



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ
КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Математика»

Учебно-методическое пособие и варианты задания для выполнения контрольной работы по дисциплине

«Специальные главы математики (Дискретная математика)»

Авторы

Волокитин Г.И., Глушкова В.Н., Ларченко В.В.

Ростов-на-Дону, 2016



Аннотация

Контрольная работа «Специальные главы математики. Элементы математической логики и теории графов» для студентов всех форм обучения технических направлений и специальностей.

Авторы

к.ф.-м.н., доцент Волокитин Г.И.,
к.ф.-м.н., доцент Глушкова В.Н.,
д.ф.-м.н., профессор Ларченко В.В.





Оглавление

Экзаменационная программа	4
Варианты заданий контрольной работы	5
Краткие теоретические сведения и образцы решений задач.....	25
Список использованных источников	36

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА

Тема 1. Булевы функции и операции над ними.

Определение функции алгебры логики, фиктивные и существенные переменные. Таблица «элементарных» булевых функций. Реализация функций формулами.

Основные свойства булевых операций, правила де Моргана, законы противоречия и исключённого третьего. Эквивалентные преобразования. Перевод с естественного языка на язык исчисления высказываний.

Тема 2. Функционально полные системы.

Основные определения, примеры полных систем:

$$\{\wedge, \neg\}, \{\vee, \neg\}, \{\wedge, \vee\}, \{\wedge, \vee, \neg\}, \{\downarrow\}, \{\}, \{\wedge, \oplus, 1\}.$$

Алгебра Жегалкина. Линейные, монотонные, двойственные и самодвойственные функции. Критерий функциональной полноты.

Тема 3. Элементы теории графов.

Основные понятия и определения в теории графов: связный, несвязный, конечный, бесконечный графы; вершины, рёбра, смежные вершины, петли, кратные рёбра, мультиграфы. Представление графа матрицами смежности и инцидентности. Задача о Кёнигсбергских мостах.

Орграф. Структурный анализ графа. Маршрут, цепь, простая цепь, цикл, расстояние и его свойства, диаметр, центр и радиус графа. Взвешенные графы, алгоритмы поиска кратчайшего пути.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задача 1. Составить таблицы истинности для формул.

1. а) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \vee B)$; б) $(A \rightarrow B \vee C) \wedge A \wedge C \rightarrow A$;
2. а) $(B \downarrow A) \rightarrow C \oplus A$; б) $\neg(A \rightarrow (B \wedge A)) \rightarrow A \vee C$;
3. а) $\neg(A | B) \rightarrow \bar{C} \vee A$; б) $(A \wedge \bar{B} \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$;
4. а) $((\bar{A} \oplus B) \rightarrow C)$; б) $A \wedge (B \vee \bar{A}) \wedge (\bar{B} \rightarrow A) \vee B$;
5. а) $(A \wedge \bar{B}) | C$; б) $(A \rightarrow B) \wedge \bar{A} \rightarrow \bar{B}$;
6. а) $\neg(A \downarrow \bar{B}) \rightarrow \bar{A}$; б) $\bar{A} \wedge B \rightarrow A \vee C$;
7. а) $A \rightarrow \neg(B \vee C)$; б) $(A \leftrightarrow B) \oplus (\bar{A} \vee \bar{B})$;
8. а) $\neg(A \rightarrow (A \wedge B))$; б) $((A \wedge B) \rightarrow C) \leftrightarrow (A \rightarrow (\bar{B} \vee C))$;
9. а) $B \rightarrow (A \oplus \bar{C})$; б) $(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge \bar{C})$;
10. а) $A \rightarrow \neg(B | C)$; б) $A \rightarrow (B \vee C) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$.

Задача 2. Установить эквивалентность формул с помощью таблиц истинности.

1. а) $A \vee B \wedge C$ и $(A \vee B) \wedge C$; б) $\overline{A \leftrightarrow B}$ и $\bar{A} \leftrightarrow \bar{B}$;
2. а) $\bar{A} \vee \bar{B}$ и $\overline{A \wedge B}$; б) $(A \vee B) \wedge B$ и A ;
3. а) $A \rightarrow B$ и $\bar{A} \vee B$; б) $A \vee (\bar{A} \vee \bar{B})$ и A ;
4. а) $A \leftrightarrow B$ и $(\bar{A} \vee B) \wedge (A \vee \bar{B})$; б) $A \vee (\bar{A} \vee B)$ и A ;
5. а) $A \leftrightarrow B$ и $(\bar{A} \wedge \bar{B}) \vee (A \vee B)$; б) $A \wedge (\bar{A} \vee B)$ и B ;
6. а) $\overline{A \wedge B}$ и $\bar{A} \wedge \bar{B}$; б) $A \wedge (A \vee \bar{B})$ и A ;
7. а) $\bar{A} \vee \bar{B}$ и $A \rightarrow B$; б) $\bar{A} \wedge (\bar{A} \vee B)$ и B ;

Элементы математической логики и теории графов

8. а) $A \wedge B$ и $\bar{A} \vee \bar{B}$; б) $(A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})$ и A ;
9. а) $A \vee B$ и $\bar{A} \vee B$; б) $(A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee B)$ и A ;
10. а) $A \leftrightarrow B$ и $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \bar{B})$; б) $(\bar{A} \wedge B) \vee (A \vee \bar{B})$
и A .

Задача 3. Упростить формулы.

1.

а) $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow \bar{p}$;

б) $(A_1 \rightarrow A_2) \wedge (A_2 \rightarrow A_3) \rightarrow (A_3 \rightarrow A_1)$;

2.

