ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Математика»

Учебно-методическое пособие

по дисциплине

«Математика»

«Ряды. Часть II»

Авторы

Ворович Е.И.,
Золотых С.А.,
Коровина К.С.,
Тукодова О.М.

Ростов-на-Дону, 2016

Аннотация

Пособие предназначено для всех студентов направления бакалавриата.

Авторы

к.ф.-м.н., доцент Ворович Е.И.,
ст. преп. Золотых С.А.,
ст. преп. Коровина К.С.,
к.ф.-м.н., доцент Тукодова О.М.

<u>Ряды Тейлора и Маклорена. Приближенные вычисления.</u>

<u>Определение.</u> Рядом Тейлора функции $y=f(x)$ по степеням *(x-x₀)* называют бесконечный степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=$$

$$=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \qquad (1)$$

Итак, ряд Тейлора функции $y=f(x)$ – это степенной ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, коэффициенты которого определяются по формулам $a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

n=0,1,…

При $x_0=0$ получаем ряд, называемый рядом Маклорена:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \qquad (2)$$

Разложить функцию $y=f(x)$ по степеням *(x-x₀)* – значит составить ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, у которого радиус сходимости не равен нулю, а сумма тождественно равна данной функции внутри промежутка сходимости.

<u>Теорема</u>. Если функцию *y=f(x)* можно разложить в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, то это разложение единственно и ряд совпадает с рядом Тейлора функции *y=f(x)* по степеням *(x-x₀)*.

Для вычисления приближенного значения функции $f(x)$ ее представляют в виде $f(x)=S_n(x)+R_n(x)$, где $S_n(x)$ – сумма первых n членов ряда, а $R_n(x)$ – остаточный член ряда Тейлора. Затем суммируют первые n слагаемых и отбрасывают $R_n(x)$. Для оценки погрешности этого вычисления нужно оценить сумму отброшенных членов.

Если ряд знакопеременный и члены его удовлетворяют признаку Лейбница, то используется оценка:

$|R_n|<u_{n+1}$, где u_{n+1} - первый из отброшенных членов.

Если ряд знакопостоянный, то ряд, составленный из отброшенных членов, сравнивают с бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

При приближенных вычислениях используются формулы разложения функций в ряды Маклорена, приведенные в таблице.

Таблица 1

Функция	Ряд Маклорена функции	Область сходимости
1) e^x	$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$	$-\infty<x<\infty$
2) $\sin x$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$	$-\infty<x<\infty$
3) $\cos x$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$	$-\infty<x<\infty$
4) $(1+x)^\mu$	$1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{\mu(\mu-1)\cdot\ldots\cdot(\mu-n+1)}{n!}x^n+\ldots$	$-1<x<1$
5) $\ln(1+x)$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$	$-1<x\le 1$
6) $arctgx$	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$	$-1\le x\le 1$
7) $\arcsin x$	$x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$	$-1\le x\le 1$

<u>Примеры.</u>

1. Найти первые пять членов разложения в ряд Тейлора функции $f(x)$ в окрестности точки x_0.

а) $f(x)=\cos x,\ \ x_0=\frac{\pi}{4}$.

Используем формулу (1):

$$f(x_0)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'(x)=-\sin x \qquad f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f''(x)=-\cos x \qquad f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'''(x)=\sin x \qquad f'''\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$f^{(4)}(x)=\cos x$ $\qquad$ $f^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos x \approx \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2*2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{\sqrt{2}}{2*3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\frac{\sqrt{2}}{2*4!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4+\ldots.$$

б) $f(x)=e^{2x},\ x_0=1.$

Используем формулу (1):

$f(x_0)=f(1)=e^2$

$f'(x)=2e^{2x}$ $\qquad$ $f'(1)=2e^2$

$f''(x)=4e^{2x}$ $\qquad$ $f''(1)=4e^2$

$f'''(x)=8e^{2x}$ $\qquad$ $f'''(1)=8e^2$

$f^{(4)}(x)=16e^{2x}$ $\qquad$ $f^{(4)}(1)=16e^2$

$$e^{2x}\approx e^2+2e^2(x-1)+\frac{4e^2(x-1)^2}{2!}+\frac{8e^2(x-1)^3}{3!}+\frac{16e^2(x-1)^4}{4!}+\ldots.$$

2. Пользуясь разложением в ряд Маклорена, разложить функции в ряд.

а) e^{2x}.

Используем формулу 1 из таблицы 1:

$$e^{2x}=1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+\ldots+\frac{(2x)^n}{n!}+\ldots=1+2x+\frac{2^2x^2}{2!}+\ldots+\frac{2^nx^n}{n!}+\ldots$$

Разложение справедливо при $x\in(-\infty,\infty)$.

