ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Математика»

Учебно-методическое пособие

по дисциплине
«Математика»

«Дифференциальные уравнения первого порядка»

Авторы
Ворович Е.И.,
Коровина К.С.,
Тукодова О.М.

Ростов-на-Дону, 2016

Аннотация

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов очной формы обучения для всех направлений подготовки бакалавриата.

Авторы

к.ф.-м.н., доцент Ворович Е.И.,
ст. преп. Коровина К.С.,
к.ф.-м.н., доцент Тукодова О.М.

Оглавление

Общий вид дифференциального уравнения первого порядка

$$F(x,y,y')=0.$$

Здесь x – независимая переменная, y – неизвестная функция. Если уравнение разрешено относительно y', то его можно записать в виде

$$y' = f(x,y) \tag{1}$$

В некоторых случаях уравнение (1) удобно записать в виде

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2}$$

Общего метода определения решения дифференциальных уравнений первого порядка не существует, рассматриваются отдельные типы уравнений, для которых разработаны методы решения.

Поэтому при решении дифференциальных уравнений необходимо сначала определить его тип.

В данном пособии рассматриваются уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения первого порядка, линейные уравнения, уравнения Бернулли, дифференциальные уравнения в полных дифференциалах.

Перечислим признаки каждого типа и кратко предлагаемые методы решения.

I. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение относится к данному типу, если в виде (1) правую часть $f(x,y)$ можно представить в виде произведения двух функций, одна из которых не зависит от x, а другая – от y. То есть

$$y' = f_1(x)\,f_2(y) \tag{3}$$

Метод решения: заменяем y' на $\dfrac{dy}{dx}$ и приводим уравнение к виду

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx \tag{4}$$

То есть, как говорят, разделяем переменные, затем интегрируем (4).

II. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнения, которые можно привести к виду

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{5}$$

Метод решения: вводится новая переменная

$$t(x) = \frac{y}{x} \tag{6}$$

Тогда *y=tx* ,

$$y' = t'x + t \tag{7}$$

После подстановки (6) и (7) в уравнение (5), получаем новое уравнение относительно *t(x)* , которое является уравнением с разделяющимися переменными.

III. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли

Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{8}$$

где *p(x)* и *q(x)* непрерывные функции называется **линейным.**

Метод решения: решение (8) ищем в виде произведения двух функций, то есть

$$y = u(x)v(x) \tag{9}$$

При этом решение линейного уравнения сводится к решению двух уравнений с разделяющимися переменными (из одного из них находим *u(x)*, а из другого – *v(x))*.

Уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)y^n$ называется **уравнением Бернулли**. Для решения уравнений Бернулли применим тот же метод, что и для решения линейных уравнений.

IV. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение вида (2) называется уравнением в полных дифференциалах, если выполнено условие

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (10)$$

При выполнении этого условия левая часть (2) является полным дифференциалом некоторой функции *u(x,y)* и само уравнение можно переписать в виде $du(x,y)=0$. Тогда его решение будет иметь вид $u(x,y)=c$.

Итак, решение уравнения свелось к нахождению функции *u(x,y)*, которая должна удовлетворять условиям

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \qquad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \qquad (12)$$

Интегрируя условие (11) по *x*, получаем $u=\int M(x,y)dx + C(y)$, где *C(y)* – произвольная функция *y*, которую определяем из условия (12).

В таблице представлены примеры определения типа дифференциального уравнения первого порядка. Далее приведены решения первых десяти уравнений

Уравнения	Тип уравнения
1) $xy' + y = y^2$	$y' = \frac{y^2 - y}{x}$ – уравнение с разделяющимися переменными, $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(y)=y^2-y$
2) $y' = 10^{x+y}$	$y' = 10^{x+y}$ – уравнение с разделяющимися переменными $f_1(x) = 10^x$, $f_2(x) = 10^y$

