ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Математика»

Учебное пособие

по дисциплинам

«Принятие оптимальных решений» и «Теория игр»

Авторы

Азаров Д.А., Азарова Л.В.,
Золотых С.А., Князев С.Ю.

Ростов-на-Дону, 2015

Аннотация

Некоторые разделы курсов «Принятие оптимальных решений» и «Теория игр, часть 2».

Авторы

ст. преподаватель Азаров Д.А.,
ст. преподаватель Азарова Л.В.,
ст. преподаватель Золотых С.А.,
к.т.н., доцент Князев С.Ю.

Оглавление

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Транспортная задача в классической постановке формулируется следующим образом: Пусть в m пунктах $A_1, A_2, \ldots, A_m$ сосредоточен однородный груз в количествах $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Его надо перевезти в n пунктов $B_1, B_2, \ldots, B_n$ в количествах $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Известна стоимость (тарифы) перевозок c_{ij} единицы груза из пункта A_i в пункт B_j. Составить план перевозок, удовлетворяющий интересы потребителя и поставщика и обеспечивающий минимум транспортных расходов.

Математическая постановка ТЗ будет следующей:

Найти матрицу – план $\begin{pmatrix} x_{11} \ldots\ldots\ldots x_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} \ldots\ldots\ldots x_{mn} \end{pmatrix}$ такую, что

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \Rightarrow \min,$$ причем

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, & i = 1,2,\ldots,m \\ \sum_{i-1}^{m} x_{ij} = b_j, & j = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

Здесь x_{ij} количество груза, перевозимого из пункта A_i в пункт B_j.

1. Решение ТЗ начинается с проверки **условия баланса**.

Теорема: Для того, чтобы ТЗ имела допустимый план необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие баланса $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Модель ТЗ с выполненным условием баланса называется закрытой и такая ТЗ может быть решена, например, методом потенциалов. Модель ТЗ с невыполненным условием баланса называется открытой и непосредственно не решается. Поэтому в случае открытой модели добавля- ется фиктивный поставщик или потребитель так, чтобы модель стала закрытой, после чего задача уже решается. После решения ТЗ в матрице перевозок отбрасывается строка или столбец, соответствующие фиктивным поставщику или потребителю, а оставшееся решение и будет искомым.

Все дальнейшее решение ТЗ оформляется в распределительной таблице и начинается с построения первоначального опорного плана.

2. Построение первоначального опорного плана.

Распределительная таблица имеет вид:

		потребители			
		b_1	b_2	......	b_n
поставщики	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	......	c_{1n} x_{1n}
	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	......	c_{2n} x_{2n}
	......	......	......	......	......
	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	......	c_{mn} x_{mn}

Строки и столбцы по контуру таблицы служат для вспомогательных записей, а в клетках самой таблицы в правом верхнем углу пишут тарифы перевозок c_{ij}, а посреди клетки величины перевозок. Если в данном плане перевозка от i-ого поставщика к j-ому потребителю присутствует и составляет величину $a \neq 0$, то значение $x_{ij} = a$ заносится в клетку (i,j) и эта клетка считается занятой. Если перевозка отсутствует, то в клетку ничего не заносится и клетка считается свободной.

Замечание. Число занятых клеток основной таблицы обязательно должно быть равным m+n-1 (m – число строк, n – число столбцов основной таблицы). Если занятых клеток меньше, то план вырожденный и следует добавить клетки с нулевой перевозкой до m+n-1. Тогда в свободную клетку с наименьшим тарифом пишут число «0», и клетка считается занятой.

Для **построения первоначального опорного плана** существует ряд методов, два из которых мы сейчас рассмотрим.

Метод северо-западного угла

Заполнение таблицы начинается с левого верхнего угла, двигаясь далее или по строке вправо или по столбцу вниз. В клетку (1,1) заносим перевозку $x_{11}=\min(a_1,b_1)$. Если $a_1 > b_1$, то $x_{11} = b_1$, первый столбец закрыт, т.е. потребности первого потребителя удовлетворены полностью.

Далее заполняем клетку (1,2), занося туда перевозку $x_{12}=\min(a_1 - b_1, b_2)$, и т.д., до тех пор, пока не исчерпаем запасы первого поставщика. После этого сдвигаемся на строку вниз, начиная с того столбца на котором остановились в предыдущей строке, начинаем опять двигаться вправо, до тех пор, пока не исчерпаем запасы второго поставщика. Процесс продолжается до тех пор, пока ресурсы всех поставщиков не будут исчерпаны, а потребности всех потребителей не будут удовлетворены, т.е. пока мы не окажемся в крайней правой нижней клетке (m,n).

Метод минимального элемента

В этом методе заполнение таблицы начинается с клетки с минимальным тарифом, куда заносится максимально возможная перевозка. Затем заполняется клетка со следующим по величине тарифом и т.д., пока не будет распределен весь груз.

Пример

В пунктах отправления A_1 и A_2 находится 150 т и 90 т горючего. Его надо доставить в пункты потребления B_1, B_2, и B_3 в количествах $b_1= 60$ т, $b_2 = 110$ т, $b_3= 70$ т. Стоимость перевозки горючего задана матрицей тарифов:

$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 4 \\ 12 & 2 & 8 \end{pmatrix}$. Составить первоначальный план перевозок.

Построим первоначальное распределение методом северо-западного угла:

	потребители		
	$b_1 = 60$	$b_2 = 110$	$b_3 = 70$

Поставщики	$a_1 = 150$	6 60	10 90	4
	$a_2 = 90$	12	2 20	8 70

Стоимость перевозок в этом случае будет:

$F = 6 \cdot 60+10 \cdot 90+2 \cdot 20+8 \cdot 70 = 360+900+40+560 = 1860$ руб.

В правиле северо-западного угла не учитывается величина затрат c_{ik}, потому исходное опорное решение часто может быть далеким от оптимального.

Для тех же условий распределим груз методом минимального элемента. Заполнение начинаем с клетки (2,2) с наименьшим тарифом $c_{22}=2$, куда заносим перевозку $x_{22}=\min(90, 110) = 90$. Затем переходим к клетке (1,3) с $c_{13} = 4$, куда заносим перевозку $x_{13}=\min(70, 150) = 70$. Затем переходим к клетке (1,1), куда заносим $x_{11}=\min(60, 150-70) = 60$. И, наконец, в клетку (1,2) заносим оставшиеся 20 ед. груза.

		потребители		
		$b_1 = 60$	$b_2 = 110$	$b_3 = 70$
поставщики	$a_1 = 150$	6 60	10 20	4 70
	$a_2 = 90$	12	2 90	8

Стоимость перевозок будет:

$F = 60 \cdot 6 + 20 \cdot 10 + 70 \cdot 4 + 90 \cdot 2 = 360+200+280+180 = 1020$ руб. – что очевидно ближе к оптимальному плану.

Транспортная задача - задача на минимум, поэтому оптимум достигается тогда и только тогда, когда все коэффициенты при неосновных (свободных) переменных в выражении линейной функции F неотрицательны. В транспортной задаче произвольная переменная x_{ij} отождествляется с содержимым соответствующей клетки (i, j) таблицы поставок. Коэффициент $\boldsymbol{\mu_{ij}}$ при свободной переменной x_{ij} в выражении линейной функции F через свободные переменные называется оценкой свободной клетки (i, j). Тогда критерий оптимальности формулируется следующим образом: базисное распределение поставок оптимально тогда и только тогда, когда оценки всех свободных клеток неотрицательны.

Таким образом, на первый план выходит задача о нахождении оценок свободных клеток для фиксированного базисного распределения поставок.

Пусть фиксировано некоторое базисное распределение поставок, при этом клетка (i, j) - свободная (переменная x_{ij} - свободная), $\boldsymbol{\mu_{ij}}$ - оценка клетки (i, j) или коэффициент при x_{ij} в выражении линейной функции F через свободные переменные, т.е.