б) $\ln(3+x)$.

$$\ln(3+x)=\ln 3\left(1+\frac{x}{3}\right)=\ln 3+\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)=\ln 3+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{2\cdot 3^2}+\frac{x^3}{3\cdot 3^3}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n\cdot 3^n}+\ldots$$

Использована формула **5** из таблицы 1

Разложение справедливо при $-1 < \dfrac{x}{3} \le 1$, то есть при $x \in (-3,3]$.

3. Пользуясь разложением в ряд Маклорена функции $f(x)$ вычислить с точностью до $\varepsilon = 0{,}0001$.

а) $\cos 18^{\circ}$

Используем формулу для разложения функции $y = \cos x$ в ряд Маклорена (таблица 1, формула 3):

$$18^{\circ} = \frac{\pi}{10} = 0{,}31416$$

$$\cos 18^{\circ} = \cos\frac{\pi}{10} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^4 - \ldots$$

Ряд знакопеременный, достаточно просуммировать первые три слагаемых, т.к.

$$u_3 = \frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^6 < 0{,}0001.$$

$$\cos 18^{\circ} \approx 1 - \frac{0{,}09870}{2} + \frac{0{,}00974}{24} \approx 0{,}9511$$

б) $\ln(1{,}04)$

Используем формулу для разложения функции $y = \ln(1+x)$ в ряд Маклорена (таблица 1, формула 5):

$$\ln(1{,}04) = \ln(1+0{,}04) = 0{,}04 - \frac{(0{,}04)^2}{2} + \frac{(0{,}04)^3}{3} - \frac{(0{,}04)^4}{4} + \ldots$$

Третий член разложения $\dfrac{(0{,}04)^3}{3} = 0{,}000021 < \varepsilon$, поэтому в разложении можно оставить первые два слагаемых.

$$\ln(1{,}04) = \ln(1+0{,}04) = 0{,}04 - \frac{(0{,}04)^2}{2} \approx 0{,}0392.$$

4. Вычислить приближенно значение интеграла с точностью до $\varepsilon = 0{,}001$.

$$\int_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx=\int_0^{0,1}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\right)\frac{1}{x}dx=\int_0^{0,1}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\ldots\right)dx=$$

$$=\left(x-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{9}-\frac{x^4}{16}+\ldots\right)\Bigg|_0^{0,1}=0,1-\frac{0,01}{4}+\frac{0,001}{9}-\ldots$$

Использована формула 5 из таблицы 1. Третий член разложения $\frac{0,001}{9}\approx 0,0001<\varepsilon$, поэтому в разложении можно оставить первые два слагаемых.

$$\int_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx\approx 0,1-\frac{0,01}{4}\approx 0,098$$

Ряды Фурье.

При изучении темы «Ряды Фурье» полезно вспомнить некоторые определения, формулы и факты, ранее уже изученные.

1. Определение. Если для любого *x* выполняется равенство *f(-x)=f(x)*, то функция *y=f(x)* называется четной; *f(-x)=-f(x)* – нечетной.

Большинство функций не обладают свойствами четности или нечетности, они называются функциями общего вида.

Очевидно, что графиком четной функции является кривая, симметричная относительно оси ординат; графиком нечетной – кривая, симметричная относительно начала координат. Отсюда следует, что если *f(x)* – четная, то $\int_{-l}^{l}f(x)dx=2\int_0^{l}f(x)dx$; если *f(x)* – нечетная, то $\int_{-l}^{l}f(x)dx=0$. Последние две формулы описывают особенности интегрирования четных и нечетных функций по симметричному промежутку.

Легко проверить, что произведение двух четных функций есть функция четная; произведение двух нечетных функций есть функция четная; произведение четной и нечетной функции есть функция нечетная.

2. Из курса тригонометрии известно:

а) $\sin k\pi=0$; $\cos k\pi=(-1)^k$ при $k=0,1\ldots$; $\cos\frac{k\pi}{2}=0$ при k – нечетном;

б) функция *y=sin x* является нечетной, а функция *y=cos x* – четной,

3. При вычислении коэффициентов ряда Фурье будет использоваться формула интегрирования «по частям» $\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$ и нижеперечисленные интегралы:

1) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = 0$ для всех k (как интеграл от нечетной функций по симметричному промежутку).

2) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = \frac{1}{k} \sin kx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$ для всех $k \neq 0$

3) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin mx dx = 0$ для всех k и m (произведение четной и нечетной функции – функция нечетная, а интеграл от нечетной функций по симметричному промежутку равен нулю).

4) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx dx = 0$ при $k \neq m$

4') $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \pi$

5) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx dx = 0$ при $k \neq m$

5') $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \pi$

При выводе формул (4) и (4') используются тригонометрические формулы

$$\cos kx \cos mx = \frac{1}{2}[\cos(k+m)x + \cos(k-m)x]$$

$$\sin kx \sin mx = \frac{1}{2}[\cos(k-m)x - \cos(k+m)x]$$

При $k = m$: $\cos^2 kx = \frac{1}{2}[1 + \cos 2kx]$; $\sin^2 kx = \frac{1}{2}[1 - \cos 2kx]$

Следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos mx dx=\frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k+m)xdx+\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k-m)xdx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+m}\sin(k+m)x\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{k-m}\sin(k-m)x\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2kx)dx=\frac{1}{2}\left(x\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{2k}\sin 2kx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=\frac{1}{2}(2\pi)=\pi$$

Формулы (5) и (5') выводятся аналогично.

Определение. Рядом Фурье функции *y=f(x)* в интервале $(-l;l)$ называется тригонометрический ряд $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}$, коэффициенты которого a_k *и* b_k определяются по формулам группы 1 из таблицы 2, которые называются формулами Фурье.

Если *f(x)* – четная функция, то $b_k=0$ (т.к. интеграл от нечетной функций по симметричному промежутку равен нулю), следовательно, ряд Фурье не содержит синусов, получаем формулы группы 2.

Если *f(x)* – нечетная функция, то $a_0=a_k=0$ (т.к. интеграл от нечетной функций по симметричному промежутку равен нулю), следовательно, ряд Фурье не содержит косинусов, получаем формулы группы 3.

Пусть *f(x)* раскладывается в ряд Фурье на интервале $(-\pi;\pi)$. Тогда $l=\pi$, $\frac{k\pi x}{l}=\frac{k\pi x}{\pi}=kx$.

А соответствующие формулы разложения функции в ряд Фурье являются частными случаями формул из таблицы 2 и приведены в таблице 3.

При разложении функции *y=f(x)* в ряд Фурье на несимметричном интервале $(0;l)$ используются формулы:

а) при разложении по косинусам – формулы группы 2;

б) при разложении по синусам – формулы группы 3.

Таблица 2 (функция *f(x)* раскладывается в ряд Фурье на интервале $(-l;l)$)

f(x) – функция общего вида	$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}$ $a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx;$ $a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx;$ $b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$	Формулы группы 1
f(x) – четная $b_k=0$	$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{l}$ $a_0=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)dx;$ $a_k=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx$	Формулы группы 2
f(x) – нечетная $a_0=a_k=0$	$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{k\pi x}{l}$ $b_k=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$	Формулы группы 3

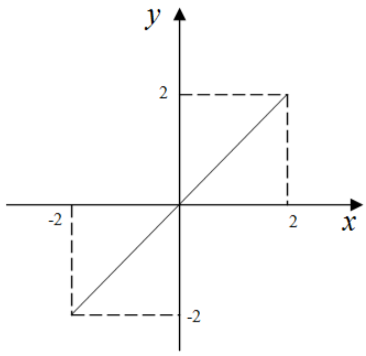
Таблица 3 (функция *f(x)* раскладывается в ряд Фурье на интервале $(-\pi;\pi)$)

f(x) – функция общего вида	$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx$ $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx;$ $a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx;$ $b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx$	Формулы группы 1'
f(x) – четная $b_k=0$	$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx$ $a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)dx;$	Формулы группы 2'

	$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx dx$	
f(x) – нечетная $a_0 = a_k = 0$	$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$ $b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx dx$	Формулы группы 3'

Примеры.

Пример 1. Разложить данную функцию $f(x) = x$ в ряд Фурье в интервале $x \in (-2,2)$.



Данная функция нечетна в интервале [–2,2], поэтому ее разложение в ряд Фурье содержит только синусы. Используем формулы группы 3 из таблицы 2, положив $l = 2$:

$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l}$**,** где

$$b_k = \int_0^2 x\sin\frac{k\pi x}{2}dx = \left| \begin{matrix} u = x & dv = \sin\frac{k\pi x}{2}dx \\ du = dx & v = -\frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{2} \end{matrix} \right| = -\frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{2}\bigg|_0^2 + \frac{2}{k\pi}\int_0^2 \cos\frac{k\pi x}{2}dx =$$

$$= -\frac{2}{k\pi}(2\cos k\pi - 0) + \frac{2^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{2}\bigg|_0^2 = -\frac{4}{k\pi}(-1)^k + \frac{4}{k^2\pi^2}(\sin k\pi - \sin 0) = \frac{4}{k\pi}(-1)^{k+1}$$

$$\Rightarrow b_k = \frac{4}{k\pi}(-1)^{k+1}.$$

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k\pi}(-1)^{k+1}\cdot\sin\frac{k\pi x}{2}=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\cdot\sin\frac{k\pi x}{2}.$$

<u>Пример 2</u>. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\begin{cases}0, & при\ -\pi<x<0\\ 2, & при\ 0\le x<\pi\end{cases}$.

