ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Математика»

Учебное пособие

по дисциплинам
«Теория функций комплексного переменного»,
«Математика», «Операционное исчисление»

«Введение в комплексный анализ»

Авторы
Соболев В.В.,
Волокитин Г.И.

Ростов-на-Дону, 2016

Аннотация

В пособии вводится понятие комплексных чисел и даются операции над ними. Изложены основы теории функции комплексного переменного. Дано большое число примеров и задач для самостоятельной работы.

Предназначено для студентов старших курсов технических направлений, а также студентов младших курсов, желающих углубить свои знания по комплексному анализу.

Авторы

к.ф.-м.н., профессор Соболев В.В.,
к.ф.-м.н., доцент Волокитин Г.И.

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель данного пособия – познакомить студентов с важнейшими понятиями и методами теории комплексных чисел и функций одного комплексного переменного. Пособие содержит основополагающий материал, представляющий введение в классическую теорию аналитических функций одного комплексного переменного.

Пособие разделено на 3 параграфа. В первом параграфе последовательно строится алгебра комплексных чисел и даётся представление о поле комплексных чисел как расширения поля действительных чисел. Во втором параграфе излагается теория пределов в поле комплексных чисел и понятие функции комплексной переменной. Третий параграф посвящен аналитическим функциям.

Особенностями пособия являются:

– систематическое изложение основ теории с доказательством важнейших положений и фактов;

– привлечение – по мере возможности – читателя к творческому процессу получения новых знаний и умений с помощью постановки для самостоятельного решения заданий различного уровня сложности, включённых в текст пособия и снабжённых необходимыми указаниями и подсказками;

– систематическое использование графических иллюстраций для наглядного пояснения излагаемого материала и современной логической символики, делающих изложение более плотным и способствующих сокращению объёма текста пособия.

Для более полного и глубокого усвоения излагаемых вопросов пособие снабжено списком доступной учебной и монографической литературы. Пособие предназначено для студентов физико-математических и инженерно-технических специальностей вузов как дополнительное учебное пособие в помощь самостоятельной работе по дисциплинам «Математика», «Математический анализ», «Уравнения (методы) математической физики», «Теория функций комплексного переменного» и др. Оно может быть полезно магистрантам и аспирантам, а также преподавателям математических дисциплин вузов в качестве источника тем для самостоятельной работы студентов.

Для краткости слово «определение» заменено сокращением «опр.», слово «доказательство» заменено в односложных фразах сокращением «**Д.**». Знаком // отмечены конец доказательства теоремы, леммы или следствия.

Все новые понятия, вводимые в пособии, а также формулировки теорем, лемм и следствий выделены курсивом.

§ 1. ПОЛЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

1.1 Поле комплексных чисел как расширение поля действительных чисел

Как известно, множество всех действительных чисел **R**, рассматриваемое вместе с арифметическими операциями сложения и умножения, а также обратных к ним операций вычитания и деления образует числовое *поле.* Полем в математике считается множество **P** элементов (обычно называемых числами), наделённое такой структурой, что операции сложения и умножения над элементами из этого множества не выводят за его пределы, сами операции подчиняются привычным законам арифметики (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность) и, кроме того, для любого числа из **P** в **P** существует единственное противоположное, т.е. такое число, что его сумма с данным числом равна 0 (нуль поля), а для всякого числа из **P,** отличного от 0 в **P** существует единственное обратное, т.е. такое число, что его произведение с данным числом равна 1 (единице поля). Поле **R**, которое геометрически истолковывается (интерпретируется) как множество всех точек на прямой $(-\infty;+\infty)$, является:

1) *упорядоченным*: между всякими двумя различными числами (точками на прямой) можно установить отношение «больше» или «меньше»;

2) *всюду плотным* множеством: между всякими двумя различными числами существует, и притом бесконечно много, других действительных чисел, больших наименьшего из этих двух чисел и одновременно меньших наибольшего из них;

3) *полным* относительно операции предельного перехода. Полнота понимается в том смысле, что из всякой ограниченной (бесконечной) последовательности действительных чисел можно выделить сходящуюся подпоследовательность, причём пределом этой подпоследовательности является действительное число.

Перечисленные свойства поля действительных чисел делает его весьма удобным инструментом для решения многих задач, в том числе задач математического анализа (дифференциального и интегрального исчисления функций одного или нескольких действительных переменных). Однако этого множества бывает недостаточно для решения других задач. Например, во множестве **R** невозможно решить такое простое, казалось бы, уравнение, как

$x^2+1=0$. Кроме того, оставаясь в рамках множества **R**, невозможно понять причину многих явлений и математических закономерностей. Например, нельзя обнаружить различия в свойствах функций $1/(1+x^2)$ и e^x – и та и другая непрерывны на всём множестве **R** и имеют производные любого порядка. Но разложение по степеням x первой $1-x^2+x^4-x^6+\ldots$ сходится только на интервале $(-1,+1)$, в то время как разложение второй $1+x+x^2/2!+x^3/3!+\ldots$ – на всей прямой $(-\infty,+\infty)$.

Подобные обстоятельства приводят к необходимости расширения поля **R** до такого поля, которое наряду с многими из упомянутых свойств поля **R** обладало бы новыми свойствами, позволяющими решать более широкий круг задач, чем в поле **R**.

Таким расширением является поле комплексных чисел, вводимое следующими определениями.

Комплексным числом называется упорядоченная пара $z=(x,y)$ действительных чисел *x* и *y*, причём на множестве всех таких пар определены понятие равенства и операции сложения и умножения следующим образом:

1) Два комплексные числа $z_1=(x_1,y_1)$ и $z_2=(x_2,y_2)$ считаются *равными* тогда и только тогда, когда $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$.

2) *Суммой* двух комплексных чисел $z_1=(x_1,y_1)$ и $z_2=(x_2,y_2)$ называется комплексное число

$$z_1+z_2=(x_1+x_2,y_1+y_2),$$

а *произведением* – число

$$z_1\cdot z_2=(x_1\cdot x_2-y_1\cdot y_2,x_1\cdot y_2+x_2\cdot y_1).$$

Числа *x* и *y* называют соответственно *действительной* и *мнимой* частями (компонентами) комплексного числа $z=(x,y)$ и пишут $x=\operatorname{Re} z$ (читается «реальная часть *z*»), $y=\operatorname{Im} z$ («мнимая часть *z*»).

Непосредственно проверяется, что введённые операции сложения и умножения подчинены известным законам арифметики:

а) $z_1+z_2=z_2+z_1$ (коммутативность сложения);

б) $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$ (коммутативность умножения);

в) $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ (ассоциативность сложения);

г) $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$ (ассоциативность умножения);

д) $(z_1+z_2)\cdot z_3=z_1\cdot z_3+z_2\cdot z_3$ (дистрибутивность).

Как обратные по отношению к операциям сложения и умножения вводятся операции вычитания и деления: под разностью чисел $z_1=(x_1,y_1)$ и $z_2=(x_2,y_2)$ понимается число $z_1-z_2=w$ такое, что $z_1=z_2+w$, а под частным z_1/z_2 (при $z_2\neq(0,0)$) – комплексное число ω такое, что $z_1=z_2\cdot\omega$.

Если $z_1=(x_1,y_1)$ и $z_2=(x_2,y_2)$, то (*докажите самостоятельно*)

1) $z_1-z_2=(x_1-x_2,y_1-y_2)$;

2) $z_1/z_2=\left(\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\dfrac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)$ (при $(x_2,y_2)\neq(0,0)$).//

Множество всех комплексных чисел с введёнными выше операциями сложения, вычитания, умножения и деления образует поле, называемое *полем комплексных чисел* и обозначаемое $\mathbf{C}$.

В поле $\mathbf{C}$ роль нулевого элемента **0** (т.е. такого числа $\mathbf{0}\in\mathbf{C}$, для которого $z+\mathbf{0}=z$, $z\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$ для $\forall z\in\mathbf{C}$) играет пара $(0,0)$, а роль единичного элемента **1** (такого, что $z\cdot\mathbf{1}=z$ для $\forall z\in\mathbf{C}$) – пара $(1,0)$. Противоположным к числу $z=(x,y)\in\mathbf{C}$ считается число $(-z)\in\mathbf{C}$ такое, что $z+(-z)=\mathbf{0}$, а обратным к $z\in\mathbf{C}$, $z\neq\mathbf{0}$, – число $z^{-1}\in\mathbf{C}$ такое, что $z\cdot z^{-1}=\mathbf{1}$.

Для $\forall z=(x,y)\in\mathbf{C}$, $z\neq\mathbf{0}$, существует единственное $(\exists!)$ противоположное $(-z)\in\mathbf{C}$ и $\exists!$ обратный элемент $z^{-1}\in\mathbf{C}$ (*докажите самостоятельно*), причём

$$(-z)=(-x,-y),\quad z^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right).$$

Кроме того, $(-z)=(-1,0)\cdot z$ и для $\forall z_1,z_2\in\mathbf{C}$ выполняются равенства $z_1-z_2=z_1+(-z_2)$,

$z_2^{-1} = (1,0)/z_2$, $z_1/z_2 = z_1 \cdot z_2^{-1}$ (при $z_2 \neq \mathbf{0}$).

Два комплексные числа $z = (x, y)$ и $\bar{z} = (x, -y)$ называются (взаимно комплексно) *сопряжёнными*.

Рассмотрим в поле $\mathbf{C}$ подмножество $\mathbf{C}_{\mathrm{R}}$ всех чисел вида $(x,0)$ (*чисто действительных* чисел, т.е. комплексных чисел с нулевой мнимой частью). Операции сложения, вычитания, умножения и деления чисел из $\mathbf{C}_{\mathrm{R}}$ не выводят за пределы множества $\mathbf{C}_{\mathrm{R}}$. В самом деле, для $z_1 = (x_1, 0)$, $z_2 = (x_2, 0)$ имеем $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2, 0)$, $z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2, 0)$, $z_1 / z_2 = (x_1 / x_2, 0)$ (при $x_2 \neq 0$). Это показывает, что подмножество $\mathbf{C}_{\mathrm{R}}$ множества $\mathbf{C}$ образует поле относительно тех же алгебраических операций, что и в самом поле $\mathbf{C}$, причём взаимно однозначное соответствие между полями $\mathbf{C}_{\mathrm{R}}$ и **R,** устанавливаемое по правилу $(x,0) \leftrightarrow x$, сохраняется при всех алгебраических операциях в этих полях. Это позволяет отождествлять поля $\mathbf{C}_{\mathrm{R}}$ и **R**, не различая комплексное число $(x,0) \in \mathbf{C}_{\mathrm{R}}$ и действительное число $x \in \mathbf{R}$, и писать вместо $(x,0)$ просто x: $(x,0) = x$. Согласно такому уговору нулевой элемент **0**$= (0,0)$ полей $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}_{\mathrm{R}}$ будем записывать в виде 0, а единичный элемент **1**$= (1,0)$ – в виде 1.

Важную роль в поле $\mathbf{C}$ играет чисто мнимое число $(0,1)$, обозначаемое обычно символом *i* и называемое *мнимой единицей*. Заметим сразу, что

$$i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1.$$

Использование мнимой единицы *i* позволяет всякое комплексное число $z = (x, y)$ представить в так называемой *алгебраической* (*декартовой*) *форме*:

$$z = (x, y) = (x,0) + (0,1) \cdot (y,0) = x + iy.$$

Операции над комплексными числами в алгебраической форме (ввиду выполнения в поле $\mathbf{C}$ законов коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности) производится по обычным правилам арифметики с учётом той особенности, что $i^2 = -1$. Например, выполняя сложение, умножение и деление чисел

$z_1=(2,-3)$ и $z_2=(-5,7)$ в алгебраической форме, получим:

$$z_1+z_2=(2,-3)+(-5,7)=(2-3i)+(-5+7i)=(2-5)+i(-3+7)=-3+4i=(-3,4)$$

$$z_1\cdot z_2=(2,-3)\cdot(-5,7)=(2-3i)\cdot(-5+7i)=2\cdot(-5)+(-3)\cdot(-5)i+2\cdot 7i+(-3)\cdot 7i^2=$$
$$=-10+21+15i+14i=11+29i=(11,29);$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2-3i}{-5+7i}=\frac{(2-3i)(-5-7i)}{(-5+7i)(-5-7i)}=\frac{-10+15i-14i+21i^2}{25+49}=\frac{-31+i}{74}=$$
$$=-\frac{31}{74}+\frac{1}{74}i=\left(-\frac{31}{74},\frac{1}{74}\right).$$

Отметим, что при делении мы, не меняя частного z_1/z_2, умножили числитель и знаменатель дроби на число $(-5-7i)$, сопряжённое к знаменателю, и воспользовались тем, что произведение двух взаимно сопряжённых чисел z и $\bar{z}$ есть действительное число:

$$z\cdot\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2\geq 0.$$

1.2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел

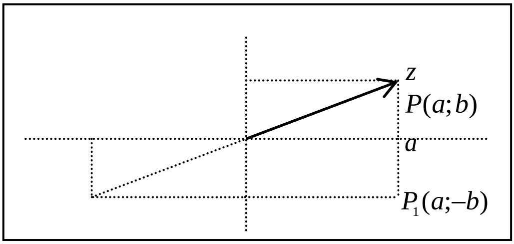


Рис.1.1

Комплексные числа изображаются как точки на плоскости подобно тому, как действительные числа изображаются точками на прямой. На плоскости с декартовой прямоугольной системой координат сопоставим комплексному числу $z=(a,b)=a+ib$ точку $P(a;b)$ (с абсциссой a и ординатой b) на плоскости и обратно (рис.1.1): каждой точке $P(a;b)$ на плоскости сопоставим комплексное число $z=a+ib$, называемое *аффиксом* точки $P(a;b)$. Такое соответствие $z=(a,b)\leftrightarrow P(a;b)$ между всеми комплексными числами поля $\mathbf{C}$ и всеми точками плоскости является взаимно однозначным. Это позволяет в дальнейшем уподоблять точку $P(a;b)$ комплексному числу $z=a+ib$, которое будем отождествлять с точкой с таким же аффиксом $z = a + ib$, а всю плоскость – полю комплексных чисел $\mathbf{C}$. В таком истолковании плоскость называют *комплексной* и обозначают тем же символом $\mathbf{C}$.

При установленном соответствии чисто действительным числам $(x,0) = x$ соответствуют точки оси абсцисс, а *чисто мнимым* числам $(0, y) = iy$ – точки оси ординат. В связи с этим оси абсцисс и ординат на комплексной плоскости $\mathbf{C}$ называют соответственно *действительной* и *мнимой* осями. Нуль $(0,0)$ поля $\mathbf{C}$ соответствует началу координат. Комплексно сопряжённые числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ изображаются точками, симметричными друг другу относительно действительной оси; противоположные числа $z = a + ib$ и $-z = -a - ib$ симметричны относительно начала координат.