а) $(A_1 \wedge A_3) \vee (A_1 \rightarrow \bar{A}_3) \vee (A_2 \wedge A_3) \vee (\bar{A}_1 \wedge A_2 \wedge A_3)$;

б) $\neg((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow \bar{A}))$;

3.

а) $A \vee \neg(B \wedge \bar{C}) \vee \neg(\bar{A} \vee B \vee \bar{C})$;

б) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\bar{B} \leftrightarrow \bar{A})$;

4.

а) $(A \rightarrow \bar{B} \wedge \bar{A}) \vee B$;

б) $A_1 \wedge A_2 \wedge (A_3 \vee \bar{A}_3)$;

5.

а) $A_1 \vee (A_2 \wedge \bar{A}_1)$;

б) $A_2 \wedge (A_1 \vee \bar{A}_2)$;

6.

а) $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \bar{r})$;

Элементы математической логики и теории графов

6) $(r \vee s \vee \bar{t}) \wedge r \wedge (p \vee \bar{s} \vee \bar{t})$;

7. а) $s \vee (t \wedge s \wedge m)$; б) $(t \vee r \vee q) \wedge (s \vee \bar{s})$;

8.а) $q \wedge (p \vee q) \wedge p$; б) $q \vee (p \vee \bar{p}) \vee (p \vee \bar{r}) \vee s$;

9. а) $m \wedge (\bar{p} \vee m \vee s) \wedge t \wedge (t \vee \bar{q})$;

б) $(d \vee \bar{a} \vee a) \downarrow \bar{d}$;

10. а) $p \wedge \overline{(p \wedge q)}$; б) $c \vee \bar{c} \wedge b \vee \bar{c} \vee \bar{a}$.

Задача 4. Записать формулы в а) ДНФ и б) СДНФ.

1. а) $(A \rightarrow B) \rightarrow C$;

б) $(A \rightarrow (A \leftrightarrow B)) \wedge C$;

2. а) $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$;

б) $A \wedge (B \wedge C)$;

3. а) $(A \wedge B) \vee (C \wedge D) \rightarrow C$;

б) $A \vee B \rightarrow C \wedge A$;

4 а) $\overline{(A \wedge B) \vee C}$;

б) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\bar{A} \vee B)$;

5. а) $A \wedge B \vee C \rightarrow B$;

б) $((A \rightarrow B) \wedge C) \vee \bar{A} \wedge B$;

6. а) $A \leftrightarrow B \vee \bar{C}$;

б) $A \wedge B \rightarrow (\bar{B} \wedge B \rightarrow C)$;

7. а) $A \wedge \bar{B} \rightarrow C$;

б) $(A \wedge (A \vee B)) \wedge (\bar{B} \rightarrow A)$;

8. а) $\overline{\bar{A}B} \leftrightarrow \bar{A} \vee A \wedge B$;

б) $A \vee B \rightarrow \overline{C \wedge B}$;

9. а) $(A \leftrightarrow B) \wedge (\bar{A}B \vee \bar{A}\bar{B})$;

б) $A \wedge B \rightarrow (A \rightarrow \bar{B})$;

10. а) $A \vee B \rightarrow (A \rightarrow \bar{B})$;

б) $A \vee B \rightarrow (A \leftrightarrow B)$.

Элементы математической логики и теории графов

Задача 5. Записать утверждения в виде логического выражения.

1. В начале работы системы электронного наблюдения (СЭН) по истечении 15 сек. включается управляющее устройство У1 датчика слежения за объектом ОБ. В серверный центр передаются данные о положении объекта ОБ. Если ОБ находится в допустимой зоне, на клиентский терминал поступает сообщение С1, иначе С2.

2. Если система находится в исходном состоянии, активизируется оборудование $OB1$, $OB2$ и выдается команда КОМ1. Если сигнала ответа от контроллера $OB2$ не зафиксировано, выдается сообщение «отсутствует реакция $OB2$ » и работа заканчивается. Если сигнал ответа от контроллера $OB2$ получен, включается электромагнит на 10 сек., работа заканчивается и система переходит в исходное состояние.

3. Если он купит компьютер, он не будет смотреть телевизор, а будет выполнять лабораторную работу.

4. Чтобы купить автомобиль, нужно иметь достаточно собственных денег или взять кредит в банке, который нужно возвращать с процентами.

5. Если Лентяев выучит математику, то он сдаст экзамен по математике и поедет отдыхать в летний лагерь «Радуга». Если Лентяев не выучит математику и не сдаст экзамен, он будет пересдавать экзамен в следующем семестре.

6. В исходном состоянии робот находится около обрабатывающего устройства. Если обработка ящика закончена, то робот поднимает ящик 2 сек., затем поворачивает налево, опускает

Элементы математической логики и теории графов

ящик на транспортер и возвращается в исходное состояние.

