ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Высшая математика»

Учебно-методическое пособие

«Определенный интеграл»

по дисциплине

«Математика»

Авторы

Коровина К. С.,

Рудова И. Ш.,

Золотых И. А.

Ростов-на-Дону, 2021

Аннотация

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов всех форм обучения по всем направлениям.

Авторы

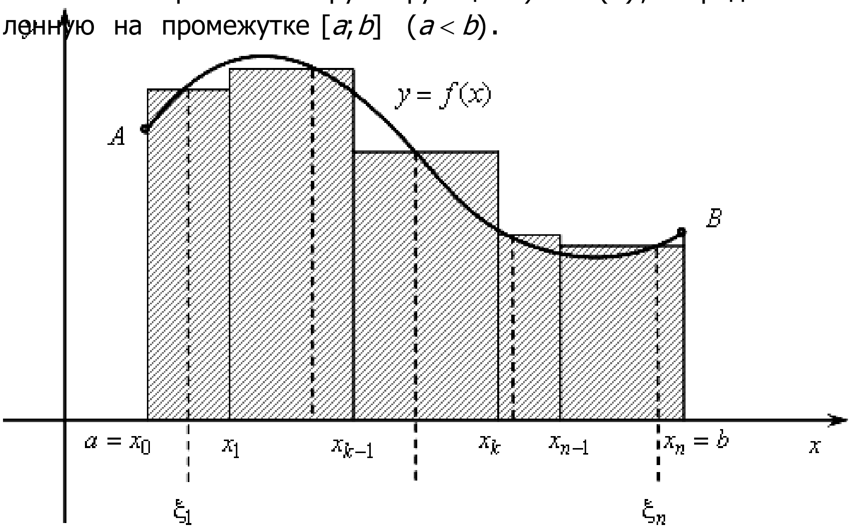
ст. преподаватель кафедры «Высшая математика»
Коровина К. С.,
ст. преподаватель кафедры «Высшая математика»
Рудова И.Ш.,
ст. преподаватель кафедры «Высшая математика»
Золотых И.А.

Оглавление

1. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА

1.1 Определение определенного интеграла

Рассмотрим некоторую функцию $y = f(x)$, определенную на промежутке $[a;b]$ $(a < b)$.



Проведем следующие операции:

1. Разобьем промежуток $[a;b]$ точками

$x_0 = a$; x; x_2; ... x_k; x_{k+1}; ... $x_n = b$ произвольным образом на n-элементарных отрезков. Введем следующие обозначения:

$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ – длина элементарного отрезка,

$\lambda = \sup\{\Delta x_k\}$ – диаметр разбиения (наибольшая из всех длин участков разбиения).

2. На каждом частичном участке $[x_k; x_{k+1}]$ возьмем произвольную точку ξ_k и вычислим в ней значение функции $f(\xi_k)$.

3. Составим произведение: $f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$.

4. Составим сумму

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Назовем эту сумму интегральной суммой функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ или суммой Римана.

5. При увеличении числа разбиения отрезка $[a;b]$ на элементарные отрезки и устремляя при этом диаметр разбиения к нулю $(\lambda \to 0)$, найдем предел последовательности интегральных сумм

$$J = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$$

Определение. Если этот предел существует, не зависит от способа разбиения отрезка $[a;b]$ и выбора точек ξ_k, то он называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ по промежутку $[a;b]$ и обозначается так:

$$J = \int_a^b f(x)dx$$

Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования.

Более компактно можно дать определение определенного интеграла следующим образом:

$$J = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$$

В случае, когда для функции $f(x)$ существует определенный интеграл

$$J = \int_a^b f(x)dx,$$

функция $f(x)$ называется интегрируемой на промежутке $[a;b]$.

***Замечания*: 1.** В приведенном определении предполагается, что $a < b$. Понятие определенного интеграла можно обобщить и на случай, когда $a > b$ или $a = b$. Действительно, будем считать по определению, что

если $a > b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

если $a = b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

2. Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

3. Если $f(x) \equiv 1$, то

$$\int_a^b dx = b - a$$

1.2 Теорема существования определенного интеграла

Возникает вопрос: всякая ли функция $f(x)$ интегрируема на данном промежутке $[a;b]$. Напомним определение кусочно-непрерывной функции. *Определение.* Функция $f(x)$ называется *кусочно-непрерывной* на данном промежутке $[a;b]$, если на этом промежутке она ограничена и имеет лишь конечное число точек разрыва первого рода.

Геометрически кусочно-непрерывную функцию можно изобразить линией, состоящей из конечного числа непрерывных участков. Очевидно, что функция, непрерывная на промежутке $[a;b]$, является частным случаем кусочно-непрерывной функции.

Приведем теперь без доказательства теорему существования определенного интеграла.

Теорема (достаточное условие интегрируемости). Если функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на промежутке $[a;b]$, то на этом промежутке она интегрируема, т. е. существует $\int_a^b f(x)dx$.

Заметим, что класс функций, указанных в теореме, практически исчерпывает все функции, встречающиеся в приложениях. В дальнейшем мы будем предполагать, что рассматриваются только такие функции.

1.3 Геометрический смысл определенного интеграла

Допустим, что функция f(x) непрерывна и положительна на промежутке [a;b]. Рассмотрим криволинейную трапецию ABCD.

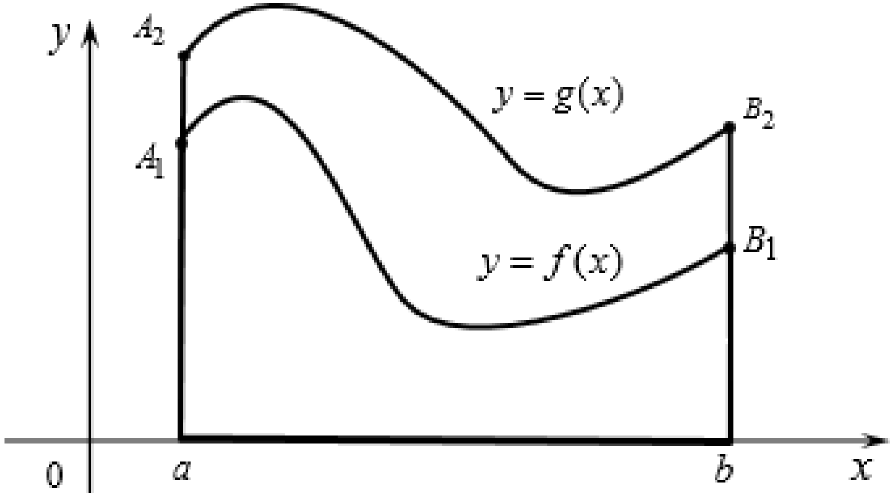
Интегральная сумма $\sigma=\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$ дает нам сумму площадей прямоугольников с основаниями $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ и высотами $f(\xi_k)$. Ее можно принять за приближенное значение площади криволинейной трапеции ABCD, т. е.

$$S_{ABCD} \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

причем это равенство будет тем точнее, чем мельче разбиение, и в пределе при $n \to +\infty$ и $\lambda \to 0$ мы получим

$$S_{ABCD} = \int_a^b f(x)dx$$

В этом и заключается геометрический смысл определенного интеграла.



1.4 Свойства определенного интеграла

Свойство 1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$$

Свойство 2. $\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$.

Свойство 3. Для любых трех чисел *a*, *b*, *c* справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f(x)dx,$$

если все эти интегралы существуют.

Геометрическая интерпретация: площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;b]$ равна сумме площадей криволинейных трапеций с основаниями $[a;c]$ и $[c;b]$.

Свойство 4. Если на отрезке $[a, b]$ $(a < b)$ $f(x) \le g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

Геометрическая интерпретация: площадь криволинейной трапеции aA_2B_2b не меньше площади криволинейной трапеции aA_1B_1b.

Следствия:
а) если $a < b$ и $\forall x \in [a;b]$: $f(x) \ge 0$, то

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0$$

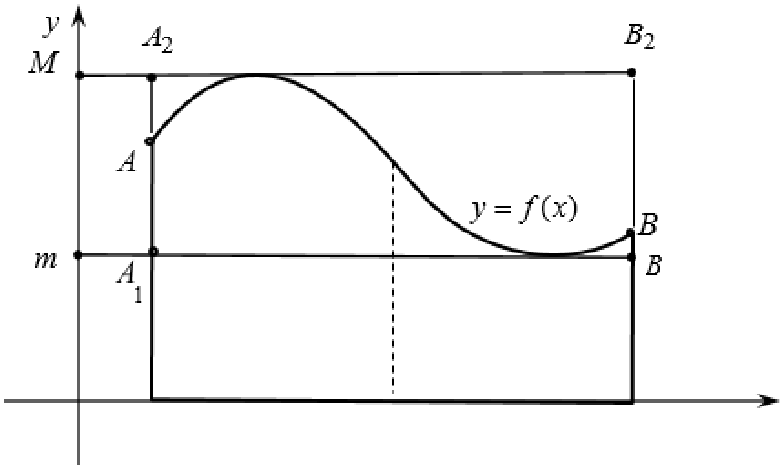
b) если $a < b$ и $\forall x \in [a;b]$: $f(x) \le 0$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le 0$$

Свойство 5. (теорема об оценке определенного интеграла). Если m и M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, $a \le b$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

Геометрическая интерпретация представлена на рисунке ниже для $f(x) \ge 0$. Площадь прямоугольника aA_1B_1b равна $m(b-a)$, площадь прямоугольника aA_2B_2b – соответственно $M(b-a)$.



Неравенство показывает, что площадь криволинейной трапеции не меньше площади первого прямоугольника, и не больше площади второго.

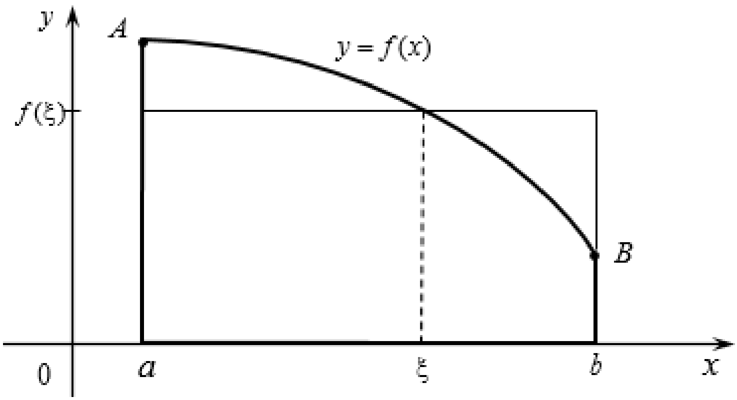
Свойство 6. (т е о р е м а о среднем).

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то на этом отрезке найдется такая точка ξ, что

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\, f(\xi).$$

Геометрическая интерпретация дана на рисунке для $f(x) > 0$. Так как значение $f(\xi)(b-a)$ численно равно площади прямоугольника с основанием $b-a$ и высотой $f(\xi)$, то теорема о среднем утверждает, что существует прямоугольник, площадь которого равна площади криволинейной трапеции $aABb$.

Замечание. Число $f(\xi)$, определяемое из теоремы о среднем как $f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ называется интегральным средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.



2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Определение: Если функция *f* интегрируема на отрезке [*a*,*b*], то для любого *x*∈[*a*,*b*] существует интеграл

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C,$$

который называется интегралом с переменным верхним пределом.

2.1 Теорема об интеграле с переменным верхним пределом (теорема Барроу)

Теорема. Если функция f(x) непрерывна на промежутке *[a, b]*, то интеграл с переменным верхним пределом $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ имеет производную, равную значению подынтегральной функции при верхнем пределе, т. е. Ф'(x)=f(x).

Замечание. Из теоремы следует, что определенный интеграл с переменным верхним пределом $\int_a^x f(t)dt$ является первообразной для подынтегральной функции f(x) на отрезке [a;b]:

$$\int_a^x f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + C,$$

т. е. установлена связь между неопределенным и определенными интегралами.

2.2. Формула Ньютона – Лейбница

Выше показано, что функция f(x), непрерывная на отрезке [a, b], имеет на этом отрезке первообразную. Например, в качестве первообразной можно взять функцию Ф(x)=$\int_a^x f(t)dt$, т. е. интеграл с переменным верхним пределом. Поставим теперь обратную задачу: зная одну из первообразных Ф(x) функции f(x) на отрезке [a, b], вычислить определенный интеграл от функции f(x) на этом отрезке или найти определенный интеграл по известному неопределенному.

Следующая теорема, представляющая собой решение этой задачи, дает основную формулу интегрального исчисления (формулу Ньютона – Лейбница). Она выражает определенный интеграл через неопределенный (первообразную).

Теорема. Если F(x) является первообразной непрерывной функции f(x), то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Замечание. Обычно вводится обозначение F(b)–F(a)= $F(x)\Big|_a^b$ формула Ньютона – Лейбница записывается так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Формула Ньютона – Лейбница – это одна из немногих формул-связок, объединяющих различные разделы математики воедино. Если бы не было формулы Ньютона – Лейбница, то неопределенные интегралы не нашли бы приложения, а определенные интегралы нельзя было бы вычислить аналитически. Именно эта формула делает интегральное исчисление важнейшим инструментом исследования процессов. Любой процесс описывается дифференциальными или интегральными уравнениями, а они решаются в интегралах.