Функция задана на интервале *(–π, π)* двумя формулами. $f(x)$ является функцией общего вида. Используем формулы 1 из таблицы 3.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cdot\cos kx+b_k\cdot\sin kx\right)$$, где

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\Big|$ разбиваем интеграл на сумму двух, так как функция задана двумя формулами $\Big|=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}0\cdot dx+\int_{0}^{\pi}2\cdot dx\right)=\frac{1}{\pi}2x\Big|_0^{\pi}=2$.

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos kxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}0\cdot\cos kxdx+\int_{0}^{\pi}2\cdot\cos kxdx\right)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{k}\cdot\sin kx\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{k\pi}\sin\pi x=0$$
.

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\sin kxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}0\cdot\sin kxdx+\int_{0}^{\pi}2\cdot\sin kxdx\right)=-\frac{2}{k\pi}\cdot\cos kx\Big|_0^{\pi}=-\frac{2}{k\pi}(\cos k\pi-\cos 0)$$
$$=-\frac{2}{k\pi}\left((-1)^k-1\right)=\frac{2}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right).$$

$$f(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right)\sin kx=1+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(1-(-1)^k\right)}{k}\sin kx.$$

<u>Пример 3</u>. Разложить в ряд Фурье функцию $y=x^2$ в интервале $(-\pi;\pi)$.

y=f(x) – четная функция, значит используем формулы группы (2') из таблицы 3.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{3}=\frac{2\pi^2}{3};$$

$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos kxdx$. Применим дважды интегрирование по частям.

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos kx dx = \begin{bmatrix} u = x^2 \\ dv = \cos kx dx \\ du = 2x dx \\ v = \int \cos kx dx = \dfrac{\sin kx}{k} \end{bmatrix} = \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{x^2 \sin kx}{k}\right)\Bigg|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \frac{\sin kx}{k} dx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi k}\left[\pi^2 \sin k\pi - 2\int_0^{\pi} x \sin kx dx\right] =$$

$$= -\frac{4}{\pi k}\int_0^{\pi} x \sin kx dx = \begin{bmatrix} u = x \\ dv = \sin kx dx \\ du = dx \\ v = \int \sin kx dx = -\dfrac{\cos kx}{k} \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{4}{\pi k}\left[\left(-\frac{x \cos kx}{k}\right)\Bigg|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\left(\frac{\cos kx}{k}\right) dx\right] = \frac{4}{\pi k^2}\left[\pi \cos k\pi - \int_0^{\pi} \cos kx dx\right] =$$

$$= \frac{4}{\pi k^2}\left[\pi \cos k\pi - \left(\frac{\sin kx}{k}\right)\Bigg|_0^{\pi}\right] = \frac{4}{\pi k^2}\left[\pi \cos k\pi - \frac{\sin k\pi}{k}\right].$$

Поскольку $\sin k\pi = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$ для натуральных k, то получаем

$$a_k = \frac{4}{\pi k^2} \cdot \pi (-1)^k = \frac{4}{k^2}(-1)^k .$$

Тогда разложение параболической функции в ряд Фурье имеет вид

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}(-1)^k \cos kx .$$

Пример 4. Разложить функцию $y = x$ на интервале $(0;1)$ в ряд Фурье а) по косинусам, б) по синусам.

а) Используем формулы группы 2 из таблицы 2 ($l = 1$)

$$a_0 = 2\int_0^1 x dx = 1;$$

$$a_k = 2\int_0^1 x\cos\pi kx dx = \left[\begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos\pi kx dx \\ du = dx \\ v = \dfrac{1}{\pi k}\sin\pi kx \end{array}\right] = \frac{2}{\pi k} x\sin\pi kx\Big|_0^1 - \frac{2}{\pi k}\int_0^1 \sin\pi kx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi^2 k^2}\cos\pi kx\Big|_0^1 = \frac{2}{\pi^2 k^2}(\cos\pi k - \cos 0) = \frac{2}{\pi^2 k^2}\left[(-1)^k - 1\right].$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left[(-1)^k - 1\right]}{k^2}\cos k\pi x.$$

Учитывая, что $a_k = \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi^2 k^2}, & \textit{если } k - \textit{нечётное}, \\ 0, & \textit{если } k - \textit{чётное} \end{cases}$

$$f(x) \approx \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left(\cos\pi x + \frac{1}{9}\cos 3\pi x + \frac{1}{25}\cos 5\pi x + \ldots\right).$$

б) Используем формулы группы 3 из таблицы 2 ($l = 1$).