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{\mu_{ij} x_{ij}} + \ldots,$$

где многоточием обозначены слагаемые, отвечающие свободным переменным, отличным от x_{ij}, F_0 - суммарные затраты на перевозку данного распределения поставок. Тогда из выражения функции F следует, что оценка $\boldsymbol{\mu_{ij}}$ свободной клетки (i, j) равна приращению ΔF суммарных затрат на перевозку при переводе в клетку (i, j) единичной поставки (увеличение переменной x_{ij} от 0 до 1). Очевидно, что $\Delta F > 0$, если $\boldsymbol{\mu_{ij}} > 0$, и $\Delta F < 0$, если $\boldsymbol{\mu_{ij}} < 0$. Последнее косвенное определение оценки свободной клетки обычно называют экономическим смыслом оценки свободной клетки.

При вычислении ΔF многие слагаемые взаимно уничтожаются. Существенными являются лишь коэффициенты затрат тех клеток, в которых поставка при рассматриваемом перераспределении изменится. При этом в выражение для ΔF некоторые из них входят со знаком "+", а некоторые - со знаком "-".

При этом знаком "+" помечаются те клетки, поставка в которых увеличится. Именно их коэффициенты затрат войдут в выражение для ΔF со знаком "+". В остальных клетках поставка уменьшится (в них вписывается знак "-"), их коэффициенты затрат войдут в выражение для ΔF со знаком "-". Ломаную, соединяющую клетки с изменяемой поставкой, будем называть **означенным циклом пересчета**.

Таким образом, можно сформулировать **правило 1** нахождения оценки свободной клетки: для свободной клетки следует построить цикл пересчета, в вершинах этого цикла расставить последовательно чередующиеся знаки, начиная со знака "+" в свободной клетке, тогда значение оценки свободной клетки равно алгебраической сумме коэффициентов затрат клеток цикла, взятых с соответствующими знаками.

Аналогично, составляя означенный цикл пересчета для каждой свободной клетки, можно найти ее оценку. При этом, конечно, цикл не всегда будет получаться простым.

Для каждой свободной клетки базисного распределения поставок существует и притом единственный цикл пересчета, причем операция означивания цикла называется корректной.

Теорема (о потенциалах): Оценка свободной клетки не изменится, если к коэффициентам затрат некоторой строки (столбца) таблицы поставок прибавить некоторое число. Это число, прибавляемое к коэффициентам затрат выделенной строки (столбца), будем называть потенциалом данной строки (столбца).

Правило 2 нахождения оценок свободных клеток: к коэффициентам затрат таблицы поставок в каждой строке и столбце надо прибавить такие числа (потенциалы), чтобы коэффициенты затрат в заполненных клетках стали равными нулю. Полученные при этом коэффициенты затрат свободных клеток равны оценкам этих клеток.

Измененные коэффициенты затрат удобно выписать в виде отдельной матрицы оценок. Элементы матрицы оценок, соответствующие свободным клеткам таблицы поставок, равны оценкам этих свободных клеток.

Поставка, передаваемая по циклу, определяется как минимум среди поставок в клетках цикла со знаком "-". После этого пустая клетка становится заполненной, а клетка, в которой находился этот минимум среди поставок, становится свободной. В клетках со знаком "+" цикла поставка увеличивается на передаваемую поставку, а в клетках со знаком "-" - уменьшается на передаваемую поставку. При том нетрудно доказать, что вновь полученное распределение поставок - базисное.

Последовательность действий по решению произвольной транспортной задачи можно представить в виде следующего **алгоритма**:

1. Для данного базисного распределения поставок подбираем потенциалы α_i, $i=1,...,m$, β_j, $j=1,...,n$ строк и столбцов таблицы так, чтобы коэффициенты затрат заполненных клеток стали равны нулю $\alpha_i+\beta_j+c_{ij}=0$. Составляем матрицу оценок $\Delta_{ij}=\alpha_i+\beta_j+c_{ij}$.

2. Если оценки всех свободных клеток неотрицательны, то найденное распределение оптимально - решение закончено. Если среди оценок свободных клеток есть отрицательные, то выбираем одну из них для передачи в нее поставки (для определенности, например, можно брать одну из клеток с наименьшей оценкой).

3. Для избранной свободной клетки строится означенный цикл пересчета. Поставка z, передаваемая по циклу, определяется как минимум среди поставок в клетках со знаком "-". При этом поставка в клетках цикла со знаком "+" увеличивается на величину z, а в клетках со знаком "-" уменьшается на величину z. Клетка, поставка в которой при этом обратилась в ноль, будет считаться свободной, а остальные клетки цикла - заполненными. Таким образом, получено новое базисное распределение поставок.

4. Переходим к пункту 1 алгоритма.

Часто для проверки построенного опорного плана на оптимальность используется другая модификация метода потенциалов. Для этого по числу строк m и числу столбцов n вводятся двойственные переменные α_i, $i=1,...,m$, β_j, $j=1,...,n$, называемые потенциалами. После этого для каждой клетки определяется величина $\Delta_{ij}=\alpha_i+\beta_j-c_{ij}$, называемая оценкой этой клетки.

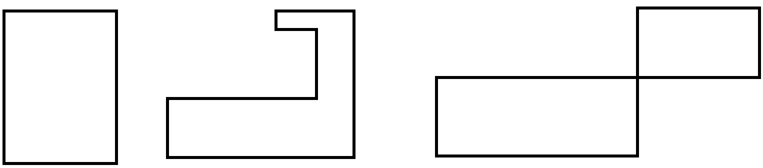
Признак оптимальности сохраняется тот же, что и в симплексном методе, а именно: если задача решается на min, то опорное решение будет оптимальным в том и только в том случае, если для всех клеток оценки будут неотрицательными, то есть все $\Delta_{ij}\geq 0$. При этом для занятых клеток обязательно должно выполняться условие $\Delta_{ij} = 0$, то есть $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$, а для свободных клеток условие $\Delta_{ij} \geq 0$, или что то же самое $\alpha_i + \beta_j \geq c_{ij}$.

На основании указанных равенств для занятых клеток сначала находятся все потенциалы. Кроме того, поскольку потенциалов m+n штук, а занятых клеток m+n-1, то для получения замкнутой системы добавляется еще одно уравнение. Обычно это $\alpha_1 = 0$.

После того, как все потенциалы найдены, для свободных клеток проверяется условие $\Delta_{ij} \geq 0$. Если это условие выполнено для всех свободных клеток, то план оптимальный. Если есть свободные клетки, где это условие не выполнено, то план не оптимальный и в эти клетки надо занести (перераспределить) перевозки. Для этого из клеток с нарушенными условиями оптимальности выбирают ту, в которой $\left|\Delta_{ij}\right| = \max$. Для перераспределения перевозок из выбранной клетки строят цикл пересчета.

Определение: Циклом в распределительной таблице ТЗ называется ломаная с вершинами в занятых клетках и звеньями вдоль столбцов и строк. В каждой вершине соединяются только 2 звена. Самопересечение вершиной не является.

Примеры циклов:



Замечание: Для любой свободной клетки цикл единственен.

После построения цикла все его вершины помечаются знаками «+» и «-», начиная с «+» в исходной свободной клетке и чередуя знаки. Кроме исходной клетки все остальные знаки стоят в занятых клетках.

Из перевозок в вершинах со знаком «-» выбираем наименьшую и вычитаем ее из всех перевозок в вершинах со знаком «-», а затем прибавляем ее ко всем перевозкам в вершинах со знаком «+». Все остальные клетки без знаков оставляем без изменения. В результате одна свободная клетка, из которой начинался цикл, стала занятой, а одна занятая клетка в которой разность двух перевозок оказалась равной нулю стала свободной (в ней «0» не пишем). Число занятых клеток не изменилось. При этом, если разность двух перевозок оказалась равной нулю в двух клетках, то пустой делаем только одну клетку, ту, в которой тариф больше. В клетке с меньшим тарифом оставляем «0», и считаем ее занятой.

В результате получаем новый опорный план и повторяем всю процедуру проверки его на оптимальность заново.