Пример 1. Вычислить $\int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Решение:

$$\int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsinx|_0^{0.5} = arcsin\frac{1}{2} - -arcsin0 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$$

Пример 2. Вычислить

$$\int_1^e \frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} dx$$

Решение:

$$\int_1^e \frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} dx = \int_1^e \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right) dx = (2\sqrt{x} + \ln x)\Big|_1^e = 2\sqrt{e} - 1$$

Пример 3. Вычислить

$$\int_0^\pi (2x + cosx)\, dx$$

Решение:

$$\int_0^\pi (2x + cosx)\, dx = (x^2 + sinx)\Big|_0^\pi = (\pi^2 + sin\pi) - (0^2 + sin0) = \pi^2$$

Задачи для самостоятельного решения:

1. $\int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx$

2. $\int_{-1}^{0}\frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$

3. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

4. $\int_{-1}^{2}e^x dx$

5. $\int_{1}^{2}(3x^2-4x^3+5)dx$

6. $\int_{-1}^{2}(5x^3+2x^2-3x+8)dx$

7. $\int_{1}^{2}3^x dx$

8. $\int_{0}^{1}(3x^2-2x+1)dx$

9. $\int_{1}^{4}\frac{dx}{x^2}$

10. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-1)dx$

11. $\int_{1}^{9}3(\sqrt{x}-x)dx$

12. $\int_{1}^{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$

13. $\int_{4}^{9}\sqrt{x}(1+\sqrt{x})dx$

14. $\int_1^2 (\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})dx$

15. $\int_0^3 (1 + e^x)dx$

16. $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

17. $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right)dx$

18. $\int_0^a (x^2 - ax)dx$

19. $\int_1^8 \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$

20. $\int_0^4 (1 + \sqrt{x})^2 dx$

21. $\int_0^\pi (\sin x + 3)dx$

22. $\int_1^4 (\sqrt{x} - 1)dx$

23. $\int_{-1}^0 (3x^4 + 3x^2 + 1)dx$

24. $\int_0^1 (2x + x^3)dx$

25. $\int_0^1 (3x - 2x^4 + e^x)dx$

26. $$\int_{-1}^{2}(x^4+x^2-6x-3)dx$$

27. $$\int_{0}^{1}\frac{4x^4+4x^2-7}{x^2+1}dx$$

28. $$\int_{4}^{9}(2\sqrt{x}+3)dx$$

29. $$\int_{0}^{\pi}(3\sin x-5)dx$$

30. $$\int_{1}^{4}\left(x^3-\frac{4}{x^5}\right)dx$$

2.3. Замена переменной в определенном интеграле

Теорема. Если:
1) функция f (x) непрерывна на отрезке [a;b],
2) функция $x=\varphi(t)$ непрерывна и имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha;\beta]$, где $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$,
3) функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на отрезке $[\alpha;\beta]$, то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Замечание. В отличие от неопределенного интеграла, в определенном интеграле нет необходимости возвращаться к прежней переменной интегрирования, т. к. результатом вычисления будет число, не зависящее от выбора переменной.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_3^8\frac{x-3}{\sqrt{x+1}}dx$

Решение:

$$\int_3^8 \frac{x-3}{\sqrt{x+1}}dx = \begin{Bmatrix} t=\sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2 \\ dx = 2tdt \\ x|_3^8 = t|_2^3 \end{Bmatrix} = \int_2^3 \frac{(t^2-4)2t}{t}dt =$$

$$=2\int_2^3 (t^2-4)\,dt = \left(\frac{2}{3}t^3 - 8t\right)\Big|_2^3 = -6 + \frac{32}{3} = \frac{14}{3}$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}dx$

Решение:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}dx = \begin{Bmatrix} t=e^x \Rightarrow dt = e^x dx \\ e^x+1 = t^2+1 \\ x|_0^1 = t|_1^e \end{Bmatrix} = \int_1^e \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = ln\frac{e+\sqrt{e^2+1}}{1+\sqrt{2}}$$

Задачи для самостоятельного решения:

1. $\int\limits_2^6 \sqrt{x-2}dx$
2. $\int\limits_0^1 (x+1)^3 dx$
3. $\int\limits_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$
4. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2x dx$
5. $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$
6. $\int\limits_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$

7. $\int_{1}^{e} \frac{\ln x dx}{x}$

8. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(3x+8)^4}}$

9. $\int_{0}^{1} \sqrt{1+x}dx$

10. $\int_{a}^{2a} \frac{dx}{\sqrt{2ax}}$

11. $\int_{2}^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$

12. $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x dx$

13. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx$

14. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{4x+1}$

15. $\int_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\sin^2 3x}$

16. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1+3x)^3}}$

17. $\int_{3}^{8} \sqrt{1+x}\,dx$

18. $\int_{0}^{4} \left(e^{-\frac{x}{4}} - 2e^{2x} \right) dx$

19. $\int_{0}^{\pi/2} \cos 5x \cos x\,dx$

20. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$

21. $\int_{0}^{5} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+3x}}$

22. $\int_{1}^{3} \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$

23. $\int_{27}^{125} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}}$

24. $\int_{15}^{99} \frac{dx}{3-\sqrt{1+x}}$

25. $\int_{4}^{25} \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$

26. $\int_{4}^{9} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

27. $\int_{0}^{3} \frac{dx}{1+2\sqrt{x+1}}$

28. $\int_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{x}+1}$

29. $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 2x}$

30. $\int_0^3 e^{\frac{x}{3}} dx$

2.4. Интегрирование по частям

Теорема. Если функции u(x) и v(x) непрерывны вместе со своими производными на отрезке [a;b], то

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям* для определенного интеграла.

Пример 1. Вычислить $\int_0^1 x\, e^{-x} dx$

Решение:

$$\int_0^1 x\, e^{-x} dx = \begin{Bmatrix} u = x & dv = e^{-x}dx \\ du = dx & v = -e^{-x} \end{Bmatrix} = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx =$$

$$= -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = -e^{-1} - (e^{-1} - e^0) = -2e^{-1} + 1$$

Пример 2. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1) sin 4x\, dx$

Решение:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x+5)sin4x\,dx = \left\{\begin{matrix} u=2x+5 & dv=sin4xdx \\ du=2dx & v=-\dfrac{cos4x}{4} \end{matrix}\right\} =$$

$$-(2x+5)\frac{cos4x}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}cos4x\,dx = -(2x+5)\frac{cos4x}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{sin4x}{8}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$-\frac{1}{4}\left(2\cdot\frac{\pi}{4}+5\right)cos\pi+\frac{5}{4}cos0+\frac{1}{8}sin\pi-\frac{1}{8}sin0=\frac{\pi}{8}+\frac{5}{2}$$

Пример 3.

$$\int_1^5 lnx\,dx = \left\{\begin{matrix} u=lnx & dv=dx \\ du=\dfrac{dx}{x} & v=x \end{matrix}\right\} =$$

$$xlnx\Big|_1^5-\int_1^5 dx = xlnx\Big|_1^5 - x\Big|_1^5 = 5ln5-(5-1)=5ln5-4$$

Задачи для самостоятельного решения:

1. $\int\limits_0^{2\pi} x\sin x dx$
2. $\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x dx$
3. $\int\limits_0^{1} xe^{-x}dx$
4. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} arctgxdx$

5. $\int_{1}^{e} \ln x dx$

6. $\int_{0}^{2\pi} (2x-6)\sin 3x dx$

7. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\sin^2 x}$

8. $\int_{0}^{1} (6x+7)e^{-3x} dx$

9. $\int_{0}^{e-1} \ln(x+1) dx$

10. $\int_{0}^{\pi/2} (9x+5)\cos 2x dx$

11. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\cos^2 x}$

12. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{6x dx}{\cos^2 7x}$

13. $\int_{0}^{e-3} \ln(x+3) dx$

14. $\int_{1}^{e} x \ln x dx$

15. $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{x\,dx}{\sin^2 2x}$

16. $\int_0^{\pi} (x^2+1)\sin 7x\,dx$

17. $\int_0^{2} x e^{\frac{x}{2}}\,dx$

18. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(3x-7)dx}{\sin^2 8x}$

19. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(9x+11)dx}{\cos^2 5x}$

20. $\int_0^{\pi} x^2 \sin x\,dx$

21. $\int_2^{4} x^2 e^{-2x}\,dx$

22. $\int_{2\pi}^{4\pi} (x+1)\cos\frac{x}{4}\,dx$

23. $\int_1^{e^4} \sqrt{x}\ln x\,dx$

24. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1)\cos x\,dx$

25. $\int\limits_{-1}^{0} \arccos x\,dx$

26. $\int\limits_{0}^{\pi} (\pi - x)\sin x\,dx$

27. $\int\limits_{-1}^{0} (2x+3)e^{-x}\,dx$

28. $\int\limits_{1}^{\sqrt[3]{e}} x^2 \ln x\,dx$

29. $\int\limits_{1}^{e} x \cdot \ln^2 x\,dx$

30. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\sin x\,dx$

3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Ранее были рассмотрены определенные интегралы, геометрическая интерпретация которых, площадь замкнутой ограниченной области (криволинейной трапеции). В данном параграфе расширим понятие неопределенного интеграла на случай неограниченной области. Такую область можно получить, либо приняв какой-либо из пределов интегрирования равным бесконечности, либо рассматривая график функции с бесконечными разрывами. Рассмотрим подробнее оба случая.

3.1 Несобственные интегралы 1-го рода (по неограниченному промежутку)

3.1.1 Определение несобственного интеграла по неограниченному промежутку

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при $x \geq a$. Тогда интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ имеет смысл при любом $b > a$ и является непрерывной функцией аргумента b.

Определение. Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$,то его называют несобственным интегралом 1-го рода от функции $f(x)$ на интервале $[a,+\infty)$ и обозначают $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Таким образом $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$.

При этом говорят, что несобственный интеграл существует или сходится. Если же не существует конечного предела, то несобственный интеграл не существует или расходится.

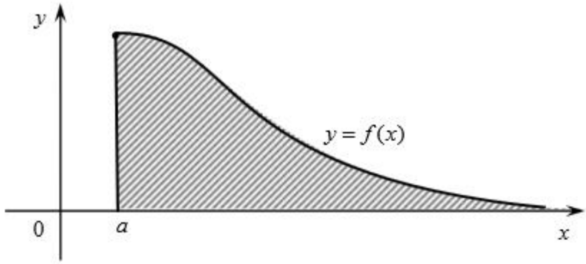
Аналогичным образом определяются несобственные интегралы 1-го рода для других бесконечных интервалов:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

Последний интеграл существует только в том случае, если сходятся оба интеграла, стоящие в правой части равенства.

Если $f(x)>0$, то очевидно, что $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ дает нам площадь бесконечной криволинейной трапеции.



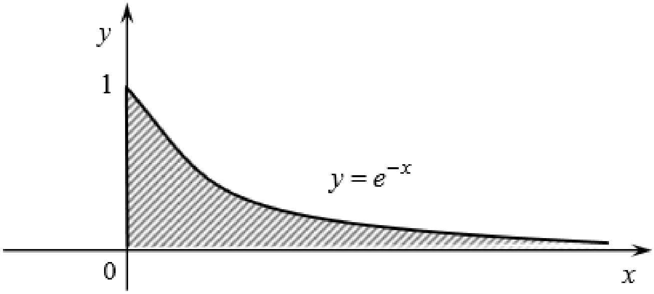
С геометрической точки зрения, сходящийся несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ означает, что фигура, ограниченная кривой $y=f(x)\geq 0$, прямыми $x=a$, $y=0$ и бесконечно вытянутая в направлении оси , имеет конечную площадь S.

Пример 1. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}dx$

Решение:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_{0}^{b} = \lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-b}+1\right)=1$$

Данный интеграл сходится и определяет площадь бесконечной криволинейной трапеции, изображенной на рисунке ниже.



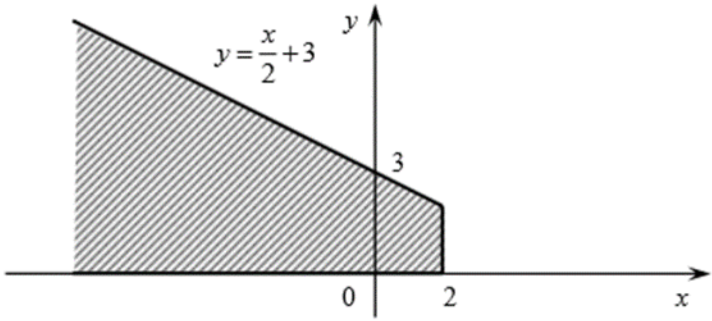
Пример 2. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{-\infty}^{2}\left(\frac{x}{2}+3\right)dx$

Решение:

$$\int\limits_{-\infty}^{2}\left(\frac{x}{2}+3\right)dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{2}\left(\frac{x}{2}+3\right)dx=\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{x^2}{4}+3x\right)\Bigg|_a^2=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{2^2}{4}+6-\frac{a^2}{4}-6a\right)\Bigg|=-\infty.$$

Данный интеграл расходится, а площадь криволинейной трапеции, изображенной на рисунке не ограничена.



Пример 3. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$, $\alpha\in R$

Решение:

Рассмотрим два случая:

1) При $\alpha\neq 1$

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx=\lim_{b\to\infty}\int\limits_{1}^{b}x^{-\alpha}dx=\lim_{b\to\infty}\left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{1}^{b}=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}\right)=\begin{cases}+\infty(\alpha<1)\\ \frac{1}{\alpha-1}(\alpha>1).\end{cases}$$

2) При $\alpha=1$

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\ln|x|\Big|_{1}^{b}=\lim_{b\to\infty}(\ln b-\ln 1)=\infty$$

Таким образом, данный интеграл сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\leq 1$.

Пример 4. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1+x^2}{x^3}\,dx$

Решение:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1+x^2}{x^3}dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} + \frac{1}{3}\int\limits_1^{+\infty} \frac{d\left(x^3\right)}{x^3} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b} x^{-3}dx + \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{3}\int\limits_1^{b} \frac{d\left(x^3\right)}{x^3} = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2x^2}\Big|_1^b\right) + \frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(\ln\left|x^3\right|\Big|_1^b\right) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2b^2}\right) + \frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(\ln b^3 - \ln 1\right) = \frac{1}{2} + \infty$$

Исходный интеграл расходится, так как расходится один из интегралов в правой части последнего равенства.

Пример 5. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{\infty} \cos x dx$.

Решение:

$$\int\limits_0^{\infty} \cos x dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_0^{b} \cos x dx = \lim_{b\to\infty} \sin x\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}(\sin b - \sin 0) = \lim_{b\to\infty} \sin b$$

не существует.

Несобственный интеграл расходится.

Пример 6. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{arctg3x}{1+9x^2}dx.$

Решение:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{arctg3x}{1+9x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{3} arctg3xd\left(arctg3x\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{arctg^2 3x}{6}\Big|_1^b\right) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{6}\left(arctg^2 3b - arctg^2 3\right) = \frac{1}{6}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - arctg^2 3\right) \approx 0{,}15$$

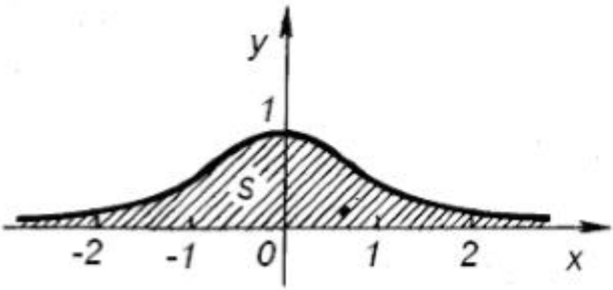
Данный интеграл сходится и приближенно равен 0,15.

Пример 7. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Решение:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}arctgx\Big|_a^0+\lim_{b\to+\infty}arctgx\Big|_0^b=$$
$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

Данный интеграл сходится и определяет площадь бесконечной криволинейной трапеции, изображенной на рисунке.



В случае сходящегося интеграла, принимая во внимание формулу Ньютона-Лейбница и определение несобственного интеграла 1-го рода, вычислим:

$$\int\limits_{a}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{x\to+\infty}F(x)-F(a)=F(+\infty)-F(a),$$

где - первообразная функции на любом промежутке при $x\geq a$.

Пример 8. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin x dx$.

