ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра « Высшая математика»

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

«Математические методы в психологии»

Авторы:
Смирнова И.Ю.
Поляков А.С.

Ростов-на-Дону, 2020

Аннотация

Методическое пособие предназначено для преподавателей, аспирантов и студентов направления "Психология", "Педагогика" всех форм обучения. Основная задача пособия состоит в демонстрации практического применения методов математической обработки в психологии. В примерах используются реальные научные исследования, результаты которых можно использовать в курсовых и дипломных работах.

Авторы

Ст.преп. Смирнова И.Ю.

Ст.преп. Поляков А.С.

Оглавление

1. АДАПТАЦИЯ ПОНЯТИЙ И ПРАВИЛ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ К ЗАДАЧАМ ПСИХОЛОГИИ.

Математические методы в психологии используются для обработки данных исследований и установления закономерностей между изучаемыми явлениями. Даже простейшее психологическое или педагогическое исследование не обходится без математической обработки данных, которая может осуществляться вручную, а чаще – с применением специального программного обеспечения (MS Excel или статистические пакеты).

Признаки и переменные - это измеряемые психологические явления. Такими явлениями могут быть время решения задачи, количество допущенных ошибок, уровень тревожности, показатель интеллектуальной лабильности, интенсивность агрессивных реакций, угол поворота корпуса в беседе, показатель социометрического статуса и множество других переменных.

Значения признака определяют при помощи специальных шкал измерения. В зависимости от того, какая операция является основой измерения признака, выделяют следующие **измерительные шкалы**:

Номинативная шкала, или шкала наименований (номинальное измерение) - получается путем присвоения «имен» исследуемым объектам. Пользуясь определенным правилом, объекты, испытуемые группируются по различным классам так, чтобы внутри класса они были идентичны по измеряемому свойству, признаку, качеству. Каждому классу дается наименование и обозначение, обычно - число. Затем каждому объекту присваивается соответствующее обозначение. Примеры номинативных признаков:

«пол» (1 - мужской, 2 -женский или наоборот); «социальное положение» (1 - рабочий, 2 -предприниматель, 3 - интеллигенция и т. д.),

«предпочтение домашних животных» (1 - собаки, 2 - кошки, 3 - крысы, 0 - никакие).

В последнем случае, если одному испытуемому присвоено обозначение 1, а другому 2, то это означает только то, что у них разные предпочтения: у первого - собаки, у второго - кошки. Из того, что 1 < 2, нельзя делать вывод, что у второго предпочтение выражено больше, чем у первого.

Интервальная шкала. Наиболее типичный пример измерения в интервальной шкале-определение температуры по Цельсию (°С). Нет смысла говорить о том, во сколько раз больше или меньше утренняя температура воздуха, измеренная по шкале Цельсия, чем дневная.

Абсолютная шкала, или шкала отношений (метрическая). Привычные примеры измерения по этой шкале - это измерения роста, веса, времени выполнения задачи и т. д. Общим в этих примерах является применение единиц измерения и то, что нулевой точке соответствует полное отсутствие измеряемого свойства. При сравнении объектов в условиях абсолютности нулевой точки мы можем установить не только то, насколько больше или меньше выражено свойство, но и то, во сколько раз (на сколько процентов и т. д.) больше или меньше оно выражено. Измерив время решения задачи парой испытуемых, мы можем сказать не только о том, кто и за сколько секунд (минут) решил задачу, но и о том, во сколько раз (на сколько процентов) быстрее.

Порядковые шкалы (ординальные) предназначены для расчленения совокупности признаков на элементы, связанные отношением «больше – меньше», и допускают отнесение переменных к группам, упорядоченным (ранжированным) друг относительно друга и представляющим некое системное единство. Порядковые шкалы дают возможность оценить степень выраженности признака. Они содержат не менее трех классов с установленной последовательностью, не допускающей перестановки.

В задачах психологии часто приходится производить предварительную подготовку данных эксперимента, то есть их **ранжирование** по следующему правилу:

1. Меньшему значению начисляется меньший ранг. Наименьшему значению начисляется ранг 1. Наибольшему значению начисляется ранг, соответствующий количеству ранжируемых значений. Например, если $n = 7$, то набольшее значение получит ранг 7, за возможным исключением для тех случаев, которые предусмотрены правилом 2.

2. Если несколько значений равны, им начисляется ранг,

представляющий собой среднее значение из тех рангов, которые они получили бы, если бы не были равны.

В соответствии с этим правилом общая сумма всех присвоенных рангов для группы численностью *N* должна совпадать с расчетной, которая определяется по приведенной формуле, вне зависимости от наличия или отсутствия связей в рангах:

$$\sum(R_i) = \frac{N(N+1)}{2}$$

где *N* — общее количество ранжируемых наблюдений (значений).

Статистическая гипотеза — это научная гипотеза, допускающая статистическую проверку.

Статистические гипотезы разделяются на простые и сложные:

- простая гипотеза полностью задает распределение вероятностей;

- сложная гипотеза указывает не одно распределение, а некоторое множество распределений. Обычно это множество распределений, обладающих определенным свойством.

Статистический критерий- это решающее правило, обеспечивающее принятие истинной и отклонение ложной гипотезы с достаточно высокой вероятностью.

Статистическая проверка гипотезы состоит в выяснении того, насколько совместима эта гипотеза с имеющимся результатом случайного выбора.

При проверке статистических гипотез вводятся два понятия: нулевая гипотеза H_0 и альтернативная гипотеза H_1.

Нулевая гипотеза H_0 – это гипотеза о сходстве.

Альтернативная гипотеза H_1 – это гипотеза о различии.

Ясно, что при проверке статистических гипотез исследователь сталкивается с риском (вероятностью) принять ложное решение. При этом возможны ошибки двух родов.

Ошибка первого рода: принимается решение отклонить гипотезу H_0, хотя в действительности она является верной (обозначается α).

Ошибка второго рода: принимается решение не отклонять гипотезу H_0, хотя в действительности она будет неверна (обозначается **β**).

Результат проверки гипотезы H_0	Возможные состояния проверяемой гипотезы	
	Верна гипотеза H_0	Верна гипотеза H_1
Гипотеза H_0 отклоняется	Ошибка первого рода	Правильное решение
Гипотеза H_0 не отклоняется	Правильное решение	Ошибка второго рода

Не исключено, что психолог может ошибиться при принятии своего статистического решения. Исключить ошибки полностью при принятии статистических гипотез невозможно, поэтому необходимо минимизировать возможные последствия принятия неверного решения (неверной статистической гипотезы). В большинстве случаев единственный способ минимизировать возможные ошибки – увеличить объем выборки.

Уровень значимости – это вероятность ошибочного отклонения (отвержения) нулевой гипотезы H_0.

То есть уровень значимости (**α**) - это вероятность ошибки первого рода при принятии статистического решения. В психологии при использовании статистических методов, устанавливаются следующие уровни значимости:

Низший уровень статистической значимости: $\alpha = 0,05$;

Достаточный уровень статистической значимости: $\alpha = 0,01$;

Высший уровень статистической значимости: $\alpha = 0,001$.

При статистическом анализе результатов психологического эксперимента (психологического измерения) психолог-исследователь должен выбрать необходимый уровень значимости. Необходимый уровень значимости зависит от задач и гипотез исследования. Например, нижняя граница уровня статистической значимости 0,05 означает, что в выборке из 100 элементов (испытуемых, случаев) допускается 5 ошибок; в выборке из 20 элементов (испытуемых, случаев) допускается 1 ошибка. Другими словами, уровень статистической значимости -это вероятность того, что мы сочли различия существенными, а они на самом деле случайны.

Когда мы указываем, что различия достоверны на 5% уровне значимости, или при $\alpha \leq 0,05$, то мы имеем ввиду, что вероятность того, что они недостоверны, составляет 0,05.

При выборе уровня значимости следует учитывать, что чрезмерное его уменьшение может привести к увеличению вероятности ошибки второго рода, то есть вероятности принять нулевую гипотезу, когда на самом деле она не верна.

Мощностью критерия называется его способность не допускать ошибку второго рода, поэтому:

$$\text{Мощность} = 1 - \beta$$

Классификация задач и методов их решения

Задачи	Условия	Методы
1. Выявление различий в уровне исследуемого признака	a) Две выборки испытуемых	Q-критерий Розенбаума U-критерий Манна-Уитни φ - критерий (угловое преобразование Фишера)
	b) Три и больше выборок испытуемых	S- критерий Джонкира H-критерий Крускала-Уоллиса
2. Оценка сдвига значений исследуемого признака	a) Два замера на одной и той же выборке испытуемых	T-критерий Вилкоксона G-критерий знаков φ^* -критерий (угловое преобразование Фишера)
	b) Три и более замеров на одной и той же выборке испытуемых	χ^2_r- критерий Фридмана L- критерий тенденций Пейджа
3. Выявление различий в распределении признака	a) При сопоставлении эмпирического распределения с теоретическим	χ^2 критерий Пирсона λ- критерий Колмогорова - Смирнова m- биномиальный критерий

Задачи	Условия	Методы
	b) При сопоставлении двух эмпирических распределений	χ^2 -критерий Пирсона λ- критерий Колмогорова - Смирнова φ^*- критерий(угловое преобразование Фишера)
4. Выявление степени согласованности изменений	a) Два признака	r_s- коэффициент ранговой корреляции Спирмена
	b) Две иерархии или профиля	r_s- коэффициент ранговой корреляции Спирмена

2. ВЫЯВЛЕНИЕ РАЗЛИЧИЙ В УРОВНЕ ИССЛЕДУЕМОГО ПРИЗНАКА.

Очень часто перед исследователем в психологии стоит задача выявления различий между двумя, тремя и более выборками испытуемых. Это может быть, например, задача определения психологических особенностей хронически больных детей по сравнению со здоровыми, юных правонарушителей по сравнению с законопослушными сверстниками или различий между работниками государственных предприятий и частных фирм, между людьми разной национальности или разной культуры и, наконец, между людьми разного возраста в методе "поперечных срезов".

Q - критерий Розенбаума. Критерий используется для оценки различий между двумя выборками по уровню какого-либо признака, количественно измеренного. В каждой из выборок должно быть не менее 11 испытуемых. Это очень простой непараметрический критерий, который позволяет быстро оценить различия между двумя выборками по какому-либо признаку. Однако если критерий Q не выявляет достоверных различий, это еще не означает, что их действительно нет. В этом случае стоит применить критерий φ* Фишера. Если же Q-критерии выявляет достоверные различия между выборками с уровнем значимости α <0,01, можно ограничиться только им и избежать трудностей применения других критериев. Критерий применяется в тех случаях, когда данные представлены по крайней мере в порядковой шкале. Признак должен варьировать в каком-то диапазоне значений, иначе сопоставления с помощью Q -критерия просто невозможны. Например, если у нас только 3 значения признака, 1, 2 и 3, - нам очень трудно будет установить различия. Метод Розенбаума требует достаточно тонко измеренных признаков.

