ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Математика»

Учебно-методическое пособие

по дисциплине

«Теория игр»

Азарова Л.В.,
Азаров Д.А.

Ростов-на-Дону, 2017

Аннотация

Учебно-методическое полсобие предназначено для студентов очной и заочной форм обучения направлений 38.03.01 - экономика.

В методическом пособии изложены основные положения и сведения, которые входят в содержание читаемого курса по теории игр. Рассмотрены методы выбора оптимальных стратегий поведения в играх с нулевой суммой и в биматричных играх, критерии определения оптимальных стратегий в играх с природой. Все методы сопровождаются примерами.

Авторы

Ст. преподаватель кафедры «Математика»
Азарова Л.В.

Ст. преподаватель кафедры «Математика»
Азаров Д.А.

Оглавление

1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР

Деятельность человека в той или иной области сопряжены с принятием решений. Принимая то или иное решение человек (как правило) руководствуется понятием оптимальности этого решения. Постановка вопроса об оптимальности решения встречается во многих науках: технических науках, экономике, медицине, праве, военном деле и т.д.

Теория игр имеет дело с ситуацией принятия решения в условиях конфликта, который возникает при столкновении интересов двух или нескольких лиц, групп лиц, объединений, когда точно можно определить кто в этом столкновении участвует, каковы возможные исходы, кто в этих исходах заинтересован, и в чем состоит эта заинтересованность. При этом лицу, принимающему решения, приходится основываться не только на своих интересах, но и на интересах партнеров и противников по конфликту. Теория игр позволяет на основе построенной математической модели дать рекомендации по наиболее выгодному (оптимальному) решению, основываясь на четких математических критериях.

Теория игр опирается на предположение о том, что независимо от цели игры и ее обстоятельств найдется стратегия, которая позволит добиться успеха.

Теория игр должна отталкиваться от основных определений, которые лежат в ее основе и являются необходимым условием для ее формализации и построения математической модели.

Игра - упрощенная формализованная модель реальной конфликтной ситуации.

Цель теории игр - выработка рекомендаций по разумному поведению участников конфликта (определение оптимальных стратегий поведения игроков).

От реального конфликта игра отличается тем, что ведется по определенным правилам:

1. Правила устанавливают последовательность ходов, объем информации каждой стороны о поведении другой и результат игры в зависимости от сложившейся ситуации.

2. Правилами устанавливаются также конец игры, когда некоторая последовательность ходов уже сделана, и больше ходов делать не разрешается.

Примеры конфликтных ситуаций:

- взаимоотношения покупателя и продавца;

- конкуренция различных фирм;
- боевые действия;
- настольные игры (шахматы, шашки, карты, домино и пр.)

2. АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

Игра называется игрой с нулевой суммой или антагонистической, если выигрыш одного игрока равен проигрышу другого, т.е. сумма их выигрышей равна нулю. В игре с нулевой суммой интересы игроков прямо противоположны. Отсюда следует, что в таких играх можно рассматривать только интерес одного игрока, так как, найдя выигрыш для него, мы автоматически получаем выигрыш и для второго, только с противоположным знаком, т.е. его проигрыш. Ниже рассматриваются только антагонистические игры.

Игроки – заинтересованные стороны в игре.

Партия игры – каждый конкретный пример разыгрывания игры некоторым конкретным образом от начала до конца.

Ход игрока – выбор и осуществление действия производимого одним игроком в условиях точно определенных правилами игры.

Игра состоит из ходов, выполняемых игроками одновременно или последовательно.

Ходы бывают личными и случайными. Ход называется личным, если игрок сознательно выбирает его из совокупности возможных вариантов действий и осуществляет его. Ход называется случайным, если его выбор производится не игроком, а каким-либо механизмом случайного выбора.

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры.

В простых (одноходовых) играх, когда в каждой партии игрок может сделать лишь по одному ходу, понятие стратегии и возможного варианта действий совпадают.

Стратегия игрока называется оптимальной, если она обеспечивает данному игроку при многократном повторении игры максимально возможный средний выигрыш или минимально возможный средний проигрыш, независимо от того, какие стратегии применяет противник.

Теория игр имеет свои недостатки: предположение о полной ("идеальной") разумности противников. В реальном конфликте зачастую оптимальная стратегия состоит в том, чтобы угадать, в чем слабость противника и воспользоваться этой слабостью.

3. ПЛАТЕЖНАЯ МАТРИЦА

Рассмотрим парную конечную игру. Пусть первый игрок - игрок А располагает m личными стратегиями, которые обозначим $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Пусть у второго игрока В имеется n личных стратегий, обозначим их $B_1, B_2, \ldots, B_m$. Тогда говорят, что игра имеет размерность m×n. В результате выбора игроками любой пары стратегий A_i и B_j (i=1…m, j=1…n) однозначно определяется исход игры, т. е. выигрыш p_{ij} игрока А (положительный или отрицательный) и проигрыш ($-p_{ij}$) игрока В. Предположим, что значения p_{ij} известны для любой пары стратегий (A_i, B_j). Матрица $P=(p_{ij})$ (i=1…m, j=1…n), элементами которой являются выигрыши, соответствующие стратегиям A_i и B_j, называется **платежной матрицей**, или **матрицей игры**.

Стратегия	B_1	B_2	…	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим несколько примеров построения платежной матрицы.

Игра 1.

Рассмотрим следующую игру. Игрок А может спрятаться в двух возможных комнатах. Игрок В открывает наугад дверь в одну из этих комнат. Если он находит там первого игрока, то А выплачивает В один рубль. А если не находит, то сам платит один рубль. Надо построить платежную матрицу игры.

У игрока А две возможные стратегии: спрятаться в первой комнате – это стратегия A_1, или во второй – стратегия A_2. У игрока В также две возможные стратегии – искать игрока А в первой комнате - это стратегия B_1, или во второй – стратегия B_2. Игра имеет размерность 2×2.

Если оба игрока выбирают свои первые стратегии, т.е. первый прячется в первой комнате, а второй его там ищет, то первый по правилам игры обязан выплатить второму один рубль, т.е. его выигрыш составляет минус один рубль. Если выбраны стратегии A_1 и B_2, то второй не находит первого игрока, и платит ему рубль, т.е. выигрыш первого составляет плюс один рубль. Аналогично при выборе стратегий A_2 и B_1 первый выигрывает один рубль, а при выборе A_2 и B_2 – проигрывает рубль.

Сведем все это в таблицу.

Стратегии	B_1	B_2
A_1	-1	1
A_2	1	-1

Матрица $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, составленная из элементов этой таблицы, называется платежной матрицей. И смысл ее элементов предельно ясен: это возможный выигрыш или проигрыш (выигрыш, если элемент положительный и проигрыш – если он отрицательный) **первого** игрока при выборе первым и вторым игроком соответствующих стратегий.

Игра 2.

У первого игрока имеются монеты достоинством 5 и 10 рублей. У второго игрока: 1 рубль, 3 рубля и 10 рублей. Каждый из игроков выкладывает на стол одну монету. Если общее достоинство двух монет – четно, то обе монеты забирает первый игрок, если нечетно – второй.

У первого игрока две стратегии: A_1 - выложить 5 рублей и A_2 – выложить 10 рублей. У второго три стратегии: B_1 - выложить 1 рубль, B_2 - выложить 3 рубля и B_3 – выложить 10 рублей.

Игра имеет размерность 2×3.

По условиям игры если сумма четна, то выигрыш получает первый игрок (элемент положительный), а если нечетна – то второй (элемент отрицательный)

		B_1	B_2	B_3
		1 рубль	3 рубля	10 рублей
A_1	5 рублей	6	8	-15
A_2	10 рублей	-11	-13	20

Таким образом платежная матрица такой игры выглядит так: $P = \begin{pmatrix} 6 & 8 & -15 \\ -11 & -13 & 20 \end{pmatrix}$

Игра 3.

Рассмотрим игру под названием «Оборона города». Пусть есть некий город и обороняющие его три отряда «синих». К городу ведут только две дороги. Генерал, защищающий город, может выставить три отряда на одну дорогу, а может поделить их и поставить один отряд на одну дорогу, а два – на другую.

У нападающих – «красных» - два отряда. Точно также, как и обороняющиеся, их генерал может дробить свои силы, а может выставить оба отряда на одно направление.

Задача войск «синих» - отстоять свой город, задача «красных» - взять его.

Если на дороге встречаются войска двух противников, то бой выигрывает тот, у кого на этом направлении больше отрядов. Если количество столкнувшихся отрядов одинаково, то вероятность победы на этом направлении равна 0.5. Если на дороге нет отрядов «синих», то войска «красных» беспрепятственно входят в город, т.е. вероятность отстоять город для «синих» равна нулю.

Рассмотрим возможные стратегии обороняющихся, т.е. «синих». Первая стратегия A_1 – послать все три отряда на первую дорогу, вторая стратегия A_2 – послать все три отряда на вторую дорогу, третья стратегия A_3 – послать два отряда на первую дорогу и один на вторую, четвертая стратегия A_4 – послать один отряд на первую дорогу, а два отряда - на вторую дорогу.

У нападающих – «красных» - три стратегии. Их генерал может послать оба отряда на первую дорогу – это стратегия B_1. Он может послать их на вторую дорогу – стратегия B_2. И, наконец, он может послать по одному отряду на первую и на вторую дороги – стратегия B_3.

Игра имеет размерность 4×3.

Рассмотрим, что произойдет, если оба генерала выберут первую стратегию. В этом случае против трех отрядов «синих» будут стоять два отряда «красных». Тогда «синие» победят и отстоят свой город с вероятностью равной единице.

Если «синие» все так же выберут первую стратегию, а «красные» - вторую, то на первой дороге «синие» по-прежнему будут иметь преимущество и не пропустят «красных» к городу. А вот на второй «красные» беспрепятственно войдут в город, т.е. «синие» проиграют и вероятность отстоять город равна 0. Аналогично при выборе стратегий A_1 и B_3 «синие» на первой дороге преградят путь врагу, но один отряд «красных» по второй дороге войдет в город.

Рассматривая так стратегию за стратегией, построим таблицу и платежную матрицу игры.

Платежная матрица: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$. В данной игре элементами платежной матрицы являются не прямые выигрыши, а вероятности победы (т.е. вероятность «синих» отстоять свой город) в этой игре.

Стратегия		B_1	B_2	B_3
	Описание стратегий	2 на первой дороге 0 на второй	0 на первой дороге 2 на второй	1 на первой дороге 1 на второй
A_1	3 на первой дороге 0 на второй	1	0	0
A_2	0 на первой дороге 3 на второй	0	1	0
A_3	2 на первой дороге 1 на второй	0.5	0	0.5
A_4	1 на первой дороге 2 на второй	0	0.5	0.5

Основные выводы: построение платежной матрицы для небольшой игры является несложной операцией. Но с возрастанием размерности игры, резко возрастает и сложность задачи. Возможно построение платежной матрицы для игры, например, «крестики-нолики», хотя это уже является довольно серьезной задачей из-за немалого числа всех возможных стратегий. Что касается построения платежной матрицы для игры в «подкидного дурака» или шахматы, то вряд ли это будет возможно даже в обозримом будущем. Число стратегий в этих играх настолько велико, что даже используя самые мощные современные компьютеры, построение матрицы займет, по самым скромным подсчетам, несколько миллиардов лет, что, конечно, не может рассматриваться всерьез.