Решение:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin xdx=\int\limits_{-\infty}^{0}\sin xdx+\int\limits_{0}^{+\infty}\sin xdx.$$

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\sin xdx=-\cos x\Big|_{0}^{+\infty}=-\lim_{x\to+\infty}\cos x+\cos 0$$

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ не существует, то интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty}\sin xdx$ расходится. Аналогично расходится интеграл $\int\limits_{-\infty}^{0}\sin xdx$. Значит исходный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin xdx$ расходится.

Пример 9. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

Решение:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{1}{3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}-\frac{1}{3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4}=\frac{1}{3}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+1}+\frac{1}{3}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}-\frac{1}{3}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+4}-\frac{1}{3}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}\frac{dx}{x^2+1}+\frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{dx}{x^2+1}-\frac{1}{3}\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}\frac{dx}{x^2+4}-\frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{dx}{x^2+4}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{a\to-\infty}\left(arctgx\Big|_{a}^{0}\right)+\frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(arctgx\Big|_{0}^{b}\right)-\frac{1}{3}\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}\Big|_{a}^{0}\right)-\frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}\Big|_{0}^{b}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-\frac{1}{6}\left(0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi}{6}$$

3.1.2 Достаточные признаки сходимости несобственных интегралов 1-го рода.

Рассмотрим случай несобственных интегралов от знакопостоянных функций. Случай несобственных интегралов от знакопеременных функций будет рассмотрен в следующем пункте **3.1.3.**

В некоторых задачах нет необходимости вычислять несобственный интеграл, а достаточно установить его сходимость или расходимость и оценить значение.

Признак сравнения. Если на промежутке $[a,+\infty)$ определены две неотрицательные функции $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемые на любом конечном отрезке $[a,b]$, причем $0 \le f(x) \le g(x)$ $\forall x \ge a$, то из сходимости интеграла $\int_a^{\infty} g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$.

Признак сравнения в предельной форме. Если на промежутке $[a,+\infty)$ определены две положительные функции $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемые на любом конечном отрезке $[a,b]$, и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = A \ (0 < A < \infty)$, то несобственные интегралы $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ **и** $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$ **сходятся или расходятся одновременно.**

Признак сравнения в предельной форме является следствием первого признака.

Замечание. При применении признака сравнения удобно сравнивать подынтегральную функцию с функцией , для которой сходимость или расходимость соответствующего несобственного интеграла установлена выше в примере 3(3.1.1)

Пример 1. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x^8}$.

Решение:

Подынтегральная функция $\frac{1}{1+x^8}$ в промежутке интегрирования меньше, чем $\frac{1}{x^8}$.

Исследуем на сходимость $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^8}$:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^8}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b x^{-8}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{7x^7}\bigg|_1^b\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{7b^7}\right)=\frac{1}{7},$$ то

есть интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^8}$ сходится, а значит, и $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^8}$ так же сходится на основании признака сравнения.

Пример 2. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

Решение:

Воспользуемся признаком сравнения.

Так как $\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}<\frac{1}{\sqrt{x^3}}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\quad\forall x\in[1;+\infty)$.

Исследуем на сходимость $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b x^{-\frac{3}{2}}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\bigg|_1^b\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{b}}+2\right)=2,$$ то есть

интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ сходится.

Данный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ сходится, так как сходится интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$.

Пример 3. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{\infty}\ln\frac{x^2+2}{x^2+1}dx.$

Решение:

Исследуем на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-2}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\bigg|_1^b\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right)=1,$$ данный ряд сходится.

Воспользуемся предельным признаком сравнения.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{x^2+2}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}}=1.$$

Данный интеграл $\int_1^{\infty}\ln\frac{x^2+2}{x^2+1}dx$ сходится, так как сходится интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$.

Пример 4. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{\infty}\frac{2x-7}{x^3+x^2+5x+12}dx.$

Решение:

Исследуем на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{2dx}{x^2}$:

$$\int_1^{+\infty}\frac{2dx}{x^2}=2\lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-2}dx=2\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\bigg|_1^b\right)=2\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right)=2,$$ значит интеграл сходится.

Воспользуемся предельным признаком сравнения.

Таким образом, $$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x-7}{x^3+x^2+5x+12}}{\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-7x^2}{2x^3+2x^2+10x+24}=1.$$

Данный интеграл $\int_1^{\infty}\frac{2x-7}{x^3+x^2+5x+12}dx$ сходится, так как сходится интеграл $\int_1^{\infty}\frac{2dx}{x^2}$.

3.1.3. Абсолютная сходимость несобственных интегралов 1-го рода.

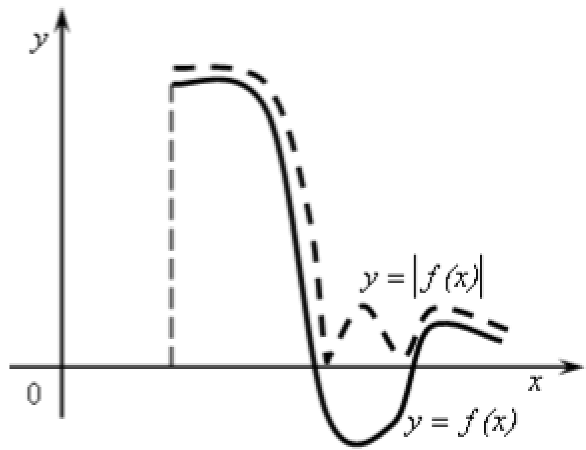
В случае если подынтегральная функция меняет знак на бесконечном интервале, вводят новое определение.

Определение. Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$.

Функция $f(x)$ называется при этом абсолютно интегрируемой на $[a,+\infty)$.

Теорема. Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Заметим, что в первом интеграле суммируются площади, лежание над и под осью абсцисс, а во втором интеграле площади под осью абсцисс учитываются со знаком минус.



Поэтому первый интеграл сходится "труднее": он может расходиться в тех случаях, когда второй интеграл сходится.

Если интеграл $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ сходится, то интеграл $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся.

Определение. Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ называется условно сходящимся, если сходится интеграл $\int_a^{+\infty}f(x)dx$, а интеграл $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ расходится на $[a,+\infty)$.

Пример 1. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx.$

Решение:

Подынтегральная функция - знакопеременная, при этом $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right|\le\left|\frac{1}{x^2}\right|$, но $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty}=1$.

Следовательно, интеграл $\int_1^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x^2}\right|dx$ сходится, а интеграл $\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$ сходится абсолютно.

Пример 2. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^{\infty}arctgx\cdot e^{-x}dx.$

Решение:

$$\int_0^{\infty}\left|arctgx\cdot e^{-x}\right|dx\le\frac{\pi}{2}\int_0^{\infty}\left|e^{-x}\right|dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\infty}\left|e^{-x}\right|dx=\frac{\pi}{2}\lim_{A\to\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^A=\frac{\pi}{2}\lim_{A\to\infty}\left(-e^{-A}+1\right)=\frac{\pi}{2}$$

так что данный интеграл сходится абсолютно.

Пример 3. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^3}dx.$

Так как $\frac{\cos x}{x^3}\le\frac{|\cos x|}{x^3}\le\frac{1}{x^3}$, и

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}x^{-3}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2x^2}\Big|_1^b\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

- интеграл сходится.

И тогда согласно, признаку сравнения и интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{|\cos x|}{x^3}dx$ сходится. Следовательно интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^3}dx$ сходится абсолютно.

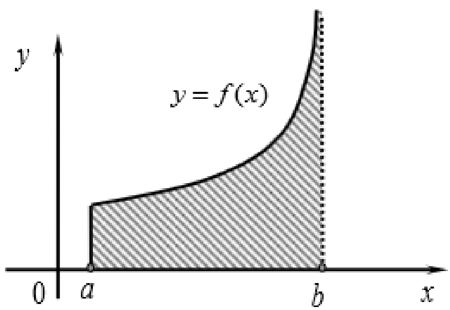
3.2. Несобственные интегралы 2-го рода (от неограниченных функций)

3.2.1. Определение несобственного интеграла от неограниченных функций

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при $x\in[a;b)$ и имеет бесконечный разрыв при $x=b$. Тогда $\int\limits_{a}^{b}f(x)dx$ определяется следующим образом:

$$\int\limits_{a}^{b}f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon}f(x)dx,$$

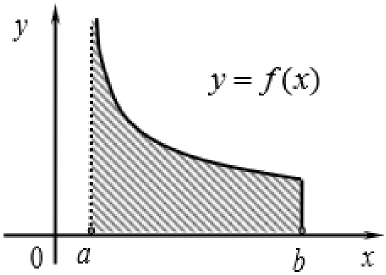
и называется **несобственным интегралом 2-го рода.** Его предел, стоящий справа, существует и конечен, интеграл называется **сходящимся**, в противном случае - **расходящимся.**



Если $f(x)>0$, то очевидно, что $\int\limits_{a}^{b}f(x)dx$ дает нам площадь криволинейной трапеции.

Аналогичным образом определяются другие несобственные интегралы 2-го рода**:**

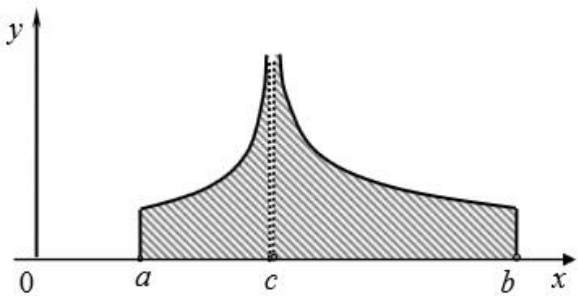
1) от функции, имеющей разрыв при $x = a: \int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$;



2) от функции, разрывной во внутренней точке $c \in [a;b]: (a < c < b)$:

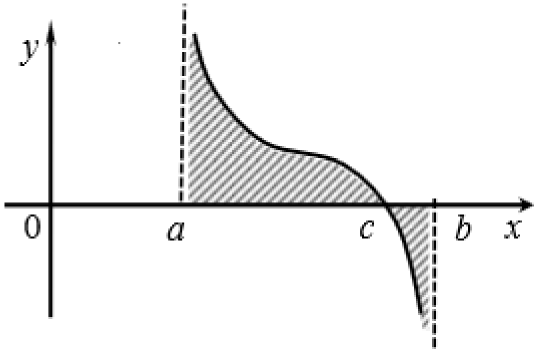
$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx,$$

если существуют оба интеграла, стоящие в правой части равенства;



3) от функции, обращающейся в бесконечность на концах промежутка интегрирования $[a;b]: (a < c < b)$:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$



При этом в последних двух пунктах интеграл $\int_a^b f(x)dx$ считается сходящимся, если сходятся оба интеграла, стоящие справа, и расходящимся, если расходится хотя бы один из этих интегралов.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ или установить его расходимость.

Решение:

При $x=0$ подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв.

Имеем $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to0\\ \varepsilon_2\to0}}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon_1}\frac{dx}{x^2}+\int_{\varepsilon_2}^{1}\frac{dx}{x^2}\right)=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to0\\ \varepsilon_2\to0}}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}-1-1+\frac{1}{\varepsilon_2}\right)=+\infty$, то есть интеграл расходится.

Замечание. Если бы мы вычисляли данный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница, не обращая внимания на точку разрыва, то получили бы сходящийся интеграл: $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=-1-1=-2$. Этот результат неверен.

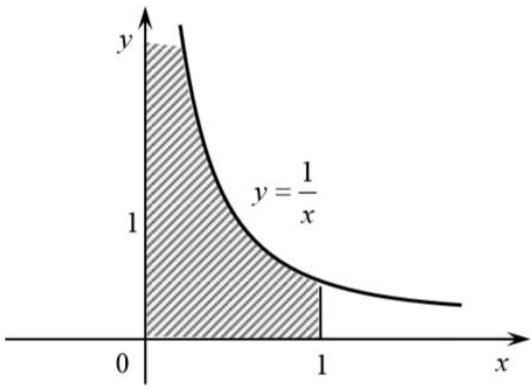
Пример 2. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$.

Решение:

При $x=0$ подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв, и тогда

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\ln|x|\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0+}(\ln 1 - \ln\varepsilon) = \infty \cdot$$

Это означает, что несобственный интеграл расходится. Геометрически это означает, что площадь криволинейной трапеции, изображенной на рисунке, не ограничена.



Пример 3. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

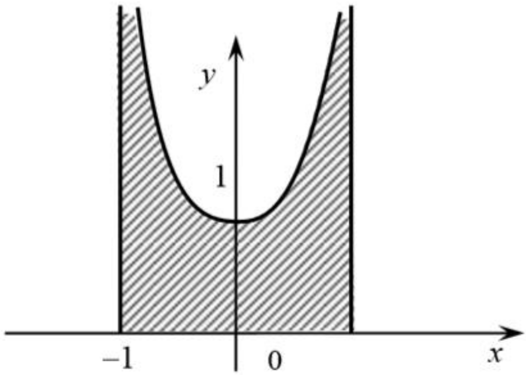
Решение:

При $x=-1$ и при $x=1$ подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв, следовательно,

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_{-1+\varepsilon_1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{0}^{1-\varepsilon_2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\arcsin x\Big|_{-1+\varepsilon_1}^{0}+$$

$$=\lim_{\varepsilon_2\to 0}\arcsin x\Big|_{0}^{1-\varepsilon_2}=\lim_{\varepsilon_1\to 0}(\arcsin 0-\arcsin(-1+\varepsilon_1))+\lim_{\varepsilon_2\to 0}(\arcsin(1-\varepsilon_2)-\arcsin 0)=$$

$$=0+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{2}$$



Несобственный интеграл сходится и определяет площадь S бесконечной криволинейной трапеции, изображенной на рисунке.

Пример 4. Исследовать на сходимость интеграл $\int_{a}^{b}\frac{dx}{(b-x)^{\alpha}}$ $\alpha\in R.$

Решение:

Рассмотри три случая:

1.Пусть $\alpha=1$, тогда

$\int_{a}^{b}\frac{dx}{b-x}=-\ln|b-x|\Big|_{a}^{b}=-\lim_{\varepsilon\to 0}(\ln|\varepsilon|-\ln|b-a|)=\infty$, т.е. интеграл расходится.

2. Пусть $\alpha>1$. Обозначим $\alpha=1+s$, где $s>0$, тогда

$\int_{a}^{b}\frac{dx}{(b-x)^{\alpha}}=-\int_{a}^{b}(b-x)^{-1-s}\,d(b-x)=\frac{1}{s(b-x)^{s}}\Bigg|_{a}^{b}=\infty$, т.е. интеграл расходится.

3. Пусть $\alpha<1$. Обозначим $s=1-\alpha>0$. Имеем

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}=-\int_a^b (b-x)^{-\alpha}d(b-x)=\frac{(b-x)^s}{s}\Bigg|_a^b=\frac{(b-a)^s}{s},$$ т.е. интеграл расходится.

Таким образом, $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ сходится при $\alpha<1$ и расходится при $\alpha\ge 1$.