Пример решения транспортной задачи

На 4-х базах у поставщиков имеется однородный груз в количестве 100, 200, 400, 300 ед. Его надо развести 5-и потребителям в количествах 50, 150, 250, 300, 200 ед. Стоимость доставки ед. груза от поставщика к потребителю задана матрицей тарифов $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \\ 4 & 5 & 1 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 7 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Составить план перевозок с минимальными транспортными затратами.

Решение:

1. Проверяем условие баланса $\sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{j=1}^{5} b_j$, т.е.

100+200+400+300 = 1000 ≠ 50+150+250+300+200 = 950

Условие не выполнено, поэтому добавляем одного потребителя с 50 ед. груза.

2. Составляем распределительную таблицу, в которую заносится первый опорный план. У фиктивного потребителя в последнем столбце тарифы перевозок равны нулю и перевозки в его клетки заносятся в последнюю очередь.

		потребители						
		50	**150**	**250**	**300**	**200**	**50**	
поставщики	**100**	2	3	5	1 **100**	8	0	
	200	4	5	1 **200**	6	2	0 **0**	
	400	3	4 **150**	7	2 **200**	6	0 **50**	
	300	3 **50**	7	1 **50**	5	4 **200**	0	

Сначала согласно правилу минимальной стоимости заполняем клетки с минимальным тарифом, то есть с тарифом «1» (1-я строка 4-й столбец заносим 100 ед., 2-я строка 3-ий столбец заносим 200 ед., 4-я строка 3-ий столбец заносим 50 ед.). Затем клетки с тарифом «2» (3-я строка 4-й столбец заносим 200 ед.). Потом клетки с тарифом «3» (4-я строка 1-й столбец заносим 50 ед.) После этого клетки с тарифом «4» (3-я строка 2-ой столбец заносим 150 ед.,

4-я строка 5-й столбец заносим 200 ед.). И, наконец, оставшиеся 50 ед. груза у 3-го поставщика заносим в клетку фиктивного потребителя с тарифом «0» (3-я строка 6-й столбец заносим 50 ед.).

Весь груз распределен. И поставщики, и потребители полностью удовлетворены. Для проверки суммируем перевозки по строкам и столбцам – они должны совпадать со значениями запасов и потребностей в последних столбцах и строках.

3. Проверяем число занятых клеток. Их 8, а должно быть $m+n-1=4+6-1=9$. Мы получили вырожденный план. С та-

ким планом дальше работать нельзя, поэтому добавляем нулевую перевозку в клетку с минимальным тарифом (пусть, например, это будет клетка в последнем столбце во 2-й строке).

План стал невырожденным.

4. Находим стоимость перевозок (значение целевой функции) по этому плану

F = 100·1 + 200·1 + 0·0 + 150·4 + 200·2 + 50·0 + 50·3 + 50·1 + 200·4 = 2300

5. Для проверки условия оптимальности находим потенциалы по занятым клеткам из условия $\alpha_i + \beta_j + c_{ij} = 0$, причем $\alpha_1 = 0$.

Зная α_1, находим последовательно все остальные потенциалы из приведенных уравнений, выбирая каждый раз уравнение так, чтобы один из входящих в него потенциалов был бы известен. Уравнения решаются устно, а потенциалы заносятся в распределительную таблицу.

		потребители						α_i
		50	**150**	**250**	**300**	**200**	**50**	
поставщики	**100**	2	3	5	1 **100**	8	0	**0**
	200	4	5	1 **200**	6	2	0 **0**	**-1**
	400	3	4 **150**	7	2 **200**	6	0 **50**	**-1**
	300	3 **50**	7	1 **50**	5	4 **200**	0	**-1**
β_j		**-2**	**-3**	**0**	**-1**	**-3**	**1**	

6. Когда все потенциалы найдены, проверяем условие

оптимальности для свободных клеток. Для этого находим оценки $\Delta_{ij} = \alpha_i + \beta_j + c_{ij}$.

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

План не является оптимальным, так как среди оценок есть отрицательный элемент: $\Delta_{25} < 0$.

7. Для улучшения плана для клетки с отрицательной оценкой строим цикл пересчета согласно приведенному выше определению. В силу единственности другого цикла из этой клетки получиться не может. Расставляем знаки в вершинах цикла, чередуя их и начиная со знака «+» в свободной клетке (2;5).

		потребители						α_i
		50	**150**	**250**	**300**	**200**	**50**	
поставщики	**100**	2	3	5	1 **100**	8	0	**0**
	200	4	5	**(-)** 1 **200**	6	**(+)** 2	0 **0**	**-1**
	400	3	4 **150**	7	2 **200**	6	0 **50**	**-1**
	300	3 **50**	7	**(+)** 1 **50**	5	**(-)** 4 **200**	0	**-1**
β_j		**-2**	**-3**	**0**	**-1**	**-3**	**1**	

Из клеток со знаком «-» выбираем ту, где перевозка наименьшая. В нашем случае это min (200, 200) =200.

Вычитая значение 200 из перевозок в клетках со знаком «-» и прибавляя к перевозкам со знаком «+» получим новый опорный план. При этом свободные клетки и перевозки в клетках без знака оставляем без изменения.

Поскольку при вычитании освобождаются сразу две клетки, то свободной делаем только одну клетку, а в другую заносим перевозку «0» и считаем ее занятой. В результате число занятых клеток осталось без изменения.

Замечание: В нашем случае три таблицы приведены только затем, чтобы показать последовательность заполнения клеток таблицы. На практике же все предыдущие рассуждения оформляются в виде одной таблицы, поэтому новый опорный план и его исследование приведем в одной таблице, как это и следует делать дальше.

Итак, согласно построенному циклу получим новый план

		потребители						α_i
		50	**150**	**250**	**300**	**200**	**50**	
поставщики	**100**	2	3	5	1 **100**	8	0	**0**
	200	4	5	1	6	**(+)** 2 **200**	**(-)** 0 **0**	**-1**
	400	3	4 **150**	7	2 **200**	6	0 **50**	**-1**
	300	3 **50**	7	1 **250**	5	**(-)** 4 **0**	**(+)** 0	**-3**
β_j		**0**	**-3**	**2**	**-1**	**-1**	**1**	

Стоимость перевозок по новому плану составляет:

F = 100·1 + 200·2 + 0·0 + 150·4 + 200·2 + 50·0 + 50·3 + 250·1 + 0·4 = 1900

Проверим план на оп- тимальность. Аналогично предыдущему вычисляются потенциалы и оценки свободных клеток. Потенциалы приведены в таблице. Матрица оценок имеет вид:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 0 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 8 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Полученный план согласно матрице оценок снова не является оптимальным.

Значит, строим новый цикл для клетки, соответствующей отрицательной оценке Δ_{46}. В данном случае по циклу переносим 0 условных единиц товара.

Строим новый опорный план и проверяем его на оптимальность, вычисляя новые значения потенциалов α_i, β_j и матрицу оценок Δ:

		потребители						α_i
		50	**150**	**250**	**300**	**200**	**50**	
поставщики	**100**	2	3	5	1 **100**	8	0	**0**
	200	4	5	1	6	2 **200**	0	**1**
	400	3	4 **150**	7	2 **200**	6	0 **50**	**-1**
	300	3 **50**	7	1 **250**	5	4 **0**	0 **0**	**-1**
β_j		**-2**	**-3**	**0**	**-1**	**-3**	**1**	

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Все оценки клеток распределительной таблицы оказались неотрицательными, поэтому полученный план является оптимальным.

Очевидно, в данных условиях стоимость перевозок по новому плану не изменилась (т.к. по циклу было перенесено 0 условных единиц товара):

F = 1900.

Ответ: Вычеркивая фиктивного потребителя, получаем матрицу оптимальных перевозок $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 150 & 0 & 200 & 0 \\ 50 & 0 & 250 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и min стоимость перевозок равную 1900 ед.

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР

Деятельность человека в той или иной области сопряжены с принятием решений. Принимая то или иное решение человек (как правило) руководствуется понятием оптимальности этого решения. Постановка вопроса об оптимальности решения встречается во многих науках: технических науках, экономике, медицине, праве, военном деле и т.д. Общая наука теории математических моделей принятия решений носит название исследование операций. Ее областями являются, например, линейное программирование или теория игр.