3) $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$	Уравнение однородное. Правая часть $f(\frac{y}{x})=(\frac{y}{x})^2-2$
4) $xy' - 2y = 2x^4$	Разделим обе части уравнения на *x*, получим $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$ – уравнение линейное, $p(x) = -\frac{2}{x}$, $q(x)=2x^3$
5) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$	Уравнение однородное. Правая часть $f(\frac{y}{x})=(\frac{y}{x})^{-1}+\frac{y}{x}$
6) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$	Уравнение однородное. Разделим обе части уравнения на *x*. Получим $y' = \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$, $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}$.
7) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$	Уравнение линейное, $p(x)=2x$, $q(x) = 2xe^{-x^2}$
8) $yy' = \frac{1-2x}{y}$	Уравнение с разделяющимися переменными, $y' = \frac{1-2x}{y^2}$, $f_1(x)=1-2x$, $f_2(y) = \frac{1}{y^2}$
9) $y'tgx - y = a$	Уравнение с разделяющимися переменными $y' = \frac{y+a}{tgx}$, $f_1(x) = \frac{1}{tgx}$, $f_2(y)=y+a$

10) $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$	Уравнение в полных дифференциалах, $M(x,y) = e^y$, $N(x,y) = xe^y - 2y$, $\frac{\partial M}{\partial y} = e^y$, $\frac{\partial N}{\partial x} = e^y$, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.
11) $y' + y\cos x = \sin x \cos x$	Уравнение линейное, *p(x)=cosx, q(x)=sinxcosx*
12) $y' = \frac{x+y}{x-y}$	Уравнение однородное. Правую часть его можно представить в виде $f(x,y) = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$
13) $yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy = 0$	Уравнение в полных дифференциалах. $M(x,) = yx^{y-1}$, $N(x,y) = x^y \ln x$, $\frac{\partial M}{\partial y} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x$, $\frac{\partial N}{\partial x} = yx^{y-1}\ln x + x^y \frac{1}{x} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x$, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Решения

1) $xy' + y = y^2$. Уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, приведем его к виду $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - y}{x}$. Разделим переменные: $dy = \frac{y^2 - y}{x}dx$, $\frac{dy}{y^2 - y} = \frac{dx}{x}$. Переменные разделены, проинтегрируем теперь обе части последнего уравнения:

$$\int \frac{dy}{y^2 - y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y^2 - y} = \int \frac{dy}{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \left\{ \begin{array}{l} \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| \\ a = \frac{1}{2} \end{array} \right\} = \ln\left|\frac{y - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{y - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}\right| = \ln\left|\frac{y-1}{y}\right|$$

Получим в итоге $\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \ln|x| + \ln C$ – общее решение (вариант №1), произвольная постоянная здесь обозначена *lnC*.

Получим более простую форму записи общего решения $\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \ln xC \to \frac{y-1}{y} = Cx \to y = \frac{1}{1 - Cx}$ – общее решение (вариант№2).

2) $y' = 10^{x+y}$. Уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, приведем его к виду $\frac{dy}{dx} = 10^x 10^y$, $dy = 10^x 10^y\, dx$, $\frac{dy}{10^y} = 10^x\, dx$.

Переменные разделены, интегрируем

$$\int \frac{dy}{10^y} = \int 10^x\, dx, \qquad \int a^u\, du = \frac{a^u}{\ln a},$$

$$\int \frac{dy}{10^y} = -\int 10^{-y}\, d(-y) = -\frac{10^{-y}}{\ln 10}$$

$-\frac{10^{-y}}{\ln 10} = \frac{10^x}{\ln 10} + \frac{C}{\ln 10}$ (произвольную постоянную С обозначили $\frac{C}{\ln 10}$).

$10^x + 10^{-y} + C = 0$ – общее решение.

3) $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$ Уравнение однородное. Вводим новую переменную $t = \frac{y}{x} \rightarrow y' = t'x + t$. После подстановки уравнение имеет вид $t'x + t = t^2 - 2$, $t' = \frac{t^2 - t - 2}{x}$.

Относительно новой неизвестной функции *t(x)* получили уравнение с разделяющимися переменными. Решая его, получаем

$$\frac{dt}{dx} = \frac{t^2 - t - 2}{x}, \qquad \frac{dt}{t^2 - t - 2} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dt}{t^2 - t - 2} = \int \frac{dt}{\left(t - 1/2\right)^2 - 9/4} = \left\{ \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|, a = \frac{3}{2} \right\} = \frac{1}{3} \ln\left|\frac{t-2}{t+1}\right|$$

$\frac{1}{3} \ln\left|\frac{t-2}{t+1}\right| = \ln|x| + \ln C$ общее решение (вариант №1).