Пример 5. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx$**.**

Решение:

Подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв при $x=\frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx=$$

$$=\left[\frac{\sin^2 x}{\cos x}=\frac{\sin^2 x\cos x}{\cos^2 x}=\frac{(\sin^2 x-1)+1}{1-\sin^2 x}\cos x=-\cos x+\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\right]=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}(-\cos x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx\right)=-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}d(\sin x)-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\frac{d(\sin x)}{\sin^2 x-1}=$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to 0}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}-\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}=-\lim_{\varepsilon\to 0}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)-\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left|\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)-1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)+1}\right|=$$

$$=-1-\frac{1}{2}\cdot\infty=\infty$$

Данный интеграл расходится.

3.2.2. Достаточные признаки сходимости несобственных интегралов 2-го рода.

Для несобственных интегралов 2-го рода справедливы те же утверждения, что и для несобственных интегралов 1-го рода.

Так, для знакопостоянных подынтегральных функций справедливы следующие достаточные признаки.

Признак сравнения. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны при $a \le x < b$ и имеют разрыв при $x = b$. Пусть, кроме того, $a \le \varphi(x) \le f(x)$ при $x \in [a,b)$. Тогда если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^b \varphi(x)dx$; если интеграл $\int_a^b \varphi(x)dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Предельный признак сравнения. Пусть $f(x) \ge 0,\ \varphi(x) \ge 0$ **на** $[a,\infty)$**,** $\varphi(x) \ne 0\ \forall x \in [a,b)$ **и имеют разрыв при** $x = b$**.** Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = k$, то несобственные интегралы $\int_a^b f(x)dx$ **и** $\int_a^b \varphi(x)dx$ **сходятся или расходятся одновременно.**

Замечание. При применении признака сравнения удобно сравнивать подынтегральную функцию с функцией $\dfrac{1}{(b-x)^\alpha}$, $\alpha > 0$, для которой сходимость или расходимость соответствующего несобственного интеграла установлена выше в примере 4 пп. 3.2.2.

Пример 1. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x + x^3}}$.

Решение:

При $x = 0$ подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв. Сравним подынтегральную функцию с $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Очевидно, что $\frac{1}{\sqrt{x+x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \forall x \in (0;1)$.

При этом $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = 2$. Поэтому несобственный интеграл от "большей" функции сходится, значит, сходится и исследуемый интеграл.

Пример 2. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Решение:

При $x=1$ подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв. Имеем

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}\sqrt{1+x^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-x}},$$

но $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$ сходится, следовательно, исходный интеграл также сходится.

Для знакопеременных подынтегральных функций справедлива следующая теорема.

Теорема. Если $f(x)$ - знакопеременная функция, непрерывная на $[a,b)$ и имеющая разрыв при $x=b$, и если $\int_a^b |f(x)|dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Исследовать сходимость несобственных интегралов 1-го рода:

1.1. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$

1.2. $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{4+x^2}$

1.3. $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

1.4. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{arctgx}{1+x^2}dx$

1.5. $\int\limits_{0}^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$

1.6. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3}dx$

1.7. $\int\limits_{0}^{+\infty} x2^{-x} dx$

1.8. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$

1.9. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x+5)^5}$

1.10. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1+2x}{x^2(1+x)} dx$

1.11. $\int\limits_{1}^{+\infty} e^{-3x} dx$

1.12. $\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{2x+5}{x^2+3x-10} dx$

1.13. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

1.14. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{1+x^{10}}$

1.15. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2\left(1+e^x\right)}$

1.16. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$

1.17. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{xdx}{x^2+\sin x}$

1.18. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx$

1.19. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos 2x}{1+x^2}dx$

1.20. $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin\left(x^2\right)dx$

1.21. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(2x+1)^2+1}$

1.22. $\int\limits_{1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{2}{x}\right)dx$

1.23. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$

1.24. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$

1.25. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{x^2+1}dx$

1.26. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$

1.27. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{xarctgx}{\sqrt{1+x^3}}dx$

1.28. $\int_{2}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx$

1.29. $\int_{1}^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$

1.30. $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$

2. Исследовать сходимость несобственных интегралов 2-го рода:

2.1. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

2.2. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

2.3. $\int_{0}^{1} x \cdot \ln x dx$

2.4. $\int_{0}^{2} \frac{dx}{x^2-6x+8}$

2.5. $\int_{0}^{1/e} \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}$

2.6. $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x \cdot \ln x}$

2.7. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{3x^2+\sqrt[3]{x}}$

2.8. $\int_{0}^{\infty} \frac{2+\sin x}{\sqrt{x}} dx$

2.9. $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}}-1}$

2.10. $\int_0^1 \frac{dx}{tgx-x}$

2.11. $\int_0^2 \frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}}dx$

2.12. $\int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}dx$

2.13. $\int_2^{e+1} \frac{dx}{(x-1)\sqrt[3]{\ln(x-1)}}$

2.14. $\int_0^1 x^2 \ln x dx$

2.15. $\int_{-1}^0 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

2.16. $\int_0^1 x \ln^2 x dx$

2.17. $\int_{-2}^0 \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x+1}}$

2.18. $\int_0^e \frac{dx}{e^x-1}$

2.19. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$

2.20. $\int_0^1 \sin(\ln x)dx$

2.21. $\int_0^5 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$

2.22. $\int_0^1 \cos(\ln x)dx$

2.23. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

2.24. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$

2.25. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

2.26. $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$

2.27. $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$

2.28. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$

2.29. $\int_0^2 \frac{x}{(x^2-1)^{\frac{4}{5}}}dx$

2.30. $\int_0^3 \sqrt{\frac{3+x}{3-x}}dx$

4. ПРИЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Приложение определенного интеграла к геометрическим и физическим задачам основано на свойстве аддитивности интеграла. Поэтому с помощью интеграла могут вычисляться такие величины, которые сами аддитивны. Например, площадь фигуры равна сумме площадей ее частей. Длина дуги, площадь поверхности, объем тела, масса тела обладают тем же свойством. Поэтому все эти величины можно вычислять с помощью определенного интеграла.

Можно использовать два метода решения задач: *метод интегральных сумм и метод дифференциалов.*

Метод интегральных сумм повторяет конструкцию определенного интеграла: строится разбиение, отмечаются точки, в них вычисляется функция, вычисляется интегральная сумма, производится предельный переход. В этом методе основная трудность - доказать, что в пределе получится именно то, что нужно в задаче.

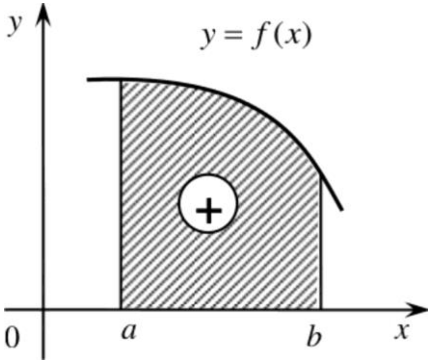
Метод дифференциалов использует неопределенный интеграл и формулу Ньютона – Лейбница. Вычисляют дифференциал величины, которую надо определить (при расчете работы силы, например), а затем, интегрируя этот дифференциал, по формуле Ньютона - Лейбница получают требуемую величину. В этом методе основная трудность - доказать, что вычислен именно дифференциал нужной величины, а не что-либо иное.

4.1 Вычисление площадей плоских фигур

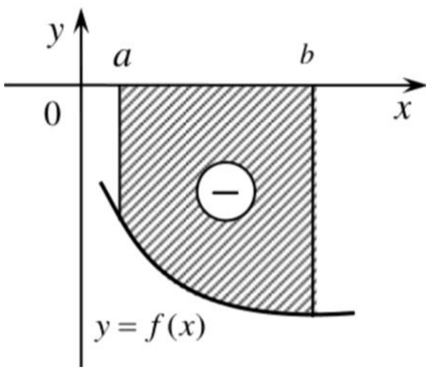
4.1.1 Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольной системе координат

Рассмотрим ряд возможностей:

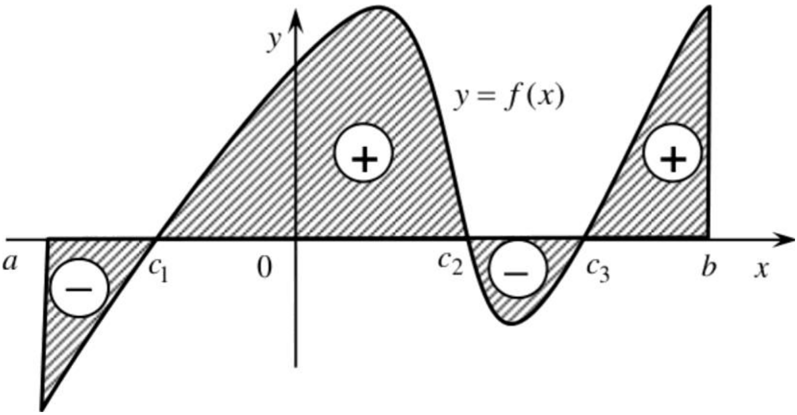
1. Из геометрического смысла определенного интеграла следует, что если $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью OX и прямыми $x=a;\ x=b$ вычисляется по формуле $S = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx$.



2. Аналогично, если $f(x) \leq 0 \ \forall x \in [a;b]$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью OX и прямыми $x=a;$ $x=b$ вычисляется по формуле $S = -\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b ydx$.



3. Если функция $f(x)$ меняет на отрезке $[a,b]$ свой знак конечное число раз, то площадь криволинейной трапеции равна



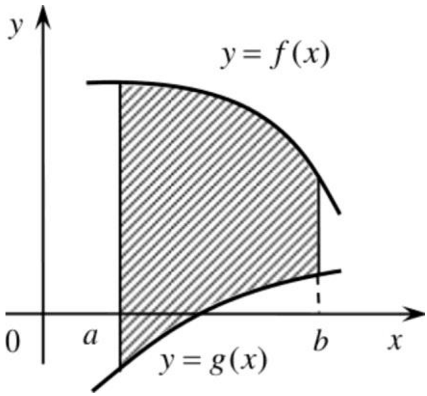
алгебраической сумме площадей криволинейных трапеций, взятых с соответствующим знаком:

$$S = -\int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx - \int_{c_2}^{c_3} f(x)dx + \int_{c_3}^{b} ydx.$$

Или

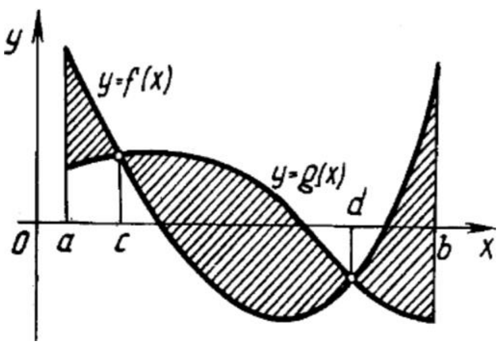
$$S = \left|\int_a^{c_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right| + \left|\int_{c_2}^{c_3} f(x)dx\right| + \left|\int_{c_3}^{b} f(x)dx\right|.$$

4. Если требуется найти площадь фигуры, ограниченной графиками двух функций: $f(x)$ и $g(x)$, то ее можно рассматривать как разность площадей двух криволинейных трапеций: верхней границей первой из них служит график функции $f(x)$, а второй – $g(x)$, если $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a; b]$.



Таким образом, $S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$.

5. В случае если разность *f(x) — g(x)* не сохраняет знак на отрезке *[a;b]*, этот отрезок разбивают на частичные отрезки, на которых функция *f(x) — g(x)* сохраняет свой знак.

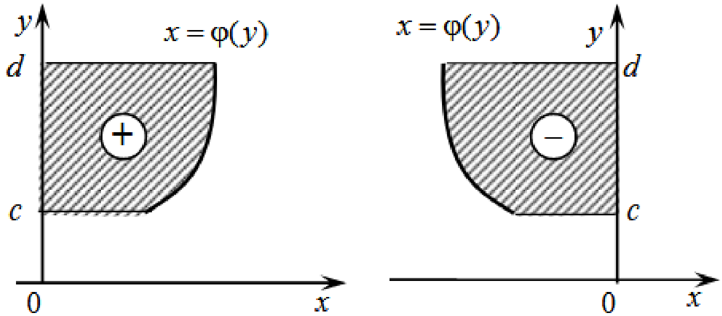


$$S = \int_a^c [f(x) - g(x)]dx + \int_c^d [g(x) - f(x)]dx + \int_d^b [f(x) - g(x)]dx$$

6. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кри-

вой $x = \varphi(y)$, осью OY и прямыми $y = c$; $y = d$ вычисляется по формуле

$$S = \pm \int_c^d \varphi(y)dy = \pm \int_c^d xdy.$$



7. Если криволинейная трапеция ограничена линией, заданной уравнениями в параметрическом виде $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$

$t_1 \le t \le t_2$, осью OX

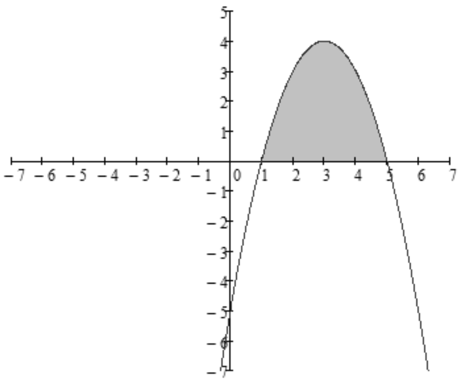
$x=a$; $x=b$, причем $x(t_1)=a$; $x(t_2)=b$, то ее площадь S вычисляется по формуле $S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t)dt.$

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью OX и графиком функции $y = 6x - x^2 - 5$.

Решение:

Преобразуем функцию $y = 6x - x^2 - 5$:

$y=-x^2+6x-5$ - это парабола, ветви направлены вниз. Найдем координаты вершины: $x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{-6}{-2}=3$, $y_0=-9+18-5=4$



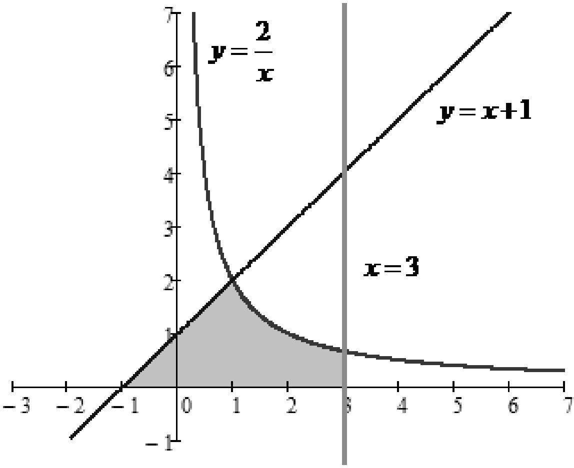
Пример соответствует рассмотренному выше п. 1:

$$S=\int_1^5\left(6x-x^2-5\right)dx=\left(3x^2-\frac{x^3}{3}-5x\right)\Bigg|_1^5=75-\frac{125}{3}-25-\left(3-\frac{1}{3}-5\right)=$$
$$50-\frac{125}{3}+2+\frac{1}{3}==\frac{156-124}{3}=\frac{32}{3}ed^2$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью *OX* и графиками функций $y=\frac{2}{x}$, $y=x+1, x=3$.

