ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра « Высшая математика»

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

«Теория вероятностей и элементы математической статистики»

Авторы:
Смирнова И.Ю.
Поляков А.С.

Ростов-на-Дону, 2021

Аннотация

Учебное пособие «Теория вероятностей и элементы математической статистики» предназначено для студентов всех форм обучения и всех специальностей, которые проходят данный раздел высшей математики. В разработке изложен краткий необходимый теоретический материал, иллюстрируемый решением модельных задач, которые, как правило, включаются в контрольные работы, индивидуальные задания и предлагаются на экзамене. Материал излагается с требованиями ФГОС ВО.

Авторы

Ст.преп. Смирнова И.Ю.

Ст.преп. Поляков А.С.

Оглавление

Раздел “Теория вероятностей”

1. Случайные события. Алгебра событий.

В различных разделах науки и техники нередко возникают ситуации, когда результат каждого из многих проводимых опытов заранее предугадать невозможно, однако можно исследовать закономерности, возникающие при проведении серии опытов. Нельзя, например, точно сказать какая сторона монеты окажется сверху при данном броске: герб или цифра – но при большом количестве бросков, число выпадений герба приближается к половине количества бросков; нельзя заранее предсказать результат одного выстрела из данного орудия по данной цели, но при большом числе выстрелов частота попадания приближается к некоторому постоянному числу. Исследование вероятностных закономерностей массовых однородных явлений составляет **предмет теории вероятностей**.

В теории вероятностей существует совокупность основных понятий, к которым сводятся все остальные и на которых она базируется. Одним из первичных понятий является понятие события.

Определение. **Событием** будем называть результат опыта или наблюдения, предполагая при этом, что данный опыт или наблюдение производятся при осуществлении некоторого комплекса условий и могут быть осуществлены неограниченное количество раз.

События, которые могут произойти в результате опыта, можно подразделить на три вида:

а) **достоверное событие** – событие, которое всегда происходит при осуществлении комплекса условий;

б) **невозможное событие** – событие, которое не может произойти ни при одном осуществлении условий;

в) **случайное событие** – событие, которое при осуществлении комплекса условий может либо произойти, либо не произойти. Например, при броске игральной кости достоверным событием является выпадение числа очков, не превышающего 6, невозможным – выпадение 10 очков, а случайным – выпадение 3 очков.

Алгебра событий.

Определение. **Суммой *A+B*** двух событий A и B называют событие, состоящее в том, что произошло хотя бы одно из событий A и B. **Суммой нескольких событий**, соответственно, называется событие, заключающееся в том, что произошло хотя бы одно из этих событий.

Пример 1.

Пусть событие А-множество студентов, сдавших зимнюю сессию только на отлично, а событие B – множество студентов, сдавших летнюю сессию только на отлично, то сумма $A+B$ – это подмножество студентов, сдавших на отлично или зимнюю сессию, или летнюю сессию, или обе сессии.

Определение. **Произведением *AB*** событий A и B называется событие, состоящее в том, что событие A и событие B происходят одновременно. Аналогично **произведением нескольких событий** называется событие, заключающееся в том, что все эти события произошли одновременно.

Пример 2.

В примере 1 событием AB это будет подмножество студентов, сдавших на отлично обе сессии.

Определение. **Разностью A\B** событий A и B называется событие, состоящее в том, что A произошло, а B – нет.

Пример 3. В примере 1 событием A\B будет подмножество студентов, сдавших зимнюю сессию на отлично, но не сдавших летнюю сессию на отлично.

Определение. **Противоположным** $\overline{A}$ для события A будем называть такое событие, которое происходит всякий раз, когда событие A не происходит.

Пример 4. В примере 1 событием $\overline{A}$ будет подмножество студентов, не сдавших зимнюю сессию только на отлично.

Определение. События A и B называются **совместными**, если они могут произойти оба в результате одного опыта.

Определение. События A и B называются **несовместными**, если они не могут произойти одновременно в результате одного опыта, т.е. если AB= Ø .

Определение. Говорят, что события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют

полную группу событий, если они

1) попарно несовместны, т.е. $A_i A_j = \varnothing$, $i \neq j$;

2) в результате опыта обязательно произойдет одно только одно из них.

Замечание. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в этом случае называют **элементарными событиями**.

2. Классическое определение вероятности.

При изучении случайных событий возникает необходимость количественно сравнивать возможность их появления в результате опыта.

Будем считать, что случаи представляют собой все множество исходов опыта. Пусть их число равно n (число возможных исходов), а при m из них происходит некоторое событие A (число благоприятных исходов).

Определение. **Классическим определением вероятности события *A*** называется отношение числа исходов опыта, благоприятных этому событию, к числу возможных исходов:

$$p(A) = \frac{m}{n}$$

Пример 1.

Из урны, содержащей 6 белых и 4 черных шара, наудачу вынут шар. Найти вероятность того, что он белый.

Решение. Будем считать элементарными событиями, или исходами опыта, извлечение из урны каждого из имеющихся в ней шаров. Следовательно, число возможных исходов (появление белого или черного шара) равно 10, а число исходов, благоприятных событию А (появлению белого шара) – 6 (таково количество белых шаров в урне). Значит,

$$p(A)=\frac{m}{n}=\frac{6}{10}=0,6.$$

3. Геометрическая вероятность.

Одним из недостатков классического определения вероятности является то, что оно неприменимо к испытаниям с бесконечным количеством исходов. В таких случаях можно воспользоваться понятием **геометрической вероятности**.

Пусть на отрезок *L* наудачу брошена точка. Это означает, что точка обязательно попадет на отрезок *L* и с равной возможностью может совпасть с любой точкой этого отрезка. При этом вероятность попадания точки на любую часть отрезка *L* не зависит от расположения этой части на отрезке и пропорциональна его длине. Тогда вероятность того, что брошенная точка попадет на отрезок *l*, являющийся частью отрезка *L*, вычисляется по формуле:

$$p=\frac{l}{L},$$

где *l* – длина отрезка *l*, а *L* – длина отрезка *L*.