Кроме описанного соответствия между комплексными числами и точками плоскости можно также говорить о соответствии между числами $z = a + ib$ и векторами $\overline{OP}$, являющимися радиус-векторами точек $P(a;b)$. Заметим, что в таком истолковании операция сложения комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ трактуется как операция сложения векторов по известному правилу параллелограмма (см. рис.1.2), а операция умножения комплексного числа $z = a + ib$ на действительное число λ – как операция умножения вектора $\overline{OP} = (a;b)$ на число

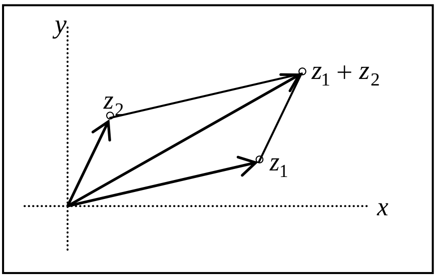


Рис.1.2

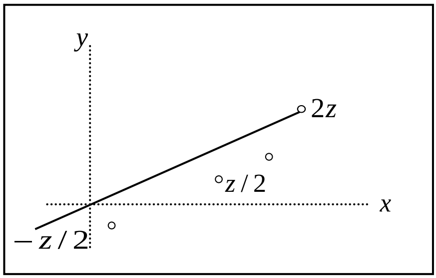


Рис.1.3

λ: растяжение (сжатие) в $|\lambda|$ раз с сохранением направления, если $\lambda > 0$, и с изменением направления на противоположное, если $\lambda < 0$ (рис.1.3).

1.3. Тригонометрическая форма комплексного числа

Наряду с декартовыми координатами точки $z=(x,y)$ рассмотрим её полярные координаты ρ и φ: ρ – расстояние точки z от начала координат $(0;0)$, φ – угол между положительным направлением действительной оси и радиус-вектором точки z, отсчитываемый против часовой стрелки от оси ox (рис 1.4).

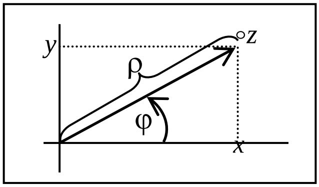


Рис.1.4

Величины ρ и φ применительно к комплексному числу z называют *модулем* и *аргументом* числа и обозначают

$$\rho=|z|, \quad \varphi=\mathrm{Arg}z.$$

Любое число $z\in\mathbf{C}$, $z\neq 0$, имеет бесконечное множество значений аргумента, отличающихся друг от друга на слагаемые вида $2\pi k,\ k\in Z$. Одно из этих значений, принадлежащее полуоткрытому промежутку $(-\pi,\pi]$, называют *главным значением аргумента* числа z и обозначают $\arg z$. Итак, $\mathrm{Arg}z=\arg z+2\pi k, k\in Z$, $-\pi<\arg z\leq\pi$. Для числа $z=0$ модуль равен 0, а понятие аргумента не определено; $|z|>0$ для $\forall z\neq 0$.

Используя связь между полярными и декартовыми координатами (рис.1.4)

$$x=\rho\cos\varphi, \quad y=\rho\sin\varphi, \quad \rho^2=x^2+y^2,$$

получим формулы для нахождения модуля и аргумента числа $z=x+iy\neq 0$:

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}, \quad \cos\varphi=\frac{x}{\rho}=\frac{\mathrm{Re}\,z}{|z|}, \quad \sin\varphi=\frac{y}{\rho}=\frac{\mathrm{Im}\,z}{|z|}.$$

Подставляя $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$ в алгебраическую форму числа $z=x+iy$, получим другую форму записи комплексного числа

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi), \qquad (1.1)$$

называемую *тригонометрической*.

Отметим, что введённое понятие модуля комплексного числа не противоречит понятию модуля действительного числа: для чисто действительного числа $z=(x,0)=x$ выполняется $|(x,0)|=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$

Два комплексные числа w_1 и w_2 равны тогда и только тогда, когда их модули равны и аргументы $\varphi_1=\mathrm{Arg}\,w_1$, $\varphi_2=\mathrm{Arg}\,w_2$ совпадают с точностью до слагаемого, кратного 2π:

$$(w_1=w_2)\Leftrightarrow\left(|w_1|=|w_2|,\ \varphi_1=\varphi_2+2\pi k\right)\ (k\in\mathrm{Z}).$$

Использование модуля комплексного числа позволяет выразить расстояние

$\rho(z_1,z_2)$ между двумя точками z_1, z_2 комплексной плоскости **C** в виде $\rho(z_1,z_2)=|z_1-z_2|$. В самом деле, пусть $z_1=(x_1,y_1)$, $z_2=(x_2,y_2)$. Тогда

$$\rho(z_1,z_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=|z_1-z_2|.$$

1.4. Операции над комплексными числами в тригонометрической форме

В тригонометрической форме удобно производить *мультипликативные* операции: умножения, деления, возведения в степень и извлечение корня.

А) *Умножение, деление*. Пусть даны два числа в тригонометрической форме:

$z_1=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$. Найдём произведение $z_1\cdot z_2$:

$$z_1\cdot z_2=\rho_1\rho_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2)]=$$
$$=\rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]. \qquad (1.2)$$

Отсюда видно, что

$$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,\quad \mathrm{Arg}(z_1\cdot z_2)=\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{Arg}\,z_2,$$

причём последнее равенство следует понимать как равенство двух бесконечных множеств: любое значение аргумента числа

$z_1 \cdot z_2$ отличается от суммы любого из значений аргумента числа z_1 с любым из значений аргумента числа z_2 на слагаемое вида $2\pi k,\ k \in \mathrm{Z}$. Аналогично понимаются и все другие подобные соотношения с участием многозначной величины $\mathrm{Arg}z$.

Таким образом, при умножении двух комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Это означает, что операция умножения числа z_1 на число z_2 геометрически сводится к тому, что радиус-вектор точки z_1 растягивается (сжимается) в $|z_2|$ раз и поворачивается вокруг начала координат на угол $\varphi_2 = \mathrm{Arg}z_2$ с учётом знака φ_2: против часовой стрелки, если $\varphi_2 > 0$, и по часовой стрелке, если $\varphi_2 < 0$.

Учитывая, что деление на число $z_2 \neq 0$ сводится к умножению на обратное число z_2^{-1} и то, что $|z_2^{-1}| = 1/|z_2|$, $\mathrm{Arg}z_2^{-1} = -\mathrm{Arg}z_2$, получим

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \mathrm{Arg}\,\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{Arg}z_1 - \mathrm{Arg}z_2,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

(1.3)

Справедливы равенства (*доказать самостоятельно*): $|z/\bar{z}| = 1$, $\mathrm{Arg}(z/\bar{z}) = 2\mathrm{Arg}z$ для $\forall z \neq 0$.

Б) *Возведение в степень, извлечение корня*. Из правила умножения комплексных чисел в тригонометрической форме (1.2) следует правило возведения в натуральную степень $n = 2,3,\ldots$:

$$|z^n| = |z|^n, \quad \mathrm{Arg}(z^n) = n \cdot \mathrm{Arg}z,$$

$$[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (1.4)$$

Из формулы (1.4) при $\rho = 1$ получается формула

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi,\ n\in\mathrm{N}, \tag{1.5}$$

называемая *формулой Муавра*.

Формула Муавра позволяет, в частности, выразить функции $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ кратного аргумента $n\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$:

$$\cos n\varphi = \mathrm{Re}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n,\quad \sin n\varphi = \mathrm{Im}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n.$$

Например, при $n = 3$ имеем

$$\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 =$$

$$= (\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi) + i(3\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi - \sin^3\varphi),$$

откуда

$$\cos 3\varphi = \mathrm{Re}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi,$$

$$\sin 3\varphi = \mathrm{Im}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = 3\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi - \sin^3\varphi.$$

Переходим к операции извлечения корня степени $n\in\mathrm{N}$ из комплексного числа. По определению *корнем степени* n из числа $z\in\mathbf{C}$ называется число $w = \sqrt[n]{z}\in\mathbf{C}$ такое, что $w^n = z$:

$$\sqrt[n]{z} = w \Leftrightarrow z = w^n.$$

Пусть $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = r(\cos\psi + i\sin\psi)$. Равенство $z = w^n$ согласно формуле (1.4) принимает вид

$$\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r^n(\cos n\psi + i\sin n\psi).$$

Сравнивая модули и аргументы в левой и правой частях этого равенства, получаем $\rho = r^n$, $n\psi = \varphi + 2\pi k$, $k\in\mathrm{Z}$. Отсюда $r = \sqrt[n]{\rho}$, $\psi = (\varphi + 2\pi k)/n$, где под корнем $\sqrt[n]{\rho}$ понимается арифметическое значение: $\sqrt[n]{\rho}\ge 0$.

Итак, справедлива формула

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right. \tag{1.6}$$

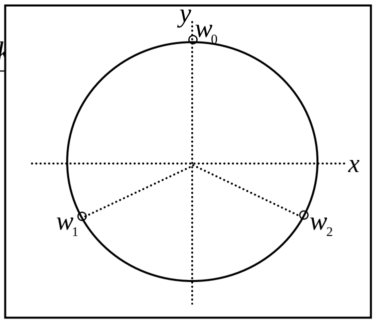


Рис.1.5

Формула (1.6) при $z\ne 0$ даёт n различных значений w_k корня $\sqrt[n]{z}$, получающихся при $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Например, для корня кубического

из числа ($-8i$) получаем по формуле (1.6) три значения (рис.1.5):

$$w_0 = 2\left(\cos\frac{(3/2)\pi}{3} + i\sin\frac{(3/2)\pi}{3}\right) = 2i,$$

$$w_1 = 2\left(\cos\frac{(3/2)\pi + 2\pi}{3} + i\sin\frac{(3/2)\pi + 2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} - \frac{1}{2}i,$$

$$w_2 = 2\left(\cos\frac{(3/2)\pi + 4\pi}{3} + i\sin\frac{(3/2)\pi + 4\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - \frac{1}{2}i.$$

Отметим, что все n различных значений w_k ($k = 0, 1, \ldots, n-1$) корня $\sqrt[n]{z}$ располагаются в комплексной плоскости на окружности радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ с центром в нуле и делят эту окружность на n равных дуг.

1.5. Показательная форма комплексного числа. Формулы Эйлера

Для простоты письма введём сокращённое обозначение

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \qquad (1.7)$$

Отметим, что точка с аффиксом $e^{i\varphi}$ принадлежит единичной окружности с центров в начале координат и её радиус-вектор образует с положительным направлением действительной оси угол φ (рис.1.6).

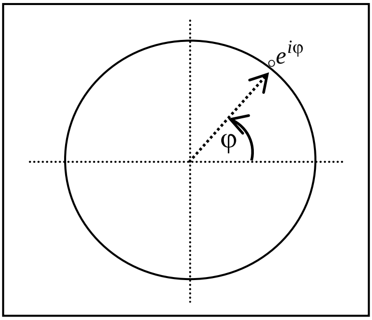


Рис.1.6

С использованием введённого символа придадим тригонометрической форме комплексного числа (1.1) вид $z = \rho \cdot e^{i\varphi}$ или

$$z = |z| \cdot e^{i\arg z}. \qquad (1.8)$$

Форму (1.8) записи комплексного числа называют *показательной*.

Формулы умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня в показательной форме приобретают следующий вид:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\arg z_1 + \arg z_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2}\cdot = \frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot e^{i(\arg z_1 - \arg z_2)} \qquad (z_2 \neq 0),$$

$$z^n = |z|^n \cdot e^{i\cdot n\cdot \arg z},$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\cdot e^{i\frac{\arg z + 2\pi k}{n}} \qquad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

Формула Муавра в показательной форме записывается в виде

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}.$$

Записывая $e^{-i\varphi}$, согласно формуле (1.7), в виде $e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \ = \cos\varphi - i\sin\varphi$, получаем, с учётом формулы (1.7), выражения $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ через показательные символы $e^{i\varphi}$ и $e^{-i\varphi}$:

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}),\ \sin\varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}). \qquad (1.9)$$

Формулы (1.7), (1.9) носят название *формул Эйлера.*

В дальнейшем будет показано, что введение формулой Эйлера (1.7) символа $e^{i\varphi}$ оправдано не только тем, что формализм мультипликативных операций (умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня) с этим символом подчиняется, как это показано выше, обычным правилам операций со степенями, но и тем, что определяемая естественным образом показательная функция e^z при чисто мнимом значении $z = i\varphi$, $\varphi \in \mathrm{R}$, равна именно $\cos\varphi + i\sin\varphi$.

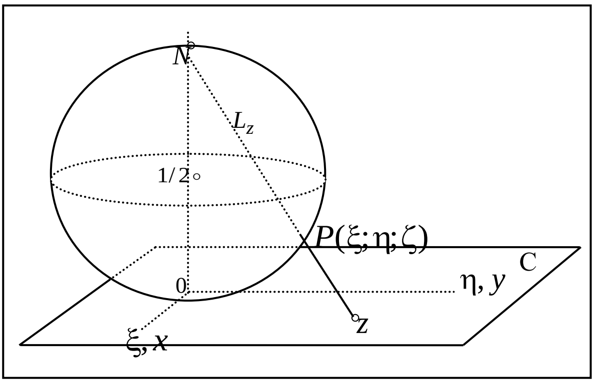


Рис.

1.6. Понятие расширенной комплексной плоскости

В некоторых случаях наряду с комплексной плоскостью **C** необходимо рассматривать расширенную плоскость $\overline{\mathrm{C}}$, получающуюся добавлением к **C** некоторого «идеального» элемента – бесконечно удалённой точки $z=\infty$. Наглядной моделью расширенной плоскости $\overline{\mathrm{C}}$ является сфера. В трёхмерном евклидовом пространстве R^3 с декартовыми координатами ξ, η, ζ рассмотрим сферу $\mathrm{S}=\{(\xi;\eta;\zeta):\ \xi^2+\eta^2+(\zeta-1/2)^2=1/4\}$ с центром в точке $(0;0;1/2)$ и радиусом $1/2$. Плоскость $\zeta=0$ примем за плоскость **C** и обозначим через z текущую точку в ней (рис.1.7). Считая $z=x+iy$, будем отождествлять на **C** действительную ось $y=0$ с осью $\eta=0$, а мнимую ось $x=0$ – с осью $\xi=0$. Из точки $N(0;\ 0;\ 1)$ («северного полюса» сферы S) проведём луч L_z, пересекающий **C** в точке z. Точку *P* пересечения луча L_z со сферой S, отличную от её «северного полюса» *N*, будем называть *стереографическим образом* (*стереографической проекцией*) точки z. Стереографическое проецирование устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками сферы S с выколотым «северным полюсом» *N* и точками плоскости **C**.