Решение:

Построим кривые:



Пример соответствует рассмотренному выше п. 1:

1) На отрезке $[-1;1]$ над осью OX расположен график прямой $y=x+1$;

2) На отрезке $[1;3]$ над осью OX расположен график гиперболы $y=\frac{2}{x}$.

Чтобы найти итоговую площадь, необходимо произвести сложение:

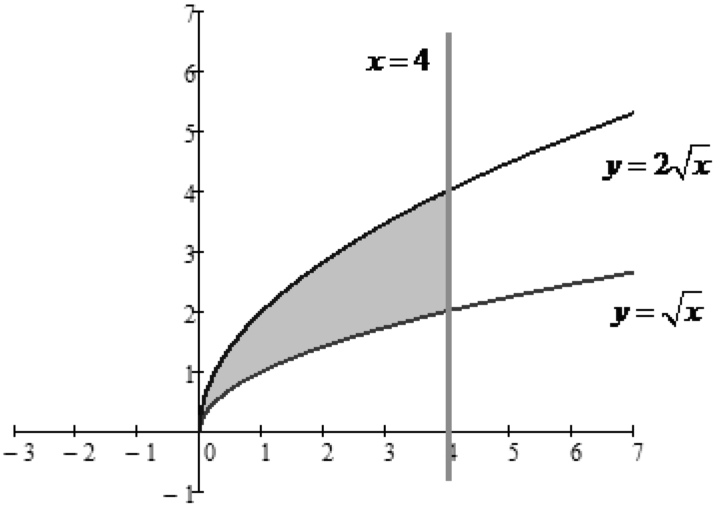
$$S=\int_{-1}^{1}(x+1)\,dx+\int_{1}^{3}\frac{2}{x}\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-1}^{1}+2(\ln x)\big|_1^3=$$

$$\frac{1}{2}+1-\left(\frac{1}{2}-1\right)+2(\ln 3-\ln 1)=2+2\ln 3==2(1+\ln 3)\approx 4.2ед^2$$

П р и м е р 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $x=4$.

Решение:

Построим кривые:

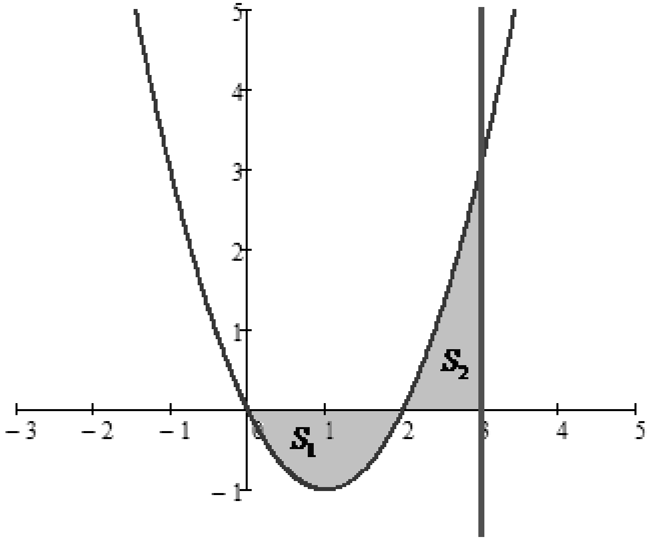


Пример соответствует рассмотренному выше п. 4:

$$S=\int_0^4\left(2\sqrt{x}-\sqrt{x}\right)dx=\int_0^4\sqrt{x}dx=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^4=\frac{2}{3}\left(\sqrt{4^3}-0\right)=\frac{2}{3}\sqrt{64}=\frac{16}{3}ed^2$$

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью OX и графиком функции $y = x^2 - 2x$, $x = 3$.

Решение:



Пример соответствует рассмотренному выше п. 3:

$$S = S_1 + S_2 = \left|\int_0^2 (x^2 - 2x)dx\right| + \left|\int_2^3 (x^2 - 2x)dx\right| = \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_0^2 +$$

$$+\left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_2^3 = \left|\left(\frac{8}{3} - 4\right)\right| + \left|\left(\frac{27}{3} - 4\right)\right| = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}\text{ед}^2$$

Пример 5. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\cos x$, осью OX и прямыми $x=0$, $x=3\pi/2$.

Решение:

На этом примере удобно показать характерные ошибки, возникающие при решении подобных задач. Приведем вначале

Неверное решение:

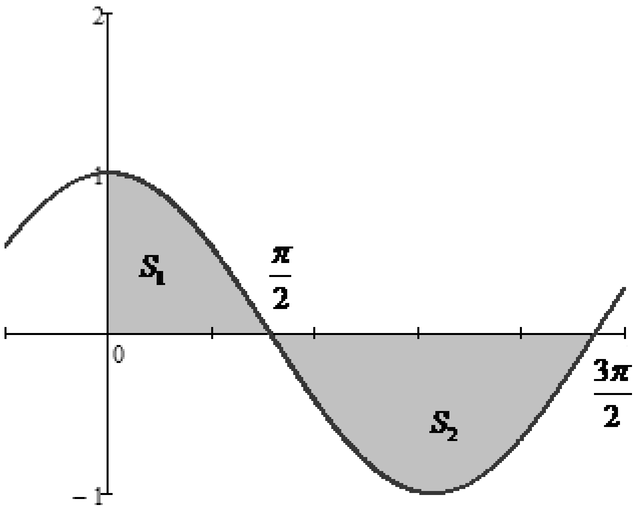
Воспользуемся формулой из п. 1 для площади фигуры:

$$S = \int_0^{3\pi/2} cosxdx = sinx|_0^{3\pi/2} = sin\frac{3\pi}{2} - sin0 = -1.$$

Часто после этого, спохватившись, что площадь фигуры не может быть отрицательной, результат «слегка» подправляют, и пишут: S = 1 . Здесь ошибка возникла из-за того, что не было проверено условие *f(x)>*0, при котором справедлива формула п. 1. На самом же деле, это условие не выполнено!

Правильное решение:

Изобразим график функции y = cosx.



Очевидно, что на отрезке $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ имеется область, где этот график выше оси *OX* (а именно, на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$). В то же время, на интервале $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ график функции y=cosx расположен ниже оси *OX*. Поэтому для вычисления площади искомую фигуру следует разбить на две части:

$$S = S_1 + S_2.$$

При $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ функция $f(x)$ положительна, и справедлива формула п. 1:

$$S_1 = \int_0^{\pi/2} cosxdx = sinx|_0^{\pi/2} = sin\frac{\pi}{2} - sin0 = 1.$$

При $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ функция $f(x)$ отрицательна, и справедлива формула п. 2:

$$S_2 = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} cosxdx = sinx|_{\pi/2}^{3\pi/2} = -sin\frac{3\pi}{2} + sin\frac{\pi}{2} = 2.$$

Окончательно получаем площадь искомой фигуры: $S = S_1 + S_2 = 3$.

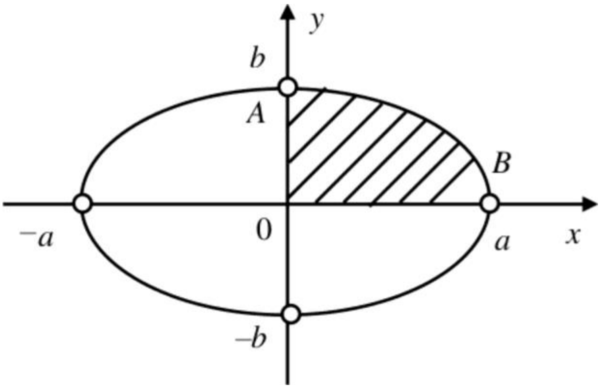
Пример 5 показывает, какую важную роль в геометрических приложениях определенных интегралов играет предварительный анализ задачи и построение необходимых графиков. Иначе, даже вполне правильные (для определенных условий) формулы могут привести к неверным результатам.

Пример 6. Вычислить площадь эллипса с полуосями a и b.

Решение: Пример соответствует рассмотренному выше п. 7.

Запишем параметрические уравнения эллипса:

$$\begin{cases} x = acost, \\ y = bsint, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi,$$



В виду симметричности эллипса вычислим площадь его четверти, которая лежит в первом квадранте $S = 4\int_0^a ydx$.

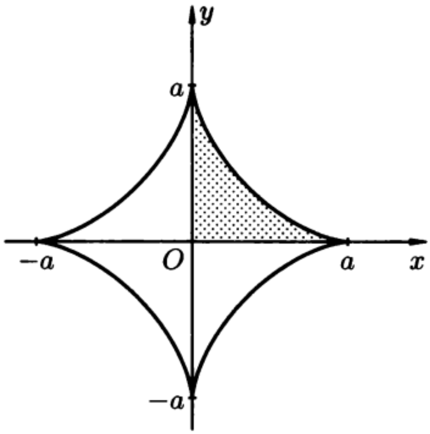
Делаем замену переменных: $\begin{cases} x = acost, \\ y = bsint. \end{cases}$ Тогда dx=-$asintdt$. При этом пределы интегрирования таковы: если x = 0, то $t = \frac{\pi}{2}$; если x=a, то t=0:

$$S = 4\int_0^a ydx = -4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} sin^2tdt = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - cos2t)dt = 2ab\left(t - \frac{sin2t}{2}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab$$

При $a=b=R$ получаем формулу площади круга $S = \pi R^2$.

Пример 7. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$.

Решение: Воспользуемся симметрией фигуры и найдем сначала четвертую часть искомой площади.



$t_1=\dfrac{\pi}{2}$ (из равенства $0=a\cos^3 t$) и $t_2=0$ (из равенства $a=a\cos^3 t$). Имеем:

$$\frac{1}{4}S=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}a\sin^3 t\left(a\cos^3 t\right)'dt=-a^2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^3 t\cdot 3\cos^2 t\sin t dt=3a^2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cdot\cos^2 tdt=$$

$$=3a^2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cdot\cos^2 tdt=3a^2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t\cdot\cos t\right)^2\cdot\sin^2 tdt=3a^2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\sin^2 2t\cdot\sin^2 tdt=$$

$$=\frac{3a^2}{4}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1-\cos 4t)\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 2t)dt=\frac{3a^2}{16}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t-\cos 4t+\cos 4t\cdot\cos 2t)dt=$$

$$=\frac{3a^2}{16}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 2t-\cos 4t+\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{2}\cos 6t\right)dt=\frac{3a^2}{16}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 4t-\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{2}\cos 6t\right)dt=$$

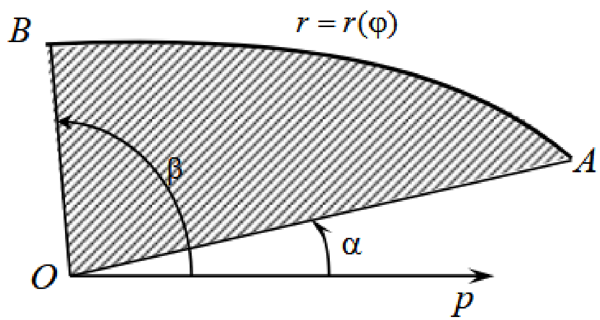
$$=\frac{3a^2}{16}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t-\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{12}\sin 6t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3a^2}{16}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\pi-\frac{1}{4}\sin\pi+\frac{1}{12}\sin 3\pi-0\right)=$$

$$\frac{3}{16}a^2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3a^2\pi}{32}.$$

Значит $S=\dfrac{3a^2\pi}{8}$.

4.1.2 Вычисление площадей плоских фигур в полярной системе координат

Пусть требуется вычислить площадь фигуры, ограниченной линией l, заданной в полярной системе координат {0; r;φ} уравнением r=r(φ), $a \le \varphi \le \beta$. За базовую фигуру в полярной системе координат принимается криволинейный сектор – фигура, ограниченная линией *r=* r(φ) и лучами φ =a, φ= β. При этом криволинейный сектор будем считать правильной фигурой, т. е. такой, что любой луч φ= φ_1 , $a \le \varphi_1 \le \beta$, исходящий из полюса *O*, пересекает линию *r*=r(φ) не более чем в одной точке. Будем также предполагать, что функция *r*=r(φ) непрерывна на отрезке [a; β].



Для вычисления площади криволинейного сектора *OAB* применим алгоритм составления интегральной суммы с последующим предельным переходом к определенному интегралу:

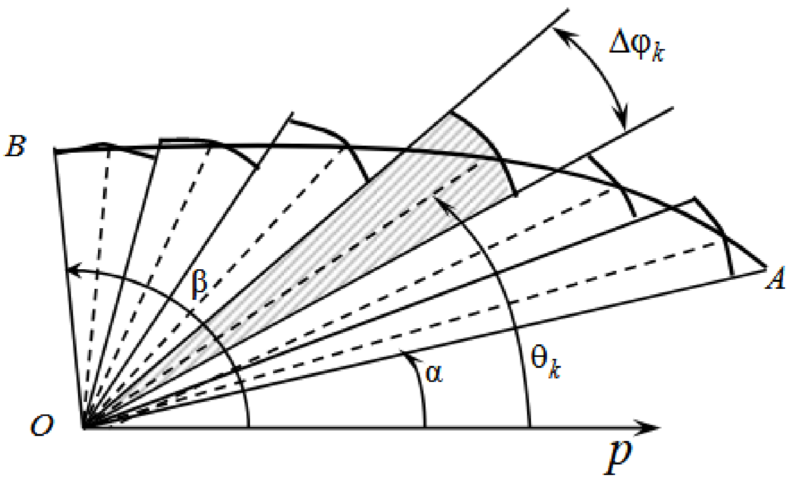
1. Разобьем сектор *OAB* лучами на *n* частичных криволинейных секторов $a = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta$. Обозначим $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$,

$k = \overline{1, n}$. Проведем лучи φ_k, $k = \overline{1, n}$. Диаметром разбиения назовем $\lambda = \sup\{\Delta\varphi_k\}$.

2. В каждом секторе, ограниченном лучами $[\varphi_{k-1}; \varphi_k]$, проведем произвольный луч, выберем произвольным образом точку θ_k и найдем значения функции $r = r(\varphi)$ в этих точках: $r_k = r(\theta_k)$ $k = \overline{1, n}$.

3. Заменим этот сектор круговым с радиусом $r_k = r(\theta_k)$ и вычислим площадь этого кругового сектора $\Delta S_k = \frac{1}{2} r^2(\theta_k)\Delta\varphi_k$.

4. Составим интегральную сумму: $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2} r^2(\theta_k)\Delta\varphi_k$.