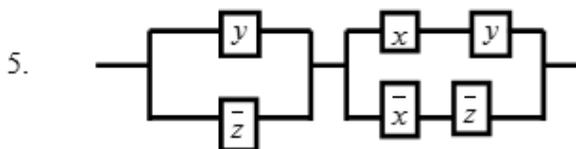
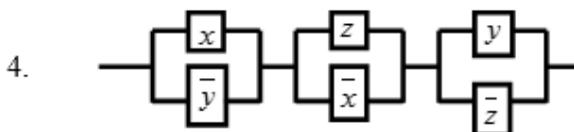
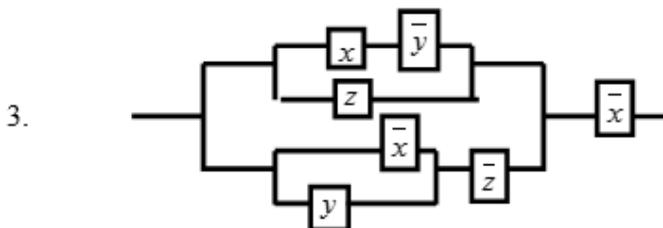
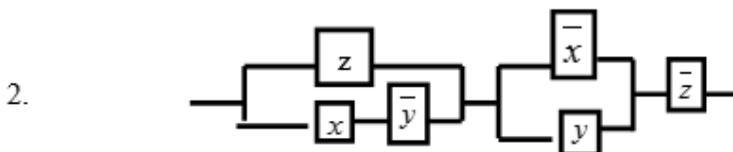
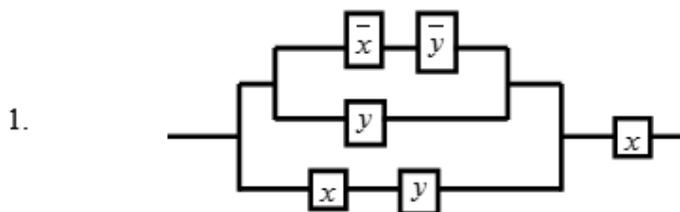
7. Если в четырехугольнике две противоположные стороны равны и параллельны, то четырехугольник параллелограмм.

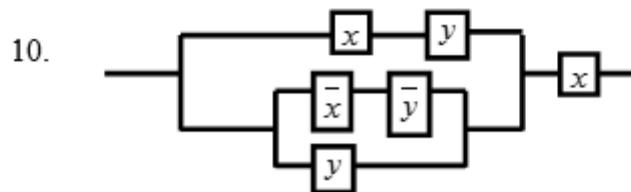
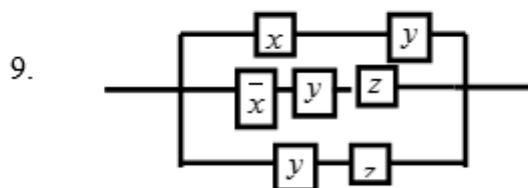
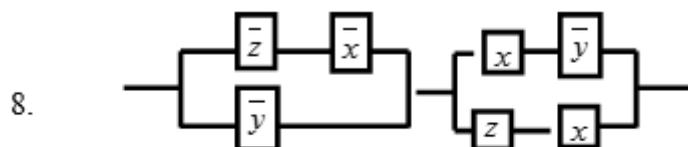
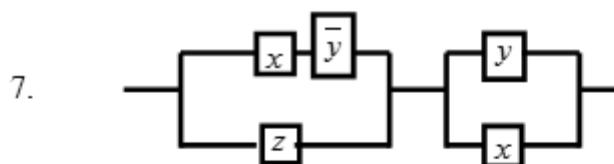
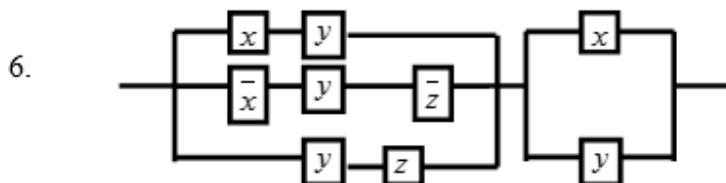
8. Ящик движется на транспортере 1 мин. После прохождения ящиком определенной позиции активизируется робот, который перемещает ящик на пункт контроля. Если ящик удовлетворяет критериям контроля, то робот перемещает его на погрузочный транспортер, иначе возвращает на обслуживающую станцию.

9. Если a , b – катеты прямоугольного треугольника, c – его гипотенуза, то $c^2 = a^2 + b^2$.

10. В начале работы системы подать питание на блок1, затем подать команду КОМ1 для исполнения ее механизмом М1. При наличии сигнала ответа от М1, подать команду КОМ2 и послать сообщение на пульт оператора об успешном включении М1. При отсутствии сигнала от М1 послать сообщение на пульт оператора «механизм М1 не реагирует».

Задача б. Упростить схемы.





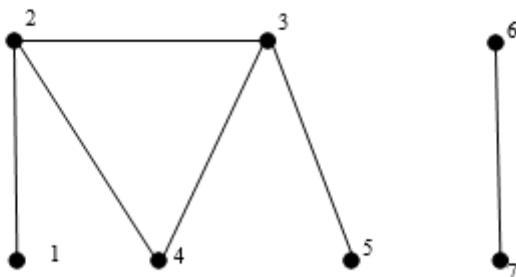
Элементы математической логики и теории графов

Задача 7. Проверить полноту следующих систем.

1. $\{x_1 \rightarrow x_2, x_1 \rightarrow \overline{x_2 x_3}\}$
2. $\{\vee, \wedge\}$
3. $\{x_1 \cdot \bar{x}_2, \bar{x}_1 \sim x_1 \cdot x_3\}$
4. $\{0, 1, x_1(x_2 \sim x_3) \vee \bar{x}_1(x_1 \oplus x_3)\}$
5. $\{\bar{x}, (0010), (0100111001110001)\}$
6. $\{\bar{x}_1 \oplus x_2, \bar{x}_2, x_1 \vee \bar{x}_2\}$
7. $\{x_1 x_2, x_1 \vee x_2, x_1 \rightarrow x_2\}$
8. $\{x_1 \rightarrow x_2, 0, x_1 \sim x_2\}$
9. $\{x_1 \oplus x_2, \bar{x}_1\}$
10. $\{x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3, 0, 1\}$

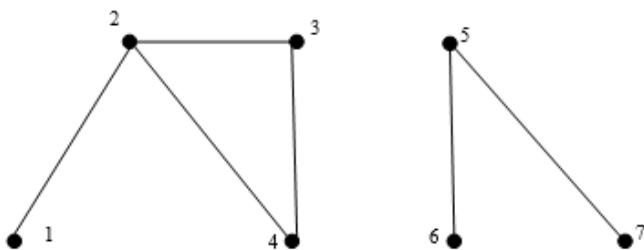
Задание 8. Составить матрицу инцидентности и смежности для графов:

1.