Можно дать аналогичную постановку задачи для точки, брошенной на плоскую область *S* и вероятности того, что она попадет на часть этой области *s*:

$$p = \frac{s}{S},$$

где *s* – площадь части области, а *S* – площадь всей области.

В трехмерном случае вероятность того, что точка, случайным образом расположенная в теле *V*, попадет в его часть *v*, задается формулой:

$$p = \frac{v}{V},$$

где *v* – объем части тела, а *V* – объем всего тела.

Пример 1.

Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в круг, не попадет в правильный шестиугольник, вписанный в него.

Решение.

Пусть радиус круга равен *R* , тогда сторона шестиугольника тоже равна *R*. При этом площадь круга $S = \pi R^2$, а площадь шестиугольника

$$s = \frac{3\sqrt{3}}{2} R^2.$$

Следовательно,

$$p = \frac{S - s}{S} = \frac{\pi R^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} R^2}{\pi R^2} = \frac{\pi - 3\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0{,}174.$$

4. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теорема сложения. Вероятность $p(A+B)$ суммы событий A и B равна

$$p(A+B)=p(A)+p(B)-p(AB). \quad (1)$$

Следствие 1. Если события A и B несовместны, то $p(AB) = 0$ и, следовательно, вероятность суммы несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$p(A+B)=p(A)+p(B). \quad (2)$$

Следствие 2. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:

$$p(A)+p(\bar{A})=1. \quad (3)$$

Следствие 3. Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, образующих полную группу событий, равна 1:

$$p(A_1)+p(A_2)+\ldots+p(A_n)=1$$

Определение. Назовем **условной вероятностью** $\boldsymbol{p(B/A)}$ **события** $\boldsymbol{B}$ вероятность события B при условии, что событие A произошло.

Замечание. Понятие условной вероятности используется в основном в случаях, когда осуществление события A изменяет вероятность события B.

Пример 1.

Пусть событие A – извлечение из колоды в 32 карты туза, а событие B – то, что и вторая вынутая из колоды карта окажется тузом. Тогда, если после первого раза карта была возвращена в колоду, то вероятность вынуть вторично туз не меняется: $p(B)=p(A)=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}=0,125.$ Если же первая карта в колоду не возвращается, то осуществление события *A* приводит к тому, что в колоде осталась 31 карта, из которых только 3 туза. Поэтому

$$p(B/A)=\frac{3}{31}\approx 0,097$$

Теорема умножения. Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло:

$$p(AB)=p(A)\,p(B/A) \qquad (4)$$

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились:

$$p(A_1A_2\cdots A_n)=p(A_1)\,p(A_2/A_1)\ldots p(A_n/A_1A_2\cdots A_{n-1}) \quad (5)$$

Пример 2.

Для поражения цели необходимо попасть в нее дважды. Вероятность первого попадания равна 0,2, затем она не меняется при промахах, но после первого попадания увеличивается вдвое. Найти вероятность того, что цель будет поражена первыми двумя выстрелами.

Решение. Пусть событие A – попадание при первом выстреле, а событие B – попадание при втором. Тогда

$p(A) = 0{,}2$, $p(B/A) = 0{,}4$, $p(AB) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$.

Определение. Событие B называется **независимым** от события A, если появление события A не изменяет вероятности B, то есть $p(B/A) = p(B)$.

Теорема умножения для независимых событий имеет вид:

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B), \qquad (6)$$

то есть вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей.

При решении задач теоремы сложения и умножения обычно применяются вместе.

Пример 3.

Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятности их попадания при одном выстреле равны соответственно 0,6 и 0,7. Найти вероятности следующих событий:

A – хотя бы одно попадание при двух выстрелах;

B – ровно одно попадание при двух выстрелах;

C – два попадания;

D – ни одного попадания.

Решение.

Пусть событие H_1 – попадание первого стрелка, H_2 – попадание второго. Тогда

$$A = H_1 + H_2,\ B = H_1 \cdot \overline{H}_2 + \overline{H}_1 \cdot H_2,\ \ C = H_1 \cdot H_2,\ \ D = \overline{H}_1 \cdot \overline{H}_2.$$

События H_1 и H_2 совместны и независимы, поэтому теорема сложения применяется в общем виде, а теорема умножения – в виде (6). Следовательно, $p(C) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}42$, $p(A) = 0{,}6 + 0{,}7 - 0{,}42 = 0{,}88$, $p(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}46$ (так как события $H_1 \cdot \overline{H}_2$ и $\overline{H}_1 \cdot H_2$ несовместны), $p(D) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$. Заметим, что события A и D являются противоположными, поэтому

$$p(A) = 1 - p(D).$$

5. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.

Пусть событие A может произойти с одним и только одним из несовместных событий $H_1, H_2, \dots, H_n$, образующих полную группу событий. Тогда события $H_1, H_2, \dots, H_n$ называются **гипотезами*.***

Теорема. Вероятность события A, наступающего совместно с гипотезами $H_1, H_2, \dots, H_n$, равна:

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(H_i) p(A / H_i), \qquad (1)$$

где $p(H_i)$ – вероятность i- й гипотезы, а $p(A/H_i)$ – вероятность события A при условии реализации этой гипотезы. Формула (1) носит название **формулы полной вероятности**.

Пример 1.

Имеются три одинаковые урны с шарами. В первой из них 3 белых и 4 черных шара, во второй – 2 белых и 5 черных, в третьей – 10 черных шаров. Из случайно выбранной урны наудачу вынут шар. Найти вероятность того, что он белый.

Решение.