5. Устремляя диаметр разбиения к нулю $(\lambda \to 0)$, найдем предел последовательности интегральных сумм $J = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sigma_n$.

В пределе получим площадь криволинейного сектора:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\, d\varphi.$$

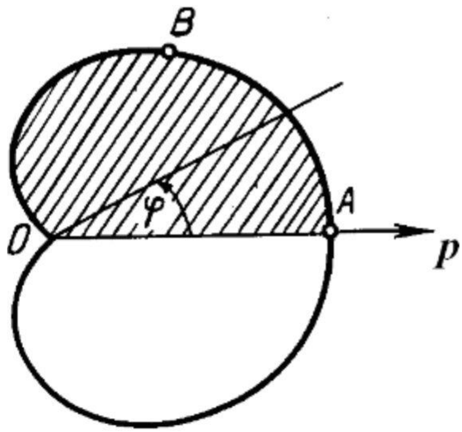
Замечание. Проведенная здесь процедура, имеет чрезвычайно важное значение в различных геометрических и физических приложениях определенного интеграла, и будет дальше применяться в еще более схематичном виде.

Суть процедуры состоит в том, что на первом ее этапе «малый» криволинейный объект заменяется на прямолинейный. Понятие «малости» при этом не носит универсального характера - оно относительно. Так, несмотря на криволинейность поверхности Земли, никому не придет в голову учитывать ее при строительстве дома: его характерный размер много меньше земного радиуса. На втором, заключительном этапе процедуры, сумма большого числа «малых» слагаемых (интегральная сумма) заменяется определенным интегралом.

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1 + cos\varphi)$

Решение:

Кардиоида симметрична относительно полярной оси, следовательно, искомая площадь равна удвоенной площади сектора *ABO.*

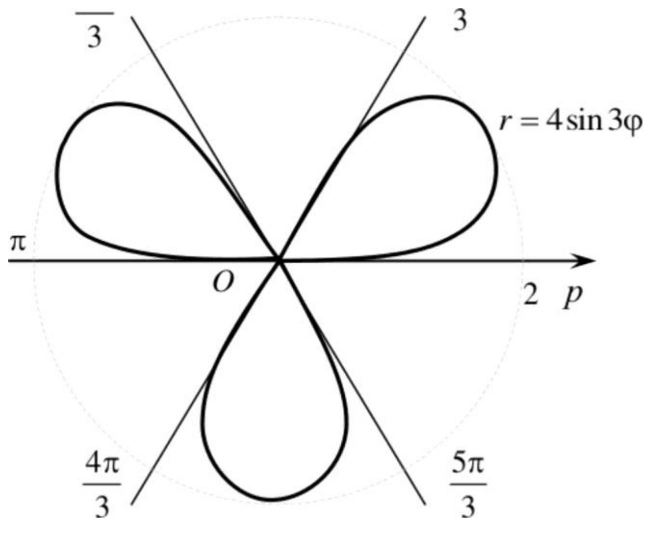


$$S = 2 * \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} r^2(\varphi)d\varphi = a^2\int_{0}^{\pi}(1+cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\int_{0}^{\pi}\left(1+2cos\varphi+\frac{1+cos2\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

$$= a^2\left(\frac{3}{2}\varphi + 2sin\varphi + \frac{1}{4}sin2\varphi\right)\Big|_{0}^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $r = 4sin3\varphi\ (0 \le \varphi \le 2\pi)$.

Решение:



Найдем нули функции: $4\sin 3\varphi = 0$, откуда $3\varphi = \pi k$, и $\varphi = \frac{\pi k}{3}$. Таким образом, на интервале от 0 до 2π функция $r = 4\sin 3\varphi$ определена на трех участках.

Так как функция периодическая, то

$$S = 3\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}(4\sin 3\varphi)^2 d\varphi = \frac{3}{2}\int_0^{\pi/3}16\sin^2 3\varphi d\varphi = 24\int_0^{\pi/3}\frac{1-\cos 6\varphi}{2}d\varphi$$
$$= 12\int_0^{\pi/3}(1-\cos 6\varphi)d\varphi = 12\left(\varphi - \frac{1}{6}\sin 6\varphi\right)\Big|_0^{\pi/3}$$
$$= 12\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{6}\sin 2\pi + \frac{1}{6}\sin 0\right) = 4\pi$$

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах $r = \dfrac{a}{1-\cos\varphi}$ $\left(\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Решение:

$$S = \frac{a^2}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(1-\cos\varphi)^2} = \frac{a^2}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\left(2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^2} = \frac{a^2}{8}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot\sin^2\frac{\varphi}{2}} = \left|d\left(ctg\frac{\varphi}{2}\right) = -\frac{1}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}d\varphi\right| =$$
$$= -\frac{a^2}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+ctg^2\frac{\varphi}{2}\right)d\left(ctg\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{a^2}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\left(1+ctg^2\frac{\varphi}{2}\right)d\left(ctg\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{a^2}{4}\left(ctg\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{3}ctg^3\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} =$$
$$= \frac{a^2}{4}\left(ctg\frac{\pi}{8}+\frac{1}{3}ctg^3\frac{\pi}{8}-\left(ctg\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}ctg^3\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{a^2}{4}\left(ctg\frac{\pi}{8}+\frac{1}{3}ctg^3\frac{\pi}{8}-\left(1+\frac{1}{3}\right)\right) =$$
$$= \frac{a^2}{4}\left(ctg\frac{\pi}{8}+\frac{1}{3}ctg^3\frac{\pi}{8}-\frac{4}{3}\right).$$

Задания для самостоятельного решения.

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

1. $y = 2x - x^2,\ y = 0.$

2. $y = x^2 - 1,\ y = 1 - x.$

3. $y = 4 - x^2,\ y = x + 2.$

4. $y = x^2,\ y = 2 - x^2.$

5. $y = x^2 - 2x + 3,\ y = 3x - 1.$

6. $y = \sqrt{x},\ y = \sqrt{4 - 3x}.$

7. $y = \ln x, x = e, y = 0.$

8. $y = \sin x,\ x = 0, x = \pi.$

9. $y = x^3,\ y = 8,\ x = 0.$

10. $y = x^3,\ y = 2x,\ y = x.$

11. $y = x^2,\ y = \sqrt{x}.$

12. $y = 1 - x^2,\ y = x^2 + 2,\ x = 0,\ x = 1.$

13. $y = \frac{x^2}{4},\ y = 2\sqrt{x}.$

14. $y = \frac{3}{x}, y = 4 - x.$

15. $y = e^x - 1, y = e^{2x} - 3, x = 0.$

16. $y = \ln(x + 2),\ y = 2\ln x,\ y = 0.$

17. $y = x^2,\ y = 2 - x.$

18. $y = x^2 - 4,\ x - y + 8 = 0.$

19. $y = 6x - x^2 - 4,\ y = x.$

20. $y = x^2 + 4x,\quad y = x + 4.$

21. $y=4-x^2$, $y=x^2$.

22. $y=x^2-2x$, $y=4-x^2$.

23. $y=2x-x^2$, $y=x$.

24. $y=3x-x^2$, $y=0$.

25. $y=\frac{6}{x}$, $y=7-x$.

26. $y=x^2-6$, $y=-x^2+5x-6$.

27. $y=x^2$, $y=2x$, $y=x$.

28. $x^2+y^2=16$, $y=2$, $y=2\sqrt{2}$.

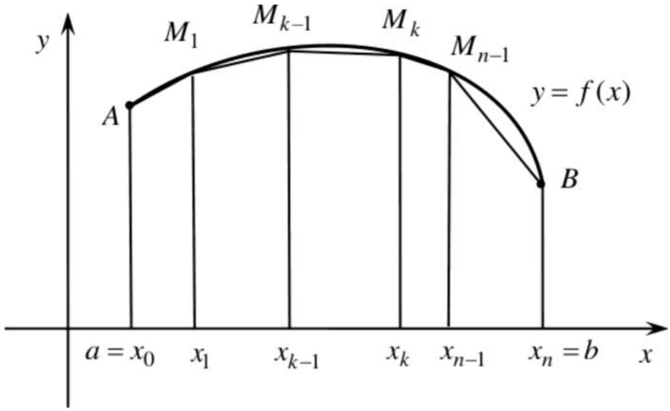
29. $y=x^2+8x-12$, $y=18x-x^2$.

30. $y=tg^3x$, $y=0$, $x=\frac{\pi}{4}$.

4.2 Вычисление длины дуги плоской кривой

4.2.1 Вычисление длины дуги плоской кривой в прямоугольной системе координат

Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$ и кривая l – график этой функции. Требуется найти длину дуги плоской кривой, заключенной между вертикальными прямыми $x=a$ и $x=b$.



Определим вначале, что мы будем понимать под длиной дуги *AB* плоской кривой *l*. Для этого разобьем отрезок *[a;b]* произвольным образом на *n* частей точками $x_0,x_1,\dots,x_n$. Обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ k=\overline{1,n}$. Через точки $x_k,\ k=\overline{1,n}$, проведем вертикальные прямые, параллельные оси *Oy*, до пересечения с кривой *l*. Тогда дуга *AB* разобьется на *n* частей. Соединив каждые две соседние точки разбиения кривой *l* отрезками (хордами), получим ломаную $AM_1M_2\dots M_{n-1}B$, вписанную в дугу *AB.*

Обозначим длину ломаной через l_n *:*

$$l_n = \overline{|AM_1|} + \overline{|M_1M_2|} + \dots + \overline{|M_{n-1}B|} = \sum_{k=1}^{n} \Delta l_k,$$

где Δl_k – длина хорды, стягивающей дугу $M_{k-1}M_k$.

Определение. Длиной дуги кривой AB мы будем называть предел длины вписанной в нее ломаной линии при условии, что $n \to \infty$, а длина наибольшего звена ломаной (диаметр разбиения) стремится к нулю:

$$L = \lim_{\sup \Delta l_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta\, l_k$$

Если конечный предел $l_к$ не существует, то и длина дуги не существует, а сама дуга называется *неспрямляемой.*

Покажем теперь, что если функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ имеет непрерывную производную $f'(x)$, то кривая l- спрямляемая, и выведем формулу для вычисления ее длины.

Вычислим длину стягивающей хорды $M_{к-1}M_к$:

$$\Delta_{l_k} = \overline{|M_{k-1}M_k|} = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} * \Delta x_k.$$

По теореме Лагранжа

$$\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(\xi_k), \ \ \xi_k \in]x_{k-1};\, x_k[.$$

Следовательно,

$$\Delta l_k = \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} * \Delta x_k.$$

Подставляя полученное выражение в определение длины дуги, получаем

$$L = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} * \Delta x_k.$$

В правой части формулы стоит интегральная сумма для функции

$\sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}$ на отрезке [a; b]. Предел такой суммы существует и равен определенному интегралу от этой функции на отрезке $[a;b]$:

$$L = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} * \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Итак, если функция *f(x)* имеет на отрезке [a;b] непрерывную производную, то дуга *AB* – спрямляемая и ее длина *l* вычисляется по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Найдем теперь длину дуги плоской кривой в случае, когда уравнение кривой задано параметрически: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t_1 \le t \le t_2$, $x(t); y(t)$ – непрерывные функции с непрерывными производными, причем $x'(t) \neq 0$ $\forall t \in [t_1; t_2]$.

Выполним замену переменных: $dx = x'(t)dt$; $f'(x) = \frac{y_t'}{x_t'}$.

Тогда $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{y_t'}{x_t'}\right)^2} x'(t)dt$, или $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} dt$.

Замечания: 1. Формула $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ справедлива только для кривых, задаваемых дифференцируемыми функциями. В частности, если у кривой имеются точки с вертикальными касательными (там $\boldsymbol{y' = \infty}$), то для вычисления ее длины можно либо использовать полученную формулу, рассматривая соответствующий интеграл как несобственный, либо записав уравнение кривой в параметрической форме, использовать формулу $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} dt$, для которой требование существования производной y'(x) не обязательно.

2. Если пространственная линия задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$ то при указанных ранее условиях

$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}dt.$

Пример 1. Найти длину дуги кривой $y=\ln x$, расположенной между точками с абсциссами $x=1$ и $x=\sqrt{3}$.

Решение:

Очевидно, что $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$. Тогда:

$$L = \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx = \left| \begin{array}{l} t=\sqrt{x^2+1} \\ x=\sqrt{t^2-1} \\ dx=\dfrac{tdt}{\sqrt{(t^2-1)}} \\ t_1=\sqrt{2} \\ t_2=2 \end{array} \right| = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{t^2}{t^2-1}dt =$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt = \int_{\sqrt{2}}^{2} dt + \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dt}{t^2-1} = t\Big|_{\sqrt{2}}^{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2} = 2-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{3}-\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right) \approx 0.918\text{ед}$$

Пример 2. Найти длину дуги кривой $y = x^{\frac{3}{2}}$, расположенной между точками с абсциссами $x=1$ и $x=2$

Решение:

$$L = \int_1^2 \sqrt{1+\left(\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'\right)^2}dx = \int_1^2 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}dx = \int_1^2 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx = \frac{4}{9}\int_1^2 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}d\left(1+\frac{9}{4}x\right) =$$

$$= \left.\frac{4}{9}\frac{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^2 = \frac{8}{27}\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^3}\Bigg|_1^2 = \frac{8}{27}\left[\sqrt{\left(1+\frac{9}{2}\right)^3}-\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}\right)^3}\right] = \frac{8}{27}\left[\sqrt{\frac{1331}{8}}-\sqrt{\frac{2197}{64}}\right] =$$

≈ 2.086 ед.

Пример 3. Вычислить длину дуги плоской кривой $y = 1+\ln\cos x$, $0 \le x \le \pi/4$.

Решение:

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\left(\left(1+\ln(\cos x)\right)'\right)^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+(-tgx)^2}\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}\,dx = = \ln\left|tg\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right| - \ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| =$$

$$= \ln\left|tg\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right| \approx 0.881 \text{ ед.}$$

Пример 4. Найти длину окружности $x^2+y^2=R^2$.

