высокий логарифм"

13. $\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+c$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+c$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+c$ - "длинный log"

Примеры 10.

а).

$$\int \frac{\sqrt{x}+x^3e^x+2x^2}{x^3}dx=\int\left(\frac{\sqrt{x}}{x^3}+e^x+2\frac{1}{x}\right)dx=\int x^{-5/2}dx+\int e^x dx+2\int\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{x^{-5/2+1}}{-5/2+1}+e^x+2\ln x+C=-\frac{2}{3}x^{-3/2}+2\ln x+C.$$

б). $$\int \frac{\sqrt[4]{\ln x}}{x}dx=\int\sqrt[4]{\ln x}\,d(\ln x)=\left|\begin{matrix} t=\ln x, \\ dt=\dfrac{dx}{x}\end{matrix}\right|=\int t^{1/4}dt=\frac{t^{5/4}}{5/4}+C=\frac{4}{5}(\ln x)^{5/4}+C.$$

в).

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+5} = \left| \begin{array}{c} t = x+\frac{1}{2}(-4), \\ x = t+2, \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{(t+2)^2 - 4(t+2)+5} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+4t+4-4t-8+5} = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(x-2)+C.$$

г).

$$\int x\cos 2x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x, & du = dx \\ dv = \cos 2x dx, & v = \frac{\sin 2x}{2} \end{array} \right| = \frac{x\sin 2x}{2} - \int \frac{\sin 2x}{2} dx = \frac{x\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C.$$

Варианты для самостоятельного решения:

1. а). $\int \frac{(3x-2)^2 + x3^x}{x} dx;$ б). $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx;$ в). $\int \frac{(8x-11)}{\sqrt{5+2x-x^2}} dx;$

   г). $\int x\sin 3x dx.$

2. а). $\int \frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{3^x} dx;$ б). $\int \cos x\sqrt{\sin x} dx;$ в). $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}};$

   г). $\int x\cos 3x dx.$

3. а). $\int \operatorname{tg}^2 x dx;$ б). $\int \frac{x^4}{\sqrt[3]{4+x^5}} dx;$ в). $\int \frac{x^2+1}{x^2-1} dx;$

   г). $\int xe^{-2x} dx.$

4. а). $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx;$ б). $\int \frac{x^2}{\sqrt[5]{4+x^3}} dx;$ в). $\int \frac{xdx}{2x^2-3x-2};$

   г). $\int x\ln x dx.$

5. а). $\int \frac{(1+2x^2)dx}{x^2(1+x^2)};$ б). $\int \operatorname{ctg} x dx;$ в). $\int \frac{x+2}{x^2+2x+2} dx;$

   г). $\int x \operatorname{arctg} x;$

6. а). $\int 2\sin^2\frac{x}{2}dx;$ б). $\int \operatorname{tg} x dx;$ в). $\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}dx;$

г). $\int \lg x dx.$

7. а). $\int \frac{\left(\sqrt{x}+3\right)^2+2x\cos x}{x}dx;$ б). $\int e^{5x+4}dx;$ в). $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}};$

г). $\int \arccos x dx.$

8. а). $\int \operatorname{ctg}^2 x dx;$ б). $\int \frac{\cos x}{\sqrt[5]{\sin^2 x}}dx;$ в). $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5};$

г). $\int x2^x dx.$

9. а). $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx;$ б). $\int \cos(3-4x)dx;$ в). $\int \frac{xdx}{x^2+4x+5};$

г). $\int \operatorname{arcctg} x dx.$

10. а). $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx;$ б). $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx;$ в). $\int \frac{(x+2)dx}{x^2+4x+3};$

г). $\int \sqrt[3]{x}\ln x dx.$