Упрощаем

$\frac{t-2}{t+1} = cx^3 \rightarrow t = \frac{Cx^3 + 2}{1 - Cx^3}$. Делаем обратную замену $t = \frac{y}{x}$, откуда $y = \frac{Cx^4 + 2x}{1 - Cx^3}$ – общее решение (вариант №2).

4) $y' - \frac{2}{x} y = 2x^3$. Уравнение линейное, решение ищем в виде *y=uv*. Тогда $y' = u'v + v'u$. После подстановки *y* и y' в уравнение, получаем $u'v + v'u - \frac{2uv}{x} = 2x^3 \rightarrow$

$$u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x}\right) = 2x^3 \qquad (13)$$

Подберем функцию *v(x)* так, чтобы выражение в скобках равнялось нулю, т.е. решим уравнение

$$v' - \frac{2v}{x} = 0 \qquad (14)$$

$v' = \frac{2v}{x}$ – уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции *v(x)*. Решая его, получаем $\frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x}$, $\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x}$, $\ln|v| = 2\ln|x| \rightarrow v = x^2$.

<u>Замечание</u>. Здесь $v = x^2$ является частным решением уравнения (14) при *C=0*, т.к. мы искали любую функцию, которая бы обращала левую часть (14) в ноль, а не все множество его решений.

Далее подставим $v = x^2$ в уравнение (13), получим $u'x^2 = 2x^3 \rightarrow u' = 2x$. Это уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции *u(x)*. Решая его, получим *du=2xdx*. $u = \int 2xdx = x^2 + C$.

Функции *u(x)* и *v(x)* найдены.
$Y=u(x)v(x)=(x^2+C)x^2$ –общее решение.

5) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$. Уравнение однородное, после введения новой переменной $t(x) = \frac{y}{x}$ приобретает вид

$t'x + t = \frac{1}{t} + t$, $t' = \frac{1}{tx}$. Получено уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции *t(x)*. Решая его, получаем $tdt = \frac{dx}{x}$, $\frac{t^2}{2} = \ln|x| + \ln C \rightarrow$ $t^2=2\ln Cx$,

$t = \pm\sqrt{2\ln Cx}$, $y = \pm x\sqrt{2\ln Cx}$ – общее решение.

6) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$. Уравнение однородное (смотри таблицу), приводится к виду $t'x + t = t + \sqrt{1+t^2}$ или

$t' = \dfrac{\sqrt{1+t^2}}{x}$ – уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, получим $\dfrac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \dfrac{dx}{x}$. После интегрирования $\ln\left|t + \sqrt{t^2+1}\right| = \ln|x| + \ln C$ – общее решение (вариант №1).

Упрощая его вид $t + \sqrt{1+t^2} = Cx$, $\sqrt{1+t^2} = Cx - t$, $t^2+1=C^2x^2-2Cxt+t^2 \rightarrow t = \dfrac{C^2x^2-1}{2Cx} \rightarrow y = \dfrac{C^2x^2-1}{2C}$ – общее решение. (вариант №2).

7) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$. Уравнение линейное. Проводя замену $y=u(x)v(x)$, получим $u'v + v'u + uv2x = 2xe^{-x^2}$,

$$u'v + u(v' + 2vx) = 2xe^{-x^2} \tag{15}$$

Функцию $v(x)$ получим из уравнения $v' + 2vx = 0$.Это уравнение с разделяющимися переменными . Его решение: $dv= -2vxdx$, $\dfrac{dv}{v} = -2xdx$,

$\ln v= - x^2$, $v = e^{-x^2}$. Подставим найденную $v(x)$ в (15), получим второе уравнение с разделяющимися переменными относительно $u(x)$: $u'e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}$, $u=x^2+C$; $y = uv = (x^2 + C)e^{-x^2}$ – общее решение.

8) $yy' = \dfrac{1-2x}{y}$. Уравнение с разделяющимися переменными (смотри таблицу). Запишем его в виде $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-2x}{y^2}$.

После разделения переменных получим $dyy^2=(1-2x)dx$. После интегрирования получаем $\dfrac{y^3}{3} = x - x^2 + C \;\to\; y = \sqrt[3]{3x - 3x^2 + C}$ – общее решение.