Формулы, выражающие связь между координатами точки $z=x+iy\in\mathbf{C}$ и её стереографического образа $P(\xi;\eta;\zeta)\in\mathrm{S}$ имеют вид (*докажите самостоятельно*):

$$\xi=\frac{x}{1+|z|^2},\eta=\frac{y}{1+|z|^2},\zeta=\frac{|z|^2}{1+|z|^2}. \qquad (1.10)$$

Стереографическим образом точки $(0;\ 0;\ 0)$ – «южного полюса» сферы S – является точка $z=0$ плоскости **C**; ясно, что ни одна точка сферы с выколотым «южным полюсом» $(0;\ 0;\ 0)$ не переходит в $z=0$. Таким образом, между $\mathrm{S}\setminus\{N\}$ и **C** устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Рассмотрим теперь «идеальное» комплексное число $z=\infty$, которое естественно сопоставить «северному полюсу» *N* сферы S и называть *бесконечно удалённой точкой* (*бесконечностью*). Пополним плоскость **C** точкой $z=\infty$ и будем называть новый объект $\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ *расширенной комплексной плоскостью* и обозначать символом $\overline{\mathbf{C}}$. В связи с этим **С** называют *конечной комплексной плоскостью*.

Итак, установлено взаимно однозначное соответствие между всеми точками $\overline{\mathbf{C}}$ и всеми точками сферы S. Поэтому можно отождествлять $\overline{\mathbf{C}}$ со сферой S, а **С** – с $S\setminus N$. Такая интерпретация комплексных чисел предложена Риманом. В связи с эти сферу S называют *сферой Римана*.

Отметим, что если множество **R** всех действительных чисел естественно пополняется двумя «идеальными» элементами $+\infty$ и $-\infty$, то множество **С** всех комплексных чисел – только одним $z=\infty$.

Интерпретация Римана часто позволяет рассматривать точку $z=\infty$ как равноправный элемент $\overline{\mathbf{C}}$, не выделяя его среди других. Особая природа числа $z=\infty$ выступает лишь в алгебраическом аспекте: в отличие от точек плоскости **С** точка $z=\infty$ не участвует в алгебраических операциях и $\overline{\mathbf{C}}$ не является полем. Впрочем, некоторым операциям с участием бесконечности удаётся придать смысл. По определению полагаем:

1) $\infty+a=a+\infty=\infty$, где $a\in\mathbf{C}$;

2) $a/0=\infty\cdot a=a\cdot\infty=\infty$, где $a\in\overline{\mathbf{C}}\setminus\{0\}$;

3) $a/\infty=0$, $\infty/a=\infty$, где $a\in\mathbf{C}$.

Операции $\infty\pm\infty$, $\infty\cdot 0$, $0\cdot\infty$, ∞/∞ лишены смысла. Отметим, что для точки $z=\infty$ лишены смысла понятия действительной части, мнимой части, аргумента, но естественно считать $|\infty|=+\infty$.

§ 2. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

2.1. Область в комплексной плоскости

Опираясь на геометрическое истолкование комплексного числа как точки на плоскости, будем рассматривать те или иные множества комплексных чисел как множества точек на плоскости **C**. В теории функций комплексного переменного часто рассматривают точечные множества специального вида, называемые областями. Оказывается, именно области служат теми множествами, на которых естественно определяются важнейшие для приложений так называемые аналитические функции.

Введём прежде понятие окрестности точки на комплексной плоскости **C**. Пусть ε – положительное число. ε-*окрестностью* точки $z_0 \in \mathbf{C}$ называют множество всех точек круга $U(z_0,\varepsilon)=\{z: |z-z_0|<\varepsilon\}$ с центром в точке z_0 радиуса ε. Удаление точки z_0 из её ε-окрестности приводит к так называемой *проколотой* ε-окрестности точки z_0, обозначаемой $\overset{\circ}{U}(z_0,\varepsilon)=\{z: 0<|z-z_0|<\varepsilon\}$.

Окрестностью бесконечно удалённой точки на плоскости **C** будем называть внешность всякого круга с центром в нуле: $\{z \in \mathbf{C}: |z|>r\}$, $r>0$. Окрестностью бесконечно удалённой точки на расширенной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$ будем называть внешность всякого круга с центром в нуле, пополненную точкой $z=\infty$; удаление точки $z=\infty$ из этой окрестности приводит к проколотой окрестности точки $z=\infty$ на $\overline{\mathbf{C}}$.

В дальнейшем, говоря об окрестности точки z_0, будем иметь в виду некоторую ε-окрестность ($\varepsilon>0$) в случае, если z_0 – конечная точка, и внешность некоторого круга с центром в начале, если z_0 – бесконечно удалённая точка.

Точка z_0 называется *предельной* точкой множества *G*, $G \subset \mathbf{C}\,(\overline{\mathbf{C}})$, если любая проколотая окрестность этой точки содержит хотя бы одну точку из *G*. В частности, конечная точка z_0

является предельной точкой множества *G,* если $\overset{\circ}{U}(z_0,\varepsilon)\cap G\neq\varnothing$ для $\forall\varepsilon>0$.

Множество, получающееся присоединением к множеству *G* всех его предельных точек, называют *замыканием* *G* и обозначают $\overline{G}$.

Множество *G* называют *замкнутым*, если *G=*$\overline{G}$, т.е. если оно содержит все свои предельные точки. Другими словами, множество замкнуто, если оно не содержит точек, не являющихся его предельными точками. В связи с этим пустое множество $\varnothing$ (не содержащее вообще точек) и всю расширенную плоскость $\overline{\mathbf{C}}$ естественно отнести к замкнутым множествам.

Замкнутое множество называется *связным*, если его нельзя разбить на два замкнутых множества, не имеющих общих точек.

Точка z_0 называется *внутренней* для множества *G,* $G\subset\overline{\mathrm{C}}$, если она принадлежит множеству G вместе с некоторой своей окрестностью.

Точка $z_1\in\overline{\mathrm{C}}$ называется *граничной* для множества *G,* если в каждой её окрестности существуют как точки, принадлежащие множеству *G,* так и точки, не принадлежащие *G.* Совокупность всех граничных точек множества *G* называют его *границей* и обозначают frG. Граница множества всегда является замкнутым множеством.

Множество, все точки которого являются внутренними для него, называется *открытым*. Другими словами, множество *G* открыто, если оно не содержит точек, не являющихся для *G* внутренними. В связи с этим пустое множество $\varnothing$ и всю плоскость **C** естественно отнести к открытым множествам. Система T открытых подмножеств *G* плоскости **C** удовлетворяет аксиомам (*докажите самостоятельно*):

1) множество **C** и пустое множество $\varnothing$ принадлежат T;
2) объединение $\bigcup\limits_{\alpha}G_\alpha$ любого (конечного или бесконечного) и пересечение $\bigcap\limits_{k=1}^{n}G_k$ любого конечного числа множеств из T принадлежит T.

Ограниченное замкнутое множество в **C** называется *компактным*.

Будем говорить, что множество $\mathrm{G} = \{\mathrm{G}_\alpha\}$ открытых множеств G_α образует *открытое покрытие* множества M, $\mathrm{M} \subset \overline{\mathbf{C}}$, если каждая точка множества M принадлежит хотя бы одному множеству $\mathrm{G}_\alpha \in \mathrm{G}$.

Большое значение имеет следующее известное предложение, установленное Гейне и Борелем.

***Лемма* (*Гейне, Борель*).** *Из всякого бесконечного открытого покрытия* G *компактного множества F можно выделить конечное открытое подпокрытие этого множества.*

Обозначим через $d(z_1, z_2)$ любое из расстояний между точками $z_1, z_2 \in \overline{\mathbf{C}}$: евклидово расстояние на **C**, равное $|z_1 - z_2|$, если $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, или сферическое расстояние на $\overline{\mathbf{C}}$, равное расстоянию между сферическими образами точек z_1, z_2 на сфере Римана, если одна из этих точек бесконечно удалённая. *Расстоянием* $d(z, \mathrm{M})$ (в евклидовой или сферической метрике) *точки z до множества* M, $\mathrm{M} \subset \overline{\mathbf{C}}$, будем называть точную нижнюю грань расстояний от *z* до точек M: $d(z, \mathrm{M}) = \inf\limits_{\zeta \in \mathrm{M}} d(z, \zeta)$.[1]

Очевидно, что $d(z, \mathrm{M}) = 0$ тогда и только тогда, когда $z \in \mathrm{M}$ или $z \in \overline{\mathrm{M}}$. Отсюда следует, что для случая замкнутого множества M из условия $z \notin \mathrm{M}$ следует $d(z, \mathrm{M}) > 0$, а

из условия $d(z, \mathrm{M}) = 0$ следует $z \in \mathrm{M}$.

Число $d(\mathrm{K}, \mathrm{M}) = \inf\limits_{z \in \mathrm{K}} d(z, \mathrm{M})$ называют *расстоянием между множествами* K и M.

[1] *Точной нижней гранью множества* X действительных чисел называется такое число *a*, обозначаемое infX, которое является наибольшим из чисел, ограничивающих снизу множество X, т.е. для $\forall x \in$ X выполняется $x \geq a$ и для $\forall a' > a$ $\exists x' \in$ X: $x' < a'$.

Нетрудно доказать, что если хотя бы одно из непересекающихся замкнутых множеств K и M ограничено (а значит и компактно), то $d(\mathrm{K},\mathrm{M})>0$.

Областью называется открытое, связное множество точек плоскости. Свойство *связности* открытого множества означает, что каждые две точки множества можно соединить ломаной с конечным числом звеньев, все точки которой принадлежат данному множеству. При этом если одна из двух точек – бесконечно удалённая, то звено ломаной, соединяющее эту пару точек – бесконечный луч. Приведём ещё одно определение связности открытого множества, эквивалентное приведённому выше: открытое множество называется связным, если его нельзя разбить на два открытых множества, не имеющих общих точек.

Объединение области $B\subset\mathbf{C}$ и её границы *frB* совпадает с замыканием $\overline{B}$: $\overline{B}=B\cup frB$. Точки множества $\overline{\mathbf{C}}\setminus\overline{B}$ называются *внешними* для *B.*

Область называется *ограниченной*, если она принадлежит некоторому кругу конечного радиуса. В противном случае область называется *неограниченной*.

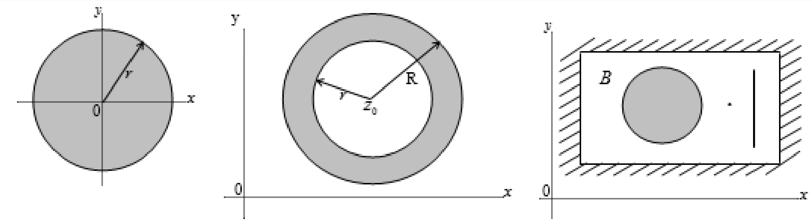
На рис.2.1 приведены примеры ограниченных областей. Примерами неограничен-

ных областей являются верхняя полуплоскость $\{z:\mathrm{Im}\,z>0,\ -\infty<\mathrm{Re}\,z<+\infty\}$ плоскости **C**, вертикальная полоса $\{z:1<\mathrm{Re}\,z<3,\ -\infty<\mathrm{Im}\,z<+\infty\}$ шириной 2 единицы, внешность круга.

Для дальнейшей классификации областей введём понятие порядка связности

области. *Порядком связности* области называется количество связных компонент границы этой области. При этом *связной компонентой* границы области *B* считается всякое максимальное (т.е. не содержащееся строго ни в каком другом связном подмножестве границы области *B*) связное подмножество точек границы frB. Если число связных компонент границы области равно n $(n=1,2,...)$, область называется *n-связной*. Если связных компонент границы области бесконечно много, то область называется *бесконеч-*

но-связной. Круг, полуплоскость, полоса – односвязные области. Области а), б), в), изображённые на рис. 2.1, – соответственно одно-, двух- и четырёхсвязная (четырьмя связными компонентами границы области *B* являются: граница прямоугольника, окружность, прямолинейный отрезок и отдельная точка).



а) Круг $\{z : |z| < r\}$ б) Кольцо $K = \{z : r < |z - z_0| < R\}$ в) Прямоугольник с удалёнными кругом, точкой и прямолинейным отрезком

Рис. 2.1

2.2. Понятие функции комплексного переменного

Пусть *D* – некоторое множество точек на $\overline{\mathbf{C}}$. Говорят, что на *D* определена функция $w = f(z)$, если каждому $z \in D$ по определённому правилу f поставлено в соответствие одно или несколько значений $w \in \overline{\mathbf{C}}$. При этом множество *D* называют *областью определения* функции $w = f(z)$, а совокупность E всех значений $w = f(z)$, когда z пробегает всё множество *D*, называют *множеством значений* функции $w = f(z)$ на *D*: $E = \{w \in \overline{\mathbf{C}} : w = f(z),\ z \in D\}$. При этом пишут $E = f(D)$ или $f : D \xrightarrow{\text{на}} E$. Функция $w = f(z)$ называется *однозначной* на *D*, если каждому $z \in D$ по правилу f соответствует единственное значение $w \in E$ и – *многозначной*, если некоторым $z \in D$ соответствует более одного значения $w = f(z)$.

Так, функция $w = z^2$, определённая на $\overline{\mathbf{C}}$, $w(\infty) = \infty$, – однозначная, в то время как $w = \sqrt{z}$ – двузначная, т.к. каждому $z \neq 0$ соответствует два значения $w = \sqrt{z}$, отличающиеся друг от друга противоположным знаком.

Геометрически однозначную функцию комплексного переменного (ФКП) удобно трактовать как отображение. Рассмотрим два экземпляра комплексной плоскости: плоскость $\mathbf{C}_z$ переменного $z = x + iy$ и плоскость $\mathbf{C}_w$ переменного $w = u + iv$. Говорят, что функция $w = f(z)$, $f : D \xrightarrow{на} E$, *отображает* множество $D \subset \overline{\mathbf{C}}_z$ на множество $E \subset \overline{\mathrm{C}}_w$; здесь $E = \{w : w = f(z), z \in D\}$ – множество значении функции *f* на её области определения *D*. При этом точку $w = f(z)$ называют *образом* точки $z \in D$, а z – *прообразом* своего образа w.

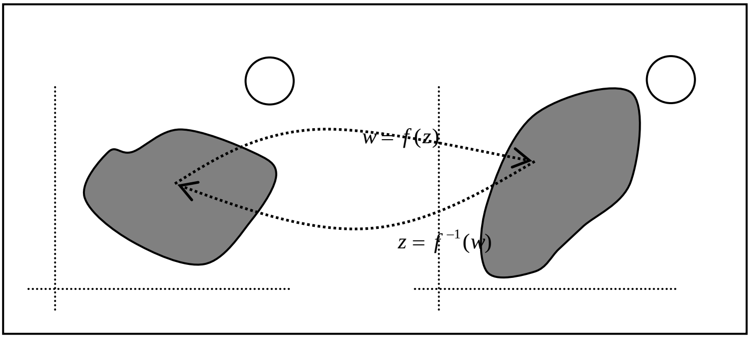


Рис.2.2

Для ФКП обычным образом вводится понятие сложной функции (композиции) и обратной функции. Например, для функции $f : D \xrightarrow{на} E$ обратной считается функция $f^{-1} : E \xrightarrow{на} D$, ставящая в соответствие каждому $w \in E$ множество всех тех $z \in D$, для которых выполняется равенство $f(z) = w$: $\left(f^{-1}(w) = z\right) \Leftrightarrow \left(w = f(z)\right)$.