$$b_k = 2\int_0^1 x\sin\pi kx dx = \left[\begin{array}{l} u = x \\ dv = \sin\pi kx dx \\ du = dx \\ v = -\dfrac{1}{\pi k}\cos\pi kx \end{array}\right] = -\frac{2}{\pi k} x\cos\pi kx\Big|_0^1 + \frac{2}{\pi k}\int_0^1 \cos\pi kx dx =$$

$$= -\frac{2\cos\pi k}{\pi k} + \frac{2}{\pi^2 k^2}\sin\pi kx\Big|_0^1 = 2\left[-\frac{(-1)^k}{\pi k}\right] = 2\frac{(-1)^{k+1}}{\pi k}.$$

$$f(x) \approx \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin k\pi x = \frac{2}{\pi}\left(\sin\pi x - \frac{1}{2}\sin 2\pi x + \frac{1}{3}\sin 3\pi x + \ldots\right).$$

Задания для самостоятельного решения

ТИП 1. Пользуясь разложением в ряд Маклорена функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$ и $arctgx$, разложить данные функции в ряд.

1. а) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ б) $f(x) = x\cdot\cos\sqrt{x}$ в) $f(x) = arctg\dfrac{x}{3}$
2. а) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ б) $f(x) = \ln(1-x)$ в) $f(x) = \sin\left(x^2\right)$

3. а) $f(x)=\cos 3x$ б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ в) $f(x)=x\cdot e^{-2x}$

4. а) $f(x)=\ln(3+x)$ б) $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}$ в) $f(x)=arctgx^{2}$

5. а) $f(x)=arctg2x$ б) $f(x)=\dfrac{x}{(1+3x)^{2}}$ в) $f(x)=e^{3x}$

6. а) $f(x)=\cos\sqrt[3]{x}$ б) $f(x)=\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right)$ в) $f(x)=e^{x^{2}}$

7. а) $f(x)=x\cdot\sin 2x$ б) $f(x)=\sqrt[3]{2+x}$ в) $f(x)=\ln\left(1-\dfrac{x}{3}\right)$

8. а) $f(x)=x^{2}\cdot e^{-x}$ б) $f(x)=\cos\dfrac{x}{3}$ в) $f(x)=\sqrt[3]{5+x}$

9. а) $f(x)=\ln(1+\sqrt{x})$ б) $f(x)=\dfrac{arctgx}{x}$ в) $f(x)=\sqrt{x}\sin x$

10. а) $f(x)=\sqrt[5]{3-x}$ б) $f(x)=x\cdot e^{-x}$ в) $f(x)=\dfrac{\cos x-1}{x}$

11. а) $f(x)=\sin\dfrac{x}{3}$ б) $f(x)=\ln(5+x)$ в) $f(x)=e^{-2x}$

12. а) $f(x)=arctg3x$ б) $f(x)=x^{-1}\cdot(e^{-x}-1)$ в) $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$

13. а) $f(x)=\sqrt{1-x^{3}}$ б) $f(x)=\sin\sqrt{x}$ в) $f(x)=e^{\frac{x}{5}}$

14. а) $f(x)=\ln(1+\sqrt[3]{x})$ б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{5-x}}$ в) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

15. а) $f(x)=\sin 3x$ б) $f(x)=arctg\dfrac{x}{2}$ в) $f(x)=\sqrt[5]{1+x}$

16. а) $f(x)=x\cdot e^{-x}$ б) $f(x)=\cos\sqrt{x}$ в) $f(x)=x^{-2}\cdot arctgx^{3}$

17. а) $f(x)=\ln(3+9x)$ б) $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}$ в) $f(x)=e^{-3x}$

18. а) $f(x)=arctg\sqrt{x}$ б) $f(x)=\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{5}}$ в) $f(x)=\ln(1+x^{2})$

19. а) $f(x)=\ln\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{2}}$ б) $f(x)=x^{-1}\cdot(e^{2x}-1)$ в) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[5]{2+x}}$

20. а) $f(x)=x^{2}\cdot\sin x$ б) $f(x)=arctgx^{3}$ в) $f(x)=\sqrt[7]{1-x}$

21. а) $f(x)=\dfrac{x^{2}}{\sqrt{4+x}}$ б) $f(x)=e^{\sqrt[3]{x}}$ в) $f(x)=\dfrac{\ln(1-x^{2})}{x^{2}}$

22. а) $f(x)=arctg\sqrt[3]{x}$ б) $f(x)=\sin(x^{3})$ в) $f(x)=x\cdot\sqrt{4+x}$

23. а) $f(x)=\ln\sqrt{1+2x}$ б) $f(x)=x\cdot\cos\sqrt{x}$ в) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+2x}}$

24. а) $f(x)=x\cdot arctgx$ б) $f(x)=(x+1)^{\frac{3}{4}}$ в) $f(x)=e^{\frac{x}{2}}$

25. а) $f(x)=x\cdot\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)$ б) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{3-x}}$ в) $f(x)=arctg(-x)$