Решение:

В силу симметрии окружности найдем четвертую часть ее длины, лежащей в квадранте. В нем $y=\sqrt{R^2-x^2},\ 0\le x\le R.$

Отсюда $y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$. Следовательно,

$$L = 4\int_0^R \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx = 4\int_0^R \frac{Rdx}{\sqrt{R^2-x^2}} = 4Rarcin\left.\frac{x}{R}\right|_0^R = 2\pi R.$$

Пример 5. Найти длину дуги кривой, заданной параметрически: $\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}t^6 \\ y=4-\dfrac{1}{4}t^4 \end{cases}, 0\le t\le 1.$

Решение:

$x'_t=2\cdot t^5 \qquad y'_t=-t^3$

$$L=\int_0^1\sqrt{\left(2t^5\right)^2+\left(-t^3\right)^2}dt=\int_0^1\sqrt{4t^{10}+t^6}dt=\int_0^1\sqrt{4t^{10}+t^6}dt=\int_0^1 t^3\sqrt{4t^4+1}dt=$$

$$=\left|d\left(4t^4+1\right)=16t^3dt\right|=$$

$$=\frac{1}{16}\int_0^1\sqrt{4t^4+1}d\left(4t^4+1\right)=\frac{1}{16}\left.\frac{\left(4t^4+1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1=\frac{1}{24}\left[\sqrt{5^3}-1\right]ed.\approx 0,424ed.$$

Пример 6. Найти длину дуги кривой, заданной параметрически: $\begin{cases} x=3e^t\cdot\cos t \\ y=3e^t\cdot\sin t \end{cases} 0\le t\le 1.$

Решение:

$x'_t=3e^t\left(\cos t-\sin t\right) \quad y'_t=3e^t\left(\sin t+\cos t\right)$

$$L=\int_0^1\sqrt{9e^{2t}\left(\cos t-\sin t\right)^2+9e^{2t}\left(\sin t+\cos t\right)^2}dt=$$

$$=\int_0^1 3e^t\sqrt{\cos^2 t-2\sin t\cos t+\sin^2 t+\sin^2 t+2\sin t\cos t+\cos^2 t}dt=$$

$$=\int_0^1 3\sqrt{2}e^t dt=3\sqrt{2}\left.e^t\right|_0^1=3\sqrt{2}\left(e-1\right)\approx 7.29ed.$$

4.2.2 Вычисление длины дуги плоской кривой в полярной системе координат

Рассмотрим случай, когда кривая *AB* задана уравнением r=r(φ) в полярных координатах, причем функция r(φ) и ее производная r′(φ) непрерывны на промежутке [α,β].

Получим формулу для вычисления длины дуги кривой *AB,* воспользовавшись выведенной в предыдущем пункте формулой.

Действительно, примем φ за параметр. Тогда получим такой частный

случай параметрических уравнений кривой *AB:* $\begin{cases} x = r(\varphi)cos\varphi, \\ y = r(\varphi)sin\varphi, \end{cases}$ $\varphi \in [\alpha, \beta]$.

Имеем

$$x'_\varphi = r'_\varphi cos\varphi - rsin\varphi, \qquad y'_\varphi = r'_\varphi sin\varphi + rcos\varphi,$$

$$(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 = r^2(\varphi) + \left(r'(\varphi)\right)^2.$$

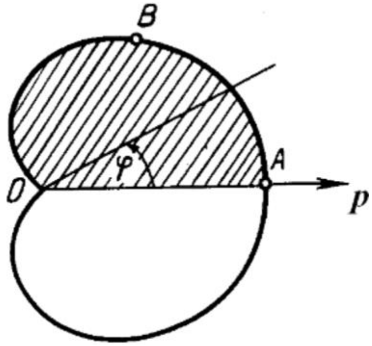
Таким образом, окончательно получим

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi.$$

Пример 1. Найти длину дуги кардиоиды $r = a(1 + cos\varphi)$.

Решение:

Кардиоида симметрична относительно полярной оси, следовательно, искомая длина равна удвоенной длине кривой *ABO.*



$$r^2+(r')^2=a^2(1+cos\varphi)^2+a^2sin^2\varphi=2a^2(1+cos\varphi)=4a^2cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

$$L=2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi=4a\int_0^{\pi}cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=8asin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}=8a.$$

Пример 2. Найти длину дуги кривой, заданной в полярной системе координат $r=3\cdot(1+\sin\varphi)$, $-\frac{\pi}{6}\le\varphi\le 0$.

Решение:

$$r'_{\varphi}=3\cdot(1+\sin\varphi)'=3\cdot\cos\varphi\,.$$

Составим и упростим подкоренное выражение:

$$r^2+(r')^2=3^2(1+\sin\varphi)^2+3^2\cos^2\varphi=9\left(1+2\sin\varphi+\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)=9(2+2\sin\varphi)=$$
$$=18(1+\sin\varphi).$$

$$L=3\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\sqrt{(1+\sin\varphi)}d\varphi=\ldots$$

Воспользуемся формулой синус двойного угла –

$\sin\varphi=\frac{1}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$, а также основным тригонометрическим тождеством – $\sin^2\frac{\varphi}{2}+\cos^2\frac{\varphi}{2}=1.$

$$\ldots=3\sqrt{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\sqrt{\sin^2\frac{\varphi}{2}+\cos^2\frac{\varphi}{2}+2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi=3\sqrt{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\sqrt{\left(\sin\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2}\,d\varphi=$$

$$=3\sqrt{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\left(\sin\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi=6\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{6}}^{0}=$$

$$=6\sqrt{2}\left(\sin 0-\cos 0-\left(\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)-\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)\right)=6\sqrt{2}\left(-1-\left(-\sin\frac{\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}\right)\right)=$$

$$=6\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}-1\right)\text{ед.}\approx 1.9\text{ед}$$

4.2.3 Дифференциал длины дуги плоской кривой

Как было показано, длина дуги кривой определяется формулой $L=\int\limits_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$, где $y=f(x)\quad\forall x\in[a;b]$.

Предположим, что в этой формуле нижний предел интегрирования оставим постоянным, а верхний будем изменять. Обозначим его через x, а переменную интегрирования - через t.

Тогда длина дуги будет функцией верхнего предела:

$$L(x)=\int\limits_a^x\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$$

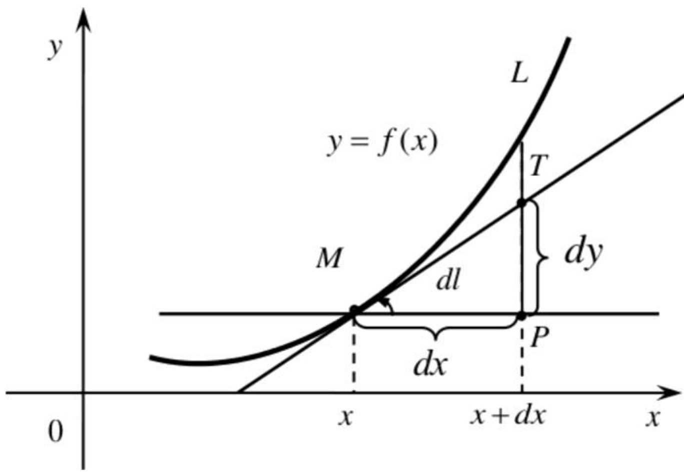
Согласно теоремы Барроу, производная от функции $L(x)$ определяется формулой

$$L'(x)=\sqrt{1+(f'(x))^2}.$$

Отсюда дифференциал дуги $dL = L'(x)dx = \sqrt{1+(y')^2}dx$, или с учетом того, что $y' = \frac{dy}{dx}$, окончательно получаем

$$dL = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Полученная формула представляет собой теорему Пифагора для бесконечно малого треугольника *MTP.*



Тогда можно записать еще одну формулу для вычисления длины дуги плоской кривой:

$$L = \int_a^b dL.$$

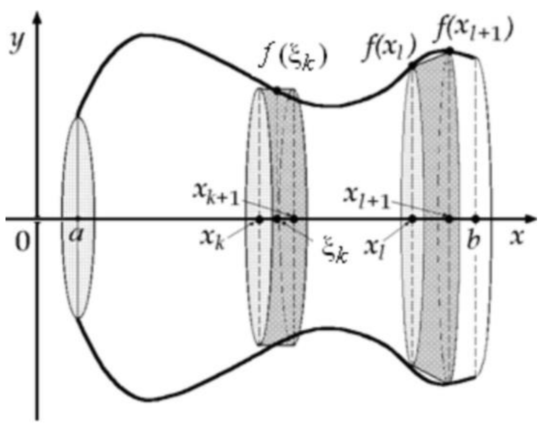
Эта формула широко применима при изучении раздела «Криволинейные интегралы».

4.3 Вычисление площади поверхности тела вращения

Рассмотрим на плоскости *XOY* некоторую кривую *AB*, заданную уравнением $y=f(x)$, $x\in[a;b]$. Пусть функция $f(x)$ и производная $f'(x)$ непрерывны на $[a;b]$. От вращения кривой *AB* вокруг оси *OX* получается тело вращения, ограниченное поверхностью вращения.

Определение. Будем называть *площадью поверхности вращения* площадь поверхности, которая получается от вращения ломаной линии $A=A_0, A_1, A_2, \dots, A_{k-1}, A_k, \dots, A_n=B$, вписанной в кривую *AB* при условии, что число точек разбиения бесконечно возрастает, а диаметр разбиения $\lambda=\sup\{\Delta x_k\}$ при этом стремится к нулю.

От вращения хорды A_kA_{k+1} получим усеченный конус, площадь боковой поверхности которого



$$\Delta S_k = 2\pi\frac{y_{k-1}+y_k}{2}\Delta l_i = 2\pi\frac{y_{k-1}+y_k}{2}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\,\Delta x_k.$$

По теореме Лангранжа $\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(\xi_k),\ \xi_k \in]x_{k-1}; x_k[,$ поэтому $\Delta S_k = 2\pi \frac{y_{k-1}+y_k}{2}\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\Delta x_k$. Следовательно, площадь поверхности вращения хорды $A_{k-1}A_k$ равна

$$S_k = \pi \sum_{k=1}^{n} \left(f(x_k) + f(x_{k+1})\right)\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\Delta x_k.$$

Измельчая разбиение и устремляя $\lambda \to 0$, получим точное равенство

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)dx}.$$

Найдем теперь площадь поверхности в случае, когда уравнение кривой

задано параметрически: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t_1 \le t \le t_2,$ x(t); y(t) – непрерывные функции с непрерывными производными, причем $x'(t) \neq 0\ \ \forall t \in [t_1; t_2]$.

Выполним замену переменных:

$$dx = x'(t)dt; \quad f'(x) = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

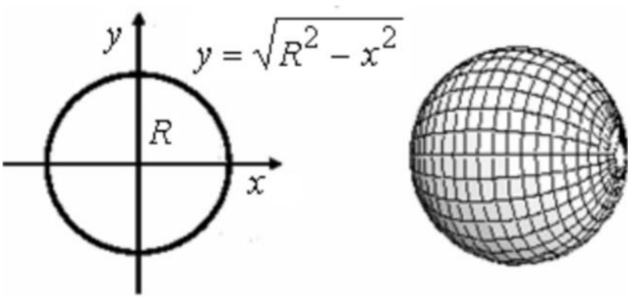
Тогда $S=2\pi \int_{t_1}^{t_2} y_1 \sqrt{1+\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2}\, x'(t)dt,$ или

$$S = 2\pi \int\limits_{t_1}^{t_2} y_1 \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt.$$

Если кривая задана в полярных координатах $r = r(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta$, где $x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi$, то

$$S = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)\sin\varphi \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\, d\varphi.$$

П р и м е р 1. Найти площадь поверхности шара радиуса *R.*



Решение:

Можно считать, что поверхность шара образована вращением полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2},\ -R \le x \le R$ вокруг оси OX. Тогда по полученной формуле

$$S = 2\pi \int\limits_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2}\, dx = 2\pi \int\limits_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2 + x^2}\, dx = 4\pi R^2$$

Пример 2. Найти площадь поверхности, образованной вращением циклоиды $\begin{cases} x = a(t - sint), \\ y = a(1 - cost), \end{cases}$ $0 \leq t \leq 2\pi$ вокруг оси ОХ.

Решение:

При вращении половины дуги циклоиды вокруг оси OX площадь поверхности равна

$$\frac{1}{2}S = 2\pi \int_0^{\pi} a(1 - cost)\sqrt{a^2(1 - cost)^2 + (asint)^2}\mathrm{dt} =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} a2sin^2\frac{t}{2}\sqrt{2a^2 * 2sin^2\frac{t}{2}}dt$$

$$= 8\pi a^2 \int_0^{\pi} sin^2\frac{t}{2} * sin\frac{t}{2}dt =$$

$$= 8\pi a^2 \int_0^{\pi} 2\left(1 - cos^2\frac{t}{2}\right)d\left(cos\frac{t}{2}\right)$$

$$= -16\,\pi a^2\left(cos\frac{t}{2} - \frac{1}{3}cos^3\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$= -16\pi a^2\left(0 - 1 - 0 + \frac{1}{3}\right) = \frac{32}{3}\pi a^2.$$

Задания для самостоятельного решения

Найти длину дуги кривой:

1. $y = \frac{1}{3}\ln\sin 3x, \quad \pi/6 \leq x \leq 2\pi/9;$

2. $y = \frac{1}{2}\ln\cos 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi/12;$

3. $y=\ln\sin x,\quad \frac{\pi}{3}\le x\le\frac{2\pi}{3}$;

4. $y=-x^2+2x$ от вершины до точки с абсциссой $x=2$;

5. $y^2=\frac{x^3}{6},\qquad 0\le x\le 6$;

6. $y=\frac{1}{2}x^2-4x+\frac{15}{2}$, отсеченной осью Ox;

7. $\frac{3}{2}x=y^{\frac{3}{2}}$, от точки $O(0;0)$ до точки $A\left(2\sqrt{3};3\right)$;

8. $y=\ln\frac{e}{\cos x},\quad 0\le x\le\frac{\pi}{6}$;

9. $y=\sqrt{x-1}$, от точки $A(1;0)$ до точки $B(2;1)$;

10. $y=x^2$, от точки $A(1;1)$ до точки $B(2;4)$;

11. $y=\ln\left(1-x^2\right),\quad 0\le x\le\frac{3}{4}$;

12. $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x,\quad 1\le x\le 2$;

13. $y=\sqrt{(x-2)^3},\quad 2\le x\le 6$;

14. $y=7+x^{3/2},\quad 0\le x\le 1$;

15. $2y-x^2+3=0,\qquad -2\le x\le 2$;

16. $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases},\qquad 0\le t\le 2\pi$;

17. $\begin{cases} x = 3\cos t - \cos 3t \\ y = 3\sin t - \sin 3t \end{cases}$, $0 \le t \le \pi$;

18. $\begin{cases} x = 7\cos^3 t \\ y = 7\sin^3 t \end{cases}$, $\dfrac{\pi}{2} \le t \le \pi$;

19. $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$;

20. $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}$;

21. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$, $\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{2\pi}{3}$;

22. $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$;

23. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$, $\pi \le t \le 2\pi$;

24. $r = \dfrac{1}{\varphi}$, $\dfrac{3}{4} \le \varphi \le \dfrac{4}{3}$;

25. $r = 6(1 + \sin\varphi)$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le 0$;

26. $r = \sqrt{2}e^{\varphi}$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$;

27. $r = 2(1 - \cos\varphi)$, $-\pi \le \varphi \le -\dfrac{\pi}{2}$;

28. $r = 5e^{\frac{5}{12}\varphi}$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$;