Теория игр имеет дело с ситуацией принятия решения в условиях конфликта. Конфликт возникает при столкновении интересов двух или нескольких лиц, групп лиц, объединений, когда точно можно определить кто в этом столкновении участвует, каковы возможные исходы, кто в этих исходах заинтересован, и в чем состоит эта заинтересованность. При этом лицу, принимающему решения, приходится основываться не только на своих интересах, но и на интересах партнеров и противников по конфликту. Теория игр позволяет на основе построенной математической модели дать рекомендации по наиболее выгодному (оптимальному) решению, основываясь на четких математических критериях, но не входя в области психологии. Также теория игр не дает рекомендаций по осуществлению выбранного решения.

Теория игр должна отталкиваться от основных определений, которые лежат в ее основе и являются необходимым условием для ее формализации и построения математической модели.

Игрой будем называть формализованную постановку конфликта, его математическую модель. Формализация состоит, в частности, в том, что четко поставлены правила игры, и игра не может выйти за их рамки (в отличии от реальных конфликтных ситуаций). Собственно говоря, названия игра и появилось при рассмотрении привычных человечеству игр, например шахмат, шашек, домино и пр. Ведь все эти игры проходят по установленным правилам и заканчиваются победой одной из сторон.

В игре могут сталкиваться интересы как двух, так и более лиц. В первом случае игра называется парной, во втором – множественной. Ниже будут рассматриваться только парные игры.

Правилами игры называются условия, определяющие действия противников, информа- ция о ходе, доступная им, последовательность ходов противников, а также условия окончания игры и возможный выигрыш (проигрыш).

Игра называется игрой с нулевой суммой или антагонистической если выигрыш одного игрока равен проигрышу другого, т.е. сумма их выигрышей равна нулю. В игре с нулевой суммой интересы игроков прямо противоположны. Отсюда следует, что в таких играх можно рассматривать только интерес одного игрока, так как, найдя выигрыш для него, мы автоматически получаем выигрыш и для второго, только с противоположным знаком, т.е. его проигрыш. Ниже рассматриваются только антагонистические игры.

Игра состоит из ходов. Ходом назовем выбор одного из предусмотренных правилами вариантов игры. Ходы могут быть личные и случайные.

Личный ход – это ход, основанный на разумном, сознательном выборе игрока, приносящий ему наибольшую выгоду. Ход игрока в шахматы является, конечно, личным ходом. Случайный ход – ход основанный на стохастическом выборе, подчиняющийся законам теории вероятностей. Случайным ходом является, например, выпадение «герба» или «решки» при броске монеты.

Стратегией игрока называется одно из множества доступных продолжений игры (ходов), ведущих к достижению поставленных игроком целей.

Конечной называется игра, где у каждого из игроков есть конечное число стратегий, иначе - бесконечной. Многие игры, например шахматы, имеют, вообще говоря, конечное число стратегий, но их число так велико, что перечислить все за обозримое время человек не может.

Конечная игра, в которой первый игрок имеет m стратегий, а второй – n, называется игрой размерности $m \times n$.

Стратегии первого игрока будем обозначать буквой А с соответствующим индексом: A_1, A_2, A_3, и т.д., а стратегии второго игрока B_1, B_2, B_3, и т.д.

Пусть нам известны значения каждого выигрыша a_{ij} при использовании игроками пары стратегий A_i, B_j. Тогда эти значения удобно записать в виде матрицы размерности $m \times n$, которая называется платежной матрицей или матрицей игры.

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим пример рассмотрения платежной матрицы. Дана игра, определенная следующими правилами. Первый игрок прячется в одной из двух комнат. Второй игрок может открыть дверь только в одну комнату. Если там окажется первый игрок, то он выплачивает второму один рубль, если его там не окажется, то второй выплачивает первому один рубль. Составить платежную матрицу.

У первого игрока две возможные стратегии: A_1 - он прячется в первой комнате, A_2 – он прячется во второй комнате. У второго игрока также две возможные стратегии: B_1 - он открывает дверь в первую комнату, B_2 – он открывает дверь во вторую комнату. Если первый игрок выбирает стратегию A_1, а второй B_1 – то второй находит первого и первый выплачивает ему рубль, т.е. выигрыш первого составляет -1. Если первый игрок выбирает стратегию A_1, а второй B_2 – то второй не находит первого и сам выплачивает ему рубль, т.е. выигрыш первого составляет 1. Если первый игрок выбирает стратегию A_2, а второй B_1 – то второй опять не находит первого и выплачивает ему рубль, т.е. выигрыш первого составляет 1. И, наконец, Если первый игрок выбирает стратегию A_2, а второй B_2 – то второй находит первого и первый выплачивает ему рубль, т.е. выигрыш первого составляет -1. Сведем эти данные в таблицу:

	B_1	B_2
A_1	-1	1
A_2	1	-1

Таким образом, платежная матрица имеет вид:

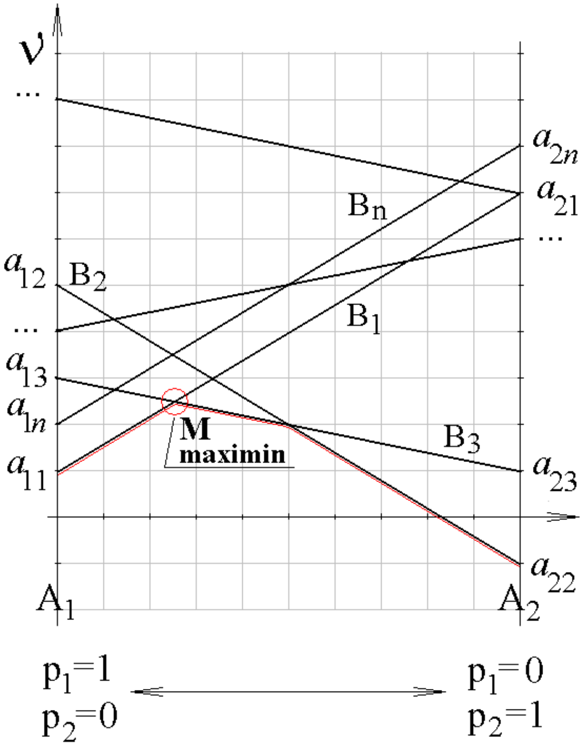
$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Графический способ решения игр размерности 2×n.

Рассмотрим игру размерности 2×n, заданную платежной матрицей:

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}$$

У первого игрока существует две стратегии (A_1, A_2), у второго – n стратегий (B_1, B_2, B_3, … , B_n). Пусть первый игрок применяет свою стратегию A_1 с частотой p_1, а вторую стратегию A_2 с частотой p_2. Представим эти стратегии на графике.

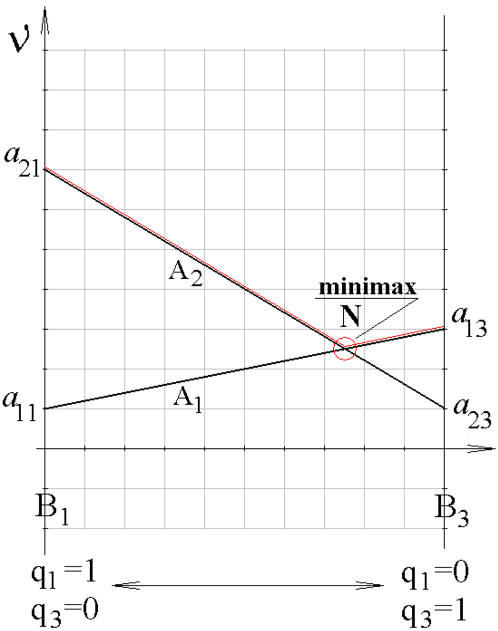


Минимальные значения выигрыша – нижняя ломаная. Наибольшее значение, которое возможно на ней – точка М. Это и есть максимин. Ордината этой точки есть цена игры ·, а ее абсцисса – значение частоты применения второй стратегии p_2. Находим их. Тогда можно вычислить частоту применения первой стратегии по формуле: $p_1 = 1 - p_2$. Для первого игрока игра решена.

