ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Математика»

Учебно-методическое пособие
к проведению практических занятий
по дисциплине «Математика»

«Ряды. Часть I»

Авторы

Ворович Е.И., Золотых С.А.,

Коровина К.С., Тукодова О.М.

Ростов-на-Дону, 2016

Аннотация

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов всех форм обучения и направлений.

Авторы

к.ф-м.н., доцент Ворович Е.И.,
ст. преподаватель Золотых С.А.,
ст. преподаватель Коровина К.С.,
к.ф-м.н., доцент Тукодова О.М.

Оглавление

1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Числовым рядом называется выражение

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n=\sum_{n=1}^{\infty}u_n ,$$

где u_1, u_2, …, $u_n\ldots$ – числа, которые образуют бесконечную числовую последовательность, u_n – общий член ряда, где $n\in N$ (N – множество натуральных чисел).

Частичной суммой ряда S_n называется сумма n первых членов:

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n .$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ называется сходящимся и S – его сумма. Если же $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ не существует или бесконечен, ряд называется расходящимся.

В редких случаях можно определить сходимость ряда, пользуясь непосредственно определением. Поэтому необходимо знать правила (признаки), по которым можно судить о сходимости или расходимости ряда. Распределим числовые ряды на два класса: 1) ряды с положительными членами (знакоположительные) и 2) ряды с членами разных знаков (знакопеременные).

Для каждого класса сформулируем правила исследования на сходимость.

1. Необходимый признак.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

Обратное утверждение неверно. Проверяя необходимый признак, можно сделать заключение только о расходимости ряда.

Вывод: вопрос о сходимости ряда надо решать с помощью достаточных признаков.

Сформулируем достаточные признаки сходимости знако-положительных рядов.

2. Признак сравнения.

Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ – положительные.

а) Если члены данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, начиная с некоторого номера, меньше членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

б) Если члены данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, начиная с некоторого номера, больше членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится, то данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Замечание 1. Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ больше членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, признак не применим.

Замечание 2. Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ меньше членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится, признак не применим.

Замечание 3. При использовании признаков сравнения надо знать ряды, с которыми можно сравнить данный ряд. К ним относятся:

1) ряды $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$, которые составлены из членов бесконечной геометрической прогрессии; при $|q|<1$ эти ряды сходятся, при $|q|\geq 1$ расходятся;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ – ряд Дирихле, при $p>1$ сходится, при $p\leq 1$ расходится.

3. Предельный признак сравнения.

Если существует конечный и отличный от нуля $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = c \neq 0$, то два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ одновременно сходятся или расходятся.

4. Признак Даламбера.

Дан положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$, то при $k<1$ ряд сходится, при $k>1$ – расходится, при $k=1$ признак не применим.

5. Признак Коши.

Дан знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = q$, то при $q<1$ ряд сходится, при $q>1$ ряд расходится, при $q=1$ признак не применим.

Замечание. При решении примеров признак Коши целесообразнее применять в том случае, когда извлекается *n*-я степень из общего члена ряда.

6. Интегральный признак.

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – положительный и его члены не возрастают, т. е.

$$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \ldots \geq u_n \geq \ldots,$$

и пусть $f(x)$ – такая непрерывная невозрастающая функция, что

$$f(1) = u_1 \cdot f(2) = u_2; \ldots f(n) = u_n, \ldots$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, если сходится несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$, и расходится, если этот интеграл расходится.

<u>Знакочередующиеся ряды.</u>

Знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из его модулей. Всякий абсолютно сходящийся ряд есть ряд сходящийся, поэтому если $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, причем абсолютно. Если ряд из модулей расходится, то знакопеременный ряд может сходиться (тогда он называется условно сходящимся), а может и расходиться. Поэтому ставим вопрос: какой это ряд, знакочередующийся или нет? Если ряд знакочередующийся, то используем признак Лейбница.

7. Признак Лейбница.