Статические гипотезы формулируются следующем образом:

H_0- уровень признака в выборке 1 не превышает уровня признака в выборке 2.

H_1- уровень признака в выборке 1 превышает уровень признака в выборке 2.

Алгоритм применения критерия Q

1. Проверить, выполняются ли ограничения: $n_{1,}$ n_2 ≥11, $n_1 \approx$ n_2.
2. Упорядочить значения отдельно по каждой выборке по степени возрастания признака. Считать выборкой 1 ту, значение в которой предположительно выше, а выборкой 2 – ту, где значения предположительно ниже.
3. Определить самое высокое (минимальное) значение в выборке 2.
4. Подсчитать количество значений в выборке 1, которые выше максимального значения в выборке 2. Обозначить эту величину S_1.
5. Определить самое низкое (минимальное) значение в выборке 1.
6. Подсчитать количество значений в выборке 2, которые ниже минимального значения в выборке 1. Обозначить эту величину S_2 .
7. Подсчитать эмпирическое значение критерия по формуле: $\mathbf{Q_{эмп}}= S_1+ S_{2.}$
8. В случае $n_{1,}$ $n_2 \le 26$ определить по таблице критические значения $Q_{0,05}$ и $Q_{0,01}$ для данных $n_{1,}$ n_2. В случае $n_{1,}$ $n_2 >26$ полагается, что $Q_{0,05}$=8, $Q_{0,01}$ =10, .
9. Если $\mathbf{Q_{эмп} \geq Q_{0,05}}$, то гипотеза H_0 отвергается.
   Если $\mathbf{Q_{эмп} \geq Q_{0,01}}$, то принимается гипотеза H_1.

U - критерий Манна-Уитни. Критерий предназначен для оценки различий между двумя выборками по уровню какого-либо признака, количественно измеренного. Он позволяет выявлять различия между малыми выборками, когда $n_1, n_2 \geq 3$ или $n_1=2$, $n_2 \geq 5$. И является более мощным, чем критерий Розенбаума. Этот метод определяет, достаточно ли мала зона перекрещивающихся значений между двумя рядами. 1-м рядом (выборкой, группой) мы называем тот ряд значений, в котором значения, по предварительной оценке, выше, а 2-м рядом - тот, где они предположительно ниже. Чем меньше область перекрещивающихся значений, тем более вероятно, что различия достоверны. Иногда эти различия называют различиями в расположении двух выборок . Эмпирическое значение критерия U отражает то, насколько велика зона совпадения между рядами. Поэтому чем меньше $U_{эмп}$, тем более вероятно, что различия достоверны.

Ограничения критерия U:

1. В каждой выборке должно быть не менее 3 наблюдении: $n_1, n_2 \geq 3$; допускается, чтобы в одной выборке было 2 наблюдения, но тогда во второй их должно быть не менее 5.
2. В каждой выборке должно быть не более 60 наблюдений; Однако уже при $n_1, n_2 > 20$ ранжирование становится достаточно трудоемким.

Гипотезы для этого критерия обычно формулируются так:

H_0- уровень признака в выборке 2 не ниже уровня признака в выборке 1.

H_1- уровень признака в выборке 2 ниже уровня признака в выборке 1.

Алгоритм применения критерия U

1. Перенести все данные испытуемых из двух выборок объемами n_1, n_2 на индивидуальные карточки.
2. Пометить карточки испытуемых выборки 1 одним цветом, например, красным, а все карточки из выборки 2 – другим, например, синим.
3. Разложить все карточки в единый ряд по степени нарастания признака, не считаясь с тем, к какой выборке они относятся.

4. Проранжиривать все значения на карточках.
5. Разложить карточки на две группы: красные – в один ряд, синие – в другой.
6. Подсчитать сумму рангов отдельно для каждого ряда. Поверить, совпадает ли общая сумма рангов с рассчетной.
7. Определить большую из двух ранговых сумм.
8. Вычислить значение $U_{эмп}$ по формуле:

$$\mathbf{U_{эмп}} = n_1 \cdot n_2 + n_x(n_x+1)/2 - T_x$$

где n_x – количество испытуемых в группе с большей суммой рангов; T_x – большая из двух ранговых сумм.
9. Определить критическое значение $U_{0,05}$ по таблице.
Если $\mathbf{U_{эмп} > U_{0,05}}$ то гипотеза H_0 принимается.
Если $\mathbf{U_{эмп} \leq U_{0,05}}$, то гипотеза H_0 отвергается.

Н - критерий Крускала-Уоллиса. Критерий предназначен для оценки различий одновременно между тремя, четырьмя и т.д. выборками по уровню какого-либо признака. Он позволяет установить, что уровень признака изменяется при переходе от группы к группе, но не указывает на направление этих изменений. Данный критерий является продолжением критерия U на большее, чем 2, количество сопоставляемых выборок. Все индивидуальные значения ранжируются так, как если бы это была одна большая выборка. Затем все индивидуальные значения возвращаются в свои первоначальные выборки, и мы подсчитываем суммы полученных ими рангов отдельно по каждой выборке. Если различия между выборками случайны, суммы рангов не будут различаться сколько-нибудь существенно, так как высокие и низкие ранги равномерно распределятся между выборками. Но если в одной из выборок будут преобладать низкие значения рангов, в другой - высокие, а в третьей - средние, то критерий Н позволит установить эти различия.

Статические гипотезы формулируются следующим образом:

H_0- между выборками существуют лишь случайные различия по уровню исследуемого признака;

H_1- между выборками существуют неслучайные различия по уровню исследуемого признака.

Применяя критерий Н, нужно помнить о следующих ограничениях:

1. При сопоставления трех выборок (с = 3) допускается, чтобы $n_1= 3$, а $n_2=n_3=2$. Установить различия можно на низшем уровне значимость $\alpha = 0{,}05$. На более высоком уровне значимость $\alpha = 0{,}01$ необходимо, чтобы $n_1, n_2, n_3 \geq 3$, или выполнялось соотношение $n_1:n_2: n_3 = 4 : 2 : 2$.
2. Таблица критических значений составлена для с = 3 и $n_1, n_2, n_3 \leq 5$. При большем количестве выборок или испытуемых пользуются таблицей критерия χ^2, при этом число степеней свободы определяются формулой: $v = c - 1$.
3. При множественном сопоставлении выборок достоверные различия между конкретной парой могут стираться. Это ограничение можно преодолеть, если провести все необходимые попарные сопоставления (например, с помощью критерия U). Число таких сопоставлений: $c\,(c - 1)/2$.

Алгоритм применения критерия Н

1. Перенести все показатели на индивидуальные карточки.
2. Пометить карточки испытуемых каждой выборки своим цветом.
3. Разложить все карточки в один ряд по степени нарастания признака.
4. Проранжировать значения на карточках и написать на каждой карточке ее ранг.
5. Разложить карточки по группам и подсчитать суммы рангов для каждой группы отдельно. Проверить совпадение общей суммы рангов с расчетной
6. Вычислить эмпирическое значение критерия :

$$H_{эмп} = \frac{12}{N(N+1)} \sum_j \frac{T_j^2}{n_j} - 3(N+1)$$

где *N* – количество испытуемых в объединенной выборке;
n_j – количество испытуемых в каждой выборке;
T_j – суммы рангов по каждой выборке.

7. При количестве групп с = 3, $n_1= n_2= n_3 \leq 5$ определить

критические значения и соответствующий им уровень значимости по таблице.

Если $\mathbf{H_{эмп} \geq H_{0,05}}$, то гипотеза H_0 отвергается.

8. При количестве групп c > 3, n_1, n_2, n_3 >5 определить критические значения по таблице χ^2.

   Если $\mathbf{H_{эмп} \geq \chi^2}$, то гипотеза H_0 отвергается.

S - критерий тенденций Джонкира. Критерий S предназначен для выявления тенденций изменения признака при переходе от выборки к выборке при сопоставлении трех и более выборок. Критерий S позволяет упорядочить обследованные выборки по какому-либо признаку, например, по креативности, фрустрацноннон толерантности, гибкости и т.п. Здесь можно утверждать, что на первом месте по выраженности исследуемого признака стоит выборка, скажем, Б, на втором - А, на третьем - В и т.д. Интерпретация полученных результатов будет зависеть от того, по какому принципу были образованы исследуемые выборки. Возможны два принципиально отличных варианта:

1) если обследованы выборки, различающиеся по качественным признакам (профессии, национальности, месту работы и т. п.), то с помощью критерия S можно упорядочить выборки по количественно измеряемому признаку (креативности, фрустрационной толерантности, гибкости и т.п.);

2) если обследованы выборки, различающиеся или специально сгруппированные по количественному признаку (возрасту, стажу работы, социометрическому статусу и др.), то, упорядочивая их теперь уже по другому количественному признаку, фактически устанавливается мера связи между двумя количественными признаками. Например, можно показать с помощью критерия S, что при переходе от младшей возрастной группы к старшей фрустрационная толерантность возрастает, а гибкость, наоборот, снижается.

Ограничения критерия Джонкира:

- В каждой из сопоставляемых выборок должно быть одинаковое число наблюдений. В противном случае выборки искусственно уравниваются между собой, утрачивая при этом часть полученных наблюдений, и общая картина может быть искажена.

- Нижний порог - не менее 3 выборок и не менее 2 наблюдений в каждой выборке. Верхний порог в существующих таблицах - не более 6 выборок и не более 10 наблюдений в каждой из них.

Гипотезы для критерия Джонкира формулируются следующим образом:

H_0 - тенденция возрастания значений признака при переходе от выборки к выборке является случайной;

H_1-тенденция возрастания значений признака при переходе от выборки к выборке не является случайной.

Алгоритм применения критерия S

1. Перенести все показатели испытуемых на индивидуальные карточки.
2. Если количества испытуемых не совпадают, уравнять группы, ориентируясь на число наблюдений (n) в меньшей из групп.
3. Разложить карточки первой группы в порядке возрастания признака и занести полученный ряд значений в крайний слева столбец таблицы, затем проделать то же самое для второй и остальных групп, пока не будут заполнены все столбцы таблицы.
4. Начиная с крайнего левого столбца, подсчитать для каждого индивидуального значения количество превышающих его значений во всех столбцах справа (S_i). Полученные суммы записать рядом с каждым индивидуальным значением.
5. Подсчитать суммы показателей по столбцам.
6. Найти общую сумму по столбцам (A).
7. Подсчитать максимально возможное количество превышающих значений (B), которое мы получили бы, если бы все значения справа были выше значений слева:

   $B = c(c-1)n^2/2$, где c – количество столбцов (групп).
8. Определить эмпирическое значение $S_{эмп}$ по формуле:

   $\mathbf{S_{эмп}} = 2A- B.$
9. Определить критическое значение **S** по таблице для данного количества групп (c) и количества испытуемых в каждой группе (n). Если $\mathbf{S_{эмп} \geq S_{0,05}}$, гипотеза H_0 отклоняется.