Особый интерес представляют те однозначные функции, для которых обратные функции также однозначны. Такие функции, называемые *однолистными*, осуществляют взаимно однозначное соответствие между областью определения и множеством значений функции.

Задание на *D* функции f комплексного переменного $z = x + iy$ равносильно заданию двух функций, зависящих от двух действительных переменных x и y, а именно, функций $u = u(x, y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$ и $v = v(x, y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$.

Рассмотрим пример. Функция $w = 1/z$ определена на всей плоскости $\overline{\mathbf{C}}$ с удалённой точкой $z = 0$. При $z = 0$ естественно считать $w(0) = \infty$. Функция однозначная, обратная функция $z = 1/w$ также однозначная, значит отображение $w = 1/z$ однолистное. Отделяя действительную и мнимую части величины

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2},$$

получаем

$$u = \operatorname{Re} w = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v = \operatorname{Im} w = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Найдём образ полосы $\Pi = \{z : 1 < \operatorname{Re} z < 2\}$ (рис.2.3) при отображении $w = 1/z$. При $x = c = \text{const}$ имеем

$$u = \frac{c}{c^2+y^2}, \quad v = \frac{-y}{c^2+y^2}. \tag{2.1}$$

Исключим из этих двух равенств величину y, выражая $c^2 + y^2$ из каждого из них и приравнивая полученные значения: $\frac{c}{u} = -\frac{y}{v}$, $y = -\frac{cv}{u}$. Подставляя найденное y в первое уравнение из (2.1), получаем (при $c \neq 0$) $u^2 + v^2 = u/c$ – уравнение окружности, которое

запишем в каноническом виде: $\left(u - \frac{1}{2c}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{(2c)^2}$.

Итак, образом прямой $x = c,\ c \neq 0$,

служит окружность радиуса $1/(2c)$ с центром в точке $(1/(2c); 0)$. Следовательно, образом полосы Π является кольцеобразная область К, ограниченная двумя эксцентрическими окружностями $\Gamma_1 = \{w : |w - 1/2| = 1/2\}$ и $\Gamma_2 = \{w : |w - 1/4| = 1/4\}$ (рис.2.4).

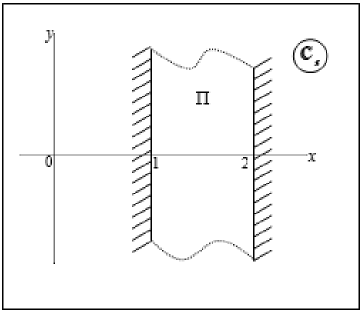


Рис.2.3

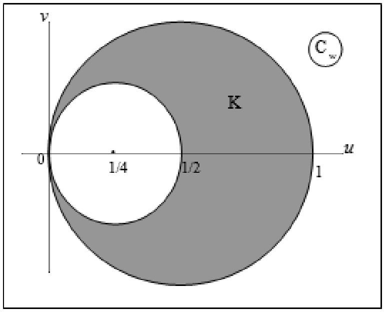


Рис.2.4

Отметим, что образами граничных точек $z=1$, $z=2$, $z=\infty$ полосы П являются соответственно граничные точки $w=1$, $w=1/2$, $w=0$ области К, прообразом внешней для К точки $w=1/4$ – внешняя для П точка $z=4$ и порядок связности области при отображении не изменился: обе области П и К – односвязные.

2.3 Предел и непрерывность ФКП

Понятие предела последовательности комплексных чисел вводится по аналогии с понятием предела последовательности действительных чисел. Говорят, что последовательность z_n, $z_n \in \mathbf{C}$, $n=1,2,\ldots$, *сходится* к числу z_0, $z_0 \in \mathbf{C}$, (имеет *предел*, равный z_0) и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ или $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_0$, если для $\forall\varepsilon>0$ $\exists n(\varepsilon)\in \mathrm{N} : |z_n - z_0| < \varepsilon$ при $n \ge n(\varepsilon)$.

Поскольку неравенство $|z_n - z_0| < \varepsilon$ равносильно выполнению двух неравенств $|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z_0| < \varepsilon$, $|\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z_0| < \varepsilon$ и выполнение этих двух неравенств влечёт неравенство $|z_n - z_0| = \sqrt{(\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z_0)^2 + (\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z_0)^2} < \sqrt{\varepsilon^2+\varepsilon^2} = \varepsilon\sqrt{2}$, то равенство $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ равносильно выполнению двух равенств $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z_0$.

Нетрудно убедиться, что для сходящихся последовательностей комплексных чисел справедливы многие свойства, аналогичные свойствам сходящихся по- следовательностей действительных чисел. В частности, если существуют конечные пределы $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = w_0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n \pm w_n) = z_0 \pm w_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \cdot w_n = z_0 \cdot w_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z_n}{w_n} = \dfrac{z_0}{w_0}$ (последний в случае $w_0 \neq 0$).

Пусть на множестве *D*, $D \subset \overline{\mathbf{C}}$, определена функция $w = f(z)$ и z_0, $z_0 \in \overline{\mathbf{C}}$, – предельная точка множества D.

Говорят, что однозначная функция $w = f(z)$ имеет в точке z_0 *предел* (по множеству *D*), равный *A*, $A \in \overline{\mathbf{C}}$, и пишут $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$ или $f(z) \underset{z\to z_0}{\longrightarrow} A$, если для любой сходящейся к z_0 последовательности точек $z_n \in D$, $z_n \neq z_0$, выполняется $f(z_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$.

Этому определению понятия предела функции, сформулированному «на языке последовательностей» (по Гейне), в случае конечных z_0 и *A* равносильно другое определение этого же понятия «на языке $\varepsilon - \delta$» (по Коши):

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A: \quad \forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta > 0:$$

$$(0 < |z - z_0| < \delta,\ z \in D) \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon.$$

Если $\operatorname{Re} f(x+iy) = u(x,y)$, $\operatorname{Im} f(x+iy) = v(x,y)$, $\operatorname{Re} A = a$, $\operatorname{Im} A = b$, $\operatorname{Re} z_0 = x_0$, $\operatorname{Im} z_0 = y_0$, то равенство $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$ равносильно двум равенствам

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) = a, \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y) = b.$$

Понятия бесконечного предела $(A = \infty)$ и предела в бесконечности ($z_0 = \infty$) для

ФКП вводятся следующими определениями, вполне аналогичными соответствующим определениям из действительного анализа:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty:$$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0:\left(0<|z-z_0|<\delta\right)\Rightarrow|f(z)|>\varepsilon$;

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=B\neq\infty:$$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0:\left(|z|>\delta\right)\Rightarrow|f(z)-B|<\varepsilon$.

Так же, как и для функций действительного переменного, имеют место следующие свойства пределов ФКП: если при $z\to z_0$ существуют конечные пределы $\lim f(z)=A$, $\lim g(z)=B$, то $\lim[f(z)\pm g(z)]=A\pm B$, $\lim[f(z)\cdot g(z)]=A\cdot B$, $\lim\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{A}{B}$ (последний в случае $B\neq 0$).

Пусть $f:D\xrightarrow{на}E$ и $z_0\in D$. Говорят, что однозначная функция $f(z)$ *непрерывна* в точке z_0 (по множеству *D*), если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$ (по множеству *D*) (в случаях $z_0=\infty$ и/или $f(z_0)=\infty$ говорят об *обобщённой непрерывности* функции в точке z_0).

Так же, как и для функций действительного переменного, справедливы следующие свойства ФКП: если две функции $f(z)$ и $g(z)$ непрерывны в точке z_0, то непрерывными в z_0 будут также функции $f(z)\pm g(z)$, $f(z)\cdot g(z)$, $f(z)/g(z)$ (последняя в случае $g(z_0)\neq 0$).

Кроме того, композиция непрерывных функций – непрерывная функция. Поясним это свойство подробнее. Пусть даны функции $f:D\xrightarrow{на}E$ и $h:G\xrightarrow{на}P$, причём $E\subset G$, т.е. область определения функции h содержит множество значений функции f на *D*. Тогда, если функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0, $z_0\in D$, и функция $h(w)$ непрерывна в точке $w_0=f(z_0)$, то *сложная функция* (*композиция* или *суперпозиция функций*) $H(z)=h\circ f(z)$, определяемая формулой $H(z)=h(f(z))$, непрерывна в точке z_0.

Непрерывность функции $f(x+iy)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ равносильна непрерывности

каждой из функций $u = u(x, y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$, $v = v(x, y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$ (как функций двух действительных переменных x, y) в точке (x_0, y_0).

Функция называется *непрерывной на множестве*, если она непрерывная в каждой точке этого множества.

Примерами непрерывных служат следующие функции:

а) $w = c = \mathrm{const}$, непрерывна всюду на $\overline{\mathbf{C}}$;

б) $w = z^n$, $n \in \mathrm{N}$, (обобщённо) непрерывна всюду на $\overline{\mathbf{C}}$;

в) $w = \operatorname{Re} z$, $w = \operatorname{Im} z$, $w = |z|$ (обобщённо) непрерывны всюду на $\overline{\mathbf{C}}$;

г) $w = \arg z$, непрерывна всюду на плоскости **С** с удалённым лучом $L^{-} = \{z: -\infty < \operatorname{Re} z \le 0, \ \operatorname{Im} z = 0\}$;

д) $w = 1/z$, непрерывна при $z \ne 0$. Эту функцию можно доопределить на всю расширенную плоскость $\overline{\mathbf{C}}$, положив $w(0) = \infty$, $w(\infty) = 0$. Доопределённая таким способом функция будет обобщённо непрерывной на $\overline{\mathbf{C}}$;

е) рациональная функция $w = P_n(z)/Q_m(z)$ – отношение двух многочленов от z указанных степеней n и m – непрерывна во всех точках плоскости **С**, не являющихся корнями (нулями) многочлена $Q_m(z)$. (Из алгебры известно, что многочлен $Q_m(z) = \ = q_m \cdot z^m + q_{m-1} \cdot z^{m-1} + \ldots + q_1 \cdot z + q_0$ степени $m \in \mathrm{N}$ с комплексными коэффициентами $q_0, \ q_1, \ \ldots, q_m$, $q_m \ne 0$, имеет на комплексной плоскости **С** ровно m корней с учётом их кратностей.)

Каждая из двух функций

1) $w_1(z) = \sqrt{|z|} \cdot \left(\cos\dfrac{\arg z}{2} + i\sin\dfrac{\arg z}{2} \right)$,

2) $w_2(z) = \sqrt{|z|} \cdot \left(\cos\dfrac{\arg z + 2\pi}{2} + i\sin\dfrac{\arg z + 2\pi}{2} \right) = -w_1(z)$

является непрерывной всюду на плоскости С с удалённым лучом $L^{-}=\{z:-\infty<\operatorname{Re} z\leq 0,\quad \operatorname{Im} z=0\}$ (*докажите самостоятельно*). Эти функции называют *ветвями* функции $w=\sqrt{z}$; выбор одной из двух ветвей функции $w=\sqrt{z}$ можно осуществить наложением условия $\sqrt{1}=+1$ (для ветви $w_1(z)$) или условия $\sqrt{1}=-1$ (для ветви $w_2(z)$). Аналогично можно говорить об n непрерывных на $\mathbf{C}\setminus L^{-}$ ветвях $w_k(z)=\sqrt[n]{|z|}\cdot e^{i(\arg z+2\pi k)/n}$ $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$ функции $w=\sqrt[n]{z}$, $n=3,\ 4,\ \ldots$

Функция комплексного переменного *f*, непрерывная на замкнутом ограниченном (*компактном*) множестве *B*, обладает (как и функция одного или нескольких действительных переменных) рядом особых свойств: она ограничена на *B* (т.е. $\exists M>0$: $|f(z)|\leq M$ для $\forall z\in B$), $|f(z)|$ достигает на *B* своего максимального и минимального значений и $f(z)$ является *равномерно непрерывной на B* (т.е.

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0:\quad |f(z')-f(z'')|<\varepsilon \quad \text{для}$$

$\forall z', z''\in B,\ |z'-z''|<\delta$).

2.4. Пути и кривые в комплексной плоскости. Жорданова кривая

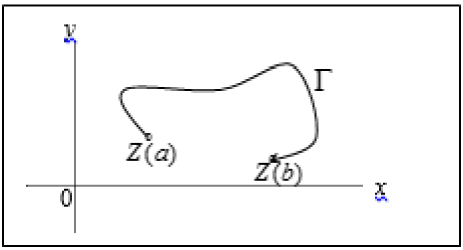


Рис.2.5

Путём называют обобщённо непрерывное отображение $z=Z(t)$ некоторого отрезка $[a,b]$ действительной оси в $\overline{\mathbf{C}}$: $Z:\ [a,b]\to\overline{\mathbf{C}}$. Положительное направление на пути устанавливается направлением движения точки $Z(t)$ при возрастании t

от a к b. Точку $Z(a)$ называют *началом*, точку $Z(b)$ – *концом* пути. Геометрическим образом пути является ориентированная (т.е. наделённая определённым порядком) совокупность Г всех точек $Z(t)$ плоскости $\overline{\mathbf{C}}$, получающихся, когда действительный параметр t пробегает весь отрезок $[a,b]$.

Переход от пути $\gamma : z = Z(t)$, $a \le t \le b$, к пути $z = Z(c-t)$, $c-b \le t \le c-a$, $c \in \mathrm{R}$, обозначаемому γ^- или $-\gamma$, называется *сменой направления* на γ. Множества точек, образующих γ и γ^-, совпадают, но положительные направления на них противоположны. Введённое понятие пути слишком общо для наших целей. Оно мало согласуется с интуитивными представлениями, поскольку, например, можно построить непрерывное отображение отрезка $[a,b]$ на квадрат. Дополнительными требованиями выделим среди путей те, которые обладают более наглядными свойствами.

Если отображение $Z:[a,b] \to \mathbf{C}(\overline{\mathbf{C}})$ непрерывное (обобщённо непрерывное) и взаимно однозначное, то путь $z = Z(t)$, $a \le t \le b$, называется *простым* или *жордановым* (*обобщённо жордановым*). Жорданов путь не имеет самопересечений. На рис.2.5 изображен жорданов путь.

Замкнутым жордановым (*замкнутым обобщённо жордановым*) *путём* называют непрерывное на $[a,b]$ и взаимно однозначное на $[a,b)$ отображение Z отрезка $[a,b]$ в $\mathbf{C}(\overline{\mathbf{C}})$ при условии, что $Z(a) = Z(b)$.