Будем считать гипотезами H_1, H_2 и H_3 выбор урны с соответствующим номером. Так как по условию задачи все гипотезы равновозможны, то

$$p(H_1) = p(H_2) = p(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Найдем условную вероятность A при реализации каждой гипотезы:

$$p(A/H_1) = \frac{3}{7}, p(A/H_2) = \frac{2}{7}, \ p(A/H_3) = 0.$$

Тогда

$$p(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{7} + \frac{1}{3}\cdot 0 = \frac{5}{21} \approx 0,238.$$

Следствием теоремы умножения вероятностей и формулы полной вероятности являются **формулы Байеса**:

$$p(H_i/A) = \frac{p(H_i)p(A/H_i)}{p(A)}. \qquad (2)$$

где i=1,2…n.

Вероятности гипотез p(H_i) в формуле полной вероятности (1) предполагаются известными до опыта. Формулы Байеса показывают, как изменяются вероятности гипотез в том случае, если событие A наступило.

Пример 2.

После двух выстрелов двух стрелков, вероятности попаданий которых равны 0,6 и 0,7, в мишени оказалась одна пробоина.

Найти вероятность того, что попал первый стрелок.

Решение.

Пусть событие A – одно попадание при двух выстрелах, а гипотезы: H_1 – первый попал, а второй промахнулся, H_2 – первый промахнулся, а второй попал, H_3 – оба попали, H_4 – оба промахнулись. Вероятности гипотез: $p(H_1) = 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}18$, $p(H_2) = 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}28$, $p(H_3) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}42$, $p(H_4) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$. Тогда

$p(A/H_1) = p(A/H_2) = 1$, $p(A/H_3) = p(A/H_4) = 0$.

Следовательно, полная вероятность

$p(A) = 0{,}18 \cdot 1 + 0{,}28 \cdot 1 + 0{,}42 \cdot 0 + 0{,}12 \cdot 0 = 0{,}46$.

Применяя формулу Байеса, получим:

$$p(H_1 / A) = \frac{0{,}18 \cdot 1}{0{,}46} = \frac{9}{23} \approx 0{,}391.$$

6. *Схема повторения испытаний. Формула Бернулли. Формула Пуассона.*

Рассмотрим серию из n испытаний, в каждом из которых событие A появляется с одной и той же вероятностью p, причем результат каждого испытания не зависит от результатов остальных. Подобная постановка задачи называется **схемой повторения испытаний** или **схемой Бернулли**. Найдем вероятность того, что в такой серии событие A произойдет ровно k раз (неважно, в какой последовательности). Интересующее нас событие представляет собой сумму равновероятных несовместных событий, заключающихся в том, что *A* произошло в некоторых *k* испытаниях и не произошло в остальных $n - k$ испытаниях. Число таких событий равно числу сочетаний из *n* по *k*, то есть C_n^k, а вероятность каждого из них: $p^k q^{n-k}$, где $q = 1 - p$ – вероятность того, что в данном опыте *A* не произошло. Применяя теорему сложения для несовместных событий, получим **формулу Бернулли**:

$$p_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Пример 3.

Для получения приза нужно собрать 5 изделий с особым знаком на этикетке. Найти вероятность того, что придется купить 10 изделий, если этикетки с этим знаком имеют 5% изделий.

Решение.

Из постановки задачи следует, что последнее купленное изделие имеет особый знак. Следовательно, из предыдущих девяти эти знаки имели 4 изделия. Найдем вероятность этого по формуле Бернулли:

$$p_9(4) = C_9^4 \cdot (0,05)^4 \cdot (0,95)^5 = 0,0006092.$$

Тогда $p = 0,0006092 \cdot 0,05 = 0,0000304$.

Если в схеме Бернулли n велико, а p-достаточно малая величина (0,05-0,1 и меньше), то вероятность того, что при n испытаниях некоторое испытание A произойдет k раз можно найти по приближенной формуле **Пуассона**:

$$p_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda},$$

где λ= np- среднее число появлений события А в n испытаниях.

Раздел "Случайные величины"

1. Определение дискретной случайной величины и закон распределения дискретной случайной величины

Величина, которая в результате испытания может принять то или иное значение, заранее неизвестно какое именно, называется *случайной*.

Будем обозначать случайные величины заглавными буквами латинского алфавита *X,Y,Z,...*, а их возможные значения – соответствующими малыми буквами x_i, y_i, z_i....

Для задания дискретной случайной величины нужно знать ее возможные значения и вероятности, с которыми принимаются эти значения. Соответствие между ними называется ***законом распределения случайной величины***. Он может иметь вид таблицы, формулы или графика.

Если обозначить возможные числовые значения случайной величины X через $x_1, x_2,... x_n$, а через $p_i=P(X=x_i)$ – вероятность появления значения x_i, то дискретная случайная величина полностью определяется таблицей, которая называется ***рядом распределения:***

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Поскольку в одном испытании случайная величина принимает одно и только одно возможное значение, то события $X = x_1$, $X = x_2$, ..., $X = x_n$ образуют полную группу; следовательно, сумма вероятностей этих событий т. е. сумма вероятностей второй строки таблицы, равна единице:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

Пример 1.

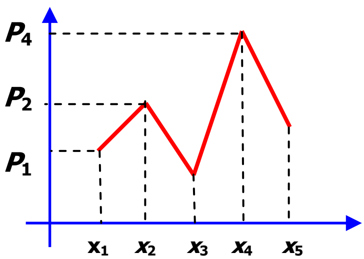
Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятности их попадания при одном выстреле равны соответственно 0,6 и 0,7. Составить ряд распределения случайной величины *X* – числа попаданий после двух выстрелов.

Решение.

Очевидно, что *X* может принимать три значения: 0, 1 и 2. Следовательно, ряд распределения имеет вид:

x_i	0	1	2
p_i	0,12	0,46	0,42

Графически закон распределения дискретной случайной величины можно представить в виде многоугольника (*полигона*) распределения – ломаной, соединяющей точки плоскости с координатами (x_i, p_i).