3. ОЦЕНКА ДОСТОВЕРНОСТИ СДВИГА В ЗНАЧЕНИЯХ ИССЛЕДУЕМОГО ПРИЗНАКА.

В психологических исследованиях часто бывает важно доказать, что в результате действия каких-либо факторов произошли достоверные изменения ("сдвиги") в измеряемых показателях. К числу таких факторов должен быть отнесен прежде всего фактор времени. Сопоставление показателей, полученных у одних и тех же испытуемых по одним и тем же методикам, но в разное время, дает нам *временной сдвиг.*

Сопоставление показателей, полученных по одним и тем же методикам, но в разных условиях измерения (например, "покоя" и "стресса"), дает нам *ситуационный сдвиг.*

Условия измерения могут изменяться не только реально, но и умозрительно. Например, мы можем попросить испытуемого "представить себе", что он оказался в других условиях измерения: в будущем, в позиции других людей, которые оценивают его как бы со стороны, в состоянии разгневанного отца и т. п. Сопоставляя показатели, измеренные в обычных и воображаемых условиях, мы получаем *умозрительный сдвиг.*

Мы можем создать специальные экспериментальные условия, предположительно влияющие на те или иные показатели, и сопоставить замеры, произведенные до и после экспериментального воздействия. Если сдвиги окажутся статистически достоверными, это позволит нам утверждать, что экспериментальные воздействия были существенными, или эффективными. В этом случае происходят сдвиги под влиянием контролируемых (неконтролируемых) воздействий.

G- критерий знаков. Предназначен для установления общего направления сдвига исследуемого признака. Он позволяет установить, в какую сторону в выборке в целом изменяются значения признака при переходе от первого измерения ко второму: изменяются ли показатели в сторону улучшения, повышения или усиления или, наоборот, в сторону ухудшения, понижения или ослабления. Критерий знаков применим и к тем сдвигам, которые можно определить лишь качественно (например, изменение отрицательного отношения к чему-либо на положительное), так и к тем сдвигам, которые могут быть измерены количественно (например, сокращение времени работы над заданием после экспериментального воздействия).

Ограничения критерия знаков: Количество наблюдений в обоих замерах - не менее 5 и не более 300.

Гипотезы для критерия знаков формулируются следующим образом:

H_0 - преобладание типичного направления сдвига является случайной;

H_1- преобладание типичного направления сдвига не является случайной.

Алгоритм применения критерия G

1. Подсчитать количество нулевых реакций и исключить их из рассмотрения. В результате n уменьшится на количество нулевых реакций.
2. Определить преобладающее направление изменений. Считать сдвиги в преобладающем направлении типичными.
3. Определить количество нетипичных сдвигов. Считать это число эмпирическим значением $\mathbf{G_{эмп}}$.
4. Определить по таблице $G_{кр}$ для данного n.
5. Сопоставить $G_{эмп}$ с $G_{кр}$. Если $\mathbf{G_{эмп} \leq G_{кр}}$, то сдвиг в типичную сторону может считаться достоверным.

Т-критерий Вилкоксона. Применяется для сопоставления показателей, измеренных в двух разных условиях на одной и той же выборке испытуемых; позволяет установить направление изменений и их выраженность. Применяется критерий в тех случаях, когда признаки измерены по шкале порядка, равных интервалов и отношений. При этом сдвиги между вторым и первым замерами должны упорядочиваться.

Статистические гипотезы для критерия формулируются следующим образом:

H_0- интенсивность сдвигов в типичном направлении не превосходит интенсивности сдвигов в нетипичном направлении.

H_1 -интенсивность сдвигов в типичном направлении превышает интенсивность сдвигов в нетипичном направлении.

Ограничения: Количество наблюдений в обоих замерах – не менее 5 и не более 50.

Вычисление критерия основано на выделении типичных и нетипичных сдвигов. Необходимо проранжировать сдвиги по абсолютной величине, при этом исключая из рассмотрения «нулевые» сдвиги.

Алгоритм применения критерия Т

1. Список испытуемых внести в таблицу.
2. Вычислить разность между значениями во втором и первом замерах («после» - «до»). Определить, что будет считаться типичным сдвигом и сформулировать соответствующие гипотезы.
3. Перевести разности в абсолютные величины и записать их отдельным столбцом.
4. Проранжировать абсолютные величины разностей. Проверить совпадение полученной суммы рангов с расчетной.
5. Отметить ранги, соответствующие сдвигам в нетипичном направлении.
6. Подсчитать сумму этих рангов $\mathbf{T_{эмп}} = \sum R_i$
7. Для данного n определить по таблице критическое значение $T_{кр}$. Если $\mathbf{T_{эмп}} \le \mathbf{T_{кр}}$, сдвиг в типичную сторону по интенсивности достоверно преобладает.

χ^2_r **-критерий Фридмана.** Применяется для сопоставления показателей, измеренных в трех или более условиях на одной и той же выборке испытуемых. Позволяет установить, что величины показателей от условия к условию изменяются, но при этом не указывает на направление изменений. Данный критерий является распространением Т-критерия Вилкоксона на большее, чем 2, количество условий измерения. Однако здесь мы ранжируем не абсолютные величины сдвигов, а сами индивидуальные значения, полученные данным испытуемым в 1, 2, 3 и т. д. замерах.

Гипотезы при применении этого критерия сформулируются так:

H_0 - между показателями , полученными (измеренными) в разных условиях , существуют лишь случайные различия;

H_1 - между показателями , полученными (измеренными) в разных условиях, существуют неслучайные различия.

Ограничения критерия:

1.Нижний порог: не менее 2-х испытуемых ($n>2$), каждый из которых прошел не менее 3-х замеров ($c>3$).

2.При $c=3$, $n<9$, уровень значимости полученного эмпирического значения χ^2_r определяется по таблице;

при $c=4$, $n<4$, уровень значимости полученного эмпирического значения χ^2_r определяется по таблице;

при больших количествах испытуемых или условий полученные эмпирические значения χ^2_r сопоставляются с критическими значениями χ^2 , определяемыми по таблице. Это объясняется тем, что χ^2_r имеет распределение, сходное с распределением χ^2 . Число степеней свободы v определяется по формуле: $v=c-1$, где c - количество условий измерения (замеров).

Алгоритм применения критерия χ^2_r

1. Проранжировать индивидуальные значения первого испытуемого, полученные им в 1-м, 2-м, 3-м и т.д. замерах.
2. Проделать то же по отношению к другим испытуемым.
3. Просуммировать ранги по условиям, в которых делались замеры. Проверить совпадение общей суммы рангов с расчетной.
4. Вычислить эмпирическое значение критерия χ^2_r по формуле:

$$\boldsymbol{\chi^2_{r\ эмп}} = (12/nc(c+1)) \sum T_j^2 - 3n(c+1),$$

где c – количество условий, n – количество испытуемых, T_j - суммы рангов по каждому из условий.

5. Определить уровни статистической значимости для полученного эмпирического значения критерия χ^2_r.
6. При большем количестве условий или испытуемых вычислить число степеней свободы по формуле $v = c - 1$. Найти по таблице критическое значение критерия при данном числе степеней свободы v. Если $\boldsymbol{\chi^2_{r\ эмп} \geq \chi^2_{r\ кр}}$ **,** то различия достоверны.

L - критерий тенденций Пейджа. Применяется для сопоставления показателей, измеренных в трех и более условиях на одной и той же выборке испытуемых. Критерий позволяет выявить тенденции в изменении величин признака при переходе от

условия к условию. Его можно рассматривать как продолжение теста
Фридмана, поскольку он не только констатирует различия, но и указывает на направление изменений. Критерий позволяет проверить предположения об определенной возрастной или ситуативно обусловленной динамике тех или иных признаков. Он позволяет объединить несколько произведенных замеров единой гипотезой о тенденции изменения значений признака при переходе от замера к замеру.

Гипотезы для критерия Пейджа формулируются следующим образом:

H_0 - увеличение индивидуальных показателей при переходе от первого условия ко второму, затем к третьему и далее случайно;

H_1- увеличение индивидуальных показателей при переходе от первого условия ко второму, затем к третьему и далее случайно.

Ограничения: небольшая выборка (n≤12) и ограниченное количество сопоставляемых замеров (c≤6).

В таблице критические значения критерия представлены для 3 уровней значимости: $\alpha = 0{,}05$, $\alpha = 0{,}01$, $\alpha = 0{,}001$.

Необходимым условием применения теста *L* является упорядоченность столбцов данных: слева должен располагаться столбец с наименьшей ранговой суммой, а справа - наибольшей.

Алгоритм применения критерия L

1. Проранжировать индивидуальные значения первого испытуемого, полученные им в 1-м, 2-м, 3-м и т. д. замерах.
2. Проделать то же самое с индивидуальными значениями остальных испытуемых.
3. Просуммировать ранги по условиям. Проверить совпадение общей суммы рангов с расчетной суммой.
4. Расположить все условия в порядке возрастания их ранговых сумм в таблице.
5. Вычислить эмпирическое значение критерия по формуле:

$$\mathbf{L_{эмп}} = \sum T_j\, j$$

где T_j- сумма рангов по данному условию, j- порядковый номер условия.

6. По таблице определить критические значения $L_{кр}$ для данного количества испытуемых *n и* данного количества условий *с.* Если $\mathbf{L_{эмп} \geq L_{кр}}$ то тенденция достоверна.

4. ВЫЯВЛЕНИЕ РАЗЛИЧИЙ В РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРИЗНАКА.

Распределения могут различаться по средним, дисперсиям, асимметрии, эксцессу и по сочетаниям этих параметров. Поэтому анализ реально получаемых в исследованиях распределений может позволить подтвердить или опровергнуть данные теоретического предположения.

χ2 - критерий Пирсона. Критерий применяется в двух целях (наиболее часто встречающимися):

1) для сопоставления эмпирического распределения признака с теоретическим - равномерным, нормальным или каким-то иным;

2) для сопоставления двух, трех и более эмпирических распределений одного и того же признака.

Критерий χ2 отвечает на вопрос о том, с одинаковой ли частотой встречаются разные значения признака в эмпирическом и теоретическом распределениях или в двух и более эмпирических распределениях.

Преимущество метода состоит в том, что он позволяет сопоставлять распределения признаков, представленных в любой шкале, начиная от шкалы наименований.

При сопоставлении эмпирического распределения с теоретическим мы определяем степень расхождения между эмпирическими и теоретическими частотами.