4. ПРИНЦИПЫ МАКСИМИНА И МИНИМАКСА. СЕДЛОВАЯ ТОЧКА. ЦЕНА ИГРЫ

Цель первого игрока: необходимо выбрать ту стратегию, чтобы при наихудшем поведении противника получить максимальный выигрыш.

Цель второго игрока: необходимо выбрать ту стратегию, чтобы при наихудшем поведении противника получить минимальный проигрыш.

Рассмотрим действие этого принципа на примере.

Платежная матрица имеет следующий вид

$$A=\begin{bmatrix}7 & 9 & 10\\ 3 & 4 & 8\\ 7 & 5 & 8\end{bmatrix}$$

Решение: Найдем наилучшую стратегию игрока А (строки) – это минимальное число в каждой строке матрицы

$$\alpha_i = \min a_{ij}, \quad i=1,\dots,m$$

$$\begin{array}{cc} & \alpha_i \\ A=\begin{bmatrix}7 & 9 & 10\\ 3 & 4 & 8\\ 7 & 5 & 8\end{bmatrix} & \begin{matrix}7\\ 3\\ 5\end{matrix}\end{array}$$

Зная минимальные выигрыши при различных стратегиях A_i, игрок А выберет ту стратегию, для которой α_i максимально: $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$.

Значит, $\alpha = 7$.

Величина α – гарантированный выигрыш игрока А и называется нижней ценой игры (максимином).

Далее необходимо определить наилучшую стратегию игрока В (столбцы) – это максимальное число в каждом столбце матрицы

$$\beta_j = \max a_{ij}, \quad j=1,\dots,n$$

$$\begin{array}{cc} A= & \begin{bmatrix}7 & 9 & 10\\ 3 & 4 & 8\\ 7 & 5 & 8\end{bmatrix} \\ \beta_j & \begin{matrix}7 & 9 & 10\end{matrix}\end{array}$$

Зная максимальные проигрыши при различных стратегиях B_j, игрок В выберет ту страте- гию, для которой β_j минимально: $\beta = \min_{j} \max_{i} a_{ij}$.

Значит, $\beta = 7$.

Игрок В гарантирует себе проигрыш не выше β. Величина β называется верхней ценой игры (минимаксом).

Для матричной игры всегда справедливо неравенство: $\alpha \le \beta$.

Если $\alpha < \beta$, то игра не имеет седловой точки.

Если $\alpha = \beta$, то ситуация является равновесной. И такая игра называется игрой с седловой точкой. А пара оптимальных стратегий $(A_{i\,opt}, B_{j\,opt})$ – седловой точкой матрицы.

$\alpha = \beta = \nu$, где ν называется ценой игры и является одновременно минимальным в i-й строке и j-м столбце.

ν - решение матричной игры.

В примере получаем: $\alpha = \beta = 7$

$$\begin{array}{cc} & \alpha_i \\ A = \begin{bmatrix} \underline{7} & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 8 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \underline{7} \\ 3 \\ 5 \end{array} \\ \beta_j \quad \begin{array}{ccc} \underline{7} & 9 & 10 \end{array} & \end{array}$$

Седловая точка матрицы соответствует элементу a_{11}.

Ответ: цена игры $\nu = 7$.

1) Если $\nu > 0$, то игра выгодна для игрока А.

2) Если $\nu < 0$ - для игрока В.

3) Если $\nu = 0$ - игра справедлива, т.е. является одинаково выгодной для обоих участников.

Применение этих принципов каждым из игроков обеспечивает:

- игроку А выигрыш не менее α,

- игроку В проигрыш не больше β.

Учитывая что $\alpha < \beta$, целью игрока А будет в увеличении выигрыша, а для игрока В - уменьшение проигрыша.

5. СМЕШАННЫЕ СТРАТЕГИИ

Если в игре нет седловой точки в чистых стратегиях, то можно найти нижнюю и верхнюю чистые цены этой игры, которые указывают, что игрок 1 не должен надеяться на выигрыш больший, чем верхняя цена игры, и может быть уверен в получении выигрыша не меньше нижней цены игры.

Поиск такого решения приводит к необходимости применять смешанные стратегии, то есть чередовать чистые стратегии с какими-то частотами.

Смешанной стратегией игрока называются случайные величины, возможные значения которых являются чистые стратегии.

1) Теорема о максимине.

В конечной игре двух игроков (коалиций) с нулевой суммой (матричной игре) при α ≠ β имеет место равенство:

$$v_A = v_B.$$

Теорема о максимине указывает на существование равновесия для случая $v_A = v_B$, при α ≠ β, и , следовательно, существования оптимальных смешанных стратегий.

2) Основная теорема матричных игр.

Любая матричная игра имеет, по крайней мере, одно оптимальное решение, в общем случае, в смешанных стратегиях и соответствующую цену v.

Цена игры v - средний выигрыш, приходящийся на одну партию, - всегда удовлетворяет условию:

$$\alpha \le v \le \beta,$$

т.е. лежит между нижней α и верхней β ценами игры.

Оптимальное решение игры в смешанных стратегиях обладает тем свойством, что каждый из игроков не заинтересован в отходе от своей оптимальной смешанной стратегии, если его противник применяет свою оптимальную смешанную стратегию, так как это ему невыгодно.

Определение. Те из чистых стратегий игроков А и В, которые входят в их оптимальные смешанные стратегии с вероятностями, не равными нулю, называются активными стратегиями.

Существуют следующие условия применения смешанных стратегий:

1. Игра без седловой точки.
2. Игроки используют случайную смесь чистых стратегий с заданными вероятностями.
3. Игра повторяется многократно в сходных условиях.
4. При любом ходе ни один из игроков не информирован о стратегии другого игрока.
5. Допускается усреднение результатов игр.

6. РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ИГР В СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЯХ

6.1 Аналитический метод для игры 2x2

Дана платежная матрица игры

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

1) оптимальное решение в смешанных стратегиях:

$S_A = \{p_1, p_2\}$ и $S_B = \{q_1, q_2\}$.

2) вероятности применения (относительные частоты применения) чистых стратегий удовлетворяют соотношениям:

$$p_1 + p_2 = 1$$

$$q_1 + q_2 = 1$$

В соответствии с теоремой об активных стратегиях, оптимальная смешанная стратегия обладает тем свойством, что обеспечивает игроку максимальный средний выигрыш, равный цене игры , независимо от того, какие действия предпринимает другой игрок, если тот не выходит за пределы своих активных стратегий.

1) Если игрок А использует свою оптимальную смешанную стратегию, а игрок В - свою чистую активную стратегию B_1, то цена игры v равна

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v$$

2) Если игрок А использует свою оптимальную смешанную стратегию, а игрок В - свою чистую активную стратегию B_2, то цена игры v равна

$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix}$$

Значит, необходимо найти, чему равны p_1, p_2, ν, если

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = \nu$$
$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = \nu$$
$$p_1 + p_2 = 1$$

Получаем решение матричной игры:

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$$

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$$

$$\nu = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$$

Вычислив оптимальное значение ν, можно вычислить и оптимальную смешанную стратегию второго игрока из условия

$$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = \nu$$
$$a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = \nu$$

Получаем:

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{\nu - a_{12}}{a_{11} - a_{12}}$$

$$q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{a_{11} - \nu}{a_{11} - a_{12}}$$

Пример:

Платежная матрица имеет следующий вид

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Найти решение игры аналитическим методом

Решение:

Сначала необходимо определить, решается ли данная игра в чистых стратегиях, то есть существует ли седловая точка или нет.

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}$$

$$\beta_j = \max_i a_{ij} \qquad 7 \quad 8$$

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} \ , \ \beta = \min_j \max_i a_{ij} \ .$$

Следовательно, $\alpha = 4$, $\beta = 7$. $\alpha < \beta$, при этом $\nu \in [4; 7]$. Игра не имеет седловой точки, следовательно не решается в чистых стратегиях.

Каждый из игроков А и В обладает единственной оптимальной смешанной стратегией $S_A = \{p_1, p_2\}$ и $S_B = \{q_1, q_2\}$.

По приведенным выше формулам получаем:

$$p_1 = 0{,}375,\ p_2 = 0{,}625,\ \nu = 5{,}5,\ q_1 = 0{,}5,\ q_2 = 0{,}5.$$

Ответ: оптимальной смешанной стратегией игрока А является стратегия $S_A = \{0{,}375,\ 0{,}625\}$, а игрока В - $S_B = \{0{,}5,\ 0{,}5\}$. Цена игры $\nu = 5{,}5$.

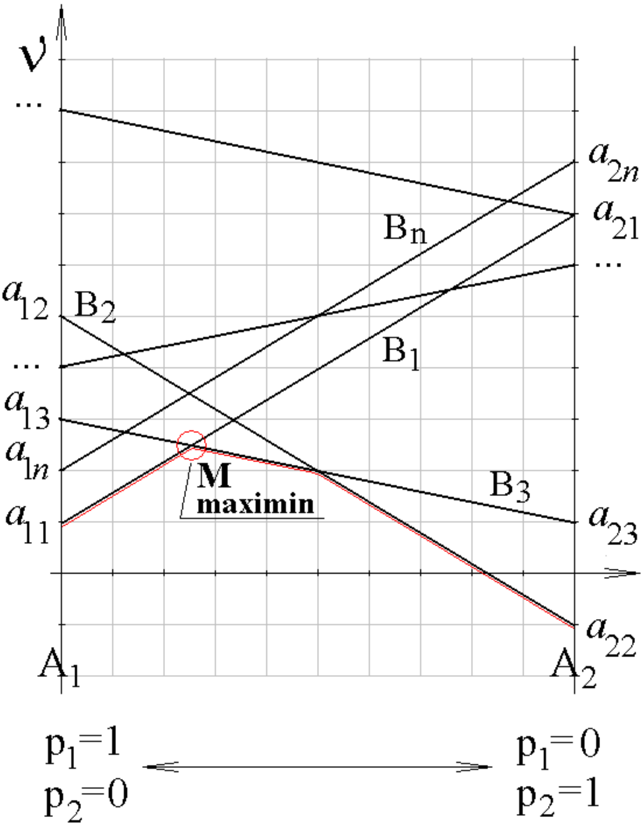
6.2 Графический способ решения игр размерности 2×n

Рассмотрим игру размерности 2×n, заданную платежной матрицей:

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \end{pmatrix}$$

У первого игрока существует две стратегии (A_1, A_2), у второго – n стратегий (B_1, B_2, B_3, … , B_n). Пусть первый игрок применяет свою стратегию A_1 с частотой p_1, а вторую стратегию A_2 с частотой

p_2. Представим эти стратегии на графике.