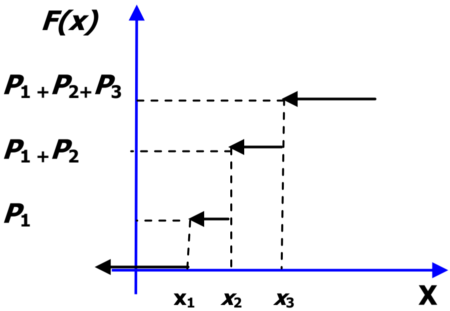
Полную характеристику случайной величины дает также функция распределения.

Функцией распределения $F(x)$ случайной величины *X* называется вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее *x*:

$$F(x) = p(X < x) = \sum_{x_i < x} p_i$$

Значение *F(x)* в каждой точке представляет собой сумму вероятностей тех ее возможных значений, которые меньше аргумента функции.

График функции распределении F(x) дискретной случайной величины имеет ступенчатый вид:



2. Числовые характеристики дискретной случайной величины

Математическим ожиданием *M(X)* дискретной случайной величины *X* называется сумма парных произведений всех возможных значений случайной величины на соответствующие им вероятности, т.е.

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

***Свойства математического ожидания*.**

1°. Математическое ожидание постоянной C равно этой постоянной.

Доказательство. Постоянную C можно рассматривать как случайную величину X, которая может принимать только одно значение C с вероятностью равной единице. Поэтому $M(X)=C\cdot 1=C$.

2°. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, т.е. $M(kX)=k\,M(X)$.

3°. Математическое ожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин:

$$M(X_1+X_2+\ldots+X_n)=M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)$$

4°. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин:

$$M(X_1\cdot X_2)=M(X_1)\cdot M(X_2)$$

Дисперсией $D(X)$ случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X)=M[X-M(X)]^2$$

Казалось бы, естественным рассматривать не квадрат отклонения, а просто отклонение $X-M(X)$ случайной величины от ее математического ожидания. Однако математическое ожидание этого отклонения равно нулю, так как

$$M\left[X-M(X)\right]=M(X)-M\left[M(X)\right]=M(X)-M(X)=0$$

При решении задач дисперсию удобно вычислять по формуле

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left[M(X)\right]^2$$

Свойства дисперсии.

1°Дисперсия постоянной величины C равна нулю: $D(C) = 0$.

2°. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

3°. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

Следствие 1. Дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме их дисперсий.
Следствие 2. Дисперсия суммы постоянной и случайной величин равна дисперсии случайной величины.

4°. Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

Дисперсия дает среднее значение квадрата отклонения случайной величины от среднего; для оценки самого отклонения служит величина, называемая средним квадратическим отклонением.

Средним квадратическим отклонением $\sigma(X)$ случайной величины X называется корень квадратный из ее дисперсии:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ имеет ту же размерность, что и случайная величина X.

Пример 1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*, зная закон ее распределения:

X	*3*	*5*	*2*
P	*0.1*	*0.6*	*0.3*

Решение: Математическое ожидание равно сумме произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности: $M(x)=3\cdot0.1+5\cdot0.6+2\cdot0.3=3.9$.

Для нахождения дисперсии будем пользоваться формулой $D(X)=M\left(X^2\right)-\left[M(X)\right]^2$. Для этого составим ряд распределения дискретной случайной величины X^2:

X^2	9	25	4
P	0.1	0.6	0.3

и найдем математическое ожидание $M(X^2)$:

$M(X^2)=9\cdot0.1+25\cdot0.6+4\cdot0.3=17.1$

Отсюда имеем, дисперсия $D(X)=17.1-(3.9)^2=1.89$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)=\sqrt{1.89}$.

3. Биномиальный закон распределения. Распределение Пуассона.

Биномиальный закон распределения.

Рассмотрим схему повторных испытаний Бернулли и найдем закон распределения случайной величины *X* – числа появлений события *A* в серии из *n* испытаний. Возможные значения *A*: 0, 1, …, *n*. Соответствующие им вероятности можно вычислить по формуле Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

(*p* – вероятность появления *A* в каждом испытании).

Такой закон распределения называют *биномиальным*, поскольку правую часть равенства можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона:

$$(p+q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + C_n^0 q^n$$

Числовые характеристики. Для случайной величины, распределенной по биномиальному закону, математическое ожидание $M(X)$ можно найти, используя его свойства . Пусть X_1 – число появлений *A* в первом испытании, X_2 – во втором и т.д. При этом каждая из случайных величин X_i задается рядом распределения вида

X_i	0	1
p_i	q	p

Следовательно, $M(X_i) = p$. Тогда

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} M(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np$$

Аналогичным образом вычислим дисперсию:

$$D(X_i) = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p - p^2 = p - p^2 = p(1-p),$$

откуда по свойству 4 дисперсии

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = np(1-p) = npq$$

Пример 1.

Составить ряд распределения случайной величины X – числа попаданий при 5 выстрелах, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,8. Найти математическое ожидание и дисперсию.

Решение: $p(X=0) = 1\cdot(0{,}2)^5 = 0{,}00032$;

$p(X=1) = 5\cdot 0{,}8\cdot(0{,}2)^4 = 0{,}0064$;

$p(X=2) = 10\cdot(0{,}8)^2\cdot(0{,}2)^3 = 0{,}0512$;

$p(X=3) = 10\cdot(0{,}8)^3\cdot(0{,}2)^2 = 0{,}2048$;

$p(X=4) = 5\cdot(0{,}8)^4\cdot 0{,}2 = 0{,}4096$;

$p(X=5) = 1\cdot(0{,}8)^5 = 0{,}32768$.

Таким образом, ряд распределения имеет вид:

x	0	1	2	3	4	5
p	0,0032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768

M(X)=5·0,8=4, D(X)=5·0,8·0,2=0,8

Распределение Пуассона.