Жорданов (обобщённо жорданов) путь $z = Z(t)$, $a \le t \le b$, считается *гладким*, если существуют непрерывные производные действительных функций $x = X(t) = \operatorname{Re} Z(t)$, $y = Y(t) = \operatorname{Im} Z(t)$, не обращающиеся в нуль одновременно ни при каком $t \in [a,b]$ (понимаемые как односторонние при $t = a$, $t = b$), т.е. $Z'(t) = X'(t) + iY'(t) \ne 0$ для $\forall t \in [a,b]$; для замкнутого гладкого пути ещё предполагается, что $Z'(a+0) = Z'(b-0)$. Путь, составленный из конечного числа гладких путей, называют *кусочно-гладким*. Отметим, что всякий кусочно-гладкий путь *спрямляем*, т.е. имеет длину.

Два пути $z = Z_1(t),\ a \le t \le b$, и $z = Z_2(\tau),\ c \le \tau \le d$, считаются *эквивалентными* тогда и только тогда, если на $[a,b]$ существует непрерывная, строго монотонная функция $\tau = \tau(t)$, отображающая $[a,b]$ на $[c,d]$, и такая, что $Z_2(\tau(t)) = Z_1(t)$ для $\forall t \in [a,b]$.

Кривой называется множество всех эквивалентных путей. Каждый путь $z = Z(t),\ a \le t \le b$, представляющий данную кривую Г, можно рассматривать как один из способов параметризации Γ; кривая Γ изображается геометрически как множество точек $\{z : z = Z(t),\ a \le t \le b\}$, соответствующее любому из эквивалентных путей, представляющих данную кривую Г. При этом кривую, параметризуемую жордановым, гладким, кусочно-гладким и спрямляемым путём, естественно называть жордановой, гладкой, кусочно-гладкой и спрямляемой соответственно.

Отметим, что требование гладкости кривой Г равносильно требованиям существования касательной к кривой в каждой точке $z \in \Gamma$ и непрерывного вращения этой касательной при движении точки касания по Г.

Незамкнутую жорданову (обобщённо жорданову) кривую называют ещё *жордановой* (*обобщённо жордановой*) *дугой*.

Роль жордановых кривых раскрывается следующей теоремой.

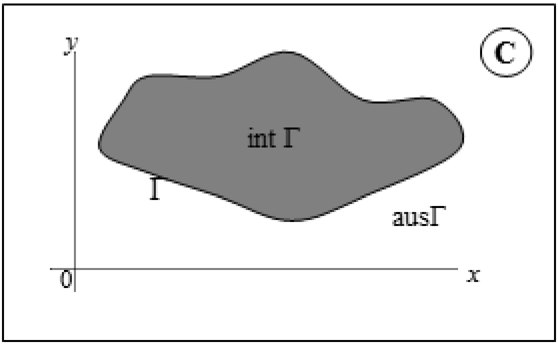


Рис.2.6

Теорема 2.1 (***Жордан***). *Замкнутая жорданова кривая* Г *делит* $\overline{\mathbf{C}}$ *на две односвязные области, имеющие* Г *общей гра-*

ницей; одна из этих областей ограничена (*называется* ***внутренностью*** Γ *и обозначается* $\operatorname{int}\Gamma$), *другая содержит точку* ∞ (*называется* ***внешностью*** Γ *и обозначается* $\operatorname{aus}\Gamma$) (см. рис.2.6). *Если* Γ *– простая дуга, то* $\overline{\mathbf{C}}\setminus\Gamma$ *– односвязная область*.

Односвязная область, имеющая в качестве своей границы замкнутую жорданову кривую, называется *жордановой областью*.

Изображённые на рис.2.6 области $\operatorname{int}\Gamma$ и $\operatorname{aus}\Gamma$ – жордановы.

Для замкнутой жордановой кривой, если не указана наперёд её параметризация, положительным направлением, по определению, считается то, при котором $\operatorname{int}\Gamma$ остаётся слева.

2.5. Показательная и логарифмическая функции

По аналогии с определением показательной (экспоненциальной) функции e^x действительного переменного x (вводимого с помощью так называемого *второго замечательного предела*) определим *экспоненциальную* (*показательную*) *функцию* КП, обозначаемую e^z или $\exp z$, равенством

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n, \quad z\in\mathbf{C}. \tag{2.2}$$

Покажем, что для $\forall z\in\mathbf{C}$ существует конечный предел в (2.2), и вычислим этот предел. При больших номерах n точка $w_n = 1+z/n$ лежит в окрестности точки 1, в правой полуплоскости $\{w : \operatorname{Re} w > 0\}$. Поэтому (см. задание 1.3, Повышенный уровень)

$$\arg w_n = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im} w_n}{\operatorname{Re} w_n} = \operatorname{arctg}\frac{y/n}{1+x/n} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x+n}\ .$$

При $n\to\infty$ имеем

$$\left|w_n^n\right| = \left|1+\frac{x+iy}{n}\right|^n = \left(1+\frac{2}{n}x+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{n/2} \to e^x$$

(в соответствии с формулой второго замечательного предела), и $\arg w_n^n$ с точностью до слагаемых, кратных 2π, совпадающий с величиной $\varphi_n = n \cdot \mathrm{arctg}(y/(x+n))$, представляет собой неопределённость $(\infty \cdot 0)$. Переводя эту неопределённость в неопределённость $(0/0)$ и разрешая последнюю (например, применением известного правила Лопиталя), получаем

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{arctg}(y/(x+n))}{1/n} = y.$$

Значит, $\cos\varphi_n \to \cos y$, $\sin\varphi_n \to \sin y$ при $n \to \infty$ и, следовательно, существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} w_n^n = \lim_{n\to\infty} \left(\left| w_n^n \right| \cdot (\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n \right) = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Итак, по определению

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y). \tag{2.3}$$

Сужение функции e^z на действительную прямую ($y = 0$) комплексной плоскости **C** совпадает с действительной функцией e^x.

При $x = 0$ из (2.3) получаем формулу Эйлера $e^{iy} = \cos y + i\sin y$, принятую ранее в качестве определения символа e^{iy} и получившую теперь должное обоснование.

Укажем некоторые свойства экспоненциальной функции e^z. Она определена и непрерывна всюду на **C**, не принимает нулевого значения, т.к. $\left| e^z \right| = e^x > 0$; функция периодическая с чисто мнимым периодом $2\pi i$:

$$e^{z+2\pi ik} = e^z, \quad k \in \mathrm{Z}.$$

Непосредственной проверкой доказывается свойство (*теорема сложения для показательной функции*):

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}.$$

Введём далее *логарифмическую функцию* $w = \mathrm{Ln} z$ как функцию, обратную к показательной:

$$\mathrm{Ln}z = w \Leftrightarrow z = e^w .$$

Получим формулу для величины $\mathrm{Ln}z$. Пусть $w = u + iv$ и $z \neq 0$. Тогда из равенства $z = e^u \cdot e^{iv}$, сравнивая модули левой и правой частей, имеем равенство $|z| = e^u$ и, следовательно, $u = \ln|z|$, сравнивая аргументы – равенство $\mathrm{Arg}z = v$. Итак,

$$\mathrm{Ln}z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}z . \qquad (2.4)$$

Как видно из этой формулы, функция $\mathrm{Ln}z$ определена при $\forall z \neq 0$, принимает при каждом фиксированном $z \in$ **C**, $z \neq 0$, бесконечное множество значений $\ln|z| + i\arg z + 2\pi ki$, $k \in \mathrm{Z}$. Одно из этих значений логарифма, равное $\ln|z| + i\arg z$, называют *главным значением логарифма* и обозначают $\ln z$:

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z . \qquad (2.5)$$

Таким образом, $\mathrm{Ln}z = \ln z + 2\pi ki$, $k \in \mathrm{Z}$.

Однозначная функция $w = \ln z$ определена всюду на $\mathbf{C} \setminus \{0\}$, непрерывна в области непрерывности функции $\arg z$ – на плоскости **C** с разрезом по отрицательной части действительной полуоси $\{z : \mathrm{Re}\, z \leq 0,\ \mathrm{Im}\, z = 0\}$. Её сужение на действительную положительную полуось $\{z : \mathrm{Re}\, z > 0,\ \mathrm{Im}\, z = 0\}$ совпадает с известной действительной логарифмической функцией $\ln x$.

Справедливы (при условии $z_1 \cdot z_2 \neq 0$) следующие свойства логарифма:

$$\mathrm{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Ln}z_1 + \mathrm{Ln}z_2 , \qquad (2.6)$$

$$\mathrm{Ln}(z_1 / z_2) = \mathrm{Ln}z_1 - \mathrm{Ln}z_2 . \qquad (2.7)$$

(Имея в виду, что логарифмическая функция $\mathrm{Ln}z$ – бесконечнозначная, *самостоятельно поясните* смысл равенств (2.6), (2.7) как равенств бесконечных множеств значений).

С помощью экспоненциальной и логарифмической функций КП вводятся общие *показательная* и *степенная* функции:

$$a^z = e^{z\mathrm{Ln}a} \quad (a \neq 0),$$

$$z^\alpha = e^{\alpha\mathrm{Ln}z},$$

где a и α – произвольно фиксированные комплексные постоянные.

2.6. Тригонометрические и гиперболические ФКП

По аналогии с формулами Эйлера (1.9) определим тригонометрические функции комплексного переменного $\cos z$ и $\sin z$ формулами:

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \qquad (2.8)$$

и функции $\mathrm{tg} z$ и $\mathrm{ctg} z$ – обычным образом:

$$\mathrm{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}, \quad \mathrm{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1}. \qquad (2.9)$$

Сужения функций $\sin z$, $\cos z$, $\mathrm{tg} z$ и $\mathrm{ctg} z$ на действительную ось ($y = 0$) совпадают с соответствующими действительными функциями действительного переменного (ФДП) x.

Выполняются (*проверить самостоятельно*) следующие свойства тригонометрических ФКП:

1) функции $\sin z$, $\cos z$ непрерывны всюду на **C**, периодичны с периодом 2π, не имеют других периодов;

2) $\sin z$, $\mathrm{tg} z$ и $\mathrm{ctg} z$ – нечётные, $\cos z$ – чётная функции;

3) $\mathrm{tg} z$ и $\mathrm{ctg} z$ – π-периодические функции;

4) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ для $\forall z \in$ **C**;

5) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 + \cos z_1 \cdot \sin z_2$;

6) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2$

и другие известные формулы тригонометрии, включая формулы приведения.

Наряду с тем, что одноимённые тригонометрические ФКП и ФДП имеют много общих свойств, у них имеются и существенные отличия. Так, функции $\sin z$, $\cos z$ не являются ограниченными на **C** (*проверить самостоятельно*).

Тесно связаны с тригонометрическими функциями так называемые гиперболические функции, вводимые следующими определениями: *гиперболический косинус*

$\mathrm{chz} = \dfrac{1}{2}(e^z + e^{-z})$, *гиперболический синус* $\mathrm{shz} = \dfrac{1}{2}(e^z - e^{-z})$, *гиперболический тангенс* $\mathrm{thz} = \mathrm{shz}/\mathrm{chz}$, *гиперболический котангенс* $\mathrm{cthz} = \mathrm{chz}/\mathrm{shz}$.

Определим функции *арккосинус* $w = \mathrm{Arc}\cos z$, *арксинус* $w = \mathrm{Arc}\sin z$, *арктангенс* $w = \mathrm{Arctgz}$ как функции, обратные соответственно к $z = \cos w$, $z = \sin w$, $z = \mathrm{tg}w$:

$$w = \mathrm{Arc}\cos z \Leftrightarrow \cos w = z;$$

$$w = \mathrm{Arc}\sin z \Leftrightarrow \sin w = z; \quad w = \mathrm{Arctgz} \Leftrightarrow \mathrm{tg}w = z.$$

Для функций *арккосинус гиперболический* $w = \mathrm{Arcchz}$ и *арксинус гиперболический* $w = \mathrm{Arcshz}$, обратных для функций $z = \mathrm{ch}w$ и $z = \mathrm{sh}w$ соответственно, справедливы равенства (*докажите самостоятельно*):

1) $\mathrm{Arcchz} = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$; 2) $\mathrm{Arcshz} = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$.

§ 3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

3.1. Дифференцируемость ФКП

Пусть однозначная функция $w = f(z)$ определена в области D, $D \subset \mathbf{C}$, и точка $z_0 \in D$. Пусть $\delta > 0$ таково, что δ-окрестность $U(z_0, \delta)$ точки z_0 принадлежит D и Δz, $0 < |\Delta z| < \delta$, – любое комплексное число. Разность $f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \Delta f(z_0)$ будем называть *приращением функции f в точке* z_0 (соответствующим приращению Δz независимого переменного).

Опр. 1. *Однозначная функция f называется* ***дифференцируемой в смысле*** **C** *или* ***моногенной в точке*** z_0, *если при любом достаточно малом* $|\Delta z|$ *приращение* $\Delta f(z_0)$ *функции f в точке* z_0 *может быть представлено в виде*

$$\Delta f(z_0) = A \cdot \Delta z + \eta(\Delta z) \cdot \Delta z, \tag{3.1}$$

где A *– конечное комплексное число, не зависящее от* Δz, $\eta(\Delta z) \to 0$ *при* $\Delta z \to 0$; *число A называется* ***производной функции*** *f* ***в точке*** z_0 *и обозначается* $f'(z_0)$.

Определение 1 эквивалентно следующему определению:

Опр. 2. *Однозначная функция f называется* ***дифференцируемой в смысле*** **C** (***моногенной***) ***в точке*** z_0, *если существует конечный предел*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = A; \tag{3.2}$$

число A называется ***производной функции*** *f* ***в точке*** z_0.

Операция взятия производной от моногенной функции называется *дифференцированием* функции.

Дифференциалом моногенной в точке z_0 функции *f* называется линейная относительно Δz часть приращения $\Delta f(z_0)$

функции f в точке z_0 и обозначатся $df(z_0)$:

$$df(z_0) = f'(z_0)\Delta z\,. \qquad (3.3)$$

Рассматривая моногенную в каждой точке плоскости **C** функцию $f(z)=z$, видим, что $dz = z'\cdot\Delta z = \Delta z$, поскольку $z'=1$. Ввиду этого дифференциалу $df(z_0)$ можно придать вид

$$df(z_0) = f'(z_0)dz\,. \qquad (3.4)$$

Такую форму дифференциала функции называют *инвариантной*. Из формулы (3.4) следует, что производная ФКП, как и производная ФДП, есть отношение дифференциала функции к дифференциалу независимого переменного, по которому берётся производная: $f'(z) = \dfrac{df(z)}{dz}$.

Если f моногенна в каждой точке z области D, то она называется моногенной в D, а функция f' называется *производной* от f на *D.*

Как обычно, будем называть второй производной от некоторой функции f производную от её производной, третьей производной – производную от второй производной и т.д.

Поскольку определения понятий дифференцируемости, дифференциала и производной ФКП вполне аналогичны соответствующим понятиям для ФДП, то ясно, что и свойства дифференциалов и производных и правила дифференцирования ФКП остаются формально такими же, как и для ФДП.