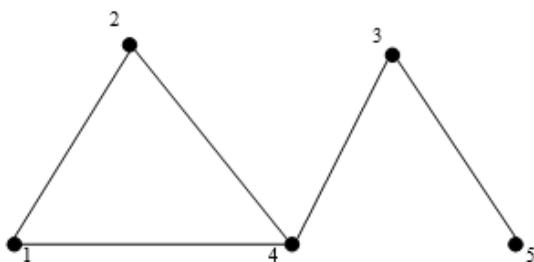


Элементы математической логики и теории графов

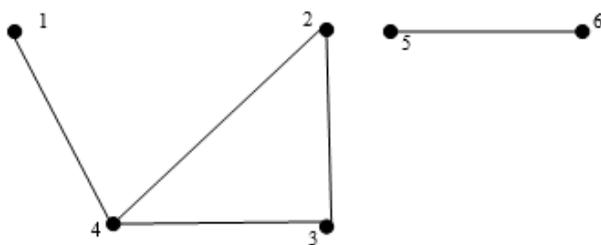
2.



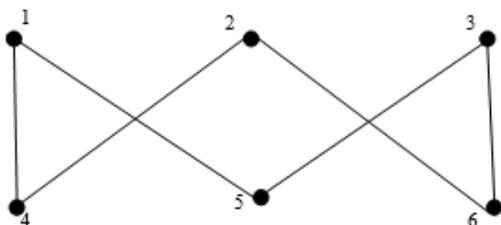
3.



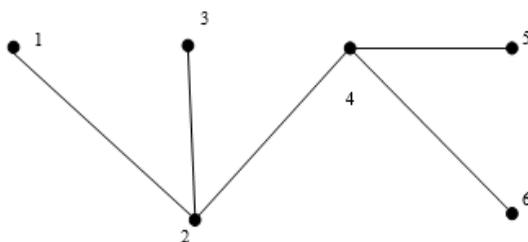
4.



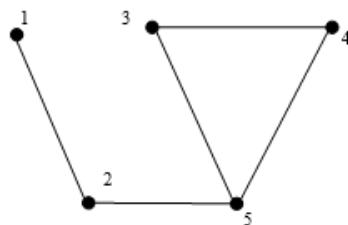
5.



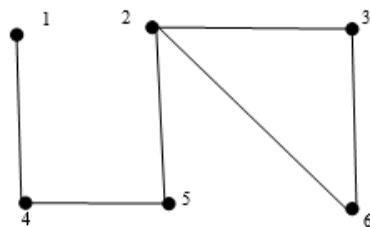
6.



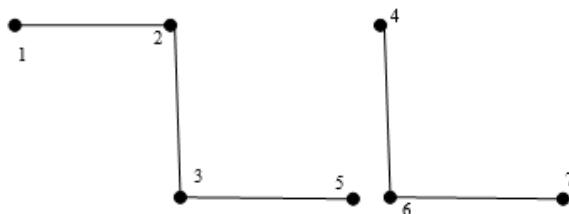
7.



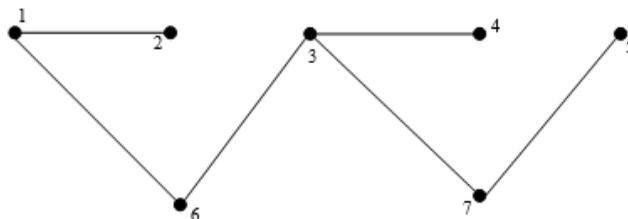
8.



9.



10.



Задача 9. По матрице инцидентности A и матрице смежности B построить неориентированные графы. В матрице инцидентности столбцам соответствуют вершины графа, строкам – ребра.

$$1. \text{ а) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Элементы математической логики и теории графов

$$2. \text{ а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3. \text{ а) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$4. \text{ а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$5. \text{ а) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Элементы математической логики и теории графов

$$6. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$7. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$8. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$9. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

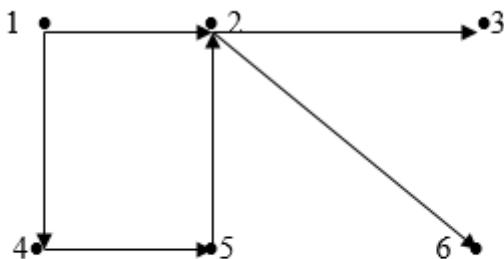
$$10. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

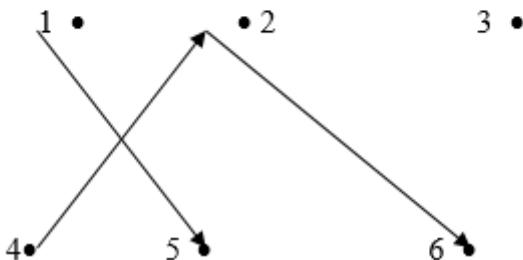
Элементы математической логики и теории графов

Задание 10. Составить матрицы инцидентности и смежности для ориентированных графов:

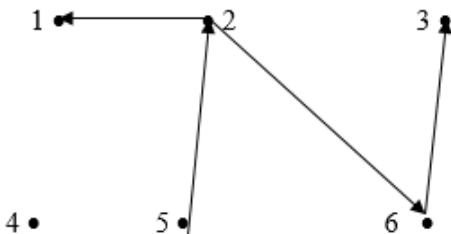
1.