Рассмотрим дискретную случайную величину X, принимающую только целые неотрицательные значения (0, 1, 2,…, k,…n), последовательность которых не ограничена. Ряд распределения вероятностей появления этих значений, вычисленных по формуле

$$p_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$$, где $\lambda=np$

называется *законом распределения Пуассона,* а случайная величина распределенной по закону Пуассона. При этом λ называется параметром закона Пуассона.

Замечание. Формула Пуассона выражает биномиальное распределение при большом числе опытов и малой вероятности события. Поэтому закон Пуассона часто называют законом редких явлений.

Числовые характеристики.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, совпадают и равны параметру λ, который определяет этот закон, т.е.

$$M(X)=D(X)=\lambda.$$

4.Определение непрерывной случайной величины. Функция распределения непрерывной случайной величины

Непрерывной случайной величиной *X* называется случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

В общем случае случайная величина *X* задается ***функцией распределения*** *F(x)*, представляющей собой вероятность того, что *X* примет значение, меньшее чем *x*:

$$F(x) = P(X < x);\ x \in R$$

Функция распределения обладает свойствами:

1) $0 \le F(x) \le 1$;

2) Функция распределения является неубывающей функцией, т.е. из $x_2 > x_1$ следует $F(x_2) \ge F(x_1)$.

Следствие1. Вероятность того, что случайная величина *X* примет значение в интервале (*a, b*), равна приращению ее функции распределения на этом интервале: $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$

Следствие 2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет одно определенное значение, равна нулю. Используя последнее следствие, легко убедиться в справедливости следующих равенств:

$$P(a \le X < b) = P(a < X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$$

3)Если возможные значения непрерывной случайной величины принадлежат интервалу (*a,b*), то
F(x)=0,если $x \le a$;
F(x)=1, если $x \ge b$.

Следствие. Если возможные значения непрерывной случайной величины расположены на всей числовой оси, то справедливы следующие предельные соотношения:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0; \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

4) Функция F(x) непрерывна слева, т.е. F(x-0)=F(x).

Для непрерывных случайных величин, существует еще один удобный способ задания закона распределения – через плотность вероятности. Пусть функция распределения *F(x)* данной непрерывной *X* непрерывна и дифференцируема всюду, кроме, может быть, отдельных точек. Тогда производная *f(x)* ее функции распределения называется ***плотностью распределения*** непрерывной случайной величины X или плотностью вероятности:

$$f(x) = F'(x)$$

Плотность распределения обладает свойствами:

1. $f(x) \ge 0$ (свойство неотрицательности);

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (свойство нормированности);

3. Вероятность того, что случайная величина попадет на проме-

жуток (a ,b) вычисляется по формуле $P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$

4. Функция распределения выражается формулой:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \;;$$

График плотности распределения *f(x)* называется *кривой распределения.*

5.Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку [*a, b*] и имеющую плотность вероятности f(x), находится по формуле

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx \,.$$

Если возможные значения принадлежат всей числовой оси, то

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+} xf(x)dx$$

(предполагается, что несобственный интеграл, стоящий в правой части равенства, существует).

Дисперсией непрерывной случайной величины называют математическое ожидание квадрата ее отклонения. Если возможные непрерывной случайной величины *X* принадлежат отрезку [*a, b*], то

$$D(X)=\int_{a}^{b}(x-M(X))^{2}f(x)dx\,.$$

Если возможные значения принадлежат всей числовой оси, то

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^{2}f(x)dx$$

(предполагается, что несобственный интеграл, стоящий в правой части равенства, существует).

Средним квадратическим отклонением непрерывной случайной величины называют, как и для величины дискретной, квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\,.$$

Среднее квадратическое отклонение есть мера рассеяния значений случайной величины около ее математического ожидания.

6. Равномерное, нормальное, показательное распределение непрерывных случайных величин.

Непрерывная случайная величина *X* имеет ***равномерный закон распределения*** на отрезке [*a, b*], если ее плотность вероятности $f(x)$ постоянна на этом отрезке и равна нулю вне его:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & при \quad a\le x\le b,\\ 0 & при \quad x<a,\ \ x>b.\end{cases}$$

Функция распределения *F(x)* для равномерно распределенной случайной величины *X,* имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & при \quad a < x \le b, \\ 1 & при \quad x > b. \end{cases}$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины *X*, имеющей равномерное распределение, находятся по формулам:

$$M(X)=\frac{a+b}{2}; \ D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Вероятность попадания равномерно распределенной случайной величины X на интервал $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ вычисляется по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

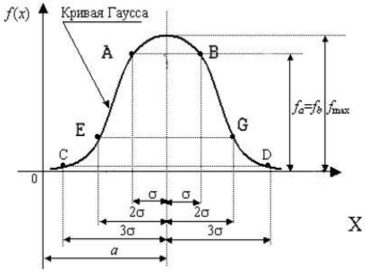
Нормальный закон распределен*ия* (закон Гаусса) играет исключительную роль в теории вероятностей. Главная особенность закона Гаусса состоит в том, что он является *предельным законом*, к которому приближаются, при определенных условиях, другие законы распределения. Нормальный закон распределения наиболее часто встречается на практике.

Непрерывная случайная величина *X* имеет *нормальный закон распределения* с параметрами α и σ, если ее плотность вероятности имеет вид*:*

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}}.$$

Кривую нормального закона распределения называют нормальной кривой или кривой Гаусса.

Нормальная кривая $y=f(x)$ изображена на рис.



Математическое ожидание случайной величины X, распределенной по нормальному закону, равно параметру α этого закона, т. е. $M(X)=\alpha$, а дисперсия – параметру σ^2, т. е. $D(X)=\sigma^2$.