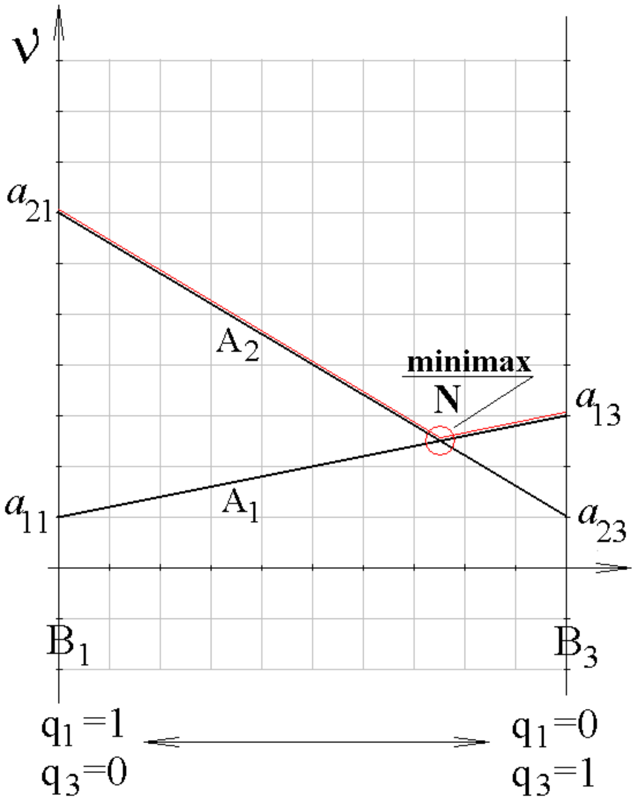


Минимальные значения выигрыша – нижняя ломаная. Наибольшее значение, которое возможно на ней – точка М. Это и есть максимин. Ордината этой точки есть цена игры ·, а ее абсцисса – значение частоты применения второй стратегии p_2. Находим их. Тогда можно вычислить частоту применения первой стратегии по формуле: $p_1 = 1 - p_2$. Для первого игрока игра решена.

Теперь перейдем к решению игры для второго игрока. В теории игр есть утверждение, что для любой игры размерности m×n число полезных стратегий не превосходит наименьшего из двух значений m и n. Таким образом для игры размерности 2×n число полезных стратегий будет равно min{2,n}=2. Найдем эти стратегии.

Из рисунка видно, что для приведенного графика, точка максимина M находится на пересечении отрезков, соответствующих активным стратегиям B_1 и B_3. Следовательно первоначальная игра может быть сведена к такой игре, в которой принимают участие только активные стратегии, и матрица которой имеет вид:

$$P^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}.$$



Построим активные стратегии второго игрока на втором графике.

Максимальные значения выигрыша – верхняя ломаная. Наименьшее значение, которое возможно на ней – точка N. Это минимакс. Ордината этой точки есть цена игры ·, а ее абсцисса – значение частоты применения второй стратегии q_3. Находим их. Тогда можно вычислить частоту применения первой стратегии по формуле: $q_1 = 1 - q_2$.

Игра решена и для второго игрока.

Рассмотрим решение подобных задач на примере.

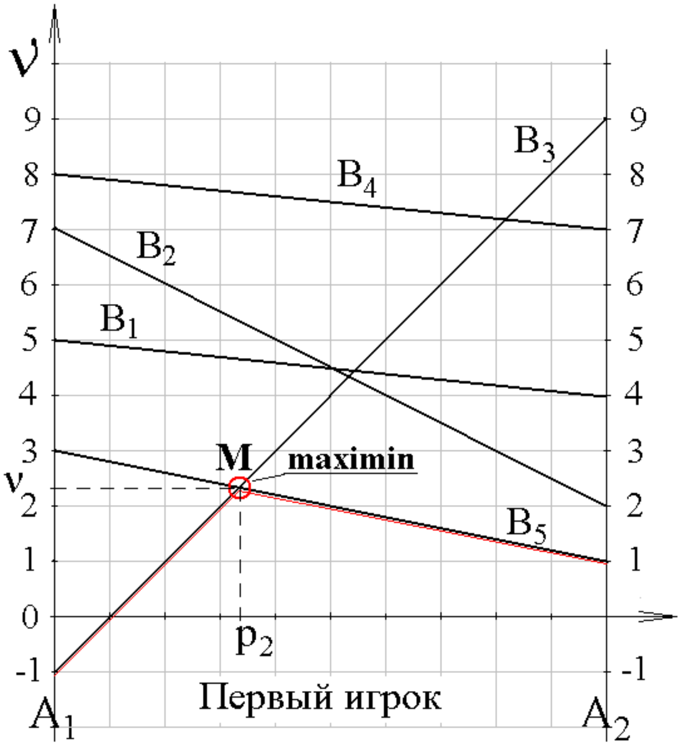
Решить игру, заданную платежной матрицей:

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -1 & 8 & 3 \\ 4 & 2 & 9 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

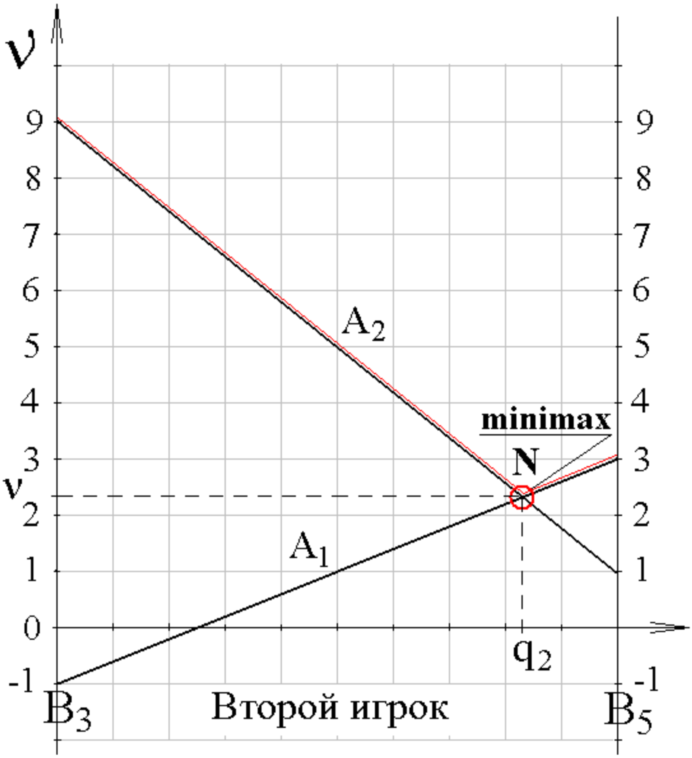
Размерность игры 2x5, таким образом, у первого игрока две возможные стратегии, у второго – пять.

Построим отрезки, соответствующие пяти стратегиям второго игрока на графике (см. рис. а). Точка М – максимин игры образована пересечением стратегий B_3 и B_5. Приближенно можно определить цену игры, которая лежит между 2 и 3, ближе к 2, и частоту p_2 использования второй стратегии, которая лежит между 0,3 и 0,4.

Однако, приближенного решения часто недостаточно, поэтому построим точное решение игры. Воспользуемся средствами аналитической геометрии. Как известно, уравнение прямой, проходящей через две точки с координатами $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ записывается в виде: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.



а)



б)

Составим уравнение прямой, отвечающей стратегии B_3, которая проходит через точки с координатами (0;-1) и (1;9): $\frac{x-0}{1-0}=\frac{y+1}{9+1}$. Упростив полученное выражение, получим уравнение: $10x-y=1$. Аналогично составим уравнение прямой, отвечающей стратегии B_5, которая проходит через точки с координатами (0;3) и (1;1): $\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-3}{1-3}$. Упростив полученное выражение, получим уравнение: $2x+y=3$. Теперь составим полученные уравнения в систему, и решим ее.

$$\begin{cases} 10x - y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

Решением этой системы будут значения $x = \frac{1}{3}$; $y = \frac{7}{3}$. Таким образом, точка максимина имеет координаты $M\left(\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

Значит цена игры $v = \frac{7}{3}$ · а частота применения второй стратегии первым игроком $p_2 = \frac{1}{3}$. Тогда частота применения первой стратегии первым игроком $p_1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Для первого игрока задача решена.

Так как активными будут только стратегии B_3 и B_5, то платежную матрицу игры можно переписать следующим образом:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Построим графики стратегий (см. рис. 6). Как видно, минимакс игры, точка N, лежит на верхней ломаной, состоящей из отрезков стратегий A_2 и A_1.

Составим уравнение прямой, отвечающей стратегии A_2, которая проходит через точки с координатами (0;9) и (1;1): $\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-9}{1-9}$. Упростив полученное выражение, получим уравнение: $8x + y = 9$. Аналогично составим уравнение прямой, отвечающей стратегии A_1, которая проходит через точки с координатами (0;-1) и (1;3): $\frac{x-0}{1-0} = \frac{y+1}{3+1}$. Упростив полученное выражение, получим уравнение: $4x - y = -1$. Теперь составим полученные уравнения в систему и решим ее:

$$\begin{cases} 8x + y = 9 \\ 4x - y = -1 \end{cases}$$

Решением этой системы будут значения $x = \frac{5}{6}$; $y = \frac{7}{3}$.

Таким образом, точка максимина имеет координаты $\mathrm{N}\left(\frac{5}{6}; \frac{7}{3}\right)$.

Значит цена игры $v = \frac{7}{3}$ ∙что, конечно, совпадает с ценой игры, вычисленной для первого игрока)∙ а частота применения второй активной (т.е. пятой) стратегии первым игроком $q_5 = \frac{5}{6}$. Тогда частота применения первой активной (т.е. третьей) стратегии первым игроком $q_3 = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$. Решение задачи для второго игрока: $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $q_3 = \frac{1}{6}$, $q_4 = 0$, $q_5 = \frac{5}{6}$.

Ответ: $v = \frac{7}{3}$, $p\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $q\left(0, 0, \frac{1}{6}, 0, \frac{5}{6}\right)$.

6.3 Решение матричной игры симплекс методом

Пусть парная игра с нулевой суммой, которая задана платежной матрицей

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

не имеет седловой точки. В этих случаях цель каждого игрока заключается в выработке оптимальной смешанной стратегии. Смешанной стратегией игрока A, имеющего в своем распоряжении m возможных стратегий, называется вектор $\overline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, где p_i - вероятность выбора i-й стратегии $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1; p_i \geq 0$.

Если игрок B имеет в своем распоряжении n возможных стратегий, то его задача заключается в нахождении оптимального вектора $\overline{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, где q_j - вероятность выбора j-й стратегии $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1; q_j \geq 0$.

Обозначим цену игры:

$$M = \min\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1} p_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2} p_i, \ldots, \sum_{i=1}^{m} a_{in} p_i\right).$$

Задача игрока A заключается в том, чтобы найти такие компоненты вектора $\overline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, которые дают максимальное значение M.

Максимальному значению M соответствует минимальное значение дроби $\frac{1}{M}$.