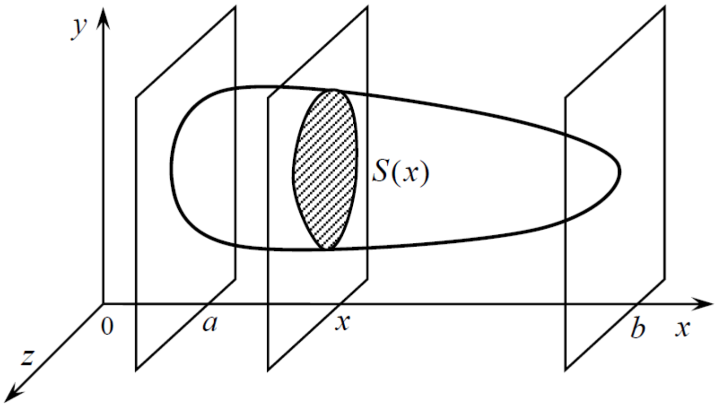
29. $r = 2\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{12}$;

30. $r = 3\varphi$, $0 \le \varphi \le \dfrac{3}{4}$;

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ

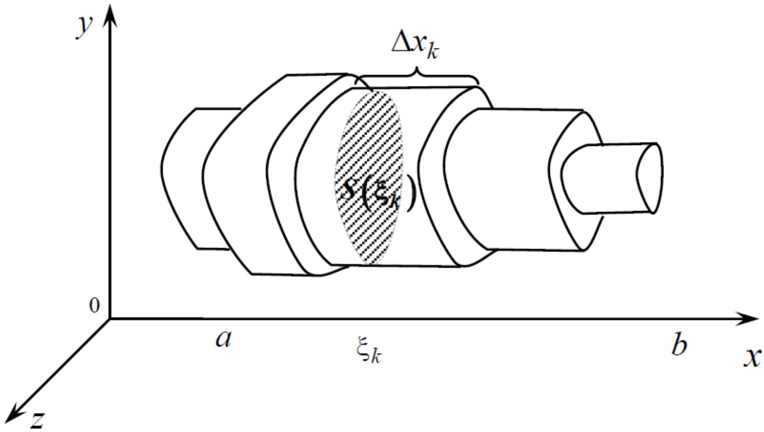
5.1 Вычисление объёмов произвольных тел

Пусть дано тело T, ограниченное замкнутой поверхностью, и $S = S(x)$, $a \le x \le b$ – площадь любого его сечения плоскостью, перпендикулярной к некоторой прямой, например, к оси абсцисс Ox.



Тогда, разбивая отрезок $[a;b]$ на n частичных отрезков точками $a = x_0 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, выбирая на каждом из частичных отрезков $[x_{k-1}; x_k]$ произвольным образом точку ξ_k, $k = \overline{1,n}$ и обозначив $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, k = \overline{1,n}$, получим, что объем V всего тела T приближенно равен объему фигуры, состоящей из n ступенчатых частичных цилиндров, объем каждого из которых

$$\Delta V_k = S(\xi_k)\Delta x_k .$$



То есть объем V всего тела T приближенно равен

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k .$$

Очевидно, что последнее приближенное равенство тем точнее, чем меньше диаметр разбиения $\lambda = \max\limits_{k=\overline{1,k}}\{\Delta x_k\}$ отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки.

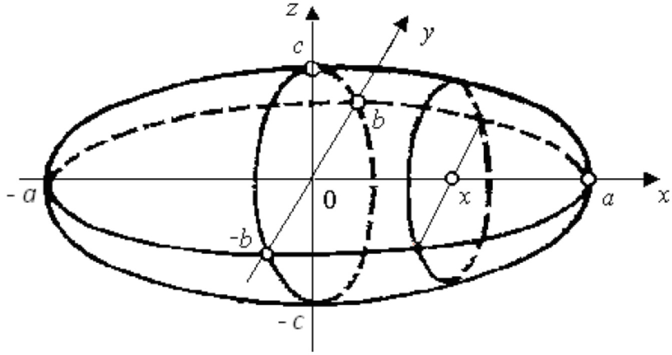
Таким образом, объем тела, заключенного между двумя плоскостями $x = a$, $x = b$, в случае, если площадь сечения, проведенная перпендикулярно к оси Ox, есть известная функция $S = S(x)$ для $\forall x \in [a;b]$, вычисляется по формуле .

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b S(x)dx .$$

Замечание. По полученной формуле возможно вычисление объемов лишь для малого числа тел, для которых известна зависимость $S = S(x)$.

Пример 1. Найти объем эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$**.**

Решение: рассечем эллипсоид плоскостью, параллельной плоскости $Ozy: x=h.$



В сечении будут появляться следующие эллипсы:

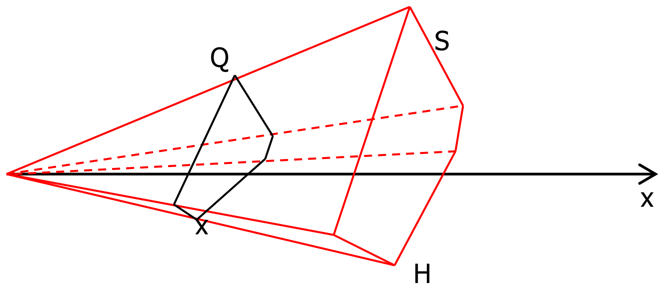
$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{h^2}{a^2}\right)}+\dfrac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{h^2}{a^2}\right)}=1, \\ x=h \end{cases}$$ с полуосями $b_1=b\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}$, $c_1=c\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}$.

Зная, что площадь эллипса $S=S(h)=\pi b_1c_1=\pi bc\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)$, найдем искомый объем:

$$V=\int_{-a}^{a}S(h)dh=\int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)dh=\pi bc\left(1-\frac{h^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc$$

При $a=b=c=R$ получаем шар радиуса R, объем которого равен $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

Пример 2. Найти объем произвольной пирамиды с высотой H и площадью основания S.



При пересечении пирамиды плоскостями, перпендикулярными высоте, в сечении получаем фигуры, подобные основанию. Коэффициент подобия этих фигур равен отношению $\dfrac{x}{H}$, где x – расстояние от плоскости сечения до вершины пирамиды.

Из геометрии известно, что отношение площадей подобных фигур равно коэффициенту подобия в квадрате, т.е.

$$\frac{Q}{S}=\left(\frac{x}{H}\right)^2$$

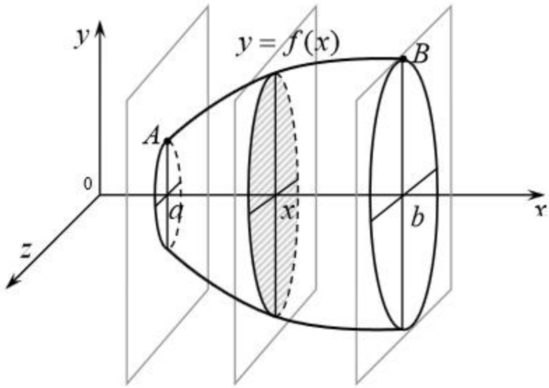
Отсюда получаем функцию площадей сечений: $Q(x)=\dfrac{S}{H^2}x^2$.

Находим объем пирамиды: $V=\int\limits_0^H \dfrac{S}{H^2}x^2dx=\dfrac{Sx^3}{3H^2}\Big|_0^H=\dfrac{1}{3}SH$.

5.2 Вычисление объёмов тел вращения

Рассмотрим тело, образованное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$, $x=b$.

Если пересечь это тело плоскостями, перпендикулярными к оси Ox, получим круги, радиусы которых равны модулю ординат $y=f(x)$ точек данной кривой.



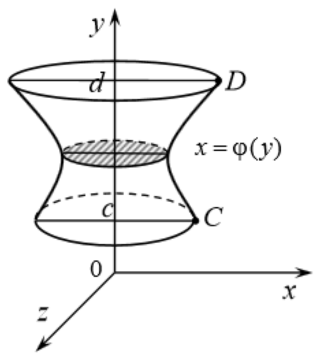
Сечения такого тела плоскостью $x = const$ представляет собой круг с площадью, равной $S(x) = \pi y^2 = \pi(f(x))^2$, и формула для вычисления в этом случае имеет вид

$$V = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Если тело образовано вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции $cCDd$, то его объем вычисляется по формуле

$$V = \pi\int_c^d (\varphi(y))^2 dy,$$

где $x = \varphi(y)$ - уравнение кривой CD.



Объем тел вращения в случае, когда уравнение кривой задано параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} t_1 \le t \le t_2, \quad x(t);\ y(t)$$- непрерывные функции

с непрерывными производными, причем $x'(t) \neq 0 \ \forall t \in [t_1; t_2]$ имеет вид

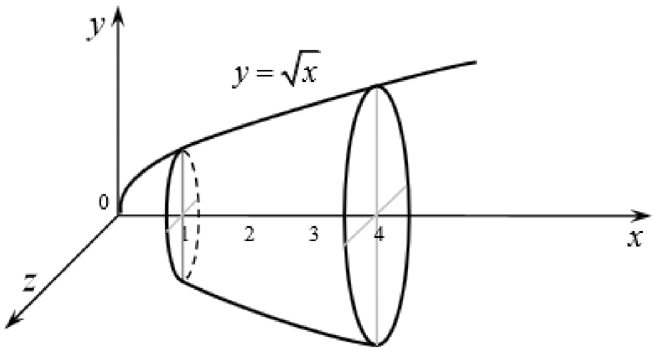
$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y_t^{\,2} x_t' dt .$$

Если кривая задана в полярных координатах $r = r(\varphi), \ \alpha \le \varphi \le \beta$, где $x = r\cos\varphi, \ y = r\sin\varphi$, то

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi)\sin\varphi d\varphi .$$

Пример 1. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}, x = 1, \ x = 3$.

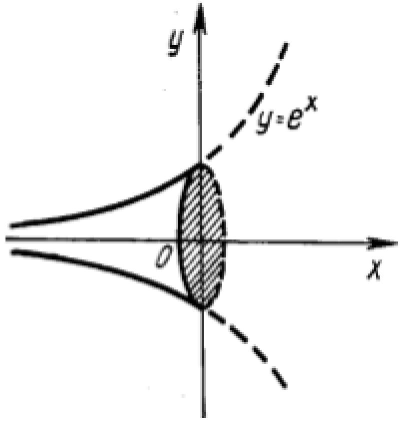
Решение:



По формуле нахождения объема тела вращения, имеем

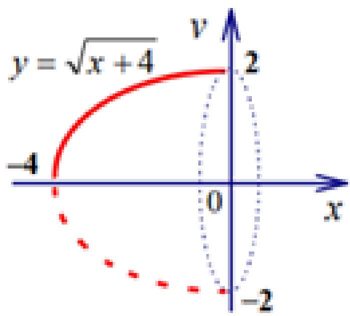
$$V = \pi \int_1^4 y^2 dx = \pi \int_1^4 x dx = \pi \frac{x^2}{2}\Bigg|_1^4 = \frac{\pi}{2}(16 - 1) = \frac{15}{2}\pi .$$

Пример 2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной кривой $y = e^x, x < 0$.



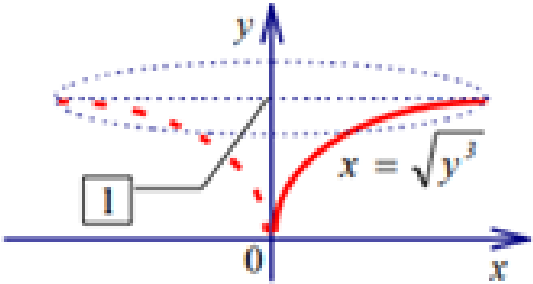
$$V=\pi\int_{-\infty}^{0}e^{2x}dx=\frac{\pi}{2}e^{2x}\Big|_{-\infty}^{0}=\frac{\pi}{2}\left(1-e^{-\infty}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Пример 3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox **параболы** $y=\sqrt{x+4},-4\le x\le 0.$



$$V=\pi\int_{-4}^{0}(x+4)dx=\pi\left(\frac{x^2}{2}+4x\right)\Bigg|_{-4}^{0}=8\pi.$$

Пример 4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy **полукубической параболы** $x=\sqrt{y^3},0\le y\le 1.$



$$V=\pi\int_0^1 y^3dy=\pi\left.\frac{y^4}{4}\right|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

Пример 5. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной аркой циклоиды $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$**.**

Решение:

$V=\pi\int\limits_0^{2\pi a} y^2dx$. При этом $dx=a(1-\cos t)dt$. Если $x=0$, то $t=0$, если $x=2\pi a$, то $t=2\pi$.

Тогда

$$V=\pi\int_0^{2\pi a} y^2dx=\pi\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2a(1-\cos t)dt=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt=$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)dt=$$

$$=\pi a^3(t-\sin 3t)\Big|_0^{2\pi}+3\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt+\int_0^{2\pi}(1-\sin^2 t)d(\sin t)=$$

$$=\pi a^3\left[2\pi+\frac{3}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)-\sin t+\frac{\sin^3 t}{3}\right]\Bigg|_0^{2\pi}=5\pi^2a^3.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти объем:

1. параболоида вращения $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=z,\ 0\le z\le H.$

2. тела вращения, образованного вращением фигуры $y=e^{-x};\ y=0;\ x\ge 0$ вокруг оси Ox.

3. тела вращения, образованного вращением фигуры $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases},\quad 0\le t\le 2\pi$ вокруг оси Ox.

4. тела вращения, образованного вращением фигуры $y=3-x;\ x=0;\ y=0$ вокруг оси Ox.

5. тела вращения, образованного вращением фигуры $y^2=4x;\ x=3;\ y=0$ вокруг оси Ox.

6. тела вращения, образованного вращением фигуры $y=\sin x;\ 0\le x\le \pi$ вокруг оси Ox.

7. тела вращения, образованного вращением фигуры $y=\frac{1}{x},\ x=1,\ x=3,\ y=0$ вокруг оси Ox.

8. тела вращения, образованного вращением фигуры $y=e^{2x},\ x=0,\ x=2,\ y=0$ вокруг оси Ox.

9. тела вращения, образованного вращением фигуры $y=x^2,\ y=4$ вокруг оси Oy.

10. тела вращения, образованного вращением фигуры $xy=6,\ y=1,\ y=6,\ x=0$ вокруг оси Oy.

11. тела вращения, образованного вращением фигуры $y=\frac{x^2}{2},\ y=2\sqrt{2},\ x=0$ вокруг оси Oy.

12. тела вращения, образованного вращением фигуры $x=\sqrt{y-1},\ y=2,\ y=5,\ x=0$ вокруг оси Oy.

13. тела вращения, образованного вращением фигуры $y=x^3,\ y=8,\ x=0$ вокруг оси Oy.

14. тела вращения, образованного вращением фигуры

$y = e^{-x}$; $y = 0$; $x \geq 0$ вокруг оси Oy.

15. тела вращения, образованного вращением фигуры

$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ вокруг оси Oy.