Дан знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots,\ u_n > 0$ и выполняются условия: 1) $u_1 > u_2 > ... > u_n > ...$, т. е. члены убывают по абсолютной величине; 2) $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$, тогда знакочередующийся ряд сходится, его сумма $|s| < |u_1|$ и остаток $|R_n| < |u_{n+1}|$. Теорема Лейбница позволяет исследовать ряд на сходимость, оценить сумму сходящегося ряда и его остаток, что используется в приближенных вычислениях.

При исследовании знакочередующихся рядов удобно пользоваться блок-схемой № 1.

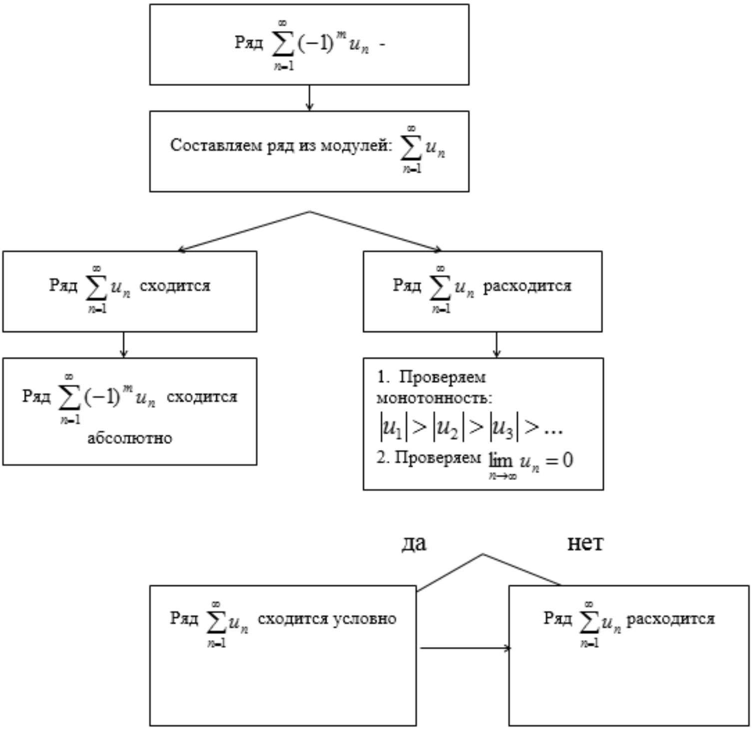

Рис. 1. Блок-схема № 1 исследования на сходимость знакочередующегося ряда

2. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Функциональным рядом называется ряд вида

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x), \qquad (1)$$

где $n\in N$, $u_n=u_n(x)$, $x\in R$.

Функциональный ряд вида

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \qquad (2)$$

называется степенным по степеням $(x-x_0)$.

Тогда ряд вида

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n - \qquad (3)$$

степенной ряд по степеням x.

Ряд (3) может быть получен из ряда (2) заменой $x-x_0=t$.

Множество значений x, при которых степенной ряд сходится, называется областью сходимости ряда. Для ряда (3) областью сходимости является интервал, симметричный относительно начала координат (рис. 3). Для ряда (2) область сходимости – интервал, симметричный относительно точки $x=x_0$ (рис. 4).

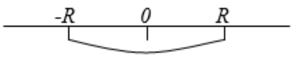

Рис. 3

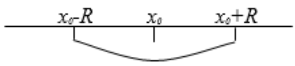

Рис. 4

Число R – половина длины интервала сходимости – называется радиусом сходимости степенного ряда. В частности, если $R=0$, то степенной ряд (3) сходится только в одной точке

$x = 0$, а степенной ряд (2) сходится в точке $x = x_0$. При $R = \infty$ степенной ряд сходится на всей числовой оси. Для отыскания радиуса сходимости можно использовать признаки Даламбера и Коши:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}; \tag{4}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{|a_n|}}, \tag{5}$$

если этот предел (конечный или бесконечный) существует. На концах интервала сходимости степенной ряд может сходиться или расходиться, поэтому нужны дополнительные исследования.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$

Решение. Применим необходимый признак сходимости. $\lim_{n\to\infty} \ln n = \infty \neq 0$, следовательно ряд расходится, так как не выполнен необходимый признак сходимости.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+1}{5(n-2)^4}$

Решение.