Теперь перейдем к решению игры для второго игрока. В теории игр есть утверждение, что для любой игры размерности m×n число полезных стратегий не превосходит наименьшего из двух значений m и n. Таким образом для игры размерности 2×n число полезных стратегий будет равно min{2,n}=2. Найдем эти стратегии.

Из рисунка видно, что для приведенного графика, точка максимина M находится на пересечении отрезков, соответствующих активным стратегиям B_1 и B_3. Следовательно первоначальная игра может быть сведена к такой игре, в которой принимают участие только активные стратегии, и матрица которой имеет вид:

$$P^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}.$$



Построим активные стратегии второго игрока на втором графике.

Максимальные значения выигрыша – верхняя ломаная. Наименьшее значение, которое возможно на ней – точка N. Это минимакс. Ордината этой точки есть цена игры ·, а ее абсцисса – значение частоты применения второй стратегии q_3. Находим их. Тогда можно вычислить частоту применения первой стратегии по формуле: $q_1 = 1 - q_2$.

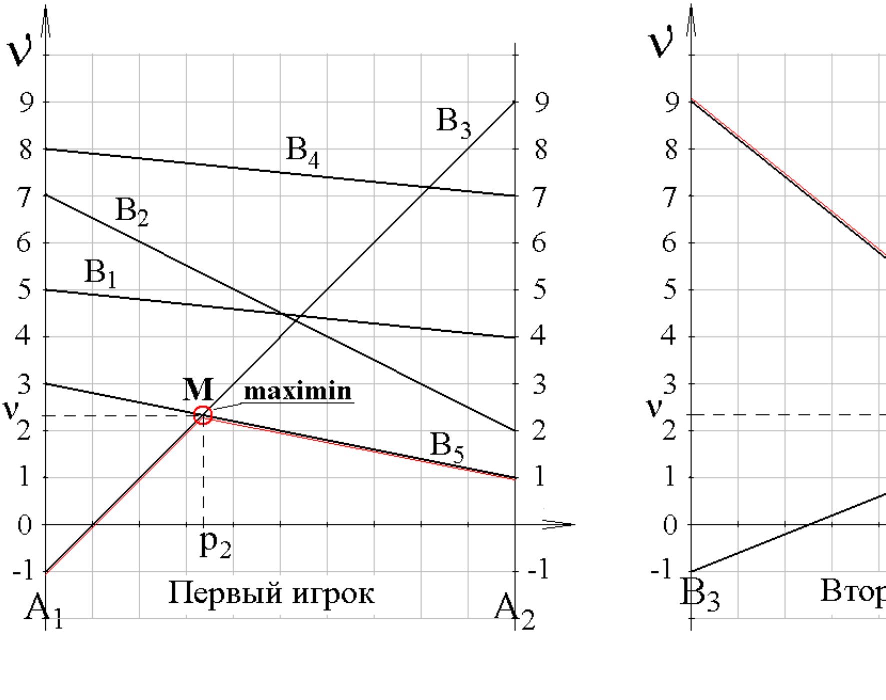
Игра решена и для второго игрока.

Рассмотрим решение подобных задач на примере.
Решить игру, заданную платежной матрицей:

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -1 & 8 & 3 \\ 4 & 2 & 9 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Размерность игры 2х5, таким образом, у первого игрока две возможные стратегии, у второго – пять.

Построим отрезки, соответствующие пяти стратегиям второго игрока на графике (см. рис. а). Точка М – максимин игры образована пересечением стратегий B_3 и B_5. Приближенно можно определить цену игры, которая лежит между 2 и 3, ближе к 2, и частоту p_2 использования второй стратегии, которая лежит между 0,3 и 0,4.



а) б)

Однако, приближенного решения часто недостаточно, поэтому построим точное решение игры. Воспользуемся средствами аналитической геометрии. Как известно, уравнение прямой, проходящей через две точки с координатами $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ записывается в виде: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Составим уравнение прямой, отвечающей стратегии B₃, которая проходит через точки с координатами (0;-1) и (1;9): $\dfrac{x-0}{1-0} = \dfrac{y+1}{9+1}$. Упростив полученное выражение, получим уравнение: $10x - y = 1$. Аналогично составим уравнение прямой, отвечающей стратегии B₅, которая проходит через точки с координатами (0;3) и (1;1): $\dfrac{x-0}{1-0} = \dfrac{y-3}{1-3}$. Упростив полученное выражение, получим уравнение: $2x + y = 3$. Теперь составим полученные уравнения в систему, и решим ее.

$$\begin{cases} 10x - y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

Решением этой системы будут значения $x = \dfrac{1}{3}$; $y = \dfrac{7}{3}$.

Таким образом, точка максимина имеет координаты $\mathrm{M}\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{7}{3}\right)$.

Значит цена игры $\nu = \dfrac{7}{3}$ а частота применения второй стратегии первым игроком $\mathrm{p}_2 = \dfrac{1}{3}$. Тогда частота применения первой стратегии первым игроком $\mathrm{p}_1 = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$. Для первого игрока задача решена.

Так как активными будут только стратегии B₃ и B₅, то платежную матрицу игры можно переписать следующим образом:

$$P=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 9 & 1\end{pmatrix}.$$

Построим графики стратегий (см. рис. 6). Как видно, минимакс игры, точка N, лежит на верхней ломаной, состоящей из отрезков стратегий A_2 и A_1.

Составим уравнение прямой, отвечающей стратегии A_2, которая проходит через точки с координатами (0;9) и (1;1): $\dfrac{x-0}{1-0}=\dfrac{y-9}{1-9}$. Упростив полученное выражение, получим уравнение: $8x+y=9$. Аналогично составим уравнение прямой, отвечающей стратегии A_1, которая проходит через точки с координатами (0;-1) и (1;3): $\dfrac{x-0}{1-0}=\dfrac{y+1}{3+1}$. Упростив полученное выражение, получим уравнение: $4x-y=-1$. Теперь составим полученные уравнения в систему и решим ее:

$$\begin{cases}8x+y=9\\ 4x-y=-1\end{cases}$$

Решением этой системы будут значения $x=\dfrac{5}{6}$; $y=\dfrac{7}{3}$. Таким образом, точка максимина имеет координаты $\mathrm{N}\left(\dfrac{5}{6};\ \dfrac{7}{3}\right)$.

Значит цена игры $\nu=\dfrac{7}{3}$ что, конечно, совпадает с ценой игры, вычисленной для первого игрока) а частота применения второй активной (т.е. пятой) стратегии первым игроком $q_5=\dfrac{5}{6}$. Тогда частота применения первой активной (т.е. третьей) стратегии первым игроком $q_3=1-\dfrac{5}{6}=\dfrac{1}{6}$. Решение задачи для второго игрока: $q_1=0,\ q_2=0,\ q_3=\frac{1}{6},\ q_4=0,\ q_5=\frac{5}{6}$.

Ответ: $\nu=\frac{7}{3}$, $p\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$, $q\left(0,0,\frac{1}{6},0,\frac{5}{6}\right)$.

Решение матричной игры симплекс методом

Пусть парная игра с нулевой суммой, которая задана платежной матрицей

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

не имеет седловой точки. В этих случаях цель каждого игрока заключается в выработке оптимальной смешанной стратегии. Смешанной стратегией игрока A, имеющего в своем распоряжении m возможных стратегий, называется вектор $\overline{p}=(p_1, p_2, \dots, p_m)$, где p_i - вероятность выбора i-й стратегии $\sum_{i=1}^{m} p_i=1; p_i\ge 0$.

Если игрок B имеет в своем распоряжении n возможных стратегий, то его задача заключается в нахождении оптимального вектора $\overline{q}=(q_1, q_2, \dots, q_n)$, где q_j - вероятность выбора j-й стратегии $\sum_{j=1}^{n} q_j=1; q_j\ge 0$.