При сопоставлении двух эмпирических распределений мы определяем степень расхождения между эмпирическими частотами и теоретическими частотами, которые наблюдались бы в случае совпадения двух этих эмпирических распределений.

Чем больше расхождение между двумя сопоставляемыми распределениями, тем больше эмпирическое значение χ2 .

Для применения критерия хи-квадрат необходимо соблюдать следующие условия:

1. Измерение может быть проведено в любой шкале.
2. Выборки должны быть случайными и независимыми.
3. Желательно, чтобы объем выборки был ≥ 20. С увеличением объема выборки точность критерия повышается.
4. Теоретическая частота для каждого выборочного интервала не должна быть меньше 5.
5. Сумма наблюдений по всем интервалам должна быть равна общему количеству наблюдений.
6. Таблица критических значений критерия хи-квадрат рассчитана для числа степеней свободы v, которое каждый раз рассчитывается по определенным правилам. В общем случае число степеней свободы определяется по формуле: v = c - 1, где c — число альтернатив (признаков, значений, элементов) в сравниваемых переменных. Для таблиц число степеней свободы определяется по формуле: v = (k - 1) • (c - 1), где k — число столбцов, c — число строк.

В зависимости от поставленной задачи возможны 3 варианта гипотез.

1) H_0-полученное эмпирическое распределение признака не отличается от теоретического распределения;
   H_1-полученное эмпирическое распределение признака отличается от теоретического распределения;
2) H_0- эмпирическое распределение 1 не отличается от эмпирическое распределение признака 2;
   H_1- эмпирическое распределение 1 статистически значимо отличаетсется от эмпирическое распределения 2;
3) H_0- эмпирические распределения 1,2,3 не различаются между собой;
   H_1- эмпирические распределения 1,2,3 различаются между собой.

Алгоритм применения критерия χ2

1. Занести в таблицу наименования разрядов и соответствующие им эмпирические частоты.
2. Рядом с каждой эмпирической частотой записать теоретическую частоту.

3. Вычислить разность между эмпирической и теоретической частотой по каждому разряду.
4. Определить число степеней свободы по формуле $v=k-1$, где k-количество разрядов признака. Если $v=1$, то внести поправку на непрерывность, заменив $f_{эмп}-f_{теор}$ на $|f_{эмп}-f_{теор}|-0,5$.
5. Возвести в квадрат полученные разности.
6. Разделить полученные квадраты разностей на теоретическую частоту.
7. Просуммировать значения последнего столбца. Полученную сумму обозначить $\chi 2_{эмп.}$
8. Определить по таблице критическое значение $\chi 2_{кр}$ для вычисленного v.

   Если $\boldsymbol{\chi 2_{эмп} < \chi 2_{кр}}$, то расхождения между распределениями статистически недостоверны.

   Если $\boldsymbol{\chi 2_{эмп} < \chi 2_{кр}}$, то расхождения между распределениями статистически достоверны.

λ -критерий Колмогорова – Смирнова. Предназначен для сопоставления либо эмпирического распределения с теоретическим, либо двух эмпирических распределений. Критерий позволяет найти точку, в которой сумма накопленных расхождений между двумя распределениями является наибольшей, и оценить достоверность этого расхождения. При использовании критерия Колмогорова – Смирнова нужно учитывать следующие *ограничения:*

1.Выборка должна быть достаточно большой. При сопоставлении двух эмпирических распределений должно быть $n1,n2 \geq 50$. При сопоставлении эмпирического и теоретического распределений допускается $n \geq 5$.

2.Разряды должны быть упорядочены по нарастанию (или убыванию) значений признака, то есть, они обязательно должны отражать однонаправленное его изменение.

Статистические гипотезы для критерия формулируются следующим образом:

H_0- распределения между двумя распределениями недостоверны;

H_1- распределения между двумя распределениями достоверны;

Алгоритм применения критерия между эмпирическим и равномерным распределениями

1. Занести в таблицу наименования разрядов и соответствующие им эмпирические частоты.
2. Найти относительные эмпирические частоты для каждого разряда по формуле: $f^*_{эмп}=f_{эмп}/n$.
3. Подсчитать накопительные относительные частоты $\sum f^*_j$ по формуле: $\sum f^*_j=\sum f^*_{j-1}+f^*_j$, где $\sum f^*_{j-1}$- относительные частоты, накопленные на предыдущих разрядах.
4. Подсчитать накопительные относительные теоретические частоты для каждого разряда по формуле: $\sum f^*_{теор\ j} =\sum f^*_{теор\ j-1}+f^*_{теор\ j}$, где $\sum f^*_{теор\ j-1}$- относительные теоретические частоты, накопленные на предыдущих разрядах.
5. Вычислить разности между эмпирическими и теоретическими накопленными относительными частотами по каждому разряду.
6. Далее найти абсолютные величины полученных разностей.
7. По последнему столбцу определить наибольшую абсолютную величину разности $\mathbf{d_{эмп}}=d_{max}$.
8. Для данного числа n по таблице найти критическое значение $d_{кр}$. Если $\mathbf{d_{эмп} \geq d_{кр}}$, то различия между распределениями достоверны.

5. ВЫЯВЛЕНИЕ СТЕПЕНИ СОГЛАСОВАННОСТИ ИЗМЕНЕНИЙ.

Метод **ранговой корреляции Спирмена** позволяет определить тесноту (силу) и направление корреляционной связи между двумя признаками или двумя профилями (иерархиями) признаков.

Для подсчета ранговой корреляции Спирмена необходимо располагать двумя рядами значений, которые могут быть проранжированы. Такими рядами значений могут быть:

1) два признака, измеренные в одной и той же группе испытуемых;

2) две индивидуальные иерархии признаков, выявленные у двух испытуемых по одному и тому же набору признаков (например, личностные профили по 16-факторному опроснику Р. Б. Кеттелла, иерархии ценностей по методике Р. Рокича, последовательности предпочтений в выборе из нескольких альтернатив и др.);

3) две групповые иерархии признаков;

4) индивидуальная и групповая иерархии признаков.

Вначале показатели ранжируются отдельно по каждому из признаков. Как правило, меньшему значению признака начисляется меньший ранг.

Ограничения коэффициента ранговой корреляции

1) по каждой переменной должно быть представлено не менее 5 наблюдений;

2) коэффициент ранговой корреляции Спирмена при большом количестве одинаковых рангов по одной или обеим сопоставляемым переменным дает огрубленные значения. В идеале оба коррелируемых ряда должны представлять собой две последовательности несовпадающих значений.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ.

Пример 1. У предполагаемых участников психологического эксперимента, моделирующего деятельность воздушного диспетчера, с помощью методики Векслера был измерен уровень вербального интеллекта. Было обследовано 26 юношей в возрасте от 18 до 24 лет; 15 из них студенты физического факультета, а 12 – психологического факультета. Показатели вербального интеллекта приведены в табл.1. Можно ли утверждать, что одна из групп превосходит другую по уровню вербального интеллекта?

Таблица 1.
Индивидуальные значения вербального интеллекта в выборках студентов физического и психологического факультетов.

Студенты-физики		Студенты-психологии	
Номер испытуемого	Показатель вербального интеллекта	Номер испытуемого	Показатель вербального интеллекта
1	132	1	126
2	134	2	127
3	124	3	123
4	132	4	120
5	135	5	119
6	132	6	126
7	131	7	120
8	132	8	123
9	121	9	120
10	127	10	116
11	136	11	123
12	129	12	115
13	136		
14	136		

Решение. Задачу будем решать с помощью критерия Розенбаума. Для этого упорядочим значения в обеих выборках и составим новую таблицу в соответствии с алгоритмом (табл.2.).

Таблица 2

Студенты-физики			Студенты-психологии		
Номер испытуемого	Показатель вербального интеллекта	S_1	Номер испытуемого	Показатель вербального интеллекта	S_2

1	136				
2	136				
3	136	5			
4	135				
5	134				
6	132		1	132	
7	132				
8	132				
9	132				
10	131				
11	129				
12	127		2	127	
			3	126	
			4	126	
13	124				
			5	123	
14	121		6	123	
			7	120	
			8	120	
			9	120	6
			10	119	
			11	116	
			12	115	

Сформулируем гипотезы:

H_0- студенты-физики не превосходят студентов-психологов по уровню вербального интеллекта;

H_1- студенты-физики превосходят студентов-психологов по уровню вербального интеллекта.

Из табл. 2 видно, что $S_1 = 5$, $S_2 = 6$, по алгоритму критерия:

$\mathbf{Q}_{эмп} = S_1 + S_2 = 11$.

Найдем критические значения критерия для $n_1=14$ и $n_2=12$:

$\mathbf{Q}_{кр} = 7$ для $\alpha = 0{,}05$ и $Q_{кр} = 9$ для $\alpha = 0{,}01$.

$\mathbf{Q}_{эмп} = 11 > 7 = \mathbf{Q}_{кр}$, гипотеза H_0 отклоняется,

$\mathbf{Q}_{эмп} = 11 > 9 = Q_{кр}$, H_1 принимается.

Вывод: студенты-физики превосходят студентов-психологов по уровню вербального интеллекта.

Пример 2. У предполагаемых участников психологического эксперимента, моделирующего деятельность воздушного диспетчера, с помощью методики Викслера был измерен уровень невербального интеллекта. Группы испытуемых – те же, что в задаче 2.1. Показатели невербального интеллекта приведены в табл. 2.3. Можно ли утверждать, что одна из выборок превосходит другую по уровню невербального интеллекта?

Таблица 3

Индивидуальные значения невербального интеллекта в выборках студентов физического и психологического факультетов.

Студенты-физики		Студенты-психологии	
Номер испытуемого	Показатель вербального интеллекта	Номер испытуемого	Показатель вербального интеллекта
1	111	1	113
2	104	2	107
3	107	3	123
4	90	4	122
5	115	5	117
6	107	6	112
7	106	7	105
8	107	8	108
9	95	9	111
10	116	10	114

11	127	11	102
12	115	12	104
13	102		
14	99		

Решение. В данном случае критерий Розенбаума неприменим, так как и наибольшее и наименьшее значение находится в одной выборке студентов-физики. Выполним шаг 1-7 алгоритма критерия Манна-Уитни и построим новую таблицу (табл.4).

Таблица 4

Студенты-физики			Студенты-психологии		
Номер испытуемого	Показатель вербального интеллекта	Ранг	Номер испытуемого	Показатель вербального интеллекта	Ранг
1	127	26	1	123	25
2	116	22	2	122	24
3	115	20,5	3	117	23
4	115	20,5			
			4	114	19
			5	113	18
			6	112	17
			7	111	15,5
5	111	15,5	8	108	14
			9	107	11,5
6	107	11,5			
7	107	11,5			
8	107	11,5			
9	106	9			
			10	105	8
10	104	6,5	11	104	6,5
11	102	4,5	12	102	4,5
12	99	3			
13	95	2			
14	90	1			
Суммы	1501	165		1338	186
Средние	107,2			111,5	

Общая сумма рангов: 165+186 = 351. Расчетная сумма: $\sum R_i$ = N(N+1)/2 = 26(26+1)/2 = 351.