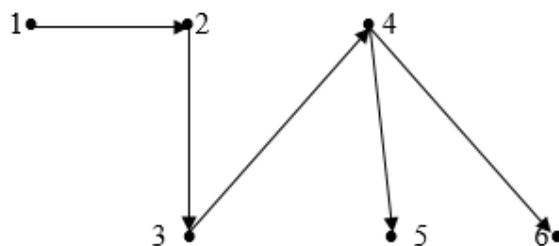
2.



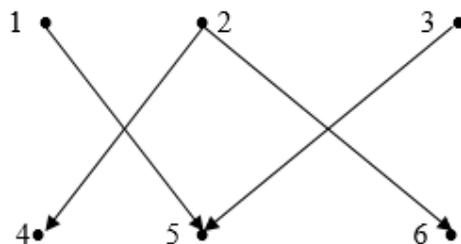
3.



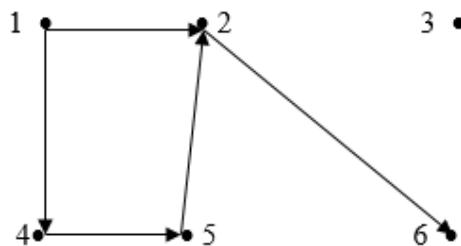
4.

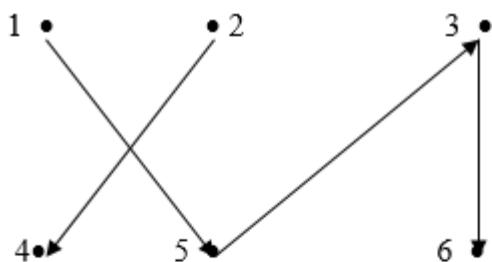


5.

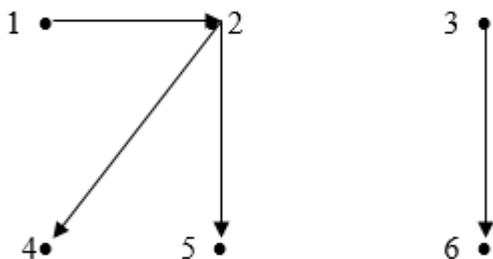


6.

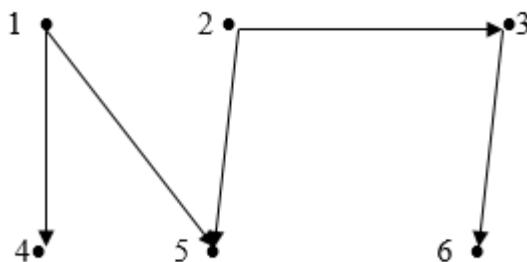




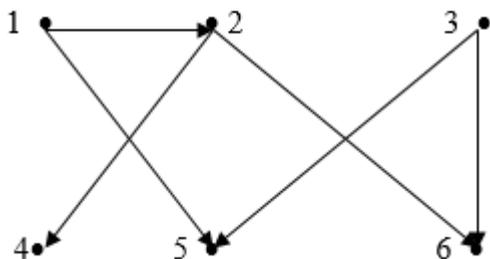
8.



9.

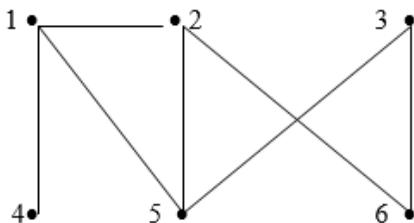


10.

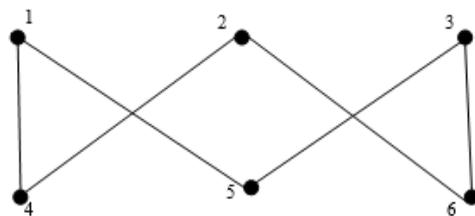


Задание 11. Проверить, является ли изображенный граф эйлеровым.

1.

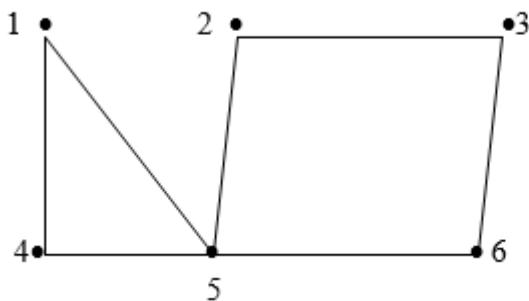


2.

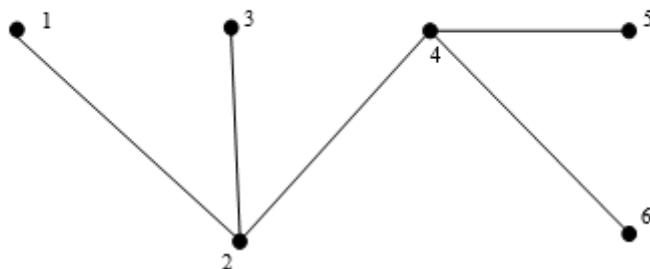


Элементы математической логики и теории графов

3.