Обозначим цену игры:

$$M=\min\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}p_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2}p_i, \dots, \sum_{i=1}^{m} a_{in}p_i\right).$$

Задача игрока A заключается в том, чтобы найти такие компоненты вектора $\overline{p} = \left(p_1, p_2, \ldots, p_m\right)$, которые дают максимальное значение M. Максимальному значению M соответствует минимальное значение дроби $\frac{1}{M}$.

Получим, что

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{i1} p_i \geq M, \\ \sum_{i=1}^{m} a_{i2} p_i \geq M, \\ \quad\ldots \\ \sum_{i=1}^{m} a_{in} p_i \geq M; \end{cases} \qquad \text{или}$$

$$\begin{cases} p_1 a_{11} + p_2 a_{21} + \ldots + p_m a_{m1} \geq M, \\ p_1 a_{12} + p_2 a_{22} + \ldots + p_m a_{m2} \geq M, \\ \qquad\ldots \\ p_1 a_{1n} + p_2 a_{2n} + \ldots + p_m a_{mn} \geq M; \end{cases}$$

Обозначим:

$$x_1 = \frac{p_1}{M}; x_2 = \frac{p_2}{M}; \ldots; x_m = \frac{p_m}{M}.$$

Если разделить каждое неравенство системы приведенной выше на M, то получим:

$$\begin{cases} a_{11} \frac{p_1}{M} + a_{21} \frac{p_2}{M} + \ldots + a_{m1} \frac{p_m}{M} \geq 1, \\ a_{12} \frac{p_1}{M} + a_{22} \frac{p_2}{M} + \ldots + a_{m2} \frac{p_m}{M} \geq 1, \\ \qquad\ldots \\ a_{1n} \frac{p_1}{M} + a_{2n} \frac{p_2}{M} + \ldots + a_{mn} \frac{p_m}{M} \geq 1; \end{cases}$$

или, в новых обозначениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \geq 1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \geq 1, \\ \ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq 1; \end{cases}$$

где $x_i = \dfrac{p_i}{M} \geq 0 \left(i = 1, 2, \ldots, m\right)$.

Легко видеть, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \dfrac{p_1 + p_2 + \ldots + p_m}{M} = \dfrac{1}{M}$.

Поэтому задачу нахождения оптимального вектора $\overline{p} = \left(p_1, p_2, \ldots, p_m\right)$ можно сформулировать следующим образом.

Найти неизвестные $x_1 + x_2 + \ldots + x_m$, так, чтобы:

$Z = x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \dfrac{1}{M} \to \min$, при выполнении системы неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \geq 1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \geq 1, \\ \ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq 1; \end{cases}$$

Задача нахождения оптимального вектора $\overline{q} = \left(q_1, q_2, \ldots, q_n\right)$ формулируется в этом случае как взаимно-двойственная задача:

Найти неизвестные $y_1 + y_2 + \ldots + y_n$, так, чтобы:

$$L = y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \frac{1}{M} \to \max,$$ при выполнении системы неравенств

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \le 1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \le 1, \\ \ldots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \le 1; \end{cases}$$

где $y_j = \dfrac{q_j}{M} \ge 0 \left(j = 1, 2, \ldots, n\right).$

Пример. Найти решение игры, заданной платежной матрицей.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

		Стратегии игрока B			Минимальный элемент в строке α
		B_1	B_2	B_3	
Стратегии игрока A	A_1	-1	1	1	-1
	A_2	2	-2	0	-2
	A_3	3	4	-3	-3
Максимальный элемент в столбце β		3	4	1	

Игрок A использует логику, которая гарантирует ему максимальный выигрыш вне зависимости от поведения игрока B. **Нижняя цена игры** α= **-1.**

Игрок B использует логику, которая гарантирует ему минимальный проигрыш вне зависимости от поведения игрока A. **Верхняя цена игры** β=**1.**

Верхняя цена игры не равна нижней цене игры, значит игра не решается в чистых стратегиях. Найдем оптимальные смешанные стратегии игроков симплекс методом.

Составим задачу линейного программирования для игрока A:

$$F = y_1 + y_2 + y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 1 \\ y_1 - 2y_2 + 4y_3 \geq 1 \\ y_1 - 3y_3 \geq 1 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0$$

Составим задачу линейного программирования для игрока B:

$$L = x_1 + x_2 + x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ 2x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 \leq 1 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0$$

Полученные задачи являются парой симметричных взаимно двойственных задач.

Найдем решение задачи для игрока B.

Приведем систему ограничений к каноническому виду:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_6 = 1 \end{cases}$$

Приравняв свободные переменные нулю в получившейся системе ограничений, мы получим начальное опорное решение $X_{баз} = (0{,}0{,}0{,}1{,}1{,}1)$.

Значение функции для начального решения $L(X_{баз}) = 0$.

Составим симплекс-таблицу:

базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	свободные члены	отношение
x_4	-1	1	1	1	0	0	1	-
x_5	2	-2	0	0	1	0	1	$\frac{1}{2}$
x_6	$\boxed{3}$	4	-3	0	0	1	1	$\frac{1}{3}$
L	-1	-1	-1	0	0	0	0	-

Разделим элементы строки 3 на 3.

базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	свободные члены	отношение
x_4	-1	1	1	1	0	0	1	-
x_5	2	-2	0	0	1	0	1	$\frac{1}{2}$
x_6	$\boxed{1}$	$\frac{4}{3}$	-1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
L	-1	-1	-1	0	0	0	0	-

От элементов строки 1 отнимает соответствующие элементы строки 3, умноженные на -1.

От элементов строки 2 отнимает соответствующие элементы строки 3, умноженные на 2.

От элементов строки L отнимает соответствующие элементы строки 3, умноженные на -1.

базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	свободные члены
x_4	0	$\frac{7}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
x_5	0	$-\frac{14}{3}$	2	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_1	1	$\frac{4}{3}$	-1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
L	0	$\frac{1}{3}$	-2	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	свободные члены	отношение
x_4	0	$\frac{7}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	-
x_5	0	$-\frac{14}{3}$	2	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
x_1	1	$\frac{4}{3}$	-1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	-
L	0	$\frac{1}{3}$	-2	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	-

Разделим элементы строки 2 на 2.

базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	свободные члены	отношение
x_4	0	$\frac{7}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	-
x_5	0	$-\frac{7}{3}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
x_1	1	$\frac{4}{3}$	-1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	-
L	0	$\frac{1}{3}$	-2	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	-

От элементов строки 3 отнимает соответствующие элементы строки 2, умноженные на -1.

От элементов строки L отнимает соответствующие элементы строки 2, умноженные на -2.

базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	свободные члены
x_4	0	$\frac{7}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
x_3	0	$-\frac{7}{3}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

x_1	1	-1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
L	0	$-\frac{13}{3}$	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	свободные члены	отношение
x_4	0	$\frac{7}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{7}$
x_3	0	$-\frac{7}{3}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	-
x_1	1	-1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	-
L	0	$-\frac{13}{3}$	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	-

Разделим элементы строки 1 на 7/3.

базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	свободные члены	отношение
x_4	0	1	0	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{7}$

x_3	0	$-\frac{7}{3}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	-
x_1	1	-1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	-
L	0	$-\frac{13}{3}$	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	-

От элементов строки 2 отнимает соответствующие элементы строки 1, умноженные на -7/3.

От элементов строки 3 отнимает соответствующие элементы строки 1, умноженные на -1.

От элементов строки L отнимает соответствующие элементы строки 1, умноженные на -13/3.

базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	свободные члены
x_2	0	1	0	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$
x_3	0	0	1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
x_1	1	0	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{15}{14}$
L	0	0	0	$\frac{13}{7}$	1	$\frac{2}{7}$	$\frac{22}{7}$

Получено оптимальное решение функции.

$$X_{опт} = \left(\frac{15}{14}, \frac{4}{7}, \frac{3}{2}, 0,0,0\right)$$

$$L = \frac{22}{7} - \frac{13}{7}x_4 - x_5 - \frac{2}{7}x_6$$

Максимальное значение функции: $L_{\max} = \dfrac{22}{7}$.