Укажем правила дифференцирования ФКП:

1. $(\text{const})' = 0$.

2. Если функция f моногенна в точке z, то функция $c\cdot f(z)$, c=const, также моногенна в точке z и $\left(c\cdot f(z)\right)' = c\cdot f'(z)$.

3. Если функции f и g моногенны в точке z, то функции $f\pm g$, $f\cdot g$, f/g (при $g(z)\neq 0$) также моногенны в точке z, причём

$$\left(f(z)\pm g(z)\right)' = f'(z)\pm g'(z)\,;$$

$$\left(f(z)\cdot g(z)\right)' = f'(z)\cdot g(z) + f(z)\cdot g'(z)\,;$$

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)\cdot g(z) - f(z)\cdot g'(z)}{g^2(z)}.$$

4. Пусть $f: D \xrightarrow{на} E$ и $h: G \xrightarrow{на} P$, причём $E \subset G$. Тогда, если функция $f(z)$ моногенна в точке z_0, $z_0 \in D$, и функция h моногенна в точке $w_0 = f(z_0)$, то *сложная функция* $H(z) = h \circ f(z)$, определяемая формулой $H(z) = h(f(z))$, моногенна в точке z_0, причём

$$H'(z) = h'(f(z_0))\cdot f'(z_0).$$

5. Пусть функция $f: D \xrightarrow{на} E$ однолистна в *D* и моногенна в точке z_0, $z_0 \in D$, причём $f'(z_0) \neq 0$. Тогда, если обратная к функции *f* функция f^{-1} непрерывна в точке $w_0 = f(z_0)$, то функция f^{-1} моногенна в точке w_0, причём

$$\left(f^{-1}(w)\right)'\Big|_{w=w_0} = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Правила 1 – 4 дифференцирования ФКП доказываются так же, как и для ФДП.

Докажем правило 5. Ввиду однолистности функции $z = f^{-1}(w)$ в *E* при $w \neq w_0$, $w \in E$, имеем $z = f^{-1}(w) \neq f^{-1}(w_0) = z_0$. Поэтому при $w \neq w_0$

$$\frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \frac{z - z_0}{w - w_0} = \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right)^{-1}$$

и так как $z = f^{-1}(w) \to f^{-1}(w_0)$ при $w \to w_0$ (ввиду непрерывности f^{-1} в точке w_0), то

$$\lim_{w\to w_0}\frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \left(\lim_{z\to z_0}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right)^{-1} = \frac{1}{f'(z_0)}.//$$

Замечание. Условие однолистности функции f в области D и условие $f'(z_0) \neq 0$, $z_0 \in D$, не являются независимыми. В дальнейшем будет показано, что второе вытекает из первого. С другой стороны, из условия $f'(z_0) \neq 0$ вытекает, что в некоторой окрестности точки z_0 функция f однолистна.

3.2. Критерий моногенности (теорема Коши – Римана)

Следующая теорема показывает, что при всех аналогиях между свойствами дифференцируемых ФКП и ФДП у них есть и глубокие различия. Причина этих различий в том, что условие моногенности функции предполагает существование предела отношения приращения функции $\Delta f(z_0) = f(z) - f(z_0)$ к приращению независимого переменного $\Delta z = z - z_0$ при устремлении z к z_0 любым способом (по любому направлению), в то время как условия частной дифференцируемости функции двух действительных переменных $f(x, y)$ по x или по y предполагает существование подобного предела при устремлении точки (x, y) к точке (x_0, y_0) лишь по прямой, параллельной той или иной координатной оси плоскости.

Теорема 3.1 (***Коши, Риман***). *Для того, чтобы функция* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, *определенная в области* $D, D \subset \mathbf{C}$, *была моногенна в точке* $z_0 \in D$, *необходимо и достаточно выполнение двух условий:*

1) функции $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ *и* $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$ *как функции двух действительных переменных* x, y *дифференцируемы в точке* $z_0 = (x_0, y_0)$;

2) в точке (x_0, y_0) *выполняются равенства*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (3.5)$$

Равенства (3.5) носят название: *условия Коши – Римана* (*Даламбера – Эйлера*).

Д. *Необходимость*. Так как *f* моногенна в точке z_0, то

$$\Delta f(z_0) = f'(z_0)\cdot\Delta z + \eta(\Delta z)\cdot\Delta z, \qquad (3.6)$$

где $\eta(\Delta z)\to 0$ при $\Delta z\to 0$. Обозначая $\operatorname{Re}\Delta f(z_0)=\Delta u$, $\operatorname{Im}\Delta f(z_0)=\Delta v$, $\operatorname{Re} f'(z_0)=a$,

$\operatorname{Im} f'(z_0)=b$, $\operatorname{Re}\eta(\Delta z)=\alpha$, $\operatorname{Im}\eta(\Delta z)=\beta$, $\operatorname{Re}\Delta z=\Delta x$, $\operatorname{Im}\Delta z=\Delta y$, отделением в (3.6) действительных и мнимых частей получаем

$$\Delta u = a\cdot\Delta x - b\cdot\Delta y + \alpha\cdot\Delta x - \beta\cdot\Delta y, \qquad (3.7)$$

$$\Delta v = b\cdot\Delta x + a\cdot\Delta y + \beta\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta y. \qquad (3.8)$$

При $\Delta z\to 0$ имеем $\alpha\to 0$, $\beta\to 0$. Поэтому равенства (3.7), (3.8) означают, что функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в точке $z_0=(x_0,y_0)$, а их частные производные в этой точке $\frac{\partial u}{\partial x}=a$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-b$, $\frac{\partial v}{\partial x}=b$, $\frac{\partial v}{\partial y}=a$ удовлетворяют условиям (3.5).

Достаточность. По условиям теоремы при достаточно малых $|\Delta x|$, $|\Delta y|$ приращения функций *u* и *v* в точке (x_0,y_0) допускают представления в виде

$$\Delta u = a\cdot\Delta x - b\cdot\Delta y + \varepsilon_1\cdot\Delta x + \varepsilon_2\cdot\Delta y, \qquad (3.9)$$

$$\Delta v = b\cdot\Delta x + a\cdot\Delta y + \varepsilon_3\cdot\Delta x + \varepsilon_4\cdot\Delta y, \qquad (3.10)$$

где $a = \dfrac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} = \dfrac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}$,

$b = \dfrac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x} = -\dfrac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}$, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4\to 0$ при

$|\Delta x + i\Delta y|\to 0$. Из (3.9), (3.10) для приращения

$\Delta f(z_0)=\Delta u + i\Delta v$ при $\Delta z = \Delta x + i\Delta y \neq 0$

получим

$$\Delta f(z_0) = a\cdot(\Delta x + i\Delta y) + ib\cdot(\Delta x + i\Delta y) + \Delta x(\varepsilon_1 + i\varepsilon_3) + \Delta y(\varepsilon_2 + i\varepsilon_4) =$$

$$=(a+ib)\Delta z+\eta\Delta z, \qquad (3.11)$$

где обозначено $\eta=(\varepsilon_1+i\varepsilon_3)\dfrac{\Delta x}{\Delta z}+(\varepsilon_2+i\varepsilon_4)\dfrac{\Delta y}{\Delta z}$. Так как

$$|\eta|\le|\varepsilon_1+i\varepsilon_3|\frac{|\Delta x|}{|\Delta z|}+|\varepsilon_2+i\varepsilon_4|\frac{|\Delta y|}{|\Delta z|}\le|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|+|\varepsilon_3|+|\varepsilon_4|,$$

то η вместе с ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 стремится к 0 при $\Delta z\to 0$. Последнее ввиду (3.11) означает, что f моногенна в точке z_0, причём

$$f'(z_0)=a+ib=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

(3.12)

Замечание. Для дифференцируемости функции нескольких действительных переменных достаточно, как известно, существования и непрерывности всех её частных производных первого порядка. Поэтому для моногенности функции $f=u+iv$ достаточно, чтобы частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ существовали, были непрерывными и удовлетворяли условиям Коши – Римана.

В качестве примера использования теоремы Коши – Римана исследуем на моногенность экспоненциальную функцию $f(z)=e^z$. Согласно (2.3) для функций $u=\operatorname{Re} f(x+iy)$, $v=\operatorname{Im} f(x+iy)$ имеем $u=e^x\cos y$, $v=e^x\sin y$. Эти функции непрерывно дифференцируемы на всей плоскости (x,y) и их частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y$ удовлетворяют условиям Коши – Римана $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ в каждой точке плоскости. Следовательно, функция e^z моногенна в каждой точке плоскости **C**.

Вычисляя производную этой функции согласно какой-либо из формул (3.12), получаем

$$(e^z)' = e^x(\cos y + i\sin y) = e^z .$$
(3.13)

Пусть $z = re^{i\varphi}$, $\operatorname{Re} f(re^{i\varphi}) = u(r,\varphi)$, $\operatorname{Im} f(re^{i\varphi}) = v(r,\varphi)$.

Используя формулы $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, связывающие декартовы и полярные координаты точки z комплексной плоскости, можно доказать (*докажите самостоятельно*), что в полярных координатах: а) условия Коши – Римана (3.5) равносильны условиям

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi};$$

б) формулы для производной $f'(z)$ приобретают вид

$$f'(z) = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right).$$

Замечание. Условия Коши – Римана допускают следующее обобщение. Пусть дана моногенная в точке z функция $f(z)$. Зададимся произвольными направлениями, характеризуемыми единичными векторами *s* и *n* (т.е. комплексными числами с единичным модулем) и такими, что поворот от *s* к *n* совершается на прямой угол против часовой стрелки (т.е. *n=is*). Пользуясь тем, что вычисление производной $f'(z)$ не зависит от направления, получаем, беря производные один раз в направлении *s*, а другой – в направлении *n*:

$$f'(z) = \frac{1}{s}\left(\frac{\partial u}{\partial s} + i\frac{\partial v}{\partial s}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial u}{\partial n} + i\frac{\partial v}{\partial n}\right),$$
(3.14)

где $\frac{\partial u}{\partial s}, \dots, \frac{\partial v}{\partial n}$ – производные от функций двух действительных переменных по соответствующим направлениям. Вывод равенств (3.14) аналогичен выводу формул (3.12). Подставляя *n*= $i\cdot s$ и сравнивая в (3.14) действительные и мнимые части, получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial v}{\partial n},\ \frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{\partial v}{\partial s}.$$

Эти условия и есть обобщённые условия Коши – Римана. Полагая в них, в частности, $s=1$, $n=i$, получаем условия (3.5).

3.3. Сопряжённые гармонические функции

Пусть функция $f(z)=u+iv$ моногенна в области *D* и пусть, кроме того, функции $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$ обладают непрерывными частными производными второго порядка по *x* и *y*. Тогда, дифференцируя первое из равенств (3.5) по x, а второе – по y, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}.$$

Складывая эти равенства и учитывая, что производные $\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$ в силу их непрерывности равны, найдём

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \qquad (3.15)$$

Аналогично получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

Опр. *Действительная функция $u(x,y)$, имеющая в области D непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяющая уравнению (3.15), называется* ***гармонической*** *в области D, а уравнение (3.15) –* ***уравнением Лапласа****.*

Уравнение Лапласа (3.15) принято записывать в виде $\Delta u=0$, где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – *оператор Лапласа.*

В теории функций комплексного переменного доказывается (см. [1, 4, 6, 9]) замечательное свойство моногенных функций, заключающееся в том, что моногенная в области *D* функция имеет производные любого порядка в каждой точке этой области и, следовательно, её действи- тельная и мнимая части

$u(x,y)$ и $v(x,y)$ являются гармоническими функциями в области *D,* причём эти гармонические функции, в свою очередь, имеют производные по *x* и по *y* любого порядка, которые являются также гармоническими в области *D*.

Гармонические функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$, связанные между собой условиями Ко-ши – Римана (3.5), называются *сопряжёнными*. Таким образом, действительная и мнимая части дифференцируемой (в смысле **C**) в области функции являются в этой области сопряжёнными гармоническими функциями.

Обратно, если в области D даны две сопряжённые гармонические функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$, то, согласно теореме 3.1, функция $f(z)=u+iv$ моногенна в области D. Таким образом, для моногенности функции $f=u+iv$ в области D необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ были сопряжёнными гармоническими в этой области.

Если известна одна из функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$, то в односвязной области D можно найти другую функцию с точностью до произвольного постоянного.

В самом деле, ввиду гармоничности функции $u(x,y)$ всюду в D выполняется равенство

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

и, следовательно, выражение $-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy$ является полным дифференциалом некоторой однозначной функции $v(x,y)$, определяемой с точностью до произвольного постоянного слагаемого c формулой (см. [5], т. 2)

$$v(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+c\,, \qquad (3.16)$$

где (x_0,y_0) – произвольно фиксированная точка в D и $(x,y)\in D$. Интеграл в (3.16) не зависит от кривой, соединяющей в области D точки (x_0,y_0) и (x,y), а зависит лишь от точки (x,y).

Из (3.16), используя свойства криволинейных интегралов, имеем

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_{z}^{z+\Delta x}-\frac{\partial u}{\partial y}dx=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

(можно брать интеграл от z до $z+\Delta x$ по горизонтальному отрезку, на котором $dy=0$); аналогично, $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}$. Следовательно, $v(x,y)$ – гармоническая в D функция, сопряжённая с $u(x,y)$.

Итак, по заданной действительной гармонической функции $u(x,y)$ (или $v(x,y)$) в односвязной области D можно восстановить моногенную функцию $f(z)=u+iv$ с точностью до постоянного слагаемого.

Замечание. Если область D многосвязная, то функция $v(x,y)$, определяемая формулой (3.16), а также функция $f(z)=u+iv$ могут оказаться неоднозначными (подробнее об этом см. в [6, 9]).

3.4. Различные формы дифференциала функции

Пусть функция $f=u+iv$ моногенна в точке *z* области *D*, $D\subset \mathbf{C}$. Тогда в этой точке существует дифференциал

$$df=f'(z)dz=f'(z)(dx+idy),$$

причём, как показано выше, величина производной $f'(z)$ может быть найдена по любой из формул (3.12). Учитывая ещё, что в точке *z* выполняются условия Коши – Римана (3.5), получим

$$df=\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)=du+idv \quad (3.17)$$

или, группируя в (3.17) слагаемые по-другому,

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy, \quad (3.18)$$

где $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial y}+i\dfrac{\partial v}{\partial y}$ – производные от комплексной функции по действительным переменным.