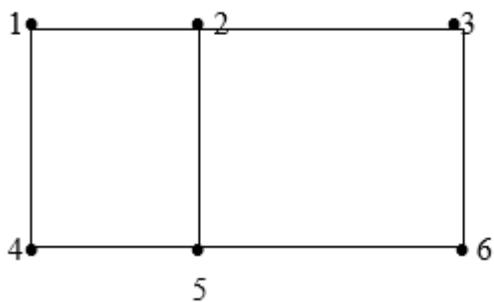


4.

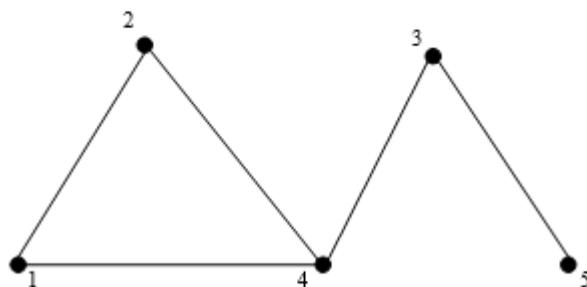


Элементы математической логики и теории графов

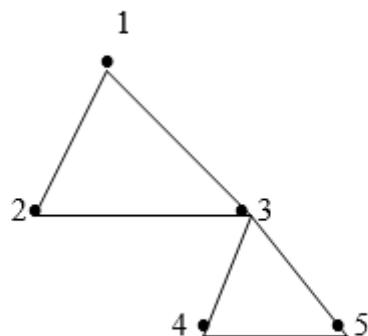
5.



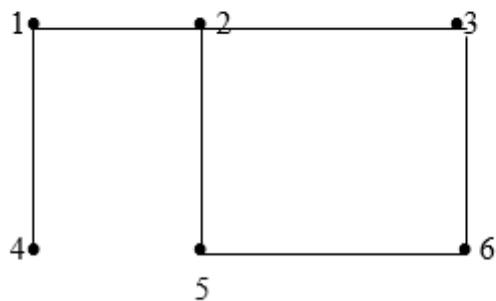
6.



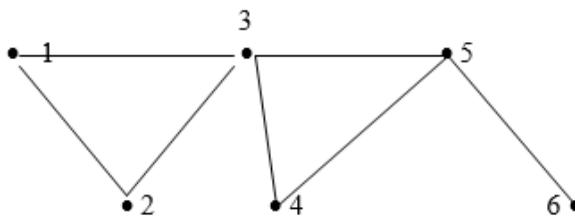
7.



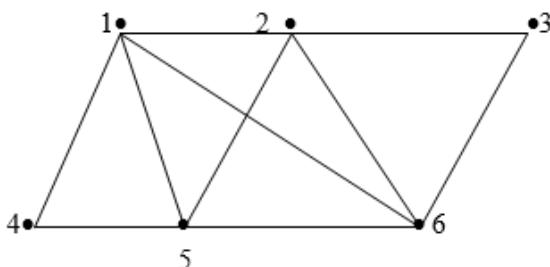
8.



9.



10.



Краткие теоретические сведения и образцы решений задач

Задача 1. Составить таблицу истинности для формулы $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$.

Решение. Составим таблицу истинности для формулы $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$. Для составления таблицы истинности произвольной формулы необходимо знать таблицы истинности элементарных операций, входящих в рассматриваемую формулу. В данном случае – это операции отрицания « \neg » и импликации « \rightarrow ».

Элементы математической логики и теории графов

B	A	\bar{B}	\bar{A}	$\bar{B} \rightarrow \bar{A}$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	1	0	0	1

Задача 2. Установить эквивалентность формул $A \vee B$ и $\overline{A \wedge \bar{B}}$ с помощью таблиц истинности.

Решение. Проверим эквивалентность формул $A \vee B$ и $\overline{A \wedge \bar{B}}$, составив для них таблицы истинности.

A	B	$A \vee B$	\bar{B}	$A \wedge \bar{B}$	$\overline{A \wedge \bar{B}}$
0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0
1	1	1	0	0	1

Формулы не эквивалентны, так как 3-й и 6-й столбцы таблицы не совпадают.

Задача 3. Упростить формулу $A_1 \rightarrow A_2 = \bar{A}_1 \vee A_2$.

Решение. Для упрощения формулы $A_1 \rightarrow A_2 = \bar{A}_1 \vee A_2$ используем правило исключения импликации:

Элементы математической логики и теории графов

$$\begin{aligned} \neg(A_1 \rightarrow A_2) \vee (A_2 \rightarrow \bar{A}_1) &= \overline{(\bar{A}_1 \vee A_2)} \vee \bar{A}_2 \vee \bar{A}_1 = (\bar{\bar{A}}_1 \wedge \bar{A}_2) \vee \bar{A}_2 \vee \bar{A}_1 = \\ &= (A_1 \wedge \bar{A}_2) \vee \bar{A}_2 \vee \bar{A}_1 = \bar{A}_2 \wedge (A_1 \vee 1) \vee \bar{A}_1 = \bar{A}_2 \vee \bar{A}_1. \end{aligned}$$

Задача 4. Записать формулу $\overline{(A \wedge B) \vee C}$ а) в ДНФ и б) в СДНФ.