Проверка выполнена. Из табл. 4 видно, что большая ранговая сумма происходит на выборку студентов-психологов.

Теперь сформулируем гипотезы:

H_0 -студенты-психологи не превосходят студентов-физиков по уровню невербального интеллекта;

H_1 -студенты-психологи превосходят студентов-физиков по уровню невербального интеллекта.

В соответствие с шагом 8 алгоритма критерия вычисляем $U_{эмп}$:

$U_{эмп}$ = 14*12 + 12(12+1)/2 – 186 = 60.

По таблице для n_1= 12 и n_2= 14 находим $Q_{0,05}$ = 51 и в соответствие с шагом 9 алгоритма гипотезу H_0 принимаем.

Вывод: студенты-психологии не превосходят студентов-физиков по уровню невербального интеллекта.

Пример 3. В эксперименте по исследованию интеллектуальной настойчивости 22 испытуемых предъявлялись сначала разрешимые четырехбуквенные, пятибуквенные и шестибуквенные анаграммы, а затем неразрешимые анаграммы, время работы над которой не ограничивалось (испытуемые не знали, что анаграммы не разрешимы). Было использовано 4 комплекта анаграмм. Время (в секундах) решения испытуемыми неразрешимых анаграмм представлены в табл.5. Можно ли утверждать, что длительность попыток решения каждой из 4 неразрешимых анаграмм примерно одинакова?

Таблица 5

Номер испытуемого	Группа 1 $(n_1 = 4)$ ФОЛИТОН	Группа 2 $(n_2 = 8)$ КАМУСТО	Группа 3 $(n_3 = 6)$ СНЕРАКО	Группа 4 $(n_4 = 4)$ ГРУТОСИЛ

1	145	145	128	60
2	194	210	283	2361
3	731	236	469	2416
4	1200	385	482	3600
5		720	1678	
6		848	2081	
7		905		
8		1080		
Суммы	2270	4549	5121	8437
Средние	568	566	854	2109

Решение. Сформулируем гипотезы:

H_0- 4 группы испытуемых, получившие разные неразрешимые анаграммы, не различаются по длительности попыток их решения;

H_1- 4 группы испытуемых, получившие разные неразрешимые анаграммы, различаются по длительности попыток их решения.

Используем алгоритм критерия Крускала-Уоллиса. Расчет ранговых сумм приведем в табл. 6.

Таблица 6

Группа 1 ($n_1 = 4$) ФОЛИТОН		Группа 2 ($n_2 = 8$) КАМУСТО		Группа 3 ($n_3 = 6$) СНЕРАКО		Группа 4 ($n_4 = 4$) ГРУТОСИЛ	
Время	Ранг	Время	Ранг	Время	Ранг	Время	Ранг

						60	1
				128	2		
145	3,5	145	3,5				
194	5						
		210	6				
		236	7				
				283	8		
		385	9				
				469	10		
				482	11		
		720	12				
731	13						
		848	14				
		905	15				
		1080	16				
1200	17						
				1678	18		
				2081	19		
						2361	20
						2416	21
						3600	22
Суммы	38,5		82,5		68		64
Сред-ние	9,6		10,3		11,3		16,0

Общая сумма рангов: 38,5 + 82,5 + 68 + 64 = 253.

Расчетная сумма рангов: 22*(22 + 1) /2 = 253. Реальная и расчетная суммы совпадают. Вычислим эмпирическое значение :

$$H_{эмп} = \frac{12}{N(N+1)} \sum_j \frac{T_j^2}{n_j} - 3(N+1) = \frac{12}{22(22+1)} \left(\frac{38{,}5^2}{4} + \frac{82{,}5^2}{8} + \frac{68^2}{6} + \frac{64^2}{4} \right) -$$

$$-3(22+1) = 2{,}48$$

Таблицы критических значений критерия Н Крускала-Уоллиса составлены для количества групп с = 3, а в данной задаче 4 группы. В соответствии с алгоритмом, полученное значение $H_{эмп}$ сравним с критическим значением критерия. χ^2 Для этого критерия найдем число степеней свободы: v = c – 1 = 4 – 1 = 3,

$\chi^2_{кр}$ =7,815 (α = 0,05) *и* $\chi^2_{кр}$ = 11,345 (α = 0,01).

Так как $H_{эмп} < \chi^2_{кр}$ (α = 0,05), то гипотеза H_0 принимается.

Вывод: 4 группы испытуемых, получивших разные неразрешимые анаграммы, не различаются по длительности попыток их решения.

Пример 4. Обследовалась выборка из 20 мужчин - претендентов на должность коммерческого директора фирмы. Одним из качеств, интересовавших фирму, была «Авторитетность». Показатель авторитетности каждого участника определялся с помощью экспресс- видео-диагностики. После этого проводился социометрический опрос, в котором испытуемые должны были ответить на вопрос; «Если бы я был представителем фирмы, я бы выбрал на должность коммерческого директора: 1)..., 2)…, 3)...». Участники знали, что кроме всего проверяется их способность к объективному суждению о людях. В результате каждый испытуемый получил определенное количество выборов от других участников, отражающее его социометрический статус в группе. Показатели авторитетности в группах с разным социометрическим статусом приведены в табл. 7. Можно ли считать, что группы с разным статусом различаются и по уровню авторитетности?

Таблица 7

Номер испытуемого	Группа 1: 0 выборов	Группа 2: 1 выбор	Группа 3: 2-3 выбора	Группа 4: 4 и более выборов
1	5	5	5	9
2	5	6	6	9
3	2	7	7	8
4	5	6	7	8
5	4	4	5	7
Суммы	21	28	30	41
Среднее	4,2	5,6	6,0	8,2

Решение. Сформулируем гипотезы:

H_0 -тенденция повышения значений по шкале «Авторитетность» при переходе от группы к группе (слева направо) случайна;

H_1 -тенденция повышения значений по шкале «Авторитетность» при переходе от группы к группе (слева направо) неслучайна.

Вычисления производятся в соответствии с алгоритмом критерия Джонкира. Для удобсгва вычислений упорядочим индивидуальные значения в каждой группе по их возрастанию. В табл. 8 для каждой группы будет два столбца: левый - индивидуальные значения, правый - суммы S_i, которые равны количеству индивидуальных значений, превышающих данное, в тех группах, что расположены справа.

Таблица 8

Места испытуемых	Группа 1: 0 выборов		Группа 2: 1 выбор		Группа 3: 2-3 выбора		Группа 4: 4 и более
	Индив. Знач.	S_i	Индив. Знач.	S_i	Индив. Знач.	S_i	Индив. Знач.
1	2	15	4	10	5	5	7
2	4	14	5	8	5	5	8
3	5	11	6	7	6	5	8
4	5	11	6	7	7	4	9
5	5	11	7	4	7	4	9
Суммы		67		36		23	

Подсчитаем общую сумму: $A = \sum S_i = 62 + 36 + 23 + 0 = 121$.

Подсчитаем максимально возможное количество превышающих значений, которое мы получили бы, если бы все значения справа были выше значений слева:
$B = c(c-1)n^2/2 = 4*3*25/2 = 150$.

Определим критическое значение критерия *S:*

$S_{эмп} = 2A – B = 2*121 - 150 = 92$.

Найдем по таблице критических значений $S_{кр}$ для $C = 4$ и $n = 5$: $S_{кр} = 51$ ($\alpha = 0{,}05$) и $S_{кр} = 72$ ($\alpha = 0{,}01$). Так как $S_{эмп} > S_{кр}$ для $\alpha = 0{,}01$, то гипотеза H_0 отвергается, а H_1 принимается.

Вывод: тенденция повышения значений по шкале «Авторитетность» при переходе от группы к группе неслучайна: с ростом статуса растут и показатели авторитетности.

Пример 5. В исследовании Г.А. Бадасовой изучались личностные факторы суггестора, способствующие его внушающему воздействию на аудиторию. В эксперименте участвовали 39 человек, они разделялись на экспериментальную (n_1 = 16) и контрольную (n_2 = 23) группы. Экспериментальная группа просматривала видеозапись речи суггестора о пользе физических наказаний в воспитании детей, а контрольная группа просто читала про себя письменный текст этой речи. До и после эксперимента испытуемые обеих групп отвечали на 3 вопроса, оценивая степень согласия с их содержанием по 7-балльной шкале:

- я считаю возможным иногда шлепнуть своего ребенка за дело, если он это заслужил;
- если, придя домой, я узнаю, что кто-то из близких, бабушка или дедушка, шлепнул моего ребенка за дело, то я буду считать, что это нормально;
- если я узнаю, что воспитательница детского сада или учительница в школе шлепнула моего ребенка за дело, то я восприму это как должное.

Результаты двух замеров в группах представлены в табл.9 и 10.

Вопросы:

1. Можно ли утверждать, что после просмотра видеозаписи о пользе телесных наказаний наблюдается достоверный сдвиг в сторону большего принятия их в экспериментальной группе?
2. Является ли достоверным сдвиг оценок в сторону большего принятия их в контрольной группе?

Таблица 9

Оценки степени согласия с утверждениями о допустимости телесных наказаний до и после показа видеозаписи в экспериментальной группе.

№ п/п	"Я сам"			"Бабушка"			"Воспитатель"		
	До	После	Сдвиг	До	После	Сдвиг	До	После	Сдвиг
1	4	4	0	2	4	+2	1	1	0
2	1	1	0	1	1	0	1	1	0
3	5	5	0	4	4	0	3	4	0
4	4	5	+1	3	3	0	2	3	+1
5	3	3	0	3	4	+1	2	3	+1
6	4	4	+1	5	5	0	1	1	0
7	3	3	0	3	3	0	1	1	0
8	5	6	+1	5	6	+1	3	3	0
9	6	7	+1	5	7	+2	3	3	0
10	2	3	+1	2	3	+1	2	1	-1
11	6	6	0	3	3	0	2	1	-1
12	5	5	0	3	5	+2	4	4	0
13	7	7	0	5	5	0	4	4	0
14	5	6	+1	5	6	+1	2	2	0
15	5	6	+1	5	6	+1	4	3	-1
16	6	7	+1	6	7	+1	4	4	0

Таблица 10

Оценки степени согласия с утверждениями о допустимости телесных наказаний до и после чтения текста в контрольной группе.