Получим, что

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{i1} p_i \geq M, \\ \sum_{i=1}^{m} a_{i2} p_i \geq M, \\ \ldots \\ \sum_{i=1}^{m} a_{in} p_i \geq M; \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} p_1a_{11} + p_2a_{21} + \ldots + p_ma_{m1} \geq M, \\ p_1a_{12} + p_2a_{22} + \ldots + p_ma_{m2} \geq M, \\ \ldots \\ p_1a_{1n} + p_2a_{2n} + \ldots + p_ma_{mn} \geq M; \end{cases}$$

Обозначим:

$$x_1 = \frac{p_1}{M}; x_2 = \frac{p_2}{M}; \ldots; x_m = \frac{p_m}{M}.$$

Если разделить каждое неравенство системы приведенной выше на M, то получим:

$$\begin{cases} a_{11}\frac{p_1}{M} + a_{21}\frac{p_2}{M} + \ldots + a_{m1}\frac{p_m}{M} \geq 1, \\ a_{12}\frac{p_1}{M} + a_{22}\frac{p_2}{M} + \ldots + a_{m2}\frac{p_m}{M} \geq 1, \\ \ldots \\ a_{1n}\frac{p_1}{M} + a_{2n}\frac{p_2}{M} + \ldots + a_{mn}\frac{p_m}{M} \geq 1; \end{cases}$$

или, в новых обозначениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \geq 1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \geq 1, \\ \ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq 1; \end{cases}$$

где $x_i = \dfrac{p_i}{M} \geq 0 \left(i = 1, 2, \ldots, m\right)$.

Легко видеть, что

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_m}{M} = \frac{1}{M}.$$

Поэтому задачу нахождения оптимального вектора $\overline{p} = \left(p_1, p_2, \ldots, p_m\right)$ можно сформулировать следующим образом.

Найти неизвестные $x_1 + x_2 + \ldots + x_m$, так, чтобы:

$Z = x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \frac{1}{M} \to \min$, при выполнении системы неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \geq 1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \geq 1, \\ \ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq 1; \end{cases}$$

Задача нахождения оптимального вектора $\bar{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ формулируется в этом случае как взаимно-двойственная задача:

Найти неизвестные $y_1 + y_2 + \ldots + y_n$, так, чтобы:

$L = y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \frac{1}{M} \to \max$, при выполнении системы неравенств

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \leq 1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \leq 1, \\ \ldots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \leq 1; \end{cases}$$

где $y_j = \frac{q_j}{M} \geq 0 \left(j = 1, 2, \ldots, n \right)$.

Пример. Найти решение игры, заданной платежной матрицей.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Игрок А использует логику, которая гарантирует ему максимальный выигрыш вне зависимости от поведения игрока В.

Нижняя цена игры α= **-1.**

Игрок В использует логику, которая гарантирует ему минимальный проигрыш вне зависимости от поведения игрока А. **Верхняя цена игры** β=**1.**

Верхняя цена игры не равна нижней цене игры, значит игра не решается в чистых стратегиях. Найдем оптимальные смешанные стратегии игроков симплекс методом.

		Стратегии игрока В			Минимальный элемент в строке α
		1	2	3	
Стратегии игрока А	1	-1	1	1	-1
	2	2	-2	0	-2
	3	3	4	-3	-3
Максимальный элемент в столбце β		3	4	1	

Составим задачу линейного программирования для игрока A:

$$F = y_1 + y_2 + y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 1 \\ y_1 - 2y_2 + 4y_3 \geq 1 \\ y_1 - 3y_3 \geq 1 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0$$

Составим задачу линейного программирования для игрока B:

$$L = x_1 + x_2 + x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ 2x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 \leq 1 \end{cases}$$

$x_i \geq 0$

Полученные задачи являются парой симметричных взаимно двойственных задач.

Симплексным методом получено оптимальное решение: $X_{опт} = \left(\frac{15}{14}, \frac{4}{7}, \frac{3}{2}, 0, 0, 0\right)$. Максимальное значение функции: $L_{\max} = \frac{22}{7}$.

Найдем решение для игрока B:

Так как $x_1 = \frac{15}{14}, x_2 = \frac{4}{7}, x_3 = \frac{3}{2}$, тогда цена игры $M = \frac{1}{L_{\max}} = \frac{7}{22}$.

Тогда:

$q_1 = x_1 M = \frac{15}{14} \cdot \frac{7}{22} = \frac{15}{44}$, $q_2 = x_2 M = \frac{4}{7} \cdot \frac{7}{22} = \frac{2}{11}$, $q_3 = x_3 M = \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{22} = \frac{21}{44}$,

и вектор $\bar{q} = \left\{\frac{15}{44}; \frac{2}{11}; \frac{21}{44}\right\}$.

Учитывая правило формирования ответа симметричной двойственной задачи, запишем ее решение, на основании все той же последней симплекс таблицы.

$Y_{опт} = \left(\frac{13}{7}, 1, \frac{2}{7}, 0, 0, 0\right)$, $F_{\min} = \frac{22}{7}$.

Так как $y_1 = \frac{13}{7}, y_2 = 1, y_3 = \frac{2}{7}$, цена игры $M = \frac{1}{F_{\min}} = \frac{7}{22}$.

Тогда:

$$p_1 = y_1 M = \frac{13}{7} \cdot \frac{7}{22} = \frac{13}{22}, \qquad p_2 = y_2 M = 1 \cdot \frac{7}{22} = \frac{7}{22},$$

$$p_3 = y_3 M = \frac{2}{7} \cdot \frac{7}{22} = \frac{1}{11},$$

и вектор $\overline{p} = \left\{ \frac{13}{22}; \frac{7}{22}; \frac{1}{11} \right\}$.

Ответ: Оптимальные смешанные стратегии для игрока А: $\overline{p} = \left\{ \frac{13}{22}; \frac{7}{22}; \frac{1}{11} \right\}$**, для игрока В:** $\overline{q} = \left\{ \frac{15}{44}; \frac{2}{11}; \frac{21}{44} \right\}$**. Цена игры** $M = \frac{7}{22}$**.**

6.4 Метод Брауна-Робинсон

Аналитическое решение матричных игр произвольной размерности (например, сведением к задаче линейного программирования) весьма затруднительно. Для приближенного решения матричных игр произвольной размерности рассмотрим итеративный метод Брауна-Робинсон. Пусть дана матричная игра с матрицей $A = (a_{ij})$, $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,m$. Рассматривается бесконечный процесс повторения данной игры, при котором каждый из игроков на каждом шаге предполагает, что противник выберет смешанную стратегию, определяемую частотами появлений чистых стратегий на предыдущих шагах, а сам выбирает чистую стратегию, обеспечивающую наилучший результат при данном предположении. Пусть уже сделано k повторений игры, в которых первый игрок выбирал чистые стратегии $i_1,\ldots, i_k$, а второй - $j_1,\ldots, j_k$. Тогда в соответствии с вышесказанным игрок 1 выберет на (k+1)-м шаге стратегию i_{k+1} из условия

$$\frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k} a_{i_{k+1} j_t} = \max_{1 \le i \le n} \frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k} a_{i j_t} = \nu_1(k),$$

а игрок 2 - стратегию j_{k+1} из условия

$$\frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k} a_{i_t j_{k+1}} = \min_{1 \le j \le m} \frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k} a_{i_t j} = \nu_2(k).$$

Если же стратегий, удовлетворяющих соответствующему условию, несколько, игрок выбирает любую из них.

Истинный платеж на (k+1)-м шаге равен $a_{i_{k+1}j_{k+1}}$, а средний платеж - $\frac{1}{k+1}\sum_{t=1}^{k+1} a_{i_t j_t} = \nu^*(k)$. Но эта величина не учитывается в итеративном процессе. Чистые стратегии i_1 и j_1 выбираются произвольно. Обозначим через $\bar{x}^k$ и $\bar{y}^k$ предполагаемые смешанные стратегии игроков на (k+1)-м шаге. Имеем цепочку неравенств

$$\nu_1(k) = \max_{1\le i\le n} \frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k} a_{ij_t} = \max_{1\le i\le n} F(\bar{e}_i, \bar{y}_k) \ge \min_{\bar{y}} \max_{1\le i\le n} F(\bar{e}_i, \bar{y}) =$$

$$= \max_{\bar{x}} \min_{1\le j\le m} F(\bar{x}, \bar{f}_j) \ge \min_{1\le j\le m} F(\bar{x}_k, \bar{f}_j) = \min_{1\le j\le m} \frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k} a_{i_t j} = \nu_2(k)$$

Дж. Робинсон доказала справедливость следующего соотношения:

$\lim_{k\to\infty} \nu_1(k) = \lim_{k\to\infty} \nu_2(k) = \nu$. Оно означает, что воображаемые платежи $\nu_1(k)$ и $\nu_2(k)$ стремятся к истинной цене игры ν.

Сходимость этого итеративного метода медленная, но значение его велико, так как он прост и в какой-то мере отражает приобретение игроками опыта в результате многих повторений конфликтной ситуации.

Пример

Рассмотрим применение метода Брауна-Робинсон (5 итераций) для матрицы $\begin{pmatrix} 12 & 9 & 3 & 21 \\ 15 & 24 & 30 & 9 \end{pmatrix}$.

Предположим, на 1-м шаге оба игрока выбрали стратегии с 1-м номером. $i_1 = 1,\ j_1 = 1$. Тогда начальные смешанные стратегии игроков таковы: $\bar{x}^1 = (1{,}0); \quad \bar{y}^1 = (1{,}0{,}0{,}0)$.

Пусть k=1. На (k+1)-м шаге

$$\max_{1\le i\le n}\frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k}a_{ij_t}=\max\{12,15\}=15=\nu_1(k)\Rightarrow$$ игрок 1 выберет стр. №2 ($i_2=2$)

$$\min_{1\le j\le m}\frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k}a_{i_tj}=\min\{12,9,3,21\}=3=\nu_2(k)\Rightarrow$$ игрок 2 выберет стр. №3 ($j_2=3$)

Тогда $\bar{x}^2=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right);\quad \bar{y}^2=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0\right).$

Пусть k=2. На (k+1)- м шаге

$$\max_{1\le i\le n}\frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k}a_{ij_t}=\max\left\{\frac{12+3}{2},\frac{15+30}{2}\right\}=\frac{45}{2}=\nu_1(k)\Rightarrow$$

$$i_3=2$$

$$\min_{1\le j\le m}\frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k}a_{i_tj}=\min\left\{\frac{12+15}{2},\frac{9+24}{2},\frac{3+30}{2},\frac{21+9}{2}\right\}$$

$$=\frac{27}{2}=\nu_2(k)\Rightarrow$$

$$j_3=1$$

Тогда $\bar{x}^3=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right);\quad \bar{y}^2=\left(\frac{2}{3},0,\frac{1}{3},0\right).$

Пусть k=3. На (k+1)-м шаге

$$\max_{1\le i\le n}\frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k}a_{ij_t}=\max\left\{\frac{12\cdot 2+3}{3},\frac{15\cdot 2+30}{3}\right\}=\frac{60}{3}=\nu_1(k)\Rightarrow$$

$$i_4=2$$

$$\min_{1\le j\le m}\frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k}a_{i_tj}=\min\left\{\frac{12+15\cdot 2}{3},\frac{9+24\cdot 2}{3},\frac{3+30\cdot 2}{3},\frac{21+9\cdot 2}{3}\right\}=$$

$$=\frac{39}{3}=\nu_2(k)\Rightarrow$$

$$j_4 = 4$$

Тогда $\overline{x}^4 = \left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right); \quad \overline{y}^4 = \left(\frac{2}{4},0,\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right).$

Пусть k=4. На(k+1)-м шаге

$$\max_{1\le i\le n}\frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k}a_{ij_t} = \max\left\{\frac{12\cdot 2+3+21}{4},\frac{15\cdot 2+30+9}{4}\right\} =$$

$$= \frac{69}{4} = \nu_1(k) \Rightarrow$$

$$i_5 = 2$$

$$\min_{1\le j\le m}\frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k}a_{i_t j} = \min\left\{\frac{12+15\cdot 3}{4},\frac{9+24\cdot 3}{4},\frac{3+30\cdot 3}{4},\frac{21+9\cdot 3}{4}\right\} =$$

$$= \frac{48}{4} = \nu_2(k) \Rightarrow$$

$$j_5 = 4$$

Тогда $\overline{x}^5 = \left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right); \quad \overline{y}^5 = \left(\frac{2}{5},0,\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right).$

Значения $\nu_1(4) = 17.25$ и $\nu_2(4) = 12$ достаточно сильно разнятся. Пример показывает, что ожидать от метода Брауна-Робинсон оценок, близких к истинным значениям, можно лишь при большом числе итераций. Для этого требуется автоматизация процесса вычислений.

7. БИМАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

В предыдущих главах мы исследовали антагонистические игры. Теперь рассмотрим общий случай игр двух игроков на конечных множествах стратегий с интересами, не являющимися противоположными (то есть неантагонистическими): у каждого игрока имеется своя функция выигрыша, не обязательно противоположная функции выигрыша противника.

Определение. Биматричной игрой называется система из четырех элементов Г=(X, Y, F, G), где X={1,…,n}, Y={1,…,m}- конечные множества стратегий игроков 1 и 2 соответственно; F(i,j) и

G(i,j) - их функции выигрыша.

Функции выигрыша F и G можно задать матрицами $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ (i=1,…,n; j=1,…,m). Смешанные стратегии игроков и функции выигрыша для таких стратегий определяются так же, как и в матричных играх. Далее под биматричной игрой понимается игра со смешанными стратегиями.

Определение. Пара стратегий ($\bar{x}_0, \bar{y}_0$) называется ситуацией равновесия биматричной игры, если справедливы соотношения

$$\forall \bar{x} \quad F(\bar{x}, \bar{y}_0) \le F(\bar{x}_0, \bar{y}_0);$$

$$\forall \bar{y} \quad G(\bar{x}_0, \bar{y}) \le G(\bar{x}_0, \bar{y}_0).$$

Смысл ситуации равновесия состоит в том, что каждому игроку невыгодно односторонне отступать от входящей в ситуацию стратегии. Таким образом, понятие ситуации равновесия обобщает понятие седловой точки матричной игры.

Представляет определенный интерес оптимальность в смысле, отличном от того, который дает понятие ситуации равновесия.

Определение. Пара стратегий ($\bar{x}_0, \bar{y}_0$), называется оптимальной по Парето, если не существует другой пары стратегий ($\bar{x}, \bar{y}$), такой, что

$$F(\bar{x}, \bar{y}_0) \ge F(\bar{x}_0, \bar{y}_0), \quad G(\bar{x}_0, \bar{y}) \ge G(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$$

(притом хотя бы одно из неравенств является строгим).

Содержательно оптимальность по Парето означает следующее: нет другой ситуации, которая была бы строго предпочтительнее для обоих игроков.

Формальное различие между ситуацией равновесия и ситуацией, оптимальной по Парето, следующее: в первой ни один игрок, действуя в одиночку, не может увеличить своего собственного выигрыша, а во второй оба игрока, действуя совместно, не могут (даже нестрого) увеличить выигрыш каждого. Выбор Парето-оптимальной пары стратегий может приводить к ситуациям, более выгодным для обоих участников, чем ситуации равновесия.

ТЕОРЕМА (без доказательства) Каждая биматричная игра имеет по крайней мере одну ситуацию равновесия.

В чистых же стратегиях ситуация равновесия существует в биматричной игре не всегда (как в матричной игре не всегда есть седловые точка). Рассмотрим примеры поиска чистых ситуаций равновесия.

Пример

Дилемма заключенного. Конкурс на реализацию проекта.

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -2 \\ -10 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -8 & -10 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Интерпретируется этот пример так. "Игроками" являются двое заключенных, обвиняемых в совершении тяжелого преступления, их стратегиями - сознаваться или не сознаваться. Если оба сознаются (в матрице это 1-я строка и 1-й столбец), то получат большой срок заключения, но не максимальный. Если оба не сознаются (2-я строка и 2-й столбец), то их осудят за менее тяжкие преступления, в которых они уже уличены. Наконец, если сознается только один, то его срок заключения будет значительно снижен, а другой получит максимальный срок. (Числа в матрицах - это сроки заключения, взятые с противоположным знаком.) В этой игре $(\bar{e}_1, \bar{f}_1)$ - единственная ситуация равновесия. Ситуация же $(\bar{e}_2, \bar{f}_2)$, более выгодная для обоих игроков, равновесной не является, так как каждому игроку выгодно односторонне отступить от стратегии, в нее входящей. Достаточно легко найти экономический пример матрицы с подобной расстановкой предпочтений (то есть с элементами матриц, находящимися в таком же порядке по числовым значениям) – конкурс на реализацию проекта. Две фирмы, борющиеся за заказ на определенную работу, могут выбрать два варианта - подать развернутую программу (1-я стратегия) или простую заявку (2-я стратегия). Согласно правилам при одинаковом выборе конкурентов заказ и доход делятся пополам, а в другом случае предпочтение отдается фирме, подавшей подробную заявку. На реализацию проекта победителям (одному или двоим) выделяется 10 тысяч долларов. Технические затраты на простую заявку - 1 тысяча долларов, на развернутую программу - 3 тысячи долларов.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Эти два примера (дилемма заключенного и борьба конкурсантов) характеризуют важную особенность биматричных игр –

возможность наличия противоречия между выгодностью и устойчивостью. В обоих случаях для обоих игроков выгодной является ситуация $(\bar{e}_2, \bar{f}_2)$, а устойчивой - $(\bar{e}_1, \bar{f}_1)$. Под неустойчивостью мы понимаем выгодность для одного из игроков одностороннего отклонения от ситуации. Выход здесь – в кооперации игроков.

Алгоритм поиска ситуации равновесия для биматричной игры произвольной размерности достаточно сложен. Поэтому дадим описание ситуаций равновесия только в биматричных играх размерности 2×2. Такая игра задается парой матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

ТЕОРЕМА (без доказательства) Если в биматричной игре Г элементы, стоящие в одном столбце матрицы А, и элементы, стоящие в одной строке матрицы В, попарно различны, то ситуации равновесия могут быть либо чистыми, либо вполне смешанными (то есть такими, в которых обе чистые стратегии применяются с положительными вероятностями). Вполне смешанная ситуация $(\bar{x}, \bar{y})$, где $\bar{x} = (x_1, x_2)$, $\bar{y} = (y_1, y_2)$ будет ситуацией равновесия в игре Г при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{21}x_2 = b_{12}x_1 + b_{22}x_2, \\ x_1, x_2 > 0, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2, \\ y_1, y_2 > 0, \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases}$$

Введем следующие обозначения:

$$\beta = \frac{b_{22} - b_{21}}{(b_{11} + b_{22}) - (b_{12} + b_{21})};$$

$$\alpha = \frac{a_{22} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

Получаем, что первая система имеет решение (единственное) тогда и только тогда, когда 0<β<1, причем в этом случае решение системы есть $x_1 = \beta, \quad x_2 = 1-\beta$. Аналогичным образом получаем, что вторая система имеет решение (единственное) тогда и только тогда, когда 0<α<1, и в этом случае решение системы есть $y_1 = \alpha, \quad y_2 = 1-\alpha$.

Итак, если 0<α, β<1, то игра Г имеет вполне смешанную, причем единственную, ситуацию равновесия $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ где $\bar{x}_0 = (\beta, 1-\beta)$, $\bar{y}_0 = (\alpha, 1-\alpha)$.

Пример. Борьба за рынки сбыта.

Фирма a намерена сбыть партию товара на одном из двух рынков, контролируемых более крупной фирмой b. С этой целью она проводит подготовительную работу, связанную с определенными затратами. Если фирма b разгадает - на каком из рынков фирма a будет продавать свой товар, она примет контрмеры и воспрепятствует "захвату" рынка (этот вариант означает поражение фирмы a); если нет, то фирма a одерживает победу. Предположим, что для фирмы a проникновение на первый рынок более выгодно, чем проникновение на второй, но и борьба на первом рынке требует от нее больших средств. Например, победа фирмы a на первом рынке приносит ей вдвое большую прибыль, чем победа на втором, но зато поражение на первом рынке полностью ее разоряет. Составим математическую модель этого конфликта, считая фирму a игроком 1 и фирму b игроком 2. Стратегии игрока 1: первая - проникновение на рынок 1, вторая - проникновение на рынок 2; стратегии игрока 2: первая - контрмеры на рынке 1, вторая - контрмеры на рынке 2. Пусть для фирмы a ее победа на 1-м рынке оценивается в 2 единицы, а победа на 2-м рынке - в 1 единицу; поражение фирмы a на 1-м рынке оценивается в -10, а на 2-м в -1. Для фирмы b ее победа составляет соответственно 5 и 1 единицу, а поражение -2 и -1.

Получаем в итоге биматричную игру Г с матрицами выигрышей

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Эта игра может иметь либо чистые, либо вполне смешанные ситуации равновесия. Ситуаций равновесия в чистых стратегиях здесь нет (содержательно этот факт можно объяснить следующим рассуждением: если стратегия фирмы a была разгадана фирмой b, то в этой ситуации отклонение выгодно для фирмы a; в противном случае отклонение выгодно для фирмы b). Убедимся теперь, что данная игра имеет вполне смешанную ситуацию равновесия.

$$\alpha = \frac{-1-2}{-11-3} = \frac{3}{14},\ \beta = \frac{1+1}{6+3} = \frac{2}{9}.$$

Итак, рассматриваемая игра имеет единственную ситуацию равновесия ($\bar{x}_0, \bar{y}_0$), где $\bar{x}_0 = \left(\frac{2}{9}, \frac{7}{9}\right)$, $\bar{y}_0 = \left(\frac{3}{14}, \frac{11}{14}\right)$. Она может быть реализована при многократном повторении игры (то есть при многократном воспроизведении описанной ситуации) следующим образом: фирма a должна использовать чистые стратегии 1 и 2 с частотами 2/9 и 7/9, а фирма b - чистые стратегии 1 и 2 с частотами 3/14 и 11/14. Любая из фирм, отклонившись от указанной смешанной стратегии, уменьшает свой ожидаемый выигрыш (однако, это не означает, как в случае антагонистических игр, что другая фирма увеличивает при этом свой ожидаемый выигрыш).

8. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Состояние системы определяется двумя факторами: выбранным управляющим воздействием со стороны управляющей подсистемы и состоянием среды.