Нормальный закон распределения случайной величины с параметрами $\alpha=0$ и $\sigma=1$, называется *стандартным* или *нормированным.*

Плотность стандартной случайной величины X имеет вид

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

и называется *функцией Гаусса.*

Вероятность попадания в интервал *(a, b*) случайной величины X, подчиненной нормальному закону, определяется формулой

$$P(a<X<b)=\Phi_0\left(\frac{b-\alpha}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\frac{a-\alpha}{\sigma}\right),$$

где функция $\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ называется *функцией Лапласа (или интегралом вероятности).* Эту функцию называют также *функцией ошибок.*

Функция Лапласа обладает следующими свойствами:

1. $\Phi_0(-x)=-\Phi_0(x)$, т. е. функция $\Phi_0(x)$ - нечетная;
2. $\Phi_0(0)=0$;

3. $\Phi_0(+\infty)=0{,}5$.

Вероятность попадания случайной величины X в интервал $(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$, симметричный относительно центра рассеяния α, находится по формуле

$$P(a-\varepsilon<X<\alpha+\varepsilon)=P(|X-\alpha|<\varepsilon)=2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

В частности, $P(|X-\alpha|<3\sigma)=2\Phi_0(3)\approx 0{,}9973$, т. е. практически достоверно, что случайная величина X принимает свои значения в интервале $(\alpha-3\sigma,\alpha+3\sigma)$. Это утверждение называется «*правилом трех сигм*». На практике это правило применяют следующим образом: если распределение случайной величины X неизвестно, но условие, указанное в правиле трех сигм выполнено, то есть основание предполагать, что случайная величина X распределена нормально, в противном случае X не является нормально распределенной случайной величиной.

Раздел "Элементы математической статистики"

1. Основные понятия

Статистика — наука, изучающая массовые явления, имеющая свой предмет, методологию и исследующая количественные закономерности общественного развития. Она применяется как метод познания закономерностей в любой области, где массовые явления имеют место.

Математическая статистика – это раздел математики, изучающий приближенные методы сбора и анализа данных по результатам эксперимента для выявления существующих закономерностей, т.е. отыскания законов распределения случайных величин и их числовых характеристик.

Генеральная совокупность – это вся группа объектов, которая нас интересует. Например, все студенты данного вуза. Или все потенциальные посетители кинотеатра.

Выборка (или выборочная совокупность) – это совокупность случайно отобранных наблюдений (объектов) из генеральной совокупности для непосредственного изучения. Например – это те потенциальные посетители кинотеатра, которых вы опросили. Основной вопрос статистики – это как на основании выборки сделать выводы обо всей генеральной совокупности?

Основной параметр генеральной совокупности – это ее среднее значение μ.

Если выборка состоит из n наблюдений X1,..,Xn ,то выборочное среднее равно среднему арифметическому значению признака выборочной совокупности.

Среднее по генеральной совокупности μ является параметром генеральной совокупности, то есть неизменной величиной. ***Выборочное среднее*** – это случайная величина, которая меняется от выборке к выборке.

Распределение выборочного среднего:

Пусть имеется n независимых наблюдений X1,..,Xn из генеральной совокупности со средним μ и стандартным отклонением σ. Форма распределения для каждого наблюдения Xi не известна, однако известно μ – математическое ожидание случайной величины Xi , равное среднему по генеральной совокупности

.

$$M(\overline{X}) = M\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \mu$$

Среднее наблюдение Xi будет удалено μ на стандартное отклонение σ. Но среднее по всем наблюдениям будет находиться на меньшем расстоянии от математического ожидания, поскольку “ошибки усредняются” – какие-то из наблюдений будут выше μ, какие-то ниже, и среднее по всем наблюдениям будет, как правило, ближе к μ, чем каждое наблюдение в отдельности. Из равенств

$$D(\overline{X}) = D\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

получаем, что дисперсия среднего по n наблюдениям в n раз меньше, чем дисперсия каждого наблюдения в отдельности.

Стандартное отклонение выборочного среднего равно

$$\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

2. Центральная предельная теорема.

Мы знаем математическое ожидание и стандартное отклонение выборочного среднего. Каково распределение выборочного среднего? Если генеральная совокупность описывается нормальным распределением, то выборочное среднее будет нормально распределено, для любого *n*. А что если генеральная совокупность описывается каким-либо другим распределением? Оказывается, что если размер выборки *n* достаточно велик, то не важно какой формы распределение в генеральной совокупности. Независимо от этого, выборочное среднее будет распределено по нормальному закону. Этот результат носит название центральной предельной теоремы:

Для случайной выборки размера n ≥30 из любой генеральной совокупности *со средним μ и стандартным отклонением σ выборочное среднее* $\overline{X}$ *распределено по нормальному закону со средним μ и стандартным отклонением* $\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$:

$$\overline{X} \sim N(\frac{\sigma^2}{n})$$

Центральная предельная теорема имеет большое значение, как для теории, так и для практики. Многие случайные величины имеют нормальное распределение. Биномиальное распределение и распределение Пуассона хорошо приближаются нормальным, когда ожидаемое число успехов достаточно велико (*n≥30*). Все это частные случаи центральной предельной теоремы.

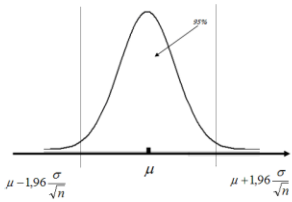
3. Доверительный интервал для μ, когда σ известно.

Как оценить среднее генеральной совокупности *μ*, если известна только случайная выборка размером *n*, – то есть наблюдения $X_{1,..,}X_n$? Лучшей точечной оценкой для среднего по генеральной совокупности (*μ*) является среднее выборочное ($\overline{X}$). Но необходимо знать, насколько точна эта оценка поскольку $\overline{X}$ всегда оказываеся на определенном расстоянии от *μ*.