Решение. а) Используя законы логики, приведем формулу $\overline{(A \wedge B) \vee C}$ к виду, содержащему только дизъюнкции элементарных конъюнкций. Полученная формула и будет искомой ДНФ:

$$\overline{(A \wedge B) \vee C} = \overline{(A \wedge B)} \wedge \bar{C} = (\bar{A} \vee \bar{B}) \wedge \bar{C} = (\bar{A} \wedge \bar{C}) \vee (\bar{B} \wedge \bar{C})$$

Для построения СДНФ составим таблицу истинности для данной формулы:

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \vee C$	$\overline{(A \wedge B) \vee C}$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0

Помечаем те строки таблицы, в которых формула (последний столбец) принимает значение "1". Для каждой такой строки выпишем формулу, имеющую вид конъюнкции атомных формул

Элементы математической логики и теории графов

или их отрицаний, истинную на наборе переменных A, B, C . Если переменная x в рассматриваемой строке имеет значение 0, то ей сопоставляется \bar{x} , иначе сама x . Для рассматриваемой таблицы строке 1 соответствует $\bar{A} \wedge \bar{B} \wedge \bar{C}$; строке соответствует $\bar{A} \wedge \bar{B} \wedge C$ и т.д. Искомой СДНФ будет формула: $(\bar{A} \wedge \bar{B} \wedge \bar{C}) \vee (\bar{A} \wedge B \wedge \bar{C}) \vee (A \wedge \bar{B} \wedge \bar{C})$.

Задание 5. Записать утверждение «В начальном режиме работы системы управления транспортером (СУТ) подать питание на электропривод, затем осуществить протяжку транспортера на один шаг. В случае получения сигнала 1 (есть продукт) осуществить еще протяжку транспортера на 2 шага, иначе выдать сообщение (конец продукта)» в виде логического выражения.

Решение. Формализуем повествовательное предложение. Начальному режиму работы СУТ поставим в соответствие высказывание НАЧРЕЖ. Наличие питания в электроприводе отразим высказыванием ПИТАНИЕ, осуществление протяжки транспортера на один шаг выражается утверждением ПРОТШАГ, сигнал 1 – высказыванием СИГНАЛ ПРОД, сообщение «конец продукта» – высказыванием КОНПРОД. Утверждение, сформулированное в первом предложении, формализуется формулой:

$$\text{НАЧРЕЖ} \rightarrow \text{ПИТАНИЕ} \wedge \text{ПРОТШАГ}.$$

Второму предложению соответствует формула:

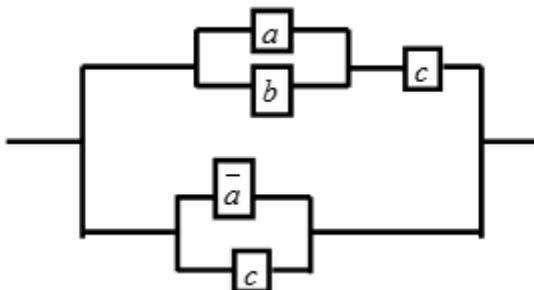
$$(\text{СИГНАЛ ПРОД} \rightarrow \text{ПРОТШАГ} \wedge \text{ПРОТШАГ}) \wedge (\neg \text{СИГНАЛ ПРОД} \rightarrow \text{КОНПРОД}).$$

Конъюнкция этих формул описывает фрагмент работы СУТ:

Элементы математической логики и теории графов

$(НАЧРЕЖ \rightarrow ПИТАНИЕ \wedge ПРОТШАГ) \wedge (СИГНАЛ \rightarrow ПРОД \rightarrow$
 $ПРОТШАГ \wedge$
 $ПРОТШАГ) \wedge (\neg СИГНАЛ \rightarrow ПРОД \rightarrow КОНПРОД)$

Задача 6. Упростить схему

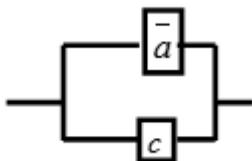


Решение.

Составим функцию проводимости для схемы:

$$f(a, b, c) = (\bar{a} \vee c) \vee [(a \vee b) \wedge c] = (\bar{a} \vee c) \vee [ac \vee bc] = \bar{a} \vee c \vee ac \vee bc = \bar{a} \vee c.$$

Полученной формуле соответствует схема:



Задача 7. Проверить полноту системы $\{x_1 \leftrightarrow x_2, \bar{x}_1, \bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_2\}$.

Решение. Для доказательства полноты системы

Элементы математической логики и теории графов

$\{x_1 \leftrightarrow x_2, \bar{x}_1, \bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_2\}$ необходимо проверить, что система содержит функцию не сохраняющую 0, функцию не сохраняющую 1, немонотонную функцию, несамодвойственную функцию и нелинейную функцию. Докажем полноту системы $\Sigma = \{x_1 \sim x_2, \bar{x}_1, \bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_2\}$.

Обозначим $f_1(x_1, x_2) = x_1 \sim x_2$ и выпишем ее таблицу истинности

x_1	x_2	$x_1 \sim x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Функция f_1 не сохраняет 0. Выясним, является ли f_1 самодвойственной; для этого построим таблицу истинности для $\bar{f}_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$:

\bar{x}_1	\bar{x}_2	$\bar{x}_1 \sim \bar{x}_2$	$\bar{f}_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	0

Т.к. $f_1(x_1, x_2) \neq \bar{f}_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, то f_1 несамодвойственна.

Функция $f_2(x) = \bar{x}$ немонотонная, и не сохраняет 1.