Найдем решение для игрока B:

Так как $x_1 = \dfrac{15}{14}, x_2 = \dfrac{4}{7}, x_3 = \dfrac{3}{2}$, тогда цена игры

$$M = \frac{1}{L_{\max}} = \frac{7}{22}.$$

Тогда:

$$q_1 = x_1 M = \frac{15}{14}\cdot\frac{7}{22} = \frac{15}{44},$$

$$q_2 = x_2 M = \frac{4}{7}\cdot\frac{7}{22} = \frac{2}{11},$$

$$q_3 = x_3 M = \frac{3}{2}\cdot\frac{7}{22} = \frac{21}{44}$$

и вектор $\bar{q} = \left\{\dfrac{15}{44}; \dfrac{2}{11}; \dfrac{21}{44}\right\}$.

Учитывая правило формирования ответа симметричной двойственной задачи, запишем ее решение, на основании все той же последней симплекс таблицы.

$$Y_{опт} = \left(\frac{13}{7}, 1, \frac{2}{7}, 0,0,0\right),\ F_{\min} = \frac{22}{7}.$$

Так как $y_1 = \dfrac{13}{7}, y_2 = 1, y_3 = \dfrac{2}{7}$, цена игры

$$M=\frac{1}{F_{\min}}=\frac{7}{22}.$$

Тогда:

$$p_1=y_1M=\frac{13}{7}\cdot\frac{7}{22}=\frac{13}{22},$$

$$p_2=y_2M=1\cdot\frac{7}{22}=\frac{7}{22},$$

$$p_3=y_3M=\frac{2}{7}\cdot\frac{7}{22}=\frac{1}{11}$$

и вектор $\overline{p}=\left\{\frac{13}{22};\frac{7}{22};\frac{1}{11}\right\}$.

Ответ: Оптимальные смешанные стратегии для игрока А: $\overline{p}=\left\{\frac{13}{22};\frac{7}{22};\frac{1}{11}\right\}$**, для игрока В:** $\overline{q}=\left\{\frac{15}{44};\frac{2}{11};\frac{21}{44}\right\}$**. Цена игры** $M=\frac{7}{22}$**.**

Биматричные игры

Антагонистические игры, которые мы изучали ранее, описывают конфликты весьма частного вида. Более того, для большинства имеющих место в реальной жизни конфликтов антагонистические игры либо вовсе не могут считаться приемлемыми, адекватными описаниями, либо, в лучшем случае, могут рассматриваться как первые грубые приближения.

Во-первых, антагонистические игры никак не затрагивают своими описаниями конфликты с числом игроков, большим, чем два. В месте с тем, такие многосторонние конфликты не только встречаются в действительности, но являются принципиально более сложными, чем конфликты с двумя участниками, и даже не поддаются сведению к последним.

Во-вторых, даже в конфликтах с двумя участниками интересы сторон вовсе не обязаны быть противоположными; во многих конфликтах такого рода случается так, что одна из ситуаций оказывается предпочтительнее другой для обоих участников.

В-третьих, даже если любые две ситуации сравниваются игроками по их предпочтительности противоположным образом, наличие разностей в оценках этой предпочтительности оставляет место для соглашений, компромиссов и коопераций.

Наконец, в-четвёртых, содержательная острота конфликта не обязательно соответствует его формальной антагонистичности. Например, при встрече двух боевых единиц воюющих сторон обоюдное их стремление уничтожить друг друга не выражает антагонистичности конфликта: в антагонистическом конфликте цели сторон оказываются строго противоположными, и стремлению одной стороны уничтожить другую противоположным будет стремление избежать уничтожения.

В антагонистических играх можно определить общий критерий эффективности для двух конкурирующих сторон, одна из которых заинтересована в увеличении этого критерия (выигрыша), а другая - в его уменьшении (уменьшении проигрыша). В общем случае, даже если каждая из сторон игры располагает конечным числом стратегий, такого общего критерия эффективности может не быть. В этом случае каждый из игроков располагает своим критерием эффективности, своей матрицей выигрыша. Такая игра называется **биматричной.**

Биматричная игра описывается двумя матрицами выигрыша конфликтующих сторон.

Пусть у игрока А имеется т стратегий, а у игрока В- п стратегий. Выигрыши игроков задаются матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Размерности матриц **А** и **В** $(m \times n)$ обязательно совпадают. Пусть игрок А применяет свою стратегию с номером $i\ (1 \le i \le m)$, т.е. стратегию A_i, а игрок В - стратегию с номером $j\ (1 \le j \le n)$, т.е. стратегию B_j.Тогда выигрыши игроков в данной ситуации будут находиться в соответствующих платежных матрицах, на пересечении строки с номером i, и столбца с номером j. Выигрыш игрока А составит a_{ij}, а выигрыш игрока В- b_{ij}. Отрицательное значение элемента матрицы означает величину проигрыша игрока в соответствующей ситуации. Антагонистическую игру можно рассматривать как частный случай биматричной игры при **A**=–**B**. Биматричные игры, также как и антагонистические, матричные игры могут быть как в чистых, так и в смешанных стратегиях.

Целью биматричной игры может являться достижение состояния равновесия, в котором каждому игроку невыгодно односторонне отступать от входящей в ситуацию стратегии. Пара чистых стратегий (i_0, j_0) соответствует ситуации равновесия биматричной игры, если для любой стратегии i игрока A и для любой стратегии j игрока B справедливы соотношения

$$a_{ij_0} \le a_{i_0 j_0} \;,\; b_{i_0 j} \le b_{i_0 j_0}$$

Понятие ситуации равновесия обобщает понятие седловой точки матричной игры.

В биматричной игре в чистых стратегиях состояние равновесия может быть единственным, может быть несколько состояний равновесия, возможно и отсутствие состояния равновесия в чистых стратегиях.

Для нахождения состояний равновесия в чистых стратегиях отмечаются позиции максимумов в столбцах матрицы A и позиции максимумов в строках матрицы. Затем определяется пересечение этих двух множеств. Приведем несколько примеров нахождения состояний равновесия в чистых стратегиях.

<u>Пример 1.</u>

Пусть $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \underline{7} & 5 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 4 & \underline{\mathbf{8}} & \underline{9} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & \underline{5} \\ 0 & 5 & \underline{7} \\ 1 & \underline{\mathbf{6}} & 4 \end{pmatrix}$. Данная биматричная игра имеет размерность (3×3). Позиции максимумов в **столбцах** матрицы A– (1,1), (3,2), (3,3). Позиции максимумов в **строках** матрицы B– (1,3),(2,3),(3,2). Соответствующие значения элементов матриц подчеркнуты. Пересечению этих двух множеств соответствует одна пара стратегий (3, 2). Эти элементы матриц A и B выделены жирным шрифтом. Таким образом, данная биматричная игра обладает одним состоянием равновесия в чистых стратегиях (3, 2).

<u>Пример 2.</u>

Пусть $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\underline{\mathbf{7}} & 5 & 1\\ 6 & 3 & 2\\ 4 & \underline{\mathbf{8}} & \underline{9}\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\underline{\mathbf{8}} & 2 & 5\\ 0 & 5 & \underline{7}\\ 1 & \underline{\mathbf{6}} & 4\end{pmatrix}$. В данной биматричной игре позиции максимумов в столбцах матрицы А– (1,1), (3,2), (3,3). Позиции максимумов в строках матрицы В– (1,1),(2,3),(3,2). Пересечению этих двух множеств соответствуют две пары стратегий – (1, 1) и (3, 2). Данная биматричная игра обладает двумя состояниями равновесия в чистых стратегиях.

Пример 3.

Пусть $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\underline{7} & \underline{5} & 1\\ 6 & 3 & 2\\ 4 & 0 & \underline{9}\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & 2 & \underline{5}\\ 0 & 5 & \underline{7}\\ 1 & \underline{6} & 4\end{pmatrix}$. В данной биматричной игре позиции максимумов в столбцах матрицы А– (1,1), (1,2), (3,3). Позиции максимумов в строках матрицы В– (1,3),(2,3),(3,2). Два множества позиций не пересекаются, следовательно, ситуации равновесия в чистых стратегиях в данной биматричной игре нет.