Пусть X – множество управляющих воздействий (альтернатив) управляющей подсистемы. Y – множество состояний среды. В соответствии со сказанным выше, состояние системы однозначно определяется парой (x,y), где $x \in X$ и $y \in Y$. Управляющая подсистема оценивает каждое состояние системы некоторым числом, выражающим "полезность" этого состояния для управляющей подсистемы; таким образом, возникает функция F: $X \times Y \to R$. Значение функции F(x,y) есть оценка полезности (с точки зрения управляющей подсистемы) того состояния системы, которое возникает, если управляющая подсистема выбирает управляющее воздействие x, а среда принимает состояние y. Принципиальным является то обстоятельство, что при принятии решения управляющая система "не знает", в каком состоянии находится среда, то есть она не имеет информации о наличном состоянии среды. Именно это обстоятельство имеют в виду, когда говорят, что принятие решения происходит в условиях неопределенности. Отметим, что эта неопределенность не является абсолютной, так как принимающему решение известно множество состояний среды (то есть множество Y) и известна функция F(x,y).

В теории игр описанную выше ЗПР называют игрой с природой, причем управляющую подсистему принято называть игроком, выбираемые им альтернативные воздействия – стратегиями, а функцию F(x,y) – функцией выигрыша игрока. Таким образом, в теоретико-игровой терминологии задача принятия решения в условиях неопределенности формулируется следующим образом. Пусть X – множество стратегий игрока, Y – множество состояний среды (природы), F(x,y) – функция выигрыша игрока. Требуется указать наилучшую в некотором смысле альтернативу, или, как говорят в теории игр, найти оптимальную стратегию. Подчеркнем еще раз, что основная сложность данной задачи, носящая принципиальный характер, связана с отсутствием у игрока информации о состоянии среды (если бы игрок такую информацию имел, то его функция выигрыша стала бы функцией одной переменной x и задача нахождения оптимальной стратегии превратилась бы в задачу нахождения наибольшего значения этой функции).

Надо иметь некоторый способ сравнения двух стратегий. Самый простой и естественный принцип, по которому можно их сравнить - это принцип доминирования, состоящий в следующем: стратегия i_1 называется доминирующей стратегию i_2 (записывается $i_1 \geq i_2$), если при любом состоянии среды выигрыш игрока при выборе им стратегии i_2 будет не меньше, чем выигрыш при выборе стратегии i_2 (то есть $a_{i_1 j} \geq a_{i_2 j}$ при всех j=1,…,m). Очевидно, что если $i_1 \geq i_2$, то независимо от состояния среды стратегия i_1 является лучшей для игрока, чем стратегия i_2, поэтому стратегию i_2 можно исключить из дальнейшего рассмотрения. Итак, принцип доминирования состоит в том, что исключаются доминируемые стратегии.

Для того, чтобы выбрать из оставшихся стратегий оптимальную, нужны какие-то дополнительные соображения.

Основной метод, позволяющий найти оптимальную стратегию в ЗПР в условиях неопределенности, состоит в следующем:

формулируется некоторая гипотеза о поведении среды, позволяющая дать единственную численную оценку каждой стратегии. Оптимальной считается та стратегия, для которой численная оценка является максимальной.

Заметим, что задание оценки каждой стратегии позволяет сравнить любые две стратегии: из двух стратегий лучшей считается та, которая имеет большую оценку (стратегии, имеющие одинаковую численную оценку, считаются эквивалентными). Таким образом, задание оценок стратегий устанавливает критерий для сравнения стратегий.

Неопределенность – это когда противник не имеет противоположных интересов, но выигрыш действующего игрока во многом зависит от неизвестного заранее состояния противника. Неопределенность зависит от недостатка информации о внешних условиях, в которых будет приниматься решение и не зависит от действий игрока

Неопределенность может быть следствием многих причин:

- колебание спроса;
- нестабильность экономической ситуации;
- изменение курса валют;
- колебание уровня инфляции;
- неустойчивая биржевая ситуация;
- погода как природное явление.

Природа может принимать одно из своих возможных состояний и не имеет целью получение выигрыша.

Игра с природой представляется в виде платежной матрицы, элементы которой – выигрыши игрока А, но не являются проигрышами природы П.

Каждый элемент платежной матрицы a_{ij} – выигрыш игрока А при стратегии A_i в состоянии природы Π_j.

Матрица еще называется матрицей доходности, которая агрегирует информацию о возможной доходности вариантов стратегии при различных сценариях развития экономической ситуации.

Различают два вида задач в играх с природой:

1.Задачи о принятии решений в условиях неопределенности, когда нет возможности получить информацию о вероятностях появления состояний природы.

2.Задача о принятии решений в условиях риска, когда известны вероятности, с которыми природа принимает каждое из возможных состояний (уникальные единичные случайные явления связаны с неопределенностью; массовые случайные явления обязательно допускают некоторые закономерности вероятностного характера; ситуация с полной неопределенностью характеризуется отсутствием какой бы то ни было дополнительной информации).

Часто функция выигрышей задается платежной матрицей. Для принятия оптимального решения таких задач разработано несколько стандартных методов.

Предположим, что лицо, принимающее решение, может выбрать одну из возможных альтернатив, обозначенных номерами i = 1, 2, …, m.

Ситуация является полностью неопределенной, т. е. известен лишь набор возможных вариантов состояний внешней (по отношению к лицу, принимающему решение) среды, обозначенных номерами j = 1, 2, …, n.

Если будет принято i-е решение, а состояние внешней среды соответствует j-й ситуации, то лицо, принимающее решение, получит доход

Тип товара	Спрос		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

При решении задачи о принятии решений в условиях неопределенности для отбора вариантов стратегии применяют так называемые критерии оптимальности (альтернативные критерии оптимальности):

- критерий Вальда,
- критерий оптимизма,
- критерий пессимизма,
- критерий Сэвиджа,
- критерий Гурвица

Для выбора наиболее эффективного варианта стратегии ко всем возможным вариантам развития применяются все критерии оптимальности одновременно: каждый из критериев позволяет отобрать только один вариант, оптимальным же будет являться тот из них, на который указало большинство критериев.

9. КРИТЕРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

9.1 Критерий Вальда

Критерий Вальда (критерий гарантированного результата, максиминный критерий) позволяет выбрать наибольший элемент матрицы доходности из её минимально возможных элементов:

$W = \max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij}$, где a_{ij} - элемент матрицы доходности.

Критерий Вальда предназначен для выбора из рассматриваемых вариантов стратегий варианта с наибольшим показателем эффективности из минимально возможных показателей для каждого из этих вариантов.

Данный критерий обеспечивает максимизацию минимального выигрыша, который может быть получен при реализации каждого из вариантов стратегий. Критерий ориентирует лицо, принимающее решение, на осторожную линию поведения, направленную на получение дохода и минимизацию возможных рисков одновременно.

Применение критерия Вальда оправдано, если ситуация, в которой принимается решение, характеризуется следующими обстоятельствами:

- о вероятности наступления того или иного состояния природы ничего не известно;
- не допускается никакой риск;
- реализуется лишь малое количество решений.

Для заданной матрицы найдем оптимальную стратегию по критерию Вальда:

$$W = \max_{i} \min_{j} a_{ij} = \max(10; 12; 13) = 13$$

Полученный результат соответствует стратегии A_3 .

9.2 Критерий оптимизма

Критерий оптимизма (критерий максимакса) предназначен для выбора наибольшего элемента матрицы доходности из её максимально возможных элементов:

$$M = \max_i \max_j a_{ij}$$

Критерий оптимизма используется, когда игрок оказывается в безвыходном положении, когда любой его шаг равновероятно может оказаться как абсолютным выигрышем, так и полным провалом.

Данный критерий предполагает, что развитие ситуации будет благоприятным для лица, принимающего решение. Вследствие этого, оптимальным выбором будет вариант с наибольшим значением показателя эффективности в матрице доходности.

Ценой игры в чистых стратегиях по критерию оптимизма (M) является наибольший из показателей эффективности чистых стратегий.

Для заданной матрицы найдем оптимальную стратегию по критерию оптимизма:

$$M = \max_i \max_j a_{ij} = \max(20; 16; 18) = 20$$

Полученный результат соответствует стратегии A_1 .

9.3 Критерий пессимизма

Критерий пессимизма предназначен для выбора наименьшего элемента матрицы доходности из её минимально возможных элементов:

$$P = \min_i \min_j a_{ij}$$

Критерий пессимизма предполагает, что развитие ситуации будет неблагоприятным для лица, принимающего решение.

При использовании этого критерия лицо принимающее решение ориентируется на возможную потерю контроля над ситуацией и, поэтому, старается исключить все потенциальные риски и выбрать вариант с минимальной доходностью.

Для заданной матрицы найдем оптимальную стратегию по критерию пессимизма:

$$P = \min_i \min_j a_{ij} = \min(10; 12; 13) = 10$$

Полученный результат соответствует стратегии A_1 .

9.4 Критерий Сэвиджа

Критерий Сэвиджа (критерий минимаксного риска Сэвиджа) предназначен для выбора максимального элемента матрицы рисков из её минимально возможных элементов:

$$S = \min_i \max_j r_{ij}$$

Необходимо провести оценку риска в условиях, когда реальная ситуация неизвестна. Если игрок знает, что осуществляется j-е состояние природы, то выбрал бы наилучшее решение, то есть то, которое принесет наибольший выигрыш

$$b_j = \max_i a_{ij}$$

Принимая i-е решение, игрок А рискует получить не b_j, а только a_{ij}, то есть, если игрок примет i-е решение, а в природе реализуется j-е состояние, то произойдет недополучение дохода в размере:

$$r_{ij} = b_j - a_{ij} = a_{\max j} - a_{ij}$$

(по сравнению с тем, как если бы игрок знал точно, что реализуется j-е состояние природы, и выбрал бы решение, приносящее наибольший доход $b_j = \max_i a_{ij}$, j = 1, 2, …, n)

a_{ij} – значение показателя доходности варианта стратегии с максимальной доходностью из имеющихся i-ых вариантов при наступлении j-ого сценария развития событий.

$a_{\max j}$ - значение показателя доходности i-ого варианта стратегии при наступлении j-ого сценария развития событий (элемент платежной матрицы).

Матрица рисков (сожалений) отражает риск реализации вариантов стратегии для каждой альтернативы развития событий (характеризует риск выбора определенного варианта стратегии), который будет зависеть от уровня риска варианта стратегии при наступлении различных сценариев.

Среди элементов матрицы рисков сначала выбирается максимальный риск при каждой стратегии, а затем из них выбирается минимальный. То есть в данном случае пессимистично настроенный игрок предполагает, что состояние природы будет таковым, что для любой его стратегии риск будет наибольшим, а стратегию выбирает такую, чтобы этот риск минимизировать.

Критерий Сэвиджа позволяет выбрать вариант стратегии с меньшей величиной риска по сравнению с более высоким, первоначально ожидаемым уровнем риска.

Данный критерий ориентирует лицо принимающее решение на более благоприятное развитие ситуации по сравнению с наихудшим состоянием, на которое то рассчитывало вначале.