Элементы математической логики и теории графов

Найдем полином Жегалкина для $f_3(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_2 = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_{12}x_1x_2$

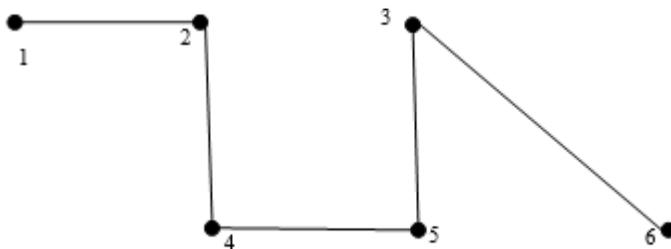
x_1	x_2	\bar{x}_1	\bar{x}_2	$\bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_2$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	1	0	0	1

$$a_0 = 1; \quad 0 = 1 \oplus a_2 \Rightarrow a_2 = 1; \quad 1 = 1 \oplus a_1 \Rightarrow a_1 = 0;$$

$$1 = 1 \oplus 1 \oplus a_{12} \Rightarrow a_{12} = 1;$$

Функция $f_3(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_2 = 1 \oplus x_2 \oplus x_1x_2$ нелинейная. Согласно теореме о полноте \sum – полная система.

Задание 8. Составить матрицу инцидентности и смежности для графа G



Решение. В приведенном графе G вершины пронумерованы арабскими цифрами и расположены на пересечении ребер. Для построения матриц инцидентности и смежности сначала упорядочим все ребра e_k , определяемые парами вершин (i, j) , произвольным образом. Например, для графа G :

$$e_1 = (1,2), e_2 = (2,4), e_3 = (4,5), e_4 = (3,5), e_5 = (3,6).$$

Строки матрицы инцидентности помечаются номерами вершин графа, а столбцы – номерами ребер. Матрица имеет размер $m \times n$, где m - количество вершин графа, n - число ребер. Считается, что вершины и ребра пронумерованы. Элемент i -ой строки и j -го столбца a_{ij} равен 1, если i -ая вершина инцидентна j -му ребру, и равен 0 в противном случае. Матрица инцидентности A графа G имеет вид:

$$A = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

В матрице смежности B строки и столбцы помечаются номерами вершин в порядке их возрастания. Элемент b_{ij} равен количеству ребер, соединяющих вершину с номером i с вершиной j .

$$B = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Элементы математической логики и теории графов

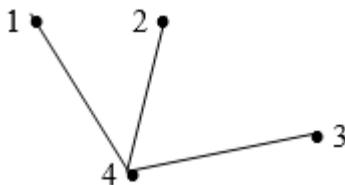
Задача 9. По матрице инцидентности $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и

матрице смежности

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ по-}$$

строить неориентированные графы.

Решение. В матрице инцидентности A 4 столбца и 3 строки, следовательно, в графе 4 вершины и 3 ребра:



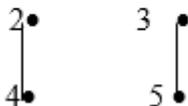
Строке 1 матрицы соответствует ребро (1,4), строке 2 – ребро (2,4), строке 3 – ребро (4,3).

В матрице смежности строкам и столбцам соответствуют вершины графа. Матрица смежности B – квадратная матрица, порядок которой равен числу вершин графа. Элементы этой матрицы $b_{ij} = c$, где c – число ребер, соединяющих вершины с номерами i и j . Поскольку размер матрицы B 5×5 , то граф имеет 5 вершин. Из первой строки следует, что вершина 1 изолированная, из второй строки видно, что вершина 2 и вершина 4 соединены ребром, из третьей строки видно, что вершина 3 и вершина 5 то-

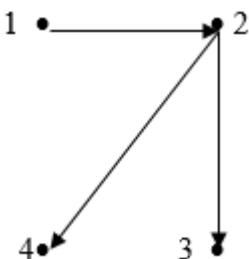
Элементы математической логики и теории графов

же соединены ребром.

1 •



Задание 10. Составить матрицы инцидентности и смежности ориентированного графа G :



Решение. Матрица инцидентности для ориентированного графа строится по аналогии с неориентированным графом. Отличие состоит в том, что a_{ij} равно -1 , если j -ая вершина является началом i -го ребра; a_{ij} равен 1 , если j -ая вершина – конец i -го ребра. Для петли $a_{ii}=2$. Для графа G пусть $e_1 = (1,2)$, $e_2 = (2,4)$, $e_3 = (2,3)$.

Матрица инцидентности графа G имеет вид:

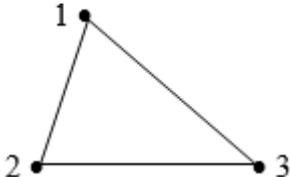
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В матрице смежности B ориентированного графа элемент b_{ij} равен количеству ребер, выходящих из i -ой вершины и заканчивающихся в вершине с номером j . Для графа G матрица смеж-

ности имеет вид.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задание 11. Проверить, является ли изображенный граф эйлеровым:



Решение. Неориентированный граф называется эйлеровым, если у него есть цикл, содержащий все ребра графа. Циклом называется маршрут, в котором каждое ребро встречается не более одного раза. Причем, конечная вершина маршрута совпадает с его начальной вершиной. Степенью вершины называется число ребер ей инцидентных. Связный неориентированный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степень каждой из его вершин – четное число. Например, ниже приведенный граф является эйлеровым, т.к. степень каждой вершины равна 2.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. М.:Энергоиздат, 2012.

2. С.Ф. Тюрин, Ю.А. Аляев. Дискретная математика: практическая дискретная математика и математическая логика. Москва, «Финансы и статистика», «Инфра-М», 2010.

3. Элементы дискретной математики для инженера. Математическая логика. Волокитин Г.И. Глушкова В.Н., Ларченко В.В., Мишняков Н.Т. Ростов-на-Дону, изд-во ДГТУ, 2015 г.

4. Д, Андерсон. Дискретная математика и комбинаторика. Москва- Санкт-Петербург-Киев, издательский дом «Вильямс», 2004 г.