Исходный ряд сравним с "эталонным" рядом $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Этот ряд сходится как ряд Дирихле, при $p > 1$.

Поскольку $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+1}{5(n-2)^4}\cdot\frac{n^2}{1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^4\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}{5n^4\left(1-\frac{2}{n}\right)^4} = \frac{3}{5}$$ - конечное число, отличное от 0, то в силу второго признака сравнения заключаем, что исходный ряд сходится.

Пример 3. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 3^n}{(2n-1)!}$.

Решение. Применим признак Даламбера. Записываем *n*-ый член ряда:

$$u_n = \frac{n^3 \cdot 3^n}{(2n-1)!}$$

(n+1*)*-ый член получим, если в выражении u_n везде *n* заменим на *(n*+1*)*:

$$u_{n+1}=\frac{(n+1)^3\,3^{n+1}}{(2(n+1)-1)!}=\frac{(n+1)^3\,3^{n+1}}{(2n+1)!}.$$

Найдем предел отношения:

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^3 3^{n+1}}{(2n+1)!}}{\dfrac{n^3 3^n}{(2n-1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^3 3^{n+1}(2n-1)!}{n^3 3^n(2n+1)!}=3\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{n^3 2n(2n+1)}=0<1\Rightarrow \text{ряд}-\text{сходится}$$

Пример 4. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n^2+1}{2n^2}\right)^{-n^3}$.

Решение. Здесь удобно применить радикальный признак Коши:

$$K=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n^2+1}{2n^2}\right)^{-n^3}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{-n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{\frac{1}{2n^2}}\right]^{\frac{1(-n^2)}{2n^2}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}<1$$

Следовательно, ряд сходится.

Пример 5. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{\ln^3 n}}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{\ln^3 x}}$.

Она при x≥2 положительная, непрерывная и монотонно убывает. (Заметим, что эта функция получается из выражения общего члена ряда при замене *n* на *x*). Можно применять интегральный признак. Исследуем сходимость несобственного интеграла:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{\ln^3 x}} = \int_2^\infty (\ln x)^{-3/2} d(\ln x) = \lim_{A\to\infty}\int_2^A (\ln x)^{-3/2} d(\ln x) = \lim_{A\to\infty} \left.\frac{(\ln x)^{-3/2+1}}{-3/2+1}\right|_2^A =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\ln 2}} - \lim_{A\to\infty}\frac{2}{\sqrt{\ln A}} = \frac{2}{\sqrt{\ln 2}} - 0 < \infty \Rightarrow \quad \textit{интеграл сходится.}$$

Из интегрального признака заключаем, поскольку несобственный интеграл сходится, то сходится и исследуемый ряд.

Пример 6. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^\infty \sin\left[\pi(n-1/2)\right]\ tg\frac{\pi}{\sqrt{5n^2-1}}.$$

Решение. Данный ряд знакочередующийся, т.к.

$$\sin\left[\pi(n-1/2)\right] = \sin(\pi n - \frac{\pi}{2}) = -\cos\pi n = (-1)^{n+1}.$$

Исходный ряд можно переписать в виде

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} tg\frac{\pi}{\sqrt{5n^2-1}}.$$

Рассмотрим сначала ряд, составленный из абсолютных величин исходного ряда:

$$\sum_{n=1}^\infty tg\frac{\pi}{\sqrt{5n^2-1}} \qquad (\text{при}\ \ n=1,2,\ldots\ \ \text{все}\ \ tg\frac{\pi}{\sqrt{5n^2-1}} > 0).$$