26. а) $f(x)=\ln\sqrt[5]{3+x}$ б) $f(x)=\frac{x}{2-x}$ в) $f(x)=\frac{\sin 2x}{x}$

27. а) $f(x)=\ln\sqrt[3]{1-x}$ б) $f(x)=\frac{\cos 3x-1}{x}$ в) $f(x)=\frac{1}{3+x}$

28. а) $f(x)=3^x$ б) $f(x)=\frac{\ln(1+x^2)}{x}$ в) $f(x)=\sqrt{1+\frac{x}{3}}$

29. а) $f(x)=\frac{x}{3-x}$ б) $f(x)=x\cdot 5^x$ в) $f(x)=\sin 3x$

30. а) $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$ б) $f(x)=x^2\cdot arctg2x$ в) $f(x)=2^x$

ТИП 2. Найти первые пять членов ряда Тейлора для данной функции $f(x)$ в окрестности точки x_0.

1. $f(x)=\ln(1+e^{x-1})$, $x_0=1$
2. $f(x)=\frac{1}{1-x}$, $x_0=2$
3. $f(x)=x^3\cdot\ln x$, $x_0=1$
4. $f(x)=\cos x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$
5. $f(x)=\frac{1}{x}$, $x_0=-2$
6. $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=4$
7. $f(x)=e^x$, $x_0=-2$
8. $f(x)=\arcsin x$, $x_0=0$
9. $f(x)=\ln x$, $x_0=3$
10. $f(x)=\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{2}$
11. $f(x)=\ln(x+2)$, $x_0=1$
12. $f(x)=\frac{1}{x+2}$, $x_0=1$
13. $f(x)=e^{3x}$, $x_0=1$
16. $f(x)=\frac{1}{x-4}$, $x_0=-2$
17. $f(x)=2^x$, $x_0=3$
18. $f(x)=\frac{1}{1+3x}$, $x_0=-1$
19. $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x_0=-1$
20. $f(x)=x\cdot\ln x$, $x_0=1$
21. $f(x)=\frac{1}{x}$, $x_0=3$
22. $f(x)=\ln x$, $x_0=2$
23. $f(x)=ctgx$, $x_0=\frac{\pi}{4}$
24. $f(x)=\ln(1+3^{x+1})$, $x_0=-1$
25. $f(x)=\frac{1}{x+3}$, $x_0=1$
26. $f(x)=e^{2x}$, $x_0=1$
27. $f(x)=2+e^{x-3}$, $x_0=3$
28. $f(x)=e^x$, $x_0=-3$

14. $f(x) = tgx,\ x_0 = \dfrac{\pi}{4}$
15. $f(x) = \ln(1 + e^{x+1}),\ x_0 = -1$
29. $f(x) = \ln(1 + 2^{x-1}),\ x_0 = 1$
30. $f(x) = x^2 \cdot \ln x,\ x_0 = 1$

<u>ТИП 3</u>. Пользуясь разложением в ряд Маклорена функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$ и $arctgx$, вычислить с точностью до $\varepsilon = 0{,}001$

1. $\ln 1{,}04$
2. $\sqrt[5]{33}$
3. $\sin 19^\circ$ ($\pi = 3{,}14159$)
4. $\sqrt[3]{30}$
5. $\ln 0{,}97$
6. $arctg 0{,}2$
7. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$
8. $\ln 2{,}04$
9. $\cos 25^\circ$ ($\pi = 3{,}14159$)
10. $arctg 0{,}3$
11. $\sqrt[3]{65}$
12. $\ln 1{,}01$
13. $\cos 0{,}3$
14. $e^{-0,1}$
15. $\ln 1{,}1$
16. $\cos 16^\circ$ ($\pi = 3{,}14159$)
17. $\sqrt{1{,}2}$
18. $arctg 0{,}1$
19. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
20. $\cos 22^\circ$ ($\pi = 3{,}14159$)
21. $\ln 0{,}98$
22. $arctg 0{,}5$
23. $e^{-0,2}$
24. $\sin 0{,}4$
25. $\ln 3{,}09$
26. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{e^2}}$
27. $\sqrt{1{,}2}$
28. $\sin 13^\circ$ ($\pi = 3{,}14159$)
29. $arctg 0{,}4$
30. $e^{-0,3}$

<u>ТИП 4</u>. Вычислить приближенные значения интегралов с точностью до $\varepsilon = 0{,}001$.