№ п/п	"Я сам"			"Бабушка"			"Воспитатель"		
	До	После	Сдвиг	До	После	Сдвиг	До	После	Сдвиг
1	4	4	0	5	5	0	1	1	0
2	7	7	0	7	7	0	7	7	0
3	2	2	0	1	1	0	3	1	-2
4	4	3	-1	3	2	-1	1	1	0
5	3	5	+2	5	5	0	3	3	0
6	2	1	-1	2	1	-1	1	1	0
7	5	5	0	3	3	0	1	1	0
8	2	2	0	2	3	+1	1	3	+2
9	3	4	+1	3	4	+1	1	1	0
10	5	5	0	5	5	0	1	1	0
11	5	5	0	1	1	0	1	1	0
12	2	2	0	1	1	0	1	1	0
13	1	1	0	1	1	0	1	2	+1
14	4	3	-1	7	5	-2	2	4	+2
15	3	4	+1	2	3	+1	1	2	+1
16	4	4	0	3	3	0	1	1	0
17	3	3	0	2	2	0	1	1	0
18	6	6	0	6	6	0	6	6	0
19	2	2	0	2	1	-1	1	1	0
20	1	2	+1	1	1	0	1	1	0
21	2	2	0	2	2	0	2	1	-1
22	6	6	0	6	6	0	3	3	0
23	3	2	-1	1	2	+1	1	1	0

Решение. Задачу будем решать с помощью критерия знаков. Подсчитаем количество положительных, отрицательных и нулевых сдвигов в каждой шкале в каждой из выборок. Результаты вычислений занесем в табл. 11.

Таблица 11

Кол-во сдвигов	"Я сам"	"Бабушка"	"Воспитатель"	Суммы
1.Экспериментальная группа				
Положительные	8	9	2	19
Отрицательные	0	0	3	3
Нулевые	8	7	11	26
Суммы	16	16	16	48
2.Контрольная группа				
Положительные	4	4	4	12
Отрицательные	4	4	2	10
Нулевые	15	15	17	47
Суммы	23	23	23	69

Больше всего нулевых сдвигов в шкале "Я сам наказываю" и "Бабушка наказывает" в экспериментальной группе, примерно в половине случаев наблюдаются положительные сдвиги (табл. 10).

Сформулируем гипотезы.

- H_0 сдвиг в сторону более снисходительного отношения к телесным наказаниям после внушения является случайным;
- H_1 сдвиг в сторону более снисходительного отношения к телесным наказаниям после внушения является неслучайным.

Ответим сначала на первый вопрос.

Поскольку нулевые сдвиги следует отбросить, количество сопоставляемых пар в экспериментальной группе уменьшится: для шкалы " Я сам наказываю" n = 8, для шкалы " Бабушка наказывает" n = 9 и для шкалы "Воспитатель наказывает " n = 5.

1) Шкала "Я сам наказываю", n = 8.
Типичный сдвиг – положительный. Отрицательных сдвигов нет, $G_{эмп.}= 0$. По таблице критических значений находим: $G_{кр.}= 1$ ($\alpha = 0,05$); $G_{кр.}= 0$ ($\alpha = 0,01$). $G_{эмп.} \le G_{кр.}$ ($\alpha = 0,01$), поэтому H_0 отклоняем и принимаем H_1.
2) Шкала "Бабушка наказывает", n = 9.
Типичный сдвиг – положительный. Отрицательных сдвигов нет, $G_{эмп.}= 0$. По таблице критических значений $G_{кр.}= 1$ ($\alpha = 0,05$), $G_{кр.}= 0$ ($\alpha = 0,01$). $G_{эмп.} \le G_{кр.}$ ($\alpha = 0,01$), поэтому H_0 отклоняем и принимаем H_1.
3) Шкала "Воспитатель наказывает ", n = 5.
Типичный сдвиг – отрицательный. Положительных сдвигов – 2, $G_{эмп.} = 2$.
По таблице критических значений $G_{кр.}= 0$ ($\alpha = 0,05$), $G_{кр.}$ ($\alpha = 0,01$)

определить нельзя. $G_{эмп.} > G_{кр.}$ (α = 0,05), поэтому H_0 принимаем.

4) Сумма по трем шкалам, n = 22.
   Типичный сдвиг – положительный. Отрицательных сдвигов – 3, $G_{эмп.}$ = 3. По таблице критических значений $G_{кр.}$ = 6 (α = 0,05), $G_{кр.}$ = 5 (α = 0,01), $G_{эмп.} \leq G_{кр.}$(α = 0,01), поэтому H_0 отклоняем и принимаем H_1

Вывод: сдвиг в сторону более снисходительного отношения к телесным наказаниям после просмотра видеозаписи в экспериментальной группе является неслучайным для шкал "Я сам наказываю", "Бабушка наказывает" и по сумме трех шкал.

Ответим на второй вопрос. Проделаем такие же вычисления для контрольной группы.

1) Шкала "Я сам наказываю", n = 8.
   Типичный сдвиг установить невозможно, так как положительных и отрицательных сдвигов поровну. H_0 принимаем.
2) Шкала "Бабушка наказывает", n = 8.
   Типичный сдвиг установить невозможно, так как положительных и отрицательных сдвигов поровну. H_0 принимаем.
3) Шкала "Воспитатель наказывает ", n = 6.
   Типичный сдвиг – положительный. Отрицательных сдвигов – 2, $G_{эмп.}$ = 2. Согласно таблице критических значений $G_{кр.}$ = 0 (α = 0,05), $G_{кр.}$ (α = 0,01) определить нельзя. $G_{эмп.} > G_{кр.}$ (α = 0,05), поэтому H_0 принимаем.
4) Сумма по трем шкалам, n = 22.
   Типичный сдвиг – положительный. Отрицательных сдвигов 10, $G_{эмп.}$ = 10.
   Согласно таблице критических значений $G_{кр.}$ = 6 (α = 0,05), $G_{кр.}$ = 5 (α = 0,01), $G_{эмп.} > G_{кр.}$ (α = 0,05), поэтому H_0 принимаем.

Вывод: сдвиг в сторону более снисходительного отношения к телесным наказаниям после просмотра видеозаписи в контрольной группе является случайным и по шкалам в отдельности и по сумме всех шкал.

Обобщающий вывод: в экспериментальной группе испытуемые стали более снисходительнее относиться к телесным наказаниям, а в контрольной группе достоверных сдвигов нет. Видимо суггестор действительно повлиял на изменение оценок.

Пример 6. 12 участников комплексной программы тренинга партнерского общения, продолжавшегося 7 дней, дважды оценивали свой уровень владения тремя важнейшими коммуникативными навыками. Первое измерение производилось в первый день тренинга, второе - в последний день по 10-балльной шкале (табл. 12).

Таблица 12

Номер участника	Активное слушание		Снижение напряжения		Аргументация	
	1-й замер	2-й замер	1-й замер	2-й замер	1-й замер	2-й замер
1	6	7	5	6	5	7
2	3	5	1	4	4	5
3	4	8	4	7	5	6
4	4	6	4	5	5	5
5	6	4	4	5	4	5
6	6	8	5	7	3	6
7	3	7	5	8	2	5
8	6	5	5	7	3	5
9	6	7	5	6	5	5
10	5	7	6	7	5	6
11	6	5	6	4	3	3
12	6	7	3	6	4	5

Вопрос: ощущаются ли участниками достоверные сдвиги в уровне владения каждым из трех навыков после тренинга?

Решение. В соответствии с алгоритмом критерия Вилкоксона построим новую таблицу, в которую внесем сдвиги индивидуальных значений и проранжируем абсолютные величины этих сдвигов (табл. 13).

Таблица 13

<table>
<tr><th rowspan="2">Номер участника</th><th colspan="3">Сдвиги</th><th colspan="3">Ранги абсолютных величин</th></tr>
<tr><th>Активное слуша-ние</th><th>Снижение напряже-ния</th><th>Аргумен-тация</th><th>Активное слушание</th><th>Снижение напряже-ния</th><th>Аргумента-ция</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>6,5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>8</td><td>10,5</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>1</td><td>11,5</td><td>10,5</td><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>8</td><td>3</td><td>-</td></tr>
<tr><td>5</td><td>-2</td><td>1</td><td>1</td><td>8</td><td>3</td><td>3</td></tr>
<tr><td>6</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>8</td><td>7</td><td>8,5</td></tr>
<tr><td>7</td><td>4</td><td>3</td><td>3</td><td>11,5</td><td>10,5</td><td>8,5</td></tr>
<tr><td>8</td><td>-1</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>7</td><td>6,5</td></tr>
<tr><td>9</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>3</td><td>3</td><td>-</td></tr>
<tr><td>10</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>8</td><td>3</td><td>3</td></tr>
<tr><td>11</td><td>-1</td><td>-2</td><td>0</td><td>3</td><td>7</td><td>-</td></tr>
<tr><td>12</td><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>10,5</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Нетипичные сдвиги</td><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">0</td><td colspan="3">Суммы рангов нетипичных сдвигов</td></tr>
<tr><td>14</td><td>7</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Всего сдвигов</td><td>12</td><td>12</td><td>9</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

По всем шкалам положительных сдвигов больше, поэтому они являются типичными сдвигами (табл. 13).

Сформулируем гипотезы:

H_0- интенсивность положительных сдвигов в самооценках уровня владения коммуникативными навыками не превосходит интенсивности отрицательных;

H_1- интенсивность положительных сдвигов в самооценках уровня владения коммуникативными навыками превосходит интенсивность отрицательных.

Напомним, что нулевые сдвиги исключаются из рассмотрения, поэтому в шкале “Аргументация” количество пар значений осталось равным 9. Проверим совпадение ранговых сумм. Суммы рангов для шкал “Активное слушание” и “Снижение напряжения” составляют 78, что совпадает с расчетной суммой:

$$\sum R_i = N(N + 1)/2 = 12(12 + 1)/2 = 78.$$

Общая сумма рангов для шкалы “Аргументация” составляет 45, что совпадает с расчетной суммой.

$$\sum R_i = N(N + 1)/2 = 9(9 + 1)/2 = 45.$$

Проверим гипотезы, определив по таблице критические значения критерия Вилкоксона.

Шкала “Активное слушание”, $n = 12$:

$T_{кр} = 17$ ($\alpha = 0{,}05$), $T_{кр} = 9$ ($\alpha = 0{,}01$), $T_{эмп} = 14$. $T_{эмп} < T_{кр}$ ($\alpha = 0{,}05$), поэтому H_0 отклоняется. Преобладание положительных сдвигов по навыкам активного слушания неслучайно.

Шкала “Снижение напряжения”, $n = 12$:

$T_{кр} = 17$ ($\alpha = 0{,}05$), $T_{кр} = 9$ ($\alpha = 0{,}01$), $T_{эмп} = 7$. $T_{эмп} < T_{кр}$ ($\alpha = 0{,}01$), поэтому H_0 отклоняется и принимается H_1 : преобладание положительных сдвигов по навыку “Снижение напряжения” не является случайным.