Ценой игры в чистых стратегиях по критерию Сэвиджа называется минимальный показатель неэффективности среди показателей неэффективности всех чистых стратегий.

Теорема: Для того чтобы чистая стратегия была безрисковой, т.е. чтобы её показатель неэффективности по критерию Сэвиджа был нулевым, необходимо и достаточно, чтобы она доминировала каждую из остальных чистых стратегий.

Для заданной матрицы найдем оптимальную стратегию по критерию Сэвиджа:

Применяем формулу $r_{ij} = a_{\max j} - a_{ij}$, построим матрицу рисков.

Матрица рисков

Тип товара	Спрос		
	Π_1	Π_2	Π_3
A_1	0	3	5
A_2	4	6	1
A_3	7	0	0

Матрица доходности

Тип товара	Спрос		
	Π_1	Π_2	Π_3
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

$$S = \min_i \max_j r_{ij} = \min(5; 6; 7) = 5$$

Полученный результат соответствует стратегии A_1.

9.5 Критерий Гурвица

Критерий Гурвица (взвешивает пессимистический и оптимистический подходы к анализу неопределенной ситуации) предназначен для выбора некоторого среднего элемента матрицы доходности, отличающегося от крайних состояний – от минимального и максимального элементов:

$$H = \max_i \left(\lambda \cdot \max_j a_{ij} + (1-\lambda) \cdot \min_j a_{ij} \right),$$

где λ – коэффициент оптимизма, $0 \le \lambda \le 1$

Коэффициент λ выражает количественно «меру оптимизма» игрока А при выборе стратегии и определяется им из субъективных соображений на основе статистических исследований результатов принятия решений или личного опыта лица принимающего решение в схожих ситуациях.

если λ коэффициент оптимизма, то $(1-\lambda)$ коэффициент пессимизма.

Критерий Гурвица позволяет избежать пограничных состояний при принятии решения – неоправданного оптимизма и крайнего пессимизма относительно ожидаемой доходности – и выбрать наиболее вероятный вариант стратегии, обеспечивающий наилучшую эффективность.

Критерий Гурвица ориентирован на установление баланса между случаями крайнего пессимизма и крайнего оптимизма при выборе стратегии путем взвешивания обоих исходов с помощью коэффициента оптимизма.

Для заданной матрицы найдем оптимальную стратегию по критерию Гурвица ($\lambda = 0{,}5$):

$$H = \max_i \left(\lambda \cdot \max_j a_{ij} + (1-\lambda) \cdot \min_j a_{ij} \right)$$

$$H_1 = 0{,}5 \cdot 20 + (1-0{,}5) \cdot 10 = 15$$

$$H_2 = 0{,}5 \cdot 16 + (1-0{,}5) \cdot 12 = 14$$

$$H_3 = 0{,}5 \cdot 18 + (1-0{,}5) \cdot 13 = 15{,}5$$

$$H = \max(15; 14; 15{,}5) = 15{,}5$$

Полученный результат соответствует стратегии A_3.

Вывод:

Итак, в рассмотренной задаче согласно каждому критерию выбраны стратегии:

W (Вальда) $\rightarrow A_3$

M (оптимизма) $\rightarrow A_1$

P (пессимизма) $\rightarrow A_1$

S (Сэвиджа) $\rightarrow A_1$

H (Гурвица) $\rightarrow A_3$

Оптимальной является стратегия A_1.

10. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ЧАСТИЧНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Построение математической модели задачи принятия решения сводится к заданию функции выигрыша F. Формально функция выигрыша есть функция двух переменных x и y, но эти переменные входят в нее неравноправно, что является отражением неравноправия управляющей системы и среды. Дело в том, что управляющая система имеет цель, поэтому ее поведение носит целенаправленный характер; в то же время среда (которую можно рассматривать как обобщенный аналог природы), цели не имеет, и ее поведение носит недетерминированный характер. Если в этой недетерминированности имеются какие-то закономерности, они являются закономерностями стохастического типа. В общем случае это обстоятельство проявляется в том, что существует некоторая вероятностная мера, в соответствии с которой появляются те или иные состояния среды. В том простейшем случае, который мы рассматриваем, множество состояний среды Y является конечным, и в этом случае задание вероятностной меры на множестве Y сводится к заданию вероятностного вектора $\bar{y}_0 = \left(y_{01},\ldots,y_{0m}\right)$, где

$y_{0j} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{m} y_{0j} = 1;$ при этом y_{0j} есть вероятность появления состояния j. Вектор $\bar{y}_0$ называется априорным распределением вероятностей на множестве состояний природы.

Предположим, что управляющей подсистеме (игроку) известен вероятностный вектор $\bar{y}_0$, то есть для каждого возможного состояния среды известна вероятность его наступления. В этом случае говорят, что принятие решения происходит в условиях риска. Пусть функция выигрыша задана в виде матрицы $A = \left(a_{ij}\right)$. При принятии решения в условиях риска игрок, выбирая стратегию i, получает выигрыш a_{ij} с вероятностью y_{0j} (j =1,…,m). Таким образом, исходом, соответствующим выбору стратегии i, является случайная величина, распределение которой задано следующим рядом:

ξ_i	a_{i1}	…	a_{ij}	…	a_{im}

P	y_{01}		y_{0j}		y_{0m}

При решении задачи о принятии решений в условиях риска различным состояниям природы поставлены в соответствие соответствующие вероятности.

Игрок А принимает решение на основе критерия максимального ожидаемого среднего выигрыша или минимального ожидаемого среднего риска

Критерии оптимальности в условиях риска:

- критерий Байеса;
- критерий Лапласа.

11. КРИТЕРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ЧАСТИЧНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

11.1 Критерий Байеса относительно выигрышей

Предположим, что игроку А известны не только состояния $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$, в которых случайным образом может находиться природа, но и вероятности $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ наступления этих состояний, при этом $\sum q_i = 1$. Это говорит о том, что лицо принимающее решение находится в условиях риска.

Чистую стратегию A_i можно определить как случайную величину со следующим законом распределения

A_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{in}
q	q_1	q_2	...	q_n

Математическое ожидание данной случайной величины

$$B_i = \sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij}, \quad i = 1,2,\ldots,m$$

Оно означает средне взвешенное выигрышей i-ой строки матрицы А с весами $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$.

Критерий Байеса относительно выигрышей позволяет выбрать максимальный из ожидаемых элементов матрицы доходности при известной вероятности возможных состояний природы:

$$B = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij} \right\}$$

11.2 Критерий Байеса относительно рисков

Показателем эффективности стратегии A_i по критерию Байеса относительно рисков является математическое ожидание рисков, расположенных в i-ой строке матрицы R:

$$B_i^r = \sum_{j=1}^{n} q_j r_{ij}, \quad i = 1,2,\ldots,m$$

Критерий Байеса относительно рисков позволяет выбрать минимальное значение из средних рисков при известной вероятности возможных состояний природы:

$$B^r = \min_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} q_j r_{ij} \right\}$$

Критерии Байеса относительно выигрышей и относительно рисков эквивалентны, то есть по обоим критериям оптимальной будет одна и та же стратегия.

11.3 Критерий Лапласа относительно выигрышей

Вероятность состояний природы оценивается субъективно как равнозначные: $q_j = n^{-1}$, $\sum q_j = \sum n^{-1} = 1$

Этот принцип называется – принцип недостаточного основания Лапласа.

Имеется игра с природой, в которой игрок А обладает m чистыми стратегиями A_i, природа П может случайным образом находиться в одном из n своих состояний Π_j.

Показателем эффективности чистой стратегии A_i по критерию Лапласа относительно выигрышей является среднеарифметическое выигрышей при этой стратегии:

$$L_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \quad i = 1,2,\ldots,m$$

Критерий Лапласа относительно выигрышей предполагает выбор варианта стратегии с максимальной ожидаемой доходностью при равной вероятности наступления возможных стратегий природы.

$$L = \max_i \left\{ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right\}$$

11.4 Критерий Лапласа относительно рисков

Показателем неэффективности чистой стратегии A_i по критерию Лапласа относительно рисков является среднеарифметическое рисков при этой стратегии:

$$L_i^r = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}, \quad i = 1,2,\ldots,m$$

Критерий Лапласа относительно рисков предполагает выбор варианта стратегии с минимальным риском при равной вероятности наступления возможных состояний природы.

$$L^r = \min_i \left\{ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij} \right\}$$

Рассмотрим на **примере:**

Магазин может завести в различных пропорциях товары трех типов (A_1, A_2, A_3). Их реализация и прибыль зависит от вида товара и спроса на него. Спрос имеет три состояния – Π_1, Π_2, Π_3 и не прогнозируется.

Матрица доходности имеет следующий вид:

Тип товара	Спрос		
	Π_1	Π_2	Π_3
A_1	20	15	10

A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

Необходимо найти оптимальную стратегию по критерию Байеса при вероятностях состояний природы: $q_1 = 0{,}2$, $q_2 = 0{,}3$, $q_3 = 0{,}5$ и по критерию Лапласа.

Решение:

Вычислим средние выигрыши по критерию Байеса.

Тип товара	Спрос		
	Π_1	Π_2	Π_3
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15
q	0,2	0,3	0,5

$$B_1 = 20 \cdot 0{,}2 + 15 \cdot 0{,}3 + 10 \cdot 0{,}5 = 13{,}5$$

$$B_2 = 16 \cdot 0{,}2 + 12 \cdot 0{,}3 + 14 \cdot 0{,}5 = 13{,}8$$

$$B_3 = 13 \cdot 0{,}2 + 18 \cdot 0{,}3 + 15 \cdot 0{,}5 = 15{,}5$$

$$B = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij} \right\} = \max(13{,}5; 13{,}8; 15{,}5) = 15{,}5$$

Оптимальной стратегией по критерию Байеса относительно выигрышей является стратегия A_3.

Вычислим средние выигрыши по критерию Лапласа.

Тип товара	Спрос		
	Π_1	Π_2	Π_3
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15
q	$1/3$	$1/3$	$1/3$

$$L_1 = \frac{1}{3} \cdot (20+15+10) = 15$$

$$L_2 = \frac{1}{3} \cdot (16+12+14) = 14$$

$$L_3 = \frac{1}{3} \cdot (13+18+15) = 15{,}33$$

$$L = \max_i \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right\} = \max(15; 14; 15{,}33) = 15{,}33$$

Оптимальной стратегией по критерию Лапласа относительно выигрышей является стратегия A_3.

12. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ПОЛНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Математические модели исследуемых явлений или процессов могут быть заданы в виде таблиц, элементами которых являются значения частных критериев эффективности функционирования системы, вычисленные для каждой из сравниваемых стратегий при строго заданных внешних условиях. Для рассматриваемых условий принятие решений может производиться:

- по одному критерию;
- по нескольким критериям.

Пример

Одной из фирм требуется выбрать оптимальную стратегию по обеспечению нового производства оборудованием. С помощью экспериментальных наблюдений были определены значения частных критериев функционирования соответствующего оборудования (a_{ij}), выпускаемого тремя заводами-изготовителями. Рассмотрим данные для выбора оптимальной стратегии в условиях полной определенности.