Формально нужно построить доверительный интервал (или "интервальную оценку") для *μ*. Например, 95% доверительный интервал-это такие числа *a* и *b*, что утверждение "среднее по генеральной совокупности μ лежит между числами a и b с вероятностью 95% " верно. Иначе говоря, для 95% доверительного интервала, мы хотим найти такие числа *a* и *b*, что *P(a<μ<b)=0,95*

Из центральной предельной теоремы следует, что $\overline{X}$ имеет нормальное распределение со средним *μ* и стандартным отклонением $\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Таким образом,

$$P(\mu - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{X} < \mu + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 0{,}95$$



Иными словами, с вероятностью 95% расстояние между μ и $\overline{X}$ окажется меньше, чем $1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Это утверждение можно записать также как $P(\overline{X} - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 0{,}95$. Таким образом мы нашли такие числа *a* и *b*, что *P(a<μ<b)=0,95*. Здесь a= $\overline{X} - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, b= $\overline{X} + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Пример 1. Необходимо узнать среднюю недельную зарплату сотрудников большой компании, если известно, что стандартное отклонение σ=5 т.р. Случайным образом выбрали 100 сотрудников, и средняя зарплата поэтой выборке оказалась 45,2 т.р. Постройте 95% доверительный интервал для средней недельной зарплаты по всей компании.

Решение. Используем формулу $\overline{X} \pm 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ с $\overline{X}$ =45,2 , σ=5 и n=100, получаем 95% доверительный интервал: $45{,}2 \pm 1{,}96\frac{5}{\sqrt{100}} = 45{,}2 \pm 0{,}98 \approx 45{,}2 \pm 1$ или (44,2 т.р.; 46,2 т.р.).

Замечание. Поскольку $n \geq 30$, то не нужно знать форму распределения зарплат в компании. В частности, не нужно предполагать что оно нормальное.

Что, если нужно рассмотреть не 95% а 90% доверительный интервал? В общем случае говорят о (1-α) доверительном интервале, где α - вероятность того, что истенное значение μ не попало в доверительный интервал (вероятность ошибки), а (1-α) –уровень доверия. В случае 95% доверительного интервала α =0,05, в случае 90% доверительного интервала α =0,1 , в случае 99% доверительного интервала α =0,01, и т.п.

Логика вывода (1-α) доверительного интервала такая же, как и в случае 95% интервала, который был рассмотрен ранее. Из таблицы нормального распределения нужно найти такое значение *z*, что $P(Z<-z)=\frac{\alpha}{2}$. Это значение *z* обозначается $z_{\alpha/2}$. Таким образом, по определению $P(Z<-z_{\alpha/2})=\frac{\alpha}{2}$ (и в силу симметрии нормального распределения, $P(Z>z_{\alpha/2})=\frac{\alpha}{2}$. В случае 95% доверительного интервала, рассмотренного выше, α =0,05, и использовалось значение $z_{\alpha/2}=z_{0,025}=1{,}96$.

Итак, для (1-α) доверительного интервала значение $z_{\alpha/2}$ находится из таблицы стандартного нормального распределения, а сам доверительный интервал для μ имеет вид:

$$\overline{X}\pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

4. Доверительный интервал для *μ*, когда *σ* неизвестно .

В большенстве задач стандартное отклонение генеральной совокупности σ не известно, и все что есть- это выборка $X_1,\ldots,X_n$ из интересующей нас генеральной совокупности. Как в этом случае построить доверительный интервал для среднего по генеральной совокупности μ?

Идея состоит в том, что для заданного набора наблюдений $X_1,...,X_n$ можно посчитать не только выборочное среднее $\overline{X}$ (что является точечной оценкой μ), но и выборочное стандартное отклонение s, что является точечной оценкой σ, и при при построении доверительных интервалов использовать s вместо σ.

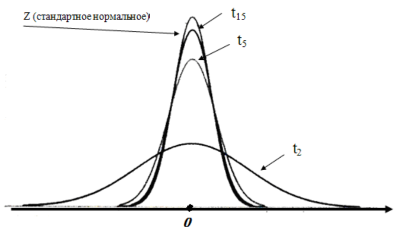
Выборочное среднее считается по формуле:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}}.$$

Заметим, что при $n=1$ невозможно оценить σ (поскольку происходит деление на ноль) и это также объяснимо тем, что имеется лишь одно наблюдение и нет смысла говорить о степени разброса (дисперсии) в популяции.

Когда σ не неизвестно, рассматриваеся распределение случайной величины $\frac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$, при условии, что среднее выборочное $\overline{X}$ имеет нормальное распределение.

Распределение $\frac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$, где t-распределение Стьюдента с n-1 степенями свободы. Оно имеет вид:



Как видно из рисунка, t – распределение симметрично относительно нуля, и в целом похоже на нормальное. Однако оно “шире” чем нормальное, и становится более узким с ростом степеней свободы. Так для 2 степеней свободы, различие между t –

распределением и нормальным очень велико. Для 15 степеней свободы (соответствует выборке n=16) различие не очень существенно. Для 29 степеней свободы (соответствует выборке n=30) t -распределение практически неотличимо от нормального.

Работать с t-распределением также просто, как и с нормальным. Для построения (1-α) доверительного интервала для μ, из таблицы t-распределения с n-1 степенями свободы нужно найти такое значение $t_{\alpha/2,n-1}$, что $P(t_{n-1} > t_{\alpha/2,n-1}) = \dfrac{\alpha}{2}$.

Тогда $P(-t_{\alpha/2,n-1} < \dfrac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2,n-1}) = 1-\alpha$,

или $P(\overline{X} - t_{\alpha/2,n-1}\dfrac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_{\alpha/2,n-1}\dfrac{s}{\sqrt{n}}) = 1-\alpha$.