Дадим ещё одну форму записи для дифференциала df. Рассмотрим наряду с переменным $z=x+iy$ переменное $\bar{z}=x-iy$ и обозначим $d\bar{z}=dx-idy$. Выражая dx и dy через $dz=dx+idy$ и $d\bar{z}=dx-idy$, найдём

$$dx=\frac{1}{2}(dz+d\bar{z}),\quad dy=\frac{1}{2i}(dz-d\bar{z})$$

и подставим эти значения в (3.18). Получим

$$df=\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}, \qquad (3.19)$$

где операции взятия формальных частных производных $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ определены следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right), \qquad (3.20)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right). \qquad (3.21)$$

Согласно (3.21) заключаем, что одно комплексное равенство

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0 \qquad (3.22)$$

эквивалентно двум условиям Коши – Римана (3.5). С учётом (3.22) перепишем (3.19) в виде $df=\dfrac{\partial f}{\partial z}dz$. Отсюда видно, что производная $f'(z)=\dfrac{df(z)}{dz}$ моногенной в точке z функции f допускает представление в виде $f'(z)=\dfrac{\partial f(z)}{\partial z}$.

Пусть действительные функции $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$

дифференцируемы в точке $z=(x,y)$. Понимая под дифференциалом функции $f=u+iv$ величину $df=du+idv$, *докажите самостоятельно*, что дифференциал df в точке $z=(x,y)$ можно представить в виде (3.19), где формальные производные $\dfrac{\partial f}{\partial z}$, $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ определяются формулами (3.20), (3.21).

3.5. Голоморфные функции

Опр. *Функция f называется* ***голоморфной*** **(*регулярной*)** ***в точке*** $z_0 \in \mathbf{C}$, *если f моногенна в некоторой* ε*-окрестности точки* z_0. *Функция f называется* ***голоморфной в точке*** $z_0=\infty$, *если функция* $f(1/\zeta)$ *голоморфна в точке* $\zeta=0$.

Функция *f* называется *голоморфной* на множестве (в частности, в области), если *f* голоморфна в каждой точке этого множества. Исходя из этого определения, отметим, что голоморфность *f* в замыкании какой-либо области *D* означает, что *f* голоморфна в некоторой области *B*, содержащей $\overline{D}$. Наряду с термином «голоморфная функция» широко используются названия *регулярная функция, аналитическая функция*.

Функция называется *целой*, если она голоморфна на **C**. Примерами целых функций являются функции const, e^z, z^n при любом $n \in \mathrm{N}$, многочлен от *z*, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$. Функция $1/z$ голоморфна всюду в $\overline{\mathbf{C}} \setminus \{0\}$. Функция $\ln z$ голоморфна всюду в плоскости **C** с удалённой отрицательной частью действительной оси. *Дробно-линейная функция* $(az+b)/(cz+d)$, где a, b, c, d – комплексные постоянные, голоморфна всюду в $\overline{\mathbf{C}} \setminus \{-d/c\}$ (при $c \neq 0$). Рациональная функция $P_n(z)/Q_m(z)$, где $P_n(z)$, $Q_m(z)$ – многочлены от *z* указанных степеней *n* и *m*, голоморфна во всей плоскости **C** с удалёнными корнями многочлена $Q_m(z)$, т.е. точками *z*, в которых выполняется $Q_m(z)=0$. Каждая ветвь двузначной функции $\sqrt{z}$ голоморфна в плоскости **C** с разрезом по любому лучу, выходящему из начала. Функция

$\mathrm{tg}z$ голоморфна во всех точках $z \neq \pi/2 + \pi k$; функция $\mathrm{ctg}z$ голоморфна во всех точках $z \neq \pi k$, $k \in \mathrm{Z}$.

3.6. Мероморфные и аналитические функции

Пусть функция $w = f(z)$ определена в области *D*, $D \subset \mathbf{C}$. Точка $z_0 \in D$ называется *нулём функции f*, если $f(z_0) = 0$. Число $m \in \mathrm{N}$ называется *кратностью* (*порядком*) нуля z_0 функции *f*, голоморфной в точке z_0, если $f(z_0) = f'(z_0) = ... = f^{(m-1)}(z_0) = 0$, а $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. Нуль кратности $m = 1$ называется *простым*. Например, точка $z = 0$ является для функции $\sin z - z$ нулём кратности 3, а точки $z = \pi k$, $k \in \mathrm{Z}$, для функции $\sin z$ – простыми нулями.

Пусть *f* голоморфна в бесконечности и $f(\infty) = 0$. Тогда, если $f \neq \mathrm{const}$, то функция $\varphi(z) = f(1/z)$ голоморфна в нуле. Условимся считать, что $z = \infty$ является нулём порядка m, $m \in \mathrm{N}$, функции *f*, если m – кратность нуля $z = 0$ функции $\varphi(z) = f(1/z)$. Например, в бесконечности функция $1/z^2$ имеет нуль второго порядка, а функция $\mathrm{tg}(1/z)$ – простой нуль.

Точку $z_0 \in D$, $D \subset \overline{\mathbf{C}}$, называют *полюсом порядка m*, $m \in \mathrm{N}$, (*простым полюсом* при *m*=1) функции *f*, если z_0 – нуль порядка *m* для функции 1/*f*(*z*). Например, точка $z = -d/c$ является простым полюсом дробно-линейной функции $(az + b)/(cz + d)$ при условии $ad \neq bc$, точка *z*=0 – полюсом четвёртого порядка для функции $\mathrm{ctg}^4 z$, а точка $z = \infty$ – полюсом второго порядка для функции $1 + z^2$. В полюсе значение функции считается равным бесконечности.

Функция *f*, голоморфная в области *D*, за исключением точек, в которых *f* имеет полюсы, называется *мероморфной* в *D*. Мероморфная во всей плоскости функция называется просто *мероморфной*.

К числу мероморфных в области *D* функций относятся отношения двух функций, голоморфных в *D*, к числу мероморфных

– постоянные и целые функции (вообще не имеющие полюсов в **C**), рациональные функции, частное от деления целой функции на целую функцию. Произведение конечного числа мероморфных функций – также мероморфная функция.

Часто *аналитическими* в области *D* называют как голоморфные, так и мероморфные в этой области функции. В этом случае голоморфные функции называют также *регулярными аналитическими* или просто *регулярными.*

ЗАДАНИЯ

I. Базовый уровень

Задание 1. Найти действительные числа x и y из уравнения:

1. $x+y+(x-2y)=3(1-i)$;
2. $x^2+2+(-x+y)i=-3x+2i$;
3. $|x+1|+(x+y)i=1+i$;
4. $x^3+(y^3+2x)i=1+3i$;
5. $\ln(x+y)+(2x-y)i=5i$;
6. $2^{x+y}+(2x-y)i=1+3i$;
7. $2x-y-(3x-y)i=\left|1+i\sqrt{2}\right|$;
8. $\sin(x+y)+(2x+y)i=\pi$;
9. $x^4-16y^4+(x+y)i=3i$;
10. $\lg(x+y)+ie^{x-y}=1+i$;
11. $3xi-(10x+2yi)=7-i$;
12. $(x-yi)^2-(x+2yi)^2=3(1+2i)$.

Задание 2. Вычислить:

1. $(1+3i)(2-i^9)^2+\dfrac{10+5i}{1+2i}$;
2. $(6i+9i^{15}-17i^{80})(1-i)^2+\dfrac{2i}{3-i}$;
3. $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot\ldots\cdot i^{100}+\dfrac{2}{1-i}-1-i$;
4. $i+i^2+i^3+\ldots+i^{100}+\dfrac{2}{1+i}-1+i$;
5. $\begin{vmatrix} 3+i^5 & 4-2i \\ i^{83} & i^4-i^3 \end{vmatrix}+\dfrac{25i}{3+4i}$;

6. $\dfrac{(i^3+i^4+\ldots+i^{12})(7-8i)}{(2-3i)^2}$;

7. $(i+i^2+i^3+\ldots+i^{11})(5-i)+\dfrac{2i+5}{(3i-1)^2}$;

8. $(2+i^{27})(1+i)-\dfrac{2}{i}+\dfrac{3}{i^3}$;

9. $\begin{vmatrix} i & -123 & 321 \\ 0 & 1-2i & 53^8 \\ 0 & 0 & 1+2i \end{vmatrix}$;

10. $\begin{vmatrix} 0 & -i^9 & 2-i \\ i & 1-2i & 5 \\ 0 & 1 & 1+2i \end{vmatrix}$;

11. $10i-\dfrac{i^7+5i^{19}}{(3+4i)(2+i)^2}$;

12. $\dfrac{9+8i^{-3}-6i^8}{(i+4)^2-2i^{-15}}$.

Задание 3. Найти z из уравнения. Указать $\overline{z}$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$. Записать корни z в тригонометрической форме и изобразить их на комплексной плоскости:

1. $z^3-2z^2+2z=0$;
2. $(2+i)z=2+\sqrt{3}+(1-2\sqrt{3})i$;
3. $\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{\overline{z}}=z+\overline{z}-6i$;
4. $z\cdot\overline{z}+(z-\overline{z})=25-18i$;
5. $|z-1|+z-\overline{z}=1+2i$;
6. $z^3-z^2+z-1=0$;
7. $z^4+8z^2-9=0$;

8. $z+\bar{z}+i(z-2)=4+i;$
9. $z=\bar{z}^2;$
10. $z^6-9z^3+8=0;$
11. $|z|-z=3+2i;$
12. $z^2+i=0.$

Задание 4. Представить комплексное число в тригонометрической и показательной форме:

1. $\sqrt{3}+i;$
2. $\cos\frac{5\pi}{4}-i\sin\frac{5\pi}{4};$
3. $\sin\pi+i\cos\pi;$
4. $1+i\sqrt{3};$
5. $-2(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5});$
6. $-2+2i;$
7. $-2i;$
8. $\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{3\pi}{2};$
9. $e^{\frac{\pi}{5}i-\ln 3};$
10. $4(\cos\frac{\pi}{7}-i\sin\frac{\pi}{7});$
11. $5(\cos\pi-i\sin\pi);$
12. $3(\cos\frac{9\pi}{2}-i\sin\frac{9\pi}{2}).$

Задание 5. Вычислить, переходя к тригонометрической или показательной форме:

1. $\dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)^{10}}{2-2i};$

2. $\dfrac{i^{-17}}{\left(\sin\dfrac{4\pi}{3}-i\cos\dfrac{4\pi}{3}\right)^8}$;

3. $\dfrac{\left(i^{43}-i^{44}\right)}{\left(\cos\dfrac{\pi}{3}-i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^7}$;

4. $\dfrac{(1+i)^6}{(1-i)^6}$;

5. $\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}\right)^{20}}{i^{81}-i^{35}}$;

6. $\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{i}\right)^{12}}{\left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^9}$;

7. $\dfrac{\left(-\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^{-3}}{(1-i)^5}$;

8. $\dfrac{\left(i^{12}-i^{51}\right)^9}{(2+2i)^7}$;

9. $\dfrac{\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^{13}}{\left(2-2i^{13}\right)^{10}}$;

10. $\dfrac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^9}{128e^{\frac{-\pi}{6}i}}$;

11. $\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}\right)^{20}}{\left(i^{81}-i^{35}+2\right)}$;

12. $\dfrac{(2+2i)^7}{\left(\sqrt{3}-i\right)}$.

Задание 6. Найти все значения корня и построить их на комплексной плоскости:

1. $\sqrt[5]{-32}$;
2. $\sqrt[3]{27i}$;
3. $\sqrt[3]{-2+2i}$;
4. $\sqrt[4]{\sqrt{3}-i}$;
5. $\sqrt[4]{-16}$;
6. $\sqrt[6]{-64}$;
7. $\sqrt[3]{1-i\sqrt{3}}$;
8. $\sqrt[4]{-1-i}$;
9. $\sqrt[6]{-64i}$;
10. $\sqrt{4i}$;
11. $\sqrt{\sqrt{3}-i}$;
12. $\sqrt{1+i\sqrt{3}}$.

Задание 7. Для отображения $w=f(z)$ найти образ точки z_0:

1. $f(z)=z^2+z,\quad z_0=1+i$;
2. $f(z)=\sqrt{z^2-1},\quad z_0=1-i$;
3. $f(z)=\mathrm{Ln}\,z,\quad z_0=-1$;
4. $f(z)=\cos z,\quad z_0=2-i$;
5. $f(z)=\mathrm{tg}\,z,\quad z_0=-i\pi$;
6. $f(z)=\ln\bar{z},\quad z_0=1-i$;
7. $f(z)=\mathrm{sh}\,z,\quad z_0=2+3i$;
8. $f(z)=e^{iz},\quad z_0=\dfrac{\pi}{6}-i$;

9. $f(z) = \sin z, \quad z_0 = -i\pi;$

10. $f(z) = z \cdot \overline{z} - \dfrac{1}{z}, \quad z_0 = 2 - 3i;$

11. $f(z) = \mathrm{Ln}(2z), \quad z_0 = -1 - i;$

12. $f(z) = \dfrac{z}{z - i}, \quad z_0 = 3 - 2i.$

Задание 8. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условию:

1. $|z - 3 + 2i| \le 1;$
2. $|z + i| + |z - i| \ge 2\sqrt{5};$
3. $|z - 1| > |z - i|;$
4. $2 \le |z - 2i| < 3;$
5. $2 \le |z - 2i| < 3;$
6. $0 \le \mathrm{Im}\, z < 4;$
7. $-3 < \mathrm{Re}\, z < 2;$
8. $\dfrac{\pi}{4} < \arg(z - 2i) < \dfrac{\pi}{3};$
9. $-\dfrac{\pi}{2} \le \arg z < 0;$
10. $|z| > 2 - \mathrm{Im}\, z;$
11. $\begin{cases} 1 < |z| < 2, \\ 0 \le \arg z \le \pi \end{cases};$
12. $\mathrm{Re}\dfrac{1}{z} < \dfrac{1}{2}.$

Задание 9. Проверить дифференцируемость функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, указать её область аналитичности и найти $f'(z_0)$:

1. $u = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2), \quad v = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad z_0 = -i;$

2. $u = e^x\left(x\cos y - y\sin y\right), \quad v = e^x\left(y\cos y + x\sin y\right), \quad z_0 = i\pi;$

3. $u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad z_0 = -1;$

4. $u = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad z_0 = -2i;$

5. $u = \frac{x}{\sqrt[4]{x^2 + y^2}}, \quad v = \frac{y}{\sqrt[4]{x^2 + y^2}}, \quad z_0 = 4;$

6. $u = x^4 - 6x^2y^2 + y^4, \quad v = 4x^3y - 4xy^3, \quad z_0 = 2i;$

7. $u = \frac{1}{2}x\ln\left(x^2 + y^2\right) - y\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad v = x\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{y}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right), \quad z_0 = i;$

8. $u = e^{2x}\sin 2y, \quad v = e^{2x}\left(\sin^2 y - \cos^2 y\right), \quad z_0 = -\frac{i\pi}{2};$

9. $u = \operatorname{ch} x\cos y, \quad v = \operatorname{sh} x\sin y, \quad z_0 = i\pi;$

10. $u = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad v = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right), \quad z_0 = \frac{i}{2};$

11. $u = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad v = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad z_0 = -i;$

12. $u = 10x^2y^3 - 5x^4y - y^5, \quad v = x^5 + 5xy^4 - 10x^3y^2, \quad z_0 = -2i.$

II. Повышенный уровень

Задание 1.