Варианты оборудования (стратегии, решения)	Частные критерии эффективности оборудования*			
	производительность, д. е.	стоимость оборудования, д. е.	Энергоемкость, у. е.	надежность, у. е.
Оборудование завода 1, x_1	$a_{11}=5$	$a_{12}=7$	$a_{13}=5$	$a_{14}=6$
Оборудование завода 2, x_2	$a_{21}=3$	$a_{22}=4$	$a_{23}=7$	$a_{24}=3$
Оборудование завода 3, x_3	$a_{31}=4$	$a_{32}=6$	$a_{33}=2$	$a_{34}=4$
* Значения частных критериев даны в условных единицах.				

На основе экспертных оценок были также определены веса частных критериев λ_j, $j=1,\ldots,4$:

$$\lambda_1=0,4; \qquad \lambda_2=0,2; \qquad \lambda_3=0,1; \qquad \lambda_4=0,3.$$

Очевидно, выбор оптимальной стратегии (варианта оборудования) по одному критерию в данной задаче не вызывает затруднений. Например, если оценивать оборудование по надежности, то лучшим является оборудование завода 1 (стратегия x_1).

Выбор оптимального решения по комплексу нескольких критериев (в нашем примере ~ по четырем критериям) является задачей многокритериальной.

Один из подходов к решению многокритериальных задач управления связан с процедурой образования обобщенной функции $F_i(a_{i1}; a_{i2}; a_{i3}; \ldots; a_{in})$, монотонно зависящей от критериев $a_{i1}; a_{i2}; a_{i3}; \ldots; a_{in}$. Данная процедура называется процедурой (методом) свертывания критериев. Существует несколько методов свертывания, например:

- метод аддитивной оптимизации;
- метод многоцелевой оптимизации и др.

Рассмотрим подробнее метод аддитивной оптимизации.

Пусть

$$F_i(a_{ij})=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\cdot a_{ij}$$

Это выражение опреде- ляет аддитивный критерий оптимальности. Величины λ_j являются весовыми коэффициентами, которые определяют в количественной форме степень предпочтения j-го критерия по сравнению с другими критериями. Другими словами, коэффициенты λ_j определяют важность j-го критерия оптимальности. При этом более важному критерию приписывается больший вес, а общая важность всех критериев равна единице, т. е.

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 1,\ldots,n$$

Обобщенная функция цели $F_i(a_{ij})$ может быть использована для свертывания частных критериев оптимальности, если:

- частные (локальные) критерии количественно соизмеримы по важности, т. е. каждому из них можно поставить в соответствие некоторое число λ_j, которое численно характеризует его важность по отношению к другим критериям;

- частные критерии являются однородными (имеют одинаковую размерность; в нашем примере критерии «стоимость оборудования » и «производительность оборудования» в условных денежных единицах будут однородными).

В этом случае для решения задачи многокритериальной оптимизации оказывается справедливым применение аддитивного критерия оптимальности.

Допустим, в предложенном примере необходимо выбрать оптимальный вариант оборудования по двум однородным локальным критериям:

- производительность (д. е.);
- стоимость оборудования (д. е.).

На основе экспертных оценок были определены весовые коэффициенты этих двух частных критериев: $\lambda_1 = 0{,}667$, $\lambda_2 = 0{,}333$. Вычислим аддитивный критерий оптимальности для трех вариантов:

$$F_1(a_{1j}) = \lambda_1 \cdot a_{11} + \lambda_2 \cdot a_{12} = 0{,}667 \cdot 5 + 0{,}333 \cdot 7 = 5{,}666$$

$$F_2(a_{2j}) = \lambda_1 \cdot a_{21} + \lambda_2 \cdot a_{22} = 0{,}667 \cdot 3 + 0{,}333 \cdot 4 = 3{,}333$$

$$F_3(a_{3j}) = \lambda_1 \cdot a_{31} + \lambda_2 \cdot a_{32} = 0{,}667 \cdot 4 + 0{,}333 \cdot 6 = 4{,}666$$

Очевидно, первый вариант оборудования по двум частным стоимостным критериям будет оптимальным, так как $F_{\max} = F_1(a_{1j}) = 5{,}666$. В данном примере четыре локальных критерия не однородны, т.е. имеют различные единицы измерения. В этом случае требуется нормализация критериев. Под нормализацией критериев понимается такая последовательность процедур, с помощью которой все критерии приводятся к единому, безразмерному масштабу измерения. К настоящему времени разработано большое количество схем нормализации. Рассмотрим некоторые из них.

Определим максимум и минимум каждого локального критерия, т. е.

$$a_j^+ = \max a_{ij}, \quad i = 1,\ldots,m;$$

$$a_j^- = \min a_{ij}, \quad i = 1,\ldots,m.$$

Выделим группу критериев $a_j, \quad j = 1,\ldots,l$, которые максимизируются при решении задачи, и группу критериев $a_j, \quad j = l+1,\ldots,n$, которые минимизируются при решении задачи.

Тогда в соответствии с принципом максимальной эффективности нормализованные критерии определяются из следующих соотношений:

$$\hat{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_j^+}, \quad j = 1,\ldots,l;$$

$$\hat{a}_{ij} = 1 - \frac{a_{ij}}{a_j^+}, \quad j = l+1,\ldots,n;$$

или

$$\hat{a}_{ij} = \frac{a_{ij} - a_j^-}{a_j^+ - a_j^-}, \quad j = 1,\ldots,l;$$

$$\hat{a}_{ij} = \frac{a_j^+ - a_{ij}}{a_j^+ - a_j^-}, \quad j = l+1,\ldots,n;$$

Оптимальным будет тот вариант (стратегия), который обеспечивает максимальное значение функции цели:

$$F_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot \hat{a}_{ij}, \quad i = 1,\ldots,m.$$

В соответствии с принципом минимальной потери нормализованные критерии определяются из соотношений

$$\hat{a}_{ij} = 1 - \frac{a_{ij}}{a_j^+}, \quad j = 1,\ldots,l;$$

$$\hat{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_j^+}, \quad j = l+1,\ldots,n;$$

или

$$\hat{a}_{ij} = \frac{a_j^+ - a_{ij}}{a_j^+ - a_j^-}, \quad j = 1,\ldots,l;$$

$$\hat{a}_{ij} = \frac{a_{ij} - a_j^-}{a_j^+ - a_j^-}, \quad j = l+1,\ldots,n;$$

При этом оптимальным будет тот вариант (стратегия), который обеспечивает минимальное значение функции цели F_i .

Пример

Используя данные предыдущего примера, определите оптимальную стратегию выбора оборудования из трех возможных (m = 3) с учетом четырех локальных критериев (n = 4).

Решение

1. Определим max и min каждого локального критерия:

$$a_1^+ = 5, \quad a_2^+ = 7, \quad a_3^+ = 7, \quad a_4^+ = 6.$$

2. При решении задачи максимизируются первый (производительность) и четвертый (надежность) критерии, а минимизируются второй (стоимость оборудования) и третий (энергоемкость) критерии.

3. Исходя из принципа максимизации эффективности, нормализуем критерии:

$$\hat{a}_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_1^+}: \quad \hat{a}_{11} = \frac{a_{11}}{a_1^+} = \frac{5}{5} = 1; \quad \hat{a}_{21} = \frac{a_{21}}{a_1^+} = \frac{3}{5} = 0{,}6;$$

$$\hat{a}_{31} = \frac{a_{31}}{a_1^+} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

$$\hat{a}_{i4} = \frac{a_{i4}}{a_4^+}: \quad \hat{a}_{14} = \frac{a_{14}}{a_4^+} = \frac{6}{6} = 1; \quad \hat{a}_{24} = \frac{a_{24}}{a_4^+} = \frac{3}{6} = 0{,}5;$$

$$\hat{a}_{34} = \frac{a_{34}}{a_4^+} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

$$\hat{a}_{i2} = 1 - \frac{a_{i2}}{a_2^+}:$$

$$\hat{a}_{12} = 1 - \frac{a_{12}}{a_2^+} = 1 - \frac{7}{7} = 0; \quad \hat{a}_{22} = 1 - \frac{a_{22}}{a_2^+} = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7};$$

$$\hat{a}_{32} = 1 - \frac{a_{32}}{a_2^+} = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7};$$

$$\hat{a}_{i3} = 1 - \frac{a_{i3}}{a_3^+}:$$

$$\hat{a}_{13} = 1 - \frac{a_{13}}{a_3^+} = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}; \; \hat{a}_{23} = 1 - \frac{a_{23}}{a_3^+} = 1 - \frac{7}{7} = 0;$$

$$\hat{a}_{33} = 1 - \frac{a_{33}}{a_3^+} = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}.$$

4. Определим обобщенную функцию цели по каждому варианту:

$$F_1 = \lambda_1 \cdot \hat{a}_{11} + \lambda_2 \cdot \hat{a}_{12} + \lambda_3 \cdot \hat{a}_{13} + \lambda_4 \cdot \hat{a}_{14} =$$

$$0{,}4 \cdot 1 + 0{,}2 \cdot 0 + 0{,}1 \cdot \frac{2}{7} + 0{,}3 \cdot 1 \approx 0{,}729;$$

$$F_2 = \lambda_1 \cdot \hat{a}_{21} + \lambda_2 \cdot \hat{a}_{22} + \lambda_3 \cdot \hat{a}_{23} + \lambda_4 \cdot \hat{a}_{24} =$$

$$0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}2 \cdot \frac{3}{7} + 0{,}1 \cdot 0 + 0{,}3 \cdot 0{,}5 \approx 0{,}476;$$

$$F_3 = \lambda_1 \cdot \hat{a}_{31} + \lambda_2 \cdot \hat{a}_{32} + \lambda_3 \cdot \hat{a}_{33} + \lambda_4 \cdot \hat{a}_{34} =$$

$$0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot \frac{1}{7} + 0{,}1 \cdot \frac{5}{7} + 0{,}3 \cdot \frac{2}{3} \approx 0{,}603.$$

Оптимальным является первый вариант оборудования, так как $F_{\max} = F_1 = 0{,}729$.

Рассмотренный подход к решению многокритериальных задач зачастую применяется при решении экономических задач, связанных с оценкой качества промышленной продукции и оценкой уровня технического совершенства технических устройств и систем по нескольким показателям.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА:

1. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем: Учебное пособие. – М.: «Финансы и статистика», 2002.
2. Теория игр в экономике (практикум с решениями задач): Учебное пособие / Л.Г. Лабскер, Н.А. Ященко; под ред. Л.Г. Лабскера. – М.: КНОРУС, 2012.
3. Исследование операций в экономике: Учебное пособие для вузов под ред. Н.Ш.Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2004.
4. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование: Учебное пособ. – М.: Высш. школа, 1980.
5. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учебное пособие для вузов под ред. В.В.Федосеева. – М.: ЮНИТИ, 2002.
6. Шапкин А.С., Мазаева Н.П. Математические методы и модели исследования операций: Учебник. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К0», 2004.
7. Афанасьев М.Ю., Багриновский К.А., Матюшок В.М. Прикладные задачи исследования операций. Учебное пособ. – М.: ИНФРА-М, 2006.