9) $y'tgx - y = a$.Это уравнение с разделяющимися переменными, приводим его к виду $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y+a}{tgx}$, $\dfrac{dy}{y+a} = \dfrac{dx}{tgx}$.

Переменные разделены $\displaystyle\int \frac{dy}{y+a} = \int \frac{dx}{tgx}$, $\displaystyle\int \frac{dy}{y+a} = \ln|y+a|$,

$\displaystyle\int \frac{dx}{tgx} = \int ctgx dx = \ln|\sin x|$, $\ln|y+a| = \ln|\sin x| + \ln C$ – общее решение (вариант №1). Упрощая, получаем $y+a=C\sin x \to y=C\sin x-a$ – общее решение (вариант №2).

10) Условие (11) дает $\dfrac{\partial u}{\partial x} = e^y \;\to\; u = \int e^y dx = e^y x + C(y)$. Здесь $C(y)$ – любая функция, не зависящая от *x*. Но в нашем случае ее необходимо определить так, чтобы выполнялось условие (12), т.е. $\dfrac{\partial u}{\partial y} = xe^y + C'(y) = xe^y - 2y$, откуда $C'(y) = -2y$, а $C(y) = -\int y dy = -y^2$. Таким образом, $u = e^y x - y^2$, а решение уравнения записывается в виде $xe^y - y^2 = C$.

Задачи для самостоятельного решения

Уравнения с разделяющимися переменными

1. $y'x^3 = 2y$ 2. $y'x - y = 0$ 3. $y'x + y = 0$
4. $y'y + x = 0$
5. $y'(x^2+4) = 3xy$ 6. $y'x^2 + y = 0 \quad y(1) = 1$
7. $2y'\sqrt{x} = y \quad y(4) = 1$
8. $y'x^2 + y^2 = 0 \quad y(-1) = 1$
9. $y'(x^2-4) = 2xy \quad y(0) = 1$

10. $y' = y\sin x \quad y(0) = 1$

11. $y' - \frac{e^x}{y^2} = 0 \quad y(0) = 2$

12. $2y' + 3(y-1)\cos x = 0 \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0$

13. $y'(x+1) + y^2 = 0 \quad y(0) = 2$

Линейные уравнения, уравнения Бернулли

14. $y' - ytgx = ctgx$

15. $y'x + y - e^x = 0$

16. $y'x^2 = 2xy - 3 \quad y(-1) = 1$

17. $y' - ytgx = \frac{1}{\cos x}$, $y(0) = 0$

18. $y' = 3\frac{y}{x} - \frac{2}{x}$

19. $y' - \frac{y}{x\ln x} = x\ln x$, $y(e) = \frac{e^2}{2}$

20. $y' - \frac{1}{x}y = -\frac{2}{x^2}$

21. $y'x - 2y = 2x^4$, $y(1) = 0$

22. $y'x + y = \ln x + 1$

23. $xy' + 2y = x^5 y^2$

24. $y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}$

25. $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$

Однородные дифференциальные уравнения

26. $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$

27. $y + \sqrt{x^2 + y^2} - xy' = 0$, $\qquad y(1) = 0$.

28. $xy' - y = xtg\frac{y}{x}$

29. $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$, $y(1) = 1$,

30. $y' = \frac{xy + y^2}{2x^2 + xy}$, $y(1) = 1$

31. $xy' + 2\sqrt{xy} = y$,

32. $xy' = y\left(1 + \ln\dfrac{y}{x}\right),\ y(1) = e,$

33. $y' = -\dfrac{x-y}{x+y}$

34. $y' = \dfrac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}$

35. $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$

36. $(4y^2 + x^2)y' = xy$

Уравнения в полных дифференциалах

37. $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$

38. $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0$

39. $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$

40. $2x\cos^2 ydx + (2y - x^2\sin 2y)dy = 0$

41. $(3x^2y - 4xy^2)dx + (x^3 - 4x^2y + 12y^3)dy = 0$

42. $(3x^2y - 2x^3 + y^3)dx - (2y^3 - 3xy^2 - x^3)dy = 0$

43. $e^{-y}dx + (1 - xe^{-y})dy = 0$