1. Является ли множество комплексных чисел **C** упорядоченным?

2. Проверить равенства: 1) $z+\bar{z}=2\operatorname{Re} z$; 2) $z-\bar{z}=2i\operatorname{Im} z$;

3) $\overline{(z_1+z_2)}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$; 4) $\overline{(z_1\cdot z_2)}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$; 5) $\overline{(z_1/z_2)}=\bar{z}_1/\bar{z}_2$ при $z_2\neq 0$.

3. Докажите, что

$$\arg(x+iy)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x>0,\\ \pi/2, & x=0,\ y>0,\\ -\pi/2, & x=0,\ y<0,\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0,\ y\geq 0,\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0,\ y<0.\end{cases}$$

4. Докажите для $\forall z_k\in C$ $(k=1,2,\ldots,n)$: 1) $|z_1-z_2|\geq\big||z_1|-|z_2|\big|$; 2) $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|\leq\sum_{k=1}^{n}|z_k|$.

5. Докажите, что для $\forall z_1,\ldots,z_n,\zeta_1,\ldots,\zeta_n\in C$ имеет место неравенство (*Коши–Буняковского*)

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\cdot\zeta_k\right|^2\leq\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\cdot\sum_{k=1}^{n}|\zeta_k|^2.$$

6. Используя формулы Муавра и бинома Ньютона, докажите (для $\forall n\in N$):

$$\cos n\varphi=\sum_{m=0}^{[n/2]}(-1)^m C_n^{2m}\sin^{2m}\varphi\cdot\cos^{n-2m}\varphi,$$

$$\sin n\varphi = \sum_{m=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^m C_n^{2m+1} \sin^{2m+1}\varphi \cdot \cos^{n-2m-1}\varphi,$$

где

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$$

($k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$)

– биномиальный коэффициент, $C_n^0 = 1$, а символом $[x]$ обозначена целая часть действительного числа x, т.е. ближайшее к x целое число, не превосходящее x.

7. Проверьте верность формул: $e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}$, $e^{i\varphi} / e^{i\psi} = e^{i(\varphi-\psi)}$.

8. *Сферическим расстоянием* между двумя точками z_1 и z_2 из $\overline{\mathrm{C}}$ называется расстояние $\rho(z_1, z_2)$ (в пространстве $\mathbf{R}^3$) между образами этих точек на сфере Римана. Докажите формулу $\rho(z_1, z_2) = \dfrac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2} \cdot \sqrt{1+|z_2|^2}}$, $z_1,\ z_2 \in \mathbf{C}$; убедитесь, что эту формулу можно распространить на всю расширенную плоскость $\overline{\mathbf{C}}$, положив $\rho(z, \infty) = \dfrac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}$, $z \in \mathbf{C}$; $\rho(\infty, \infty) = 0$. Проверьте, что метрика в $\overline{\mathbf{C}}$, определяемая полученными формулами для $\rho(z_1, z_2)$, удовлетворяет *аксиомам:*

а) *тождества* ($\rho(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow (z_1 = z_2)$);

б) *симметрии* ($\rho(z_1, z_2) = \rho(z_2, z_1)$);

в) *треугольника* ($\rho(z_1, z_2) \le \rho(z_1, z_3) + \rho(z_3, z_2)$)

и, следовательно, превращает $\overline{\mathbf{C}}$ в *метрическое пространство*.

9. Что происходит со стереографической проекцией точки z, когда $|z|$ неограниченно возрастает? Как изменяется положение точки z относительно начала координат, когда её стереографическая проекция приближается к «северному полюсу» сферы S?

10. Убедитесь, что любой прямой или окружности на плоскости **C** при стереографическом проецировании на сфере Римана соответствует окружность.

Задание 2.

1. Докажите, что множество *F* замкнуто, если его дополнение до **C** является открытым, и обратно. Докажите также, что объединение $\bigcup_{k=1}^{n} F_k$ любого конечного числа и пересечение $\bigcap_{\alpha} F_\alpha$ любого (конечного или бесконечного) множества замкнутых множеств замкнуто.

2. Приведите пример пары множеств K и M, $\mathrm{K} \cap \mathrm{M} = \varnothing$, для которых расстояние $d(\mathrm{K}, \mathrm{M}) = 0$.

3. Найдите образ области $D = \{z : |z| < 2,\ -\pi/4 < \arg z < \pi/4\}$ при отображении функцией $w = z^2$.

4. Найдите образы прямых $v = c = \mathrm{const}$ при отображении $w = 1/z$. Убедитесь, что углы, под которыми пересекаются образы двух взаимно перпендикулярных прямых $u = \mathrm{const}$ и $v = \mathrm{const}$, – прямые.

5. Докажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |z_0|$. Существуют ли такие точки $z_0 \in \overline{\mathbf{C}}$, для которых верны следующие утверждения:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \arg z_n \neq \arg z_0$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |z_0| \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$?

6. Докажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = \rho_0$ ($\rho_n \geq 0,\ n = 1,2,\ldots$) и $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi_0$ ($\varphi_n \in \mathbf{R}, n = 1,2,\ldots$), то $\lim\limits_{n\to\infty} (\rho_n \cdot e^{i\varphi_n}) = \rho_0 \cdot e^{i\varphi_0}$.

7. Сформулируйте «на языке последовательностей» (по Гейне) и «на языке $\varepsilon - \delta$» (по Коши) понятие бесконечного предела ФКП в бесконечности: $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$.

8. Докажите, что если $\lim\limits_{z\to z_0} [f(z) \cdot g(z)] \neq 0$ и

$\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = 0$, то $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

9. Рассмотрите два пути $z = t$, $-1 \le t \le 1$, и $z = \cos\tau$, $0 \le \tau \le \pi$. Являются ли эти пути: а) жордановыми; б) эквивалентными друг другу?

10. Докажите, что функция $w = e^z$ однолистна в любой полосе $D_a = \{z : a < \operatorname{Im} z < a + 2\pi\}$, $a \in \mathbf{R}$, отображает D_a на всю плоскость $\mathbf{C}_w$ с разрезом по

отрицательной части действительной оси. Найдите образы прямых $\{z : \operatorname{Im} z = \mathrm{const}\}$ и отрезков прямых $\{z : \operatorname{Re} z = \mathrm{const}\}$, лежащих в D_a, при отображении $w = e^z$.

11. Докажите, что при *гомеоморфном* (взаимно однозначном и взаимно непрерывном) отображении образом открытого множества является открытое множество.

12. Докажите, что при непрерывном отображении образом компактного множества является компактное множество, образом связного множества – связное множество.

Задание 3.

1. Найдите все значения степенно-показательной функции z^z при $z = i$.

2. Докажите, что для $\forall \alpha \in \mathbf{C}$, $\forall \beta \in \mathbf{C}$, $\forall z \in \mathbf{C}$, $z \ne 0$, выполняется:

$$(e^{i\alpha})^\beta = e^{i\alpha\beta}; \qquad z^\alpha \cdot z^\beta = z^{\alpha+\beta},$$

$\operatorname{Ln}(z^\alpha) = \alpha \operatorname{Ln} z$.

3. Убедитесь, что уравнение $\sin z = 2$ имеет на **C** бесконечное множество решений, и найдите все эти решения.

4. Выразите действительные и мнимые части функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ комплексного переменного z через тригонометрические и гиперболические функции действительных переменных $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

5. Докажите, что функция $w = (z + 1/z)/2$ (*функция Жуковского*): а) однолистна в областях $\{z : |z| < 1\}$, $\{z : |z| > 1\}$, но не является однолистной на множествах $\{z : |z| = 1\}$, $\{z : |z| \ne 1\}$; б) однолистна в области *D* тогда и только тогда, если *D* не содержит никакой пары точек z_1, z_2, для которых $z_1 \cdot z_2 = 1$. Найдите образ окружности $\{z : |z| = r\}$, $0 < r < 1$, при отображении функцией Жуковского. Убедитесь, что каждая из областей $\{z : |z| < 1\}$, $\{z : |z| > 1\}$ отображается функцией Жуковского на область $C \setminus \{w : -1 \le \operatorname{Re} w \le 1,\ \operatorname{Im} w = 0\}$.

6. Установите области однолистности функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$. (*Указание*: воспользуйтесь результатом предыдущего упражнения.)

7. Докажите формулы:

1) $\operatorname{ch} z = \cos(iz)$; 2) $\operatorname{sh} z = -i\sin(iz)$; 3) $\operatorname{th} z = -i\operatorname{tg}(iz)$; 4) $\operatorname{cth} z = i\operatorname{ctg}(iz)$;

5) $\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \cdot \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \cdot \operatorname{sh} z_2$;

6) $\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \cdot \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \cdot \operatorname{sh} z_2$;

7) $\operatorname{th}(z_1 + z_2) = \dfrac{\operatorname{th} z_1 + \operatorname{th} z_2}{1 + \operatorname{th} z_1 \operatorname{th} z_2}$; 8) $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$ для $\forall z \in C$.

8. Используя формулы (2.8), (2.9), докажите формулы:

1) $\operatorname{Arc}\cos z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$;

2) $\operatorname{Arc}\sin z = -i\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$;

3) $\operatorname{Arctg} z = \dfrac{1}{2i}\operatorname{Ln}\dfrac{1 + iz}{1 - iz}$;

4) $\operatorname{Arcctg} z = \dfrac{1}{2i}\operatorname{Ln}\dfrac{iz - 1}{iz + 1}$.

9. Докажите тождества:

1) $e^{z+2\pi i} = e^z$, $\cos(z + 2\pi) = \cos z$, $\sin(z + 2\pi) = \sin z$;

2) $\operatorname{tg}\left(z + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} z$, $\operatorname{ctg}\left(z + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg} z$;

3) $\operatorname{ch}(z + 2\pi i) = \operatorname{ch} z$, $\operatorname{ch}(z + \pi i) = -\operatorname{ch} z$, $\operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch} z$;

4)
$$\operatorname{sh}(z+2\pi i)=\operatorname{sh} z, \quad \operatorname{sh}(z+\pi i)=-\operatorname{sh} z, \quad \operatorname{sh}(-z)=-\operatorname{sh} z;$$

5) $\operatorname{Ln} z^n = n\operatorname{Ln} z + 2\pi k, \qquad k \in \mathbf{Z};$

6) $(\operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z)^n = \operatorname{ch} nz + \operatorname{sh} nz;$

7) $\operatorname{tg}(iz) = i\operatorname{th} z, \qquad \operatorname{ctg}(iz) = -i\operatorname{cth} z;$

8) $\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Arcsh}(iz), \qquad \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Arcch} z;$

9) $\operatorname{Arcth} z = -i\operatorname{Arcctg}(iz), \qquad \operatorname{Arcth} z = \dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{1+z}{1-z};$

10) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \qquad \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$

Задание 4.

1) Докажите, что моногенная в точке z_0 функция непрерывна в точке z_0.

2) Найдите все точки *z*, в которых моногенны функции: $\operatorname{Re} z$, $|z|^2$, z^n ($n \in$ N), $1/z$. Там, где это возможно, определите производные указанных функций.

3) Докажите, что функция $\ln z$ моногенна в каждой точке z плоскости **C** с разрезом по отрицательной части действительной оси.

4) С помощью теоремы Коши – Римана исследуйте на моногенность функции: $\operatorname{Re} z$, $|z|^2$, z^n ($n \in$ N), $1/z$. Там, где возможно, определите производные указанных функций.

5) Применяя правило дифференцирования обратной функции и формулу (3.13), докажите, что функция $\ln z$ моногенна в области $\mathbf{C} \setminus L^-$, $L^- = \{z : \operatorname{Re} z \le 0, \ \operatorname{Im} z = 0\}$, и $(\ln z)' = 1/z$.

6) Используя формулу (3.13), определения тригонометрических, гиперболических, общих показательной и степенной ФКП и подходящие правила дифференцирования, выведите формулы:

$$(\sin z)' = \cos z, \ (\cos z)' = -\sin z, \ (\operatorname{tg} z)' = 1/\cos^2 z, \ (\operatorname{ctg} z)' = -1/\sin^2 z,$$

$$(\mathrm{sh}z)' = \mathrm{ch}z,\ (\mathrm{ch}z)' = \mathrm{sh}z,\ (\mathrm{th}z)' = 1/\mathrm{ch}^2 z,\ (\mathrm{cth}z)' = -1/\mathrm{sh}^2 z,$$

$$(a^z)' = a^z \cdot \mathrm{Ln}a\ (a \neq 0),\ (z^\alpha)' = \alpha \cdot z^{\alpha-1}.$$

7) Исследуйте на моногенность функции $\mathrm{Arc}\sin z$, $\mathrm{Arc}\cos z$, $\mathrm{Arc}\,\mathrm{tg}\, z$, $\mathrm{Arc}\,\mathrm{ctg}\, z$, $\mathrm{Arc}\,\mathrm{sh}\, z$, $\mathrm{Arc}\,\mathrm{ch}\, z$, $\mathrm{Arc}\,\mathrm{th}\, z$, $\mathrm{Arc}\,\mathrm{cth}\, z$ и выведите формулы для производных указанных функций.

8) Проверьте гармоничность заданной функции $u(x, y)$, найдите моногенную функцию $f(z) = u + iv$ и укажите область её моногенности: 1) $u(x, y) = x/(x^2 + y^2)$;

2) $u(x, y) = \mathrm{arctg}(y/x)$.

9) Докажите, что функции $\bar{z}$, $|z|$, $\arg z$ не голоморфны ни в одной точке $z \in \mathbf{C}$.

10) Докажите, что дробно-линейная функции $w(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, a, b, c, d – произвольные комплексные постоянные, $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$, однолистна в $\overline{\mathbf{C}} \setminus \{-d/c\}$ (при $c \neq 0$).

11) Докажите, что если функция f голоморфна в области *D* и $f'(z) = 0$ всюду в *D*, то $f(z) \equiv \mathrm{const}$.

12) Докажите, что если f голоморфна в области *D* и хотя бы одна из функций $\mathrm{Re}\, f(z)$, $\mathrm{Im}\, f(z)$, $|f(z)|$, Arg $f(z)$ постоянна в *D*, то $f(z) \equiv \mathrm{const}$. (*Указание*: в случаях $|f(z)| = \mathrm{const}$, Arg $f(z) = \mathrm{const}$ рассмотрите функцию Ln $f(z)$).

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров И.А.* Теория функций комплексного переменного: Учебник. – Томск: Изд. Томского ун-та, 2002.

2. *Александров И.А., Соболев В.В.* Аналитические функции комплексного переменного. – М.: Высшая школа, 1984.

3. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966.

4. *Евграфов М.А.* Аналитические функции. – М.: Наука, 1991.

5. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. Т. 1 и II. – М.: Высшая школа, 1988.

6. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. Т. 1 и II. – М.: Наука, 1967–1968.

7. *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1977.

8. *Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1976.

9. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. Т. 1 и II. – М.: Наука, 1976.