Шкала “Аргументация”, $n = 9$:

$T_{кр} = 8$ ($\alpha = 0{,}05$), $T_{кр} = 3$ ($\alpha = 0{,}01$), $T_{эмп} = 0$. $T_{эмп} < T_{кр}$ ($\alpha = 0{,}01$), поэтому H_0 отклоняется и принимается H_1 : преобладание положительных сдвигов по навыку “Аргументация” не является случайным.

Вывод: участники тренинга ощущают значимые положительные сдвиги по трем группам коммуникативных навыков.

Пример 7. В эксперименте по исследованию интеллектуальной настойчивости измерялось время, потраченное испытуемыми на решение анаграмм, которые подбирались таким образом, чтобы постепенно подготовить их к самой трудной задаче (сначала четырехбуквенные, затем пятибуквенные и шестибуквенные анаграммы). В табл.14 даны показатели времени решения анаграмм пятью испытуемыми. Достоверны ли различия во времени решения анаграмм испытуемыми?

Таблица 14

Номер испытуемого	Анаграмма 1: КРУА (РУКА)	Анаграмма 2: АЛСТЬ (СТАЛЬ)	Анаграмма3: ИНААМШ (МАШИНА)
1	5	235	7
2	7	604	20
3	2	93	5
4	2	171	8
5	35	141	7
Суммы	51	1244	47
Средние	10,2	248,8	9,4

Решение. Выполним шаги алгоритма критерия Фридмана. Проранжируем индивидуальные значения, полученные каждым испытуемым по трем анаграммам. Вычисления занесем в табл. 15.

Таблица 15

Номер испытуемого	Анаграмма 1		Анаграмма 2		Анаграмма 3	
	Время	Ранг	Время	Ранг	Время	Ранг
1	5	1	235	3	7	2
2	7	1	604	3	20	2
3	2	1	93	3	5	2
4	2	1	171	3	8	2
5	35	2	141	3	7	1
Суммы		6		15		9

Вычислим расчетную сумму рангов: $\sum R_i = nc(c + 1)/2 = 5 \cdot 3 \cdot (3 + 1)/2 = 30$.

Общая сумма рангов составляет: 6 + 15 + 9 = 30, совпадение сумм проверено.

Сформулируем гипотезы:

H_0-различия во времени, которые испытуемые затрачивают на решение трех анаграмм, являются случайными;

H_1- различия во времени, которые испытуемые затрачивают на решение трех анаграмм, не являются случайными.

Вычислим эмпирическое значение критерия χ^2_r :

$$\chi^2_r = (12/(5\cdot3\cdot4)) \times(6^2 + 15^2 + 9^2) - 3\cdot5\cdot4 = 8{,}4.$$

Найдем уровень значимости при c = 3, n = 5 для найденного эмпирического значения $\chi^2_r = 8{,}4$: α= 0,0085.

Вывод: гипотезу H_0 следует отклонить и принять гипотезу H_1. Различия во времени, которые испытуемые затрачивают на решение трех анаграмм, не являются случайными, анаграмма 2 оказалась сложнее для решения, чем анаграмма 3.

Пример 8. Упорядочим условия примера 7 в другой последовательности: анаграмма 1, анаграмма 3, анаграмма 2. Действительно ли время решения увеличивается при такой последовательности предъявления анаграмм?

Показатели времени решения анаграмм 1, 3, 2, их ранги суммы и средние значения приведем в табл. 16.

Таблица 16

Номер испытуемого	Условие1: анаграмма 1		Условие 2: анаграмма 3		Условие 3: анаграмма 2	
	Время	Ранг	Время	Ранг	Время	Ранг
1	5	1	7	2	235	3
2	7	1	20	2	604	3
3	2	1	5	2	93	3
4	2	1	8	2	171	3
5	35	2	7	1	141	3
Суммы	51	6	47	9	1244	15
Средние	10,2		9,4		289	

Сумма рангов составляет: 6 + 9 + 15 = 30, расчетная сумма : $5\cdot3\cdot(3 + 1)/2 = 30$

Среднее значение времени решения анаграммы 3 меньше, чем анаграммы 1 (табл. 16). Однако мы исследуем не среднегрупповые тенденции, а степень совпадения индивидуальных тенденций, поэтому формулируемые нами гипотезы - это гипотезы о тенденции изменения индивидуальных показателей:

H_0 - тенденция увеличения индивидуальных показателей от первого условия ко второму, затем к третьему является случайной.

H_1 - тенденция увеличения индивидуальных показателей от первого условия ко второму, затем к третьему не является случайной.

Вычислим эмпирическое значение:

$L_{эмп} = \sum T_i J = 6 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 15 \cdot 3 = 69.$

Для данного количества испытуемых n = 5 и количества условий *c* = 3 по таблице критических значений критерия находим:
$L_{кр} = 66$ ($\alpha = 0{,}05$), $L_{кр} = 68$ ($\alpha = 0{,}01$), $L_{кр} = 70$ ($\alpha = 0{,}001$).
Так как $L_{эмп} \geq L_{кр}$ для $\alpha = 0{,}01$, то гипотезу H_0 следует отвергнуть и принять гипотезу H_1.

Вывод: тенденция увеличения индивидуальных показателей от первого условия ко второму и третьему не является случайной. Последовательность анаграмм: 1 (КРУА), 3 (ИНААМШ), 2 (АЛСТЬ) – будет в большей степени отвечать замыслу экспериментатора о постепенном возрастании сложности задач.

Таблицы

1. Таблица критических значений критерия Q

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$\rho=0,05$																
11	6															
12	6	6														
13	6	6	6													
14	7	7	6	6												
15	7	7	6	6	6											
16	8	7	7	7	6	6										
17	7	7	7	7	7	7	7									
18	7	7	7	7	7	7	7	7								
19	7	7	7	7	7	7	7	7	7							
20	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7						
21	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7					
22	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7				
23	8	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7			
24	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7		
25	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	7	
26	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	7
$\rho=0,01$																
11	9															
12	9	9														
13	9	9	9													
14	9	9	9	9												
15	9	9	9	9	9											
16	9	9	9	9	9	9										
17	10	9	9	9	9	9	9									
18	10	10	9	9	9	9	9	9								
19	10	10	10	9	9	9	9	9	9							
20	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9						
21	11	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9					
22	11	11	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9				
23	11	11	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9			
24	12	11	11	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9		
25	12	11	11	10	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9	
26	12	12	11	11	10	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9

2. Таблица критических значений критерия U

n_1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n_2	$p \le 0{,}05$																		
3	-	0																	
4	-	0	1																
5	0	1	2	4															
6	0	2	3	5	7														
7	0	2	4	6	8	11													
8	1	3	5	8	10	13	15												
9	1	4	6	9	12	15	18	21											
10	1	4	7	11	14	17	20	24	27										
11	1	5	8	12	16	19	23	27	31	34									
12	2	5	9	13	17	21	26	30	34	38	42								
13	2	6	10	15	19	24	28	33	37	42	47	51							
14	3	7	11	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61						
15	3	7	12	18	23	28	33	39	44	50	55	61	66	72					
16	3	8	14	19	25	30	36	42	48	54	60	65	71	77	83				
17	3	9	15	20	26	33	39	45	51	57	64	70	77	83	89	96			
18	4	9	16	22	28	35	41	48	55	61	68	75	82	88	95	102	109		
19	4	10	17	23	30	37	44	51	58	65	72	80	87	94	101	109	116	123	
20	4	11	18	25	32	39	47	54	62	69	77	84	92	100	107	115	123	130	138
	$p \le 0{,}01$																		
5	-	-	0	1															
6	-	-	1	2	3														
7	-	0	1	3	4	6													
8	-	0	2	4	6	7	9												
9	-	1	3	5	7	9	11	14											
10	-	1	3	6	8	11	13	16	19										
11	-	1	4	7	9	12	15	18	22	25									
12	-	2	5	8	11	14	17	21	24	28	31								
13	0	2	5	9	12	16	20	23	27	31	35	39							
14	0	2	6	10	13	17	22	26	30	34	38	43	47						
15	0	3	7	11	15	19	24	28	33	37	42	47	51	56					
16	0	3	7	12	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61	66				
17	0	4	8	13	18	23	28	33	38	44	49	55	60	66	71	77			
18	0	4	9	14	19	24	30	36	41	47	53	59	65	70	76	82	88		
19	1	4	9	15	20	26	32	38	44	50	56	63	69	75	82	88	94	101	
20	1	5	10	16	22	28	34	40	47	53	60	67	73	80	87	93	100	107	114

3. Таблица критических значений критерия H

$k = 3$

n_1	n_2	n_3	α = 0,1	α = 0,05	n_1	n_2	n_3	α = 0,1	α = 0,05	n_1	n_2	n_3	α = 0,1	α = 0,05
2	2	2	4,571		5	4	2	4,541	5,273	6	5	2	4,596	5,338
3	2	2	4,500	4,714	5	4	3	4,549	5,656	6	5	3	4,535	5,602
3	3	2	4,556	5,361	5	4	4	4,668	5,657	6	5	4	4,522	5,661
3	3	3	4,622	5,600	5	5	2	4,623	5,338	6	5	5	4,547	5,729
4	2	2	4,458	5,333	5	5	3	4,545	5,705	6	6	2	4,438	5,410
4	3	2	4,511	5,444	5	5	4	4,523	5,666	6	6	3	4,558	5,625
4	3	3	4,709	5,791	5	5	5	4,560	5,780	6	6	4	4,548	5,724
4	4	2	4,555	5,455	6	2	2	4,545	5,345	6	6	5	4,542	5,765
4	4	3	4,545	5,598	6	3	2	4,682	5,348	6	6	6	4,643	5,801
4	4	4	4,654	5,692	6	3	3	4,590	5,615	7	7	7	4,594	5,819
5	2	2	4,373	5,160	6	4	2	4,494	5,340	8	8	8	4,595	5,805
5	3	2	4,651	5,251	6	4	3	4,604	5,610					
5	3	3	4,533	5,648	6	4	4	4,595	5,681					

$k = 4$

n_1	n_2	n_3	n_4	α = 0,1	α = 0,05	n_1	n_2	n_3	n_4	α = 0,1	α = 0,05
2	2	2	2	5,667	6,167	4	3	2	2	5,750	6,621
3	2	2	2	5,664	6,333	4	3	3	2	5,872	6,795
3	3	2	2	5,745	6,527	4	3	3	3	6,016	6,984
3	3	3	2	5,879	6,727	4	4	2	2	5,808	6,731
3	3	3	3	6,026	7,000	4	4	2	2	5,901	6,874
4	2	2	2	5,755	6,545						