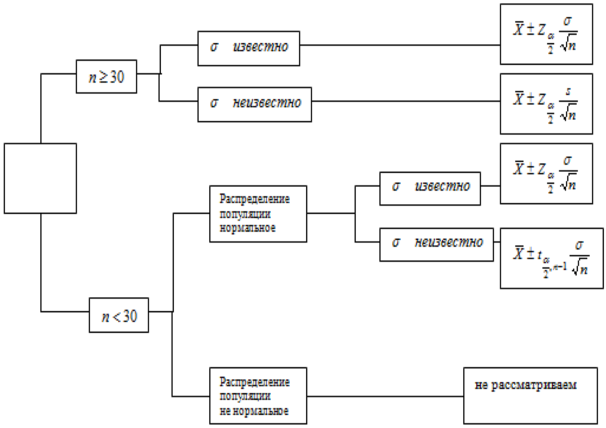
Получаем (1-α) доверительный интервал для μ:

$$\overline{X} \pm t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Обратим внимание, что $t_{\alpha/2,n-1}$ становится меньше с ростом n и всегда больше, чем $z_{\alpha/2}$, но различие между t-распределением и стандартным нормальным становятся несущественными для $n \geq 30$. Поэтому при $n \geq 30$ можно использовать формулу

$$\overline{X} \pm z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Важно подчеркнуть, что различие между случаями большой выборки($n \geq 30$) и малой выборки ($n < 30$) следующие: Во-первых, в случае малой выборки необходимо предполагать, что распределение популяции нормально. В случае большой выборки, форма распределения в генеральной совокупности нас не интересует, поскольку выборочное среднее будет распределено нормально (центральная предельная теорема). Во-вторых, в случае большой выборки можно использовать нормальное распределение вместо t-распределения.


$n \geq 30$
σ известно
$\bar{X} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
σ неизвестно
$\bar{X} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$
$n < 30$
Распределение популяции нормальное
σ известно
$\bar{X} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
σ неизвестно
$\bar{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
Распределение популяции не нормальное
не рассматриваем

Приложения

Приложение 1

Значення функции Пуассона $P_\lambda(m)=\dfrac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$

m \ λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679
1	0.0905	0.1637	0.2223	0.2681	0.3033	0.3293	0.3476	0.3595	0.3659	0.3679
2	0.0045	0.0164	0.0333	0.0536	0.0758	0.0988	0.1216	0.1438	0.1647	0.1839
3	0.0002	0.0011	0.0033	0.0072	0.0126	0.0198	0.0284	0.0383	0.0494	0.0613
4	0.0000	0.0001	0.0003	0.0007	0.0016	0.0030	0.0050	0.0077	0.0111	0.0153
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0007	0.0012	0.0020	0.0031
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

m \ λ	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
0	0.1353	0.0498	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001	0.0001
1	0.2707	0.1494	0.0733	0.0337	0.0149	0.0064	0.0027	0.0011	0.0005
2	0.2707	0.2240	0.1465	0.0842	0.0446	0.0223	0.0107	0.0050	0.0023
3	0.1805	0.2240	0.1954	0.1404	0.0892	0.0521	0.0286	0.0150	0.0076
4	0.0902	0.1681	0.1954	0.1755	0.1339	0.0912	0.0572	0.0337	0.0189
5	0.0361	0.1008	0.1563	0.1755	0.1606	0.1277	0.0916	0.0607	0.0378
6	0.0120	0.0504	0.1042	0.1462	0.1606	0.1490	0.1221	0.0911	0.0631
7	0.0034	0.0216	0.0595	0.1045	0.1377	0.1490	0.1396	0.1171	0.0901
8	0.0009	0.0081	0.0298	0.0653	0.1033	0.1304	0.1396	0.1318	0.1126
9	0.0002	0.0027	0.0132	0.0363	0.0689	0.1014	0.1241	0.1318	0.1251
10	0.0000	0.0008	0.0053	0.0181	0.0413	0.0710	0.0993	0.1186	0.1251
11	0.0000	0.0002	0.0019	0.0082	0.0225	0.0452	0.0722	0.0970	0.1137
12	0.0000	0.0001	0.0006	0.0034	0.0113	0.0264	0.0481	0.0728	0.0948
13	0.0000	0.0000	0.0002	0.0013	0.0052	0.0142	0.0296	0.0504	0.0729
14	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0022	0.0071	0.0169	0.0324	0.0521
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0009	0.0033	0.0090	0.0194	0.0347
16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0015	0.0045	0.0109	0.0217
17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0021	0.0058	0.0128
18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0009	0.0029	0.0071
19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0014	0.0037
20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0006	0.0019
21	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0009
22	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004
23	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
24	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
25	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Приложение 2.

Таблица значений функции Гаусса

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

x	...0	...1	...2	...3	...4	...5	...6	...7	...8	...9
0,0...	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1...	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2...	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3...	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3698
0,4...	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5...	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6...	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7...	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8...	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9...	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0...	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1...	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2...	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3...	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4...	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5...	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6...	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7...	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8...	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9...	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0...	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1...	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0395	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2...	0,0353	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3...	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4...	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5...	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6...	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7...	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8...	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9...	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0...	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1...	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2...	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3...	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4...	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5...	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6...	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7...	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8...	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9...	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001

Приложение 3

Значение функции $\Phi_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Сотые доли x									
0,0	0,0000	0040	0080	0112	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0754
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2258	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2518	2549
0,7	2580	2612	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2996	3023	3051	3079	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3553	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4430	4441
1,6	4452	4463	4474	4485	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4700	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4762	4767
	Десятые доли x									
2,	4773	4821	4861	4893	4918	4938	4953	4965	4974	4981
3,	4987	4990	4993	4995	4997	4998	4998	4999	4999	5000^{8}

Приложение 4

t-распределение Стьюдента

Число степеней свободы	Уровень					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	636,6
2	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60
3	2,353	3,182	4,541	5,841	10,21	12,92
4	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869
6	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922
19	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	1,711	2,064	2,492	2.797	3,467	3,745
25	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
00	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика. Основы моделирования и первичная обработка данных.-М.:Финансы и статистика, 1983.

2.Вентцель Е.С. Теория вероятностей.-М.:Наука, 1964.

3.Гмурман В.Е. Введение в теорию вероятностей и математическую статистику.-М.:Наука,1970.

4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.-М.:Высшая школа,1998.

5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.-М.:Высшая школа,1979.

6.Павловский З.В. Введение в математическую статистику.-М.:Статистика,1967.