Сравним его с гармоническим рядом $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$, о котором известно, что он расходится. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{tg\frac{\pi}{\sqrt{5n^2-1}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi n}{\sqrt{5n^2-1}} = \frac{\pi}{\sqrt{5}},$$

то по второму признаку сравнения заключаем, что ряд из модулей расходится и, следовательно, исходный ряд абсолютно не сходится. Продолжим исследование с помощью признака Лейбница: члены исходного ряда удовлетворяют условиям: во-первых, монотонного убывания абсолютных величин членов ряда, во-вторых, общий член ряда стремится к нулю. В самом деле, в промежутке $[0, \frac{\pi}{2}]$ функция y = tg x монотонно возрастает, а при n = 1, 2, … выполняются неравенства, а также необходимое условие:

$$\frac{\pi}{\sqrt{5n^2-1}} > \frac{\pi}{\sqrt{5(n+1)^2-1}}; \qquad \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} tg\frac{\pi}{\sqrt{5n^2-1}} = tg0 = 0.$$

Окончательно заключаем, исходный ряд сходится условно.

Пример 7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2n+1} x^n$.

Решение. В развернутом виде ряд выглядит следующим образом

$$1 + \frac{3}{3}x + \frac{3^2}{5}x^2 + \ldots + \frac{3^n}{2n+1}x^n + \ldots$$

Коэффициенты ряда: $a_n = \frac{3^n}{2n+1}$, $\qquad a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2n+3}$.

Найдем радиус сходимости

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n(2n+3)}{(2n+1)3^n} = \frac{1}{3}.$$

Заключаем, что интервал сходимости $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Исследуем далее сходимость степенного ряда в граничных точках интервала:

а) при $x=\frac{1}{3}$ получим числовой положительный ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}.$$

Этот ряд расходится, что видно из сравнения его с гармоническим рядом.

б) при $x = -\dfrac{1}{3}$ получим знакочередующийся ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2n+1}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}.$$

Члены этого ряда удовлетворяют условиям теоремы Лейбница:

1). $$u_n = \frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2n+3} = u_{n+1},$$

2) $$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1} = 0.$$

Знакочередующийся ряд сходится, т.е. при $X = -\dfrac{1}{3}$ степенной ряд сходится и окончательно область сходимости степенного ряда определяется неравенствами $-\dfrac{1}{3} \le X < \dfrac{1}{3}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Исследовать сходимость рядов:

1. а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2n+1}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}n}{5^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n+1}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^2 n}$

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+2}}{n!}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$

4. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(n+1)10^n}$

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty}tg\frac{1}{n}$ б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n}}{n\cdot 2^n}$

6. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{4n}\right)^{3n+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n^4+1}}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n-1}}{n!}$

7. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$

8. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2+n^3}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n+1)}{3^{n+1}}$

9. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{5n+2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$

10. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}tg\frac{1}{n^2+1}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$

11. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n^2+3}\right)^{\frac{n}{2}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+1)}$

12. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-10}{n^3+3}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2-1}$

13. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)^n$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

14. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^{3n+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n!}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3n+1}$

15. а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^n n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{2n+1}}{5^n(n+1)}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{n^2+1}$

16. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^{2n}}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$

17. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{n+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}(n-1)}{2^n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n^n}$

18. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^{n+2}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-2n+1}{n^3+2}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^{n+1}}$

19. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^3+2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^2(n+2)}$ в) $\sum_{n=2}^{\infty}\sin\frac{1}{n-1}$

20. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n-1}n^3}{2^n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{n+1}$

21. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{\sqrt{n3^n}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)^2-1}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$

22. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3^n(2n+1)}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!}$

23. а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$

24. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$

25. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$

26. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}tg\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{\sqrt{n}(n+1)}$

27. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^4+3}$

28. а) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{\sqrt{n}}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3(n+1)}}$

29. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+1}\sqrt{n}}{n!}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n-1}}{n^3+2}$

30. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n-2}\right)^{n+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3}}{n^2+n-1}$

2. Исследовать сходимость знакочередующихся рядов:

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{n!}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n n}{5^{n+1}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n}$

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+2}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n tg\frac{1}{n^2}$

4. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\sqrt{n}}{n^{2}+1}$

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^{2}+n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2^{2n+1}}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^{2}}$

6. а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n\cdot\ln^{2}n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}n}{n^{2}+1}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sqrt{n}}{n^{n}}$

7. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2^{n-1}\cdot n}{3^{n}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n+3}$ в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n\cdot\ln^{3}n}$

8. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n+1}{2n+3}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{3n-1}$

9. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}tg\frac{1}{\sqrt{n}}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\ln n}$

10. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{3^{2n+1}}{\sqrt{n}\cdot 5^{n}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n-1}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n\ln^{4}n}$

11. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{3^{n}}{n^{n}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sin\frac{1}{\sqrt[4]{n^{3}}}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2^{n}}{(n+1)!}$

12. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sqrt{n^{2}+1}}{n^{2}+3}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(n+1)\cdot 2^{2n-2}}{3^{n}}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{n^{n}}$

13. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{3^{n-1}}{n!}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}tg\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(n+1)}{n^{3}+2}$

14. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{4^{2n+1}\sqrt{n+1}}{5^{2n}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(n+1)\ln^{5}(n+1)}$

15. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^{2n-1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{n+1}}{(n+1)!}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+1}$

16. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n}{(n+1)^3}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{3n-1}\right)^n$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n+1}$

17. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+2)\ln^2(n+2)}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{n+1}}{n!}$

18. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[3]{n}}{n+4}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n^3}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4n-3}{\sqrt{3^n}}$

19. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{3n+2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}}{4^n(n+2)}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

20. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n+1}\cdot n}{n!}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$

21. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3\sqrt[n]{n}}{n!}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{2n^3+3}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n tg\frac{1}{n^3}$

22. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{2n^2+3}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(1+n)^n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}}$

23. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{10^n\cdot\sqrt[3]{n}}{n!}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3+2}{3n^4-1}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}$

24. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^2+1}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2\cdot 2^n}{n!}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n tg\frac{1}{n-1}$

25. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n!}{n^n}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n^2+2}$

26. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{2n+2}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2+2}{2n^2-1}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n+3}$

27. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt[3]{2n}}{n+3}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n\cdot\ln^5 n}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n^2}{1+n^2}$

28. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{1}{n-2}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2+1}{n^4+3}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{n+1}}{n!}$

29. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+2}{n^2-n+5}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(2-\dfrac{1}{n}\right)^n$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{e^{n+1}}{n^n}$

30. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{4^{2n+1}\cdot(n+1)}{3^n}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(n+3)\cdot\ln(n+3)}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n}{n+1}$

3. Найти интервалы сходимости степенных рядов и исследовать сходимость на концах интервалов.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-5)^n}{n\cdot 3^n}$ 11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{10^n(x-3)^n}{\sqrt{n}}$ 21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{(2n-1)\cdot 2^n}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{5^n}$ 12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n(x+3)^n}{n\cdot(n+3)}$ 22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n+1}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 5^n}$ 13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n(x-4)^n$ 24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}(x+4)^n}{n+1}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2n\cdot\sqrt{n+1}}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^2+1}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{2n}}{n^2\cdot 4^n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot(n-1)}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{2n}}{\sqrt{n}}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{n+\sqrt{n}}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(x-1)^n}{3^n\cdot(2n+1)}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n\sqrt{n}}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot\ln n}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}\cdot 2^n}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^{2n}}{\sqrt{n+1}\cdot 4^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{n^2+n}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)^n x^n$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x+1)^n}{3^n\cdot n}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}(x+5)^n}{\sqrt{n+1}}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}(x+2)^n$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+1)(x+1)^n}{2n}$