$k = 5$

n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	α = 0,1	α = 0,05	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	α = 0,1	α = 0,05
4	4	4	2		5,914	6,957	3	3	2	2	2	7,026	7,910
4	4	4	3		6,042	7,142	3	3	3	2	2	7,121	8,044
4	4	4	4		6,088	7,235	3	3	3	3	2	7,210	8,200
2	2	2	2	2	6,982	7,418	3	3	3	3	3	7,333	8,333
3	2	2	2	2	6,955	7,682							

4. Таблица критических значений критерия S

c	n								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p = 0{,}05$									
3	10	17	24	33	42	53	64	76	88
4	14	26	38	51	66	82	100	118	138
5	20	34	51	71	92	115	140	166	194
6	26	44	67	93	121	151	184	219	256
$p = 0{,}01$									
3	–	25	32	45	99	74	90	106	124
4	20	34	50	71	92	115	140	167	195
5	26	48	72	99	129	162	197	234	274
6	34	62	94	130	170	213	260	309	361

5. Таблица критических значений критерия G

n	α			n	α			n	α			n	α		
	0,10	0,05	0,01		0,10	0,05	0,01		0,10	0,05	0,01		0,10	0,05	0,01
5	1	0	0	27	9	8	7	49	19	18	16	92	38	37	34
6	1	1	0	28	10	9	7	50	19	18	16	94	39	38	35
7	1	1	0	29	10	9	8	52	20	19	17	96	40	38	35
8	2	1	1	30	11	10	8	54	21	20	18	98	41	39	36
9	2	2	1	31	11	10	8	56	22	21	18	100	42	40	37
10	2	2	1	32	11	10	9	58	23	22	19	110	46	45	42
11	3	2	1	33	12	11	9	60	24	22	20	120	51	49	46
12	3	3	2	34	12	11	10	62	25	23	21	130	56	54	50
13	4	3	2	35	13	12	10	64	25	24	22	140	60	58	55
14	4	3	2	36	13	12	10	66	26	25	23	150	65	63	59
15	4	4	3	37	14	13	11	68	27	26	23	160	70	68	64
16	5	4	3	38	14	13	11	70	28	27	24	170	74	72	68
17	5	5	3	39	14	13	12	72	29	28	25	180	79	77	73
18	6	5	4	40	15	14	12	74	30	29	26	190	84	82	77
19	6	5	4	41	15	14	12	76	31	29	27	200	88	86	82
20	6	6	4	42	16	15	13	78	32	30	28	220	98	95	91
21	7	6	5	43	16	15	13	80	33	31	29	240	107	105	100
22	7	6	5	44	17	16	14	82	34	32	29	260	117	114	109
23	8	7	5	45	17	16	14	84	34	33	30	280	126	124	118
24	8	7	6	46	17	16	14	86	35	34	31	300	136	133	128
25	8	8	6	47	18	17	15	88	36	35	32				
26	9	8	7	48	18	17	15	90	37	36	33				

6. Таблица критических значений критерия Т

n	**P**		**n**	**P**	
	0,05	**0,01**		**0,05**	**0,01**
5	0	-	28	130	101
6	2	-	29	140	110
7	3	0	30	151	120
8	5	1	31	163	130
9	8	3	32	175	140
10	10	5	33	187	151
11	13	7	34	200	162
12	17	9	35	213	173
13	21	12	36	227	185
14	25	15	37	241	198
15	30	19	38	256	211
16	35	23	39	271	224
17	41	27	40	286	238
18	47	32	41	302	252
19	53	37	42	319	266
20	60	43	43	336	281
21	67	49	44	353	296
22	75	55	45	371	312
23	83	62	46	389	328
24	92	69	47	407	345
25	100	76	48	426	362
26	110	84	49	446	379
27	119	92	50	466	397

7. Таблица критических значений критерия χ^2_r

n = 2		n = 3		n = 4		n = 5	
χ^2	p	χ^2	p	χ^2	p	χ^2	p
0	1,000	0,000	1,000	0,0	1,000	0,0	1,000
1	0,833	0,667	0,944	0,5	0,931	0,4	0,954
3	0,500	2,000	0,528	1,5	0,653	1,2	0,691
4	0,167	2,667	0,361	2,0	0,431	1,6	0,522
		4,667	0,194	3,5	0,273	2,8	0,367
		6,000	0,028	4,5	0,125	3,6	0,182
				6,0	0,069	4,8	0,124
				6,5	0,042	5,2	0,093
				8,0	0,0046	6,4	0,039
						7,6	0,024
						8,4	0,0085
						10,0	0,00077

n = 6		n = 7		n = 8		n = 9	
χ^2	p	χ^2	p	χ^2	p	χ^2	p
0,00	1,000	0,000	1,000	0,00	1,000	0,000	1,000
0,33	0,956	0,286	0,964	0,25	0,967	0,222	0,971
1,00	0,740	0,857	0,768	0,75	0,794	0,667	0,814
1,33	0,570	1,143	0,620	1,00	0,654	0,889	0,865
2,33	0,430	2,000	0,486	1,75	0,531	1,556	0,569
3,00	0,252	2,571	0,305	2,25	0,355	2,000	0,398
4,00	0,184	3,429	0,237	3,00	0,285	2,667	0,328
4,33	0,142	3,714	0,192	3,25	0,236	2,889	0,278
5,33	0,072	4,571	0,112	4,00	0,149	3,556	0,187
6,33	0,052	5,429	0,085	4,75	0,120	4,222	0,154
7,00	0,029	6,000	0,052	5,25	0,079	4,667	0,107
8,33	0,012	7,143	0,027	6,25	0,047	5,556	0,069
9,00	0,0081	7,714	0,021	6,75	0,038	6,000	0,057
9,33	0,0055	8,000	0,016	7,00	0,030	6,222	0,048
10,33	0,0017	8,857	0,0084	7,75	0,018	6,889	0,031
12,00	0,00013	10,286	0,0036	9,00	0,0099	8,000	0,019
		10,571	0,0027	9,25	0,0080	8,222	0,016
		11,143	0,0012	9,75	0,0048	8,667	0,010
		12,286	0,0003	10,75	0,0024	9,556	0,0060
		14,000	0,000021	12,00	0,0011	10,667	0,0035
				12,25	0,00086	10,889	0,0029
				13,00	0,00026	11,556	0,0013
				14,25	0,000061	12,667	0,00066
				16,00	0,0000036	13,556	0,00035
						14,000	0,00020
						14,222	0,000097
						14,889	0,000054
						16,222	0,0000011
						18,000	0,0000006

8. Таблица критических значений критерия χ^2

Число степеней свободы k	Вероятность α												
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,00	0,00	0,00	0,02	0,06	0,15	0,45	1,07	1,64	2,71	3,84	5,41	6,64
2	0,02	0,04	0,10	0,21	0,45	0,71	1,39	2,41	3,22	4,60	5,99	7,82	9,21
3	0,11	0,18	0,35	0,58	1,00	1,42	2,37	3,66	4,64	6,25	7,82	9,84	11,3
4	0,30	0,43	0,71	1,06	1,65	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49	11,7	13,3
5	0,55	0,75	1,14	1,61	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24	11,1	13,4	15,1
6	0,87	1,13	1,63	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,6	12,6	15,0	16,8
7	1,24	1,56	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	9,80	12,0	14,1	16,6	18,5
8	1,65	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,0	13,4	15,5	18,2	20,1
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,7	12,2	14,7	16,9	19,7	21,7
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,8	13,4	16,0	18,3	21,2	23,2
11	3,05	3,61	4,58	5,58	6,99	8,15	10,3	12,9	14,6	17,3	19,7	22,6	24,7
12	3,57	4,18	5,23	6,30	7,81	9,03	11,3	14,0	15,8	18,5	21,0	24,1	26,2
13	4,11	4,76	5,89	7,04	8,63	9,93	12,3	15,1	17,0	19,8	22,4	25,5	27,7
14	4,66	5,37	6,57	7,79	9,47	10,8	13,3	16,2	18,1	21,1	23,7	26,9	29,1
15	5,23	5,98	7,26	8,55	10,3	11,7	14,3	17,3	19,3	22,3	25,0	28,3	30,6
16	5,81	6,61	7,96	9,31	11,1	12,6	15,3	18,4	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0
17	6,41	7,26	8,67	10,1	12,0	13,5	16,3	19,5	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4
18	7,02	7,91	9,39	10,9	12,9	14,4	17,3	20,6	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8
19	7,63	8,57	10,1	11,6	13,7	15,3	18,3	21,7	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2
20	8,26	9,24	10,8	12,4	14,6	16,3	19,3	22,8	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6
21	8,90	9,92	11,6	13,2	15,4	17,2	20,3	23,9	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9
22	9,54	10,6	12,3	14,0	16,3	18,1	21,3	24,9	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3
23	10,2	11,3	13,1	14,8	17,2	19,0	22,3	26,0	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6
24	10,9	12,0	13,8	15,7	18,1	19,9	23,3	27,1	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0
25	11,5	12,7	14,6	16,5	18,9	20,9	24,3	28,2	30,7	34,4	37,7	41,7	44,3
26	12,2	13,4	15,4	17,3	19,8	21,8	25,3	29,2	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6
27	12,9	14,1	16,1	18,1	20,7	22,7	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0
28	13,6	14,8	16,9	18,9	21,6	23,6	27,3	31,4	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3
29	14,3	15,6	17,7	19,8	22,5	24,6	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6
30	14,9	16,3	18,5	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5	36,2	40,3	43,8	48,0	50,9

9. Таблица критических значений критерия L

n	c (количество условий)				p
	3	4	5	6	
2	–	–	109	178	0,001
	–	60	106	173	0,01
	28	58	103	166	0,05
3	–	89	160	260	0,001
	42	87	155	252	0,01
	41	84	150	244	0,05
4	56	117	210	341	0,001
	55	114	204	331	0,01
	54	111	197	321	0,05
5	70	145	259	420	0,001
	68	141	251	409	0,01
	66	137	244	397	0,05
6	83	172	307	499	0,001
	81	167	299	486	0,01
	79	163	291	474	0,05
7	96	198	355	577	0,001
	93	193	346	563	0,01
	91	189	338	550	0,05
8	109	225	403	655	0,001
	106	220	393	640	0,01
	104	214	384	625	0,05
9	121	252	451	733	0,001
	119	246	441	717	0,01
	116	240	431	701	0,05
10	134	278	499	811	0,001
	131	272	487	793	0,01
	128	266	477	777	0,05
11	147	305	546	888	0,001
	144	298	534	869	0,01
	141	292	523	852	0,05
12	160	331	593	965	0,001
	156	324	581	946	0,01
	153	317	570	928	0,05

7. ЛИТЕРАТУРА

1. Сидоренко Е.В. Методы математической обработки в психологии. С.-Петербург: Речь, 2001.
2. Р. Солсо, К. Маклин. Эксперимент. С.- Петербург: Прайм – Еврознак,2003.
3. Математическая психология: методология, теория, модели. М.: Наука,1985.