В отличие от антагонистической матричной игры в биматричных играх ситуацию равновесия не всегда можно считать решением игры. Проиллюстрируем это на следующем примере.

Пример 4.

"Игроки" – жена (игрок А) и муж (игрок В). Каждый игрок имеет две чистые стратегии: 1 - пойти в театр и 2 - пойти на футбол. Жена предпочитает театр, муж- футбол, но каждый предпочитает совместное времяпрепровождение раздельному. В соответствии с этими предпочтениями расставлены выигрыши, представленные в балльной шкале в платежных матрицах **A** и **B**:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}.$$

В этой игре имеется две ситуации равновесия в чистых стратегиях: (1, 1) и (2,2) . Однако они не являются эквивалентными. Действительно, выигрыш игрока А в ситуации равновесия (1, 1), равный 4, не соответствует выигрышу игрока А в ситуации равновесия (2, 2), равному 1. И наоборот, выигрыш игрока В в ситуации равновесия (1, 1), равный 1, не соответствует выигрышу игрока В в ситуации равновесия (2, 2), равному 4. Стратегии, входящие в ситуации равновесия, не взаимозаменяемы: пары стратегий (1, 2) и (2, 1) ситуациями равновесия не являются. Таким образом, несмотря на наличие в данной игре двух ситуаций равновесия в чистых стратегиях, "решения" (в интуитивном смысле) она не имеет и исход игры предсказать трудно.

Даже в том случае, когда в биматричной игре имеется единственная ситуация равновесия, ее зачастую трудно считать решением игры. Это подтверждается следующим примером.

Пример 4. Дилемма заключенного.

"Игроками" являются двое задержанных, обвиняемых в совершении тяжелого преступления. Их стратегиями- сознаваться или не сознаваться. Если оба сознаются (в матрице это 1-я строка и 1-й столбец), то получат большой срок заключения, но не максимальный. Если оба не сознаются (2-я строка и 2-й столбец), то их осудят за менее тяжкие преступления, в которых они уже уличены. Наконец, если сознается только один, то его срок заключения будет значительно снижен, а другой получит максимальный срок. Платежные матрицы игроков имеют следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -8 & -2 \\ -10 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -8 & -10 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Числа в матрицах- это сроки заключения, взятые с противоположным знаком. В этой игре пара стратегий (1, 1) является единственной ситуацией равновесия. Ситуация же (2, 2), более выгодная для обоих игроков, равновесной не является, так как каждому игроку выгодно односторонне отступить от стратегии, в нее входящей, рассчитывая получить более низкий срок заключения в 2 года, вместо 4-х лет. Это означает, что «выгодное» решение (2, 2) является неустойчивым. Таким образом, особенностью биматричных игр состоит в возможности наличия противоречия между выгодностью и устойчивостью. Это противоречие может быть разрешено, если допустить кооперацию игроков, т.е. согласованность их действий в выборе стратегий в результате предварительной договоренности игроков. Мы же здесь предполагаем, что выбор стратегий игроками производится независимо друг от друга.

Алгоритм поиска ситуации равновесия для биматричной игры произвольной раз- мерности достаточно сложен, особенно в том случае, когда решение ищут в смешанных стратегиях. Поэтому прежде чем приступать к определению ситуации равновесия в биматричной игровой задаче необходимо сначала попытаться, если это возможно, сократить размерность задачи за счет удаления заведомо невыгодных стратегий с помощью применения отношений доминирования.

Отношения доминирования в биматричной игре отличаются от отношений доминирования в антагонистической матричной игре. В биматричной игре возможно использование различных критериев задачи. Каждая из конфликтующих сторон может стремиться максимизировать свой выигрыш, или минимизировать выигрыш противника, или минимизировать свой проигрыш, или максимизировать проигрыш противника. Возможно использование и других критериев или использовать сочетания различных критериев. Рассмотрим пример редуцирования, уменьшения размерности биматричной игры за счет исключения заведомо невыгодных стратегий.

Пример 5.

Заданы платежные матрицы (матрицы выигрышей) игроков A и B.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 7 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Требуется редуцировать размерность задачи при условии, что игрок A хочет максимизировать свой выигрыш и минимизировать выигрыш игрока B.

Сначала рассмотрим первый критерий задачи- сторона A хочет максимизировать свой выигрыш.

По этому критерию из матрицы **A** удаляются доминирующие строки. При сравнении выигрышей при стратегиях A_2 и A_4 видно, что все элементы 4- й строки не меньше соответствующих элементов 2- й строки. Это означает, что игроку A заведомо невыгодно использовать стратегию A_2, поэтому эта стратегия и 2- я строка удаляется из матриц **A** и **B**. В результате, после отработки первого критерия платежные матрицы игроков выглядят следующим образом:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь переходим ко второму критерию- игрок А хочет минимизировать выигрыш игрока В.

По данному критерию из матрицы **В** удаляются доминирующие строки. Строка матрицы **В**, соответствующая стратегии A_3 (вторая строка в редуцированной матрице **В**) является доминирующей по отношению к строке, соответствующей стратегии A_1 и удаляется из матрицы **В.** Из матрицы **А** также удаляется строка, соответствующая стратегии A_3.

Таким образом, после применения отношений доминирования платежные матрицы (матрицы выигрышей) игроков А и В принимают вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Как уже отмечалось выше, в биматричной игре состояние равновесия в чистых стратегиях может отсутствовать. Однако, доказана

Теорема (Нэша). Каждая биматричная игра имеет, по крайней мере, одну ситуацию равновесия, возможно, в смешанных стратегиях.

В качестве примера рассмотрим случай, когда каждый игрок имеет две чистые стратегии. В этом случае матрицы **А** и **В** равны :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Смешанные стратегии для игроков А и В имеют вид :

$p=(p_1, p_2)$, $q=(q_1, q_2)$. Здесь p_1, $p_2=1-p_1$- вероятности, с которыми игрок А использует стратегию A_1 и, соответственно, стратегию A_2; q_1, $q_2=1-q_1$- вероятности, с которыми игрок В использует стратегию B_1 и, соответственно, стратегию B_2. $0 \le p_1, p_2 \le 1$; $0 \le q_1, q_2 \le 1$.

Средний выигрыш игрока А равен

$$S_A(p,q)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}a_{ij}p_iq_j,\quad (\mathrm{i}=\overline{1,2}),\ (\mathrm{j}=\overline{1,2}),$$

(1)

а средний выигрыш игрока В

$$S_B(p,q)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}b_{ij}p_iq_j,\quad (\mathrm{i}=\overline{1,2}),\ (\mathrm{j}=\overline{1,2})$$

(2)

Пусть p и q- состояние равновесия биматричной игры. Это означает, что любое отклонение p* игрока А от стратегии p, равно как и любое отклонение q* игрока В от стратегии q не может приводить к увеличению их выигрыша, т.е.

$$S_A(p^*,q)\le S_A(p,q)\ ,\qquad S_B(p,q^*)\le S_B(p,q)\ .$$

(3)

Первое из приведенных выше неравенств будет выполняться для любого p*, если оно выполняется для p_1*=(1, 0) и для p_0*= (0. 1). Аналогично, второе из приведенных выше неравенств будет выполняться для любого q*, если оно выполняется для q_1* =(1, 0) и для q_0* = (0, 1).

Подставляя в неравенства (3) вместо p* и q* поочередно p_1*, p_0*, q_1*, q_0* получим систему четырех соотношений

$$S_A\left(p_1^*,q\right)\le S_A\left(p,q\right)\qquad ,\qquad S_A\left(p_0^*,q\right)\le S_A\left(p,q\right),$$

$$S_B\left(p,q_1^*\right)\le S_B\left(p,q\right),\ S_B\left(p,q_0^*\right)\le S_B\left(p,q\right).\ (4)$$

Анализ этих неравенств позволяет установить все возможные состояния равновесия биматричной игры. Если в биматричной игре элементы, стоящие в одном столбце матрицы А, и элементы, стоящие в одной строке матрицы В, попарно различны, то ситуации равновесия могут быть либо чистыми, либо