1. $\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx$
2. $\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{arctgx}{x} dx$
3. $\int_0^{0,5} x \cdot \ln(1 + x^3) dx$
4. $\int_0^{1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$
5. $\int_0^{1} x \cdot \sin x^2 dx$
11. $\int_0^{\frac{1}{4}} x \cdot \cos\sqrt{x} dx$
12. $\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt[3]{1 + x^2} dx$
13. $\int_0^{0,5} arctgx^2 dx$
14. $\int_0^{1} \sqrt{x} \cdot \cos x dx$
15. $\int_0^{0,5} \sqrt{x} \cdot e^{-x} dx$
21. $\int_0^{0,5} \dfrac{\sin x^2}{x^2} dx$
22. $\int_0^{0,1} \dfrac{\ln(1+x)}{x} dx$
23. $\int_0^{0,5} \dfrac{dx}{1 + x^4}$
24. $\int_0^{1} x^3 \cdot \sin x dx$
25. $\int_0^{1} \sqrt[3]{x} \cdot \cos x dx$

6. $\int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx$

7. $\int_0^{1} \cos\sqrt[3]{x} dx$

8. $\int_0^{0,5} arctgx^2 dx$

9. $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^2} dx$

10. $\int_0^{0,3} \ln(1+x^2) dx$

16. $\int_0^{0,3} x\cdot\ln(1+x) dx$

17. $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx$

18. $\int_0^{0,5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$

19. $\int_0^{1} \sqrt{x}\cdot\sin x dx$

20. $\int_0^{\frac{1}{3}} x\cdot\cos\sqrt{x} dx$

26. $\int_0^{0,5} \cos\frac{x^2}{4} dx$

27. $\int_0^{0,5} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

28. $\int_0^{1} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$

29. $\int_0^{1} \cos\sqrt{x} dx$

30. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$

<u>ТИП 5</u>. Разложить функции в ряд Фурье в указанных интервалах.

1. $f(x)=\frac{x^2}{2}, \quad (-2;2)$

2. $f(x)=x+2, \quad (-2;2)$

3. $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } -2<x\le 0 \\ x, & \text{если } 0\le x\le 1 \\ 1, & \text{если } 1<x\le 2 \end{cases}$

4. $f(x)=x, \quad (-\pi;\pi)$

5. $f(x)=|x|, \quad (-1;1)$

6. $f(x)=e^x, \quad (-\pi;\pi)$

7. $f(x)=x^2+2x, \quad (-\pi;\pi)$

8. $f(x)=\begin{cases} -1, & \text{если } -\pi<x<0 \\ 1, & \text{если } 0<x<\pi \end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases} -2x, & \text{если } -\pi<x<0 \\ 3x, & \text{если } 0\le x<\pi \end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases} -x, & \text{если } -\pi<x<0 \\ 0, & \text{если } 0\le x<\pi \end{cases}$

11. $f(x)=x^2, \quad (-\pi;\pi)$

12. $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } -\pi<x<0 \\ 3, & \text{если } 0<x<\pi \end{cases}$

13. $f(x)=\cos\frac{x}{2}, \quad (-\pi;\pi)$

14. $f(x)=\sin\frac{x}{2}, \quad (-\pi;\pi)$

15. $f(x)=\pi^2-x^2, \quad (-\pi;\pi)$

16. $f(x)=\frac{2}{3}x^2, \quad (-3;3)$

17. $f(x)=3-x, \quad (-3;3)$

18. $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } -2<x\le -1 \\ -x, & \text{если } -1<x\le 0 \\ 0, & \text{если } 0<x\le 2 \end{cases}$

19. $f(x)=\frac{|x|}{2}, \quad (-\pi;\pi)$

20. $f(x)=e^{-x}, \quad (-\pi;\pi)$

21. $f(x)=\begin{cases} -2, & \text{если } -1<x<0 \\ 0, & \text{если } 0<x<1 \end{cases}$

22. $f(x)=e^{\frac{x}{2}}, \quad (-\pi;\pi)$

23. $f(x)=\begin{cases} 2x, & \text{если } -1<x\le 0 \\ -3x, & \text{если } 0\le x<1 \end{cases}$

24. $f(x)=(1-x)(1+x), \quad (-1;1)$

25. $f(x)=\cos\frac{x}{3}, \quad (-\pi;\pi)$

26. $f(x)=\sin\frac{x}{3}, \quad (-\pi;\pi)$

27. $f(x)=\begin{cases} x, & \text{если } -1<x\le 0 \\ 2x, & \text{если } 0\le x<1 \end{cases}$

28. $f(x)=\begin{cases} 17, & \text{если } -1<x<0 \\ 1, & \text{если } 0<x<1 \end{cases}$

29. $f(x)=1+x+x^2, \quad (-2;2)$

30. $f(x)=e^{2x}, \quad (-\pi;\pi)$

ТИП 6. Разложить данные функции в указанных интервалах в ряд синусов:

1. $f(x)=x^2, \quad (0;\pi)$
2. $f(x)=x-\frac{x^2}{3}, \quad (0;3)$
3. $f(x)=\pi-2x, \quad (0;\pi)$
4. $f(x)=\frac{2}{3}x^2, \quad (0;1)$
5. $f(x)=\cos 2x, \quad (0;\pi)$
6. $f(x)=x-1, \quad (0;2)$

7. $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2},\quad (0;\pi)$

8. $f(x)=\cos\dfrac{x}{2},\quad (0;\pi)$

9. $f(x)=x(\pi-x),\quad (0;\pi)$

10. $f(x)=e^{x},\quad (0;\pi)$

11. $f(x)=\cos x,\quad (0;\pi)$

12. $f(x)=\dfrac{x^{2}}{2}-x,\quad (0;2)$

13. $f(x)=\begin{cases} x, \text{ если } 0<x\le 1 \\ 2-x, \text{ если } 1\le x<2 \end{cases}$

14. $f(x)=\begin{cases} 1, \text{ если } 0<x<1 \\ 0, \text{ если } 1<x<2 \end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases} x, \text{ если } 0<x<1 \\ 0, \text{ если } 1<x<2 \end{cases}$

16. $f(x)=\dfrac{x^{2}}{2},\quad (0;2)$

17. $f(x)=\begin{cases} x, \text{ если } 0<x<\dfrac{\pi}{2} \\ 1, \text{ если } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}$

18. $f(x)=e^{-x}-1,\quad (0;1)$

19. $f(x)=\cos 3x,\quad (0;\pi)$

20. $f(x)=2^{x}-1,\quad (0;\pi)$

21. $f(x)=\sin\dfrac{x}{2},\quad (0;\pi)$

22. $f(x)=1-x+x^{2},\quad (0;2)$

23. $f(x)=2^{-x},\quad (0;\pi)$

24. $f(x)=17, \quad (0;\pi)$

25. $f(x)=1+x+x^2, \quad (0;1)$

26. $f(x)=\sin\dfrac{x}{3}, \quad (0;\pi)$

27. $f(x)=\begin{cases} 1, \textit{ если } 0\le x\le 1 \\ x, \textit{ если } 1<x<2 \end{cases}$

28. $f(x)=3^x, \quad (0;\pi)$

29. $f(x)=\dfrac{x^2}{4}-x, \quad (0;4)$

30. $f(x)=17^x, \quad (0;\pi)$

ТИП 7. Разложить данные функции в указанных интервалах в ряд косинусов:

1. $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}, \quad (0;\pi)$

2. $f(x)=x-\dfrac{x^2}{3}, \quad (0;3)$

3. $f(x)=\pi-2x, \quad (0;\pi)$

4. $f(x)=x, \quad (0;1)$

5. $f(x)=\begin{cases} x, \textit{ если } 0<x\le 1 \\ 2-x, \textit{ если } 1<x<2 \end{cases}$

6. $f(x)=x^2+3x, \quad (0;\pi)$

7. $f(x)=\begin{cases} 1, \textit{ если } 0<x<\dfrac{\pi}{2} \\ 0, \textit{ если } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}$

8. $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}, \quad (0;\pi)$

9. $f(x)=\begin{cases} x, \textit{ если } 0<x<1 \\ 0, \textit{ если } 1<x<2 \end{cases}$

10. $f(x)=x(\pi-x),\quad (0;\pi)$

11. $f(x)=e^{x},\quad (0;\pi)$

12. $f(x)=\sin x,\quad (0;\pi)$

13. $f(x)=\begin{cases} x, \text{ если } 0<x<1 \\ 1, \text{ если } 1<x<2 \end{cases}$

14. $f(x)=1+x+x^{2},\quad (0;1)$

15. $f(x)=2^{x},\quad (0;\pi)$

16. $f(x)=\cos\dfrac{x}{2},\quad (0;\pi)$

17. $f(x)=\begin{cases} 1, \text{ если } 0<x<1 \\ x, \text{ если } 1<x<2 \end{cases}$

18. $f(x)=1-x+x^{2},\quad (0;1)$

19. $f(x)=x+1,\quad (0;\pi)$

20. $f(x)=\begin{cases} x, \text{ если } 0<x<2 \\ 4-x, \text{ если } 2<x<4 \end{cases}$

21. $f(x)=x^{2}+x,\quad (0;1)$

22. $f(x)=x^{2}-x,\quad (0;1)$

23. $f(x)=4^{x},\quad (0;\pi)$

24. $f(x)=\begin{cases} 1, \text{ если } 0<x<1 \\ -1, \text{ если } 1<x<2 \end{cases}$

25. $f(x)=\pi^{x},\quad (0;\pi)$

26. $f(x)=e^{-x},\quad (0;1)$

27. $f(x)=17^{x},\quad (0;\pi)$

28. $f(x)=\sin x,\quad (0;\pi)$

29. $f(x)=x^{2}-17x,\quad (0;\pi)$

30. $f(x)=\begin{cases}1, \text{если } 0<x<1\\ x, \text{если } 1<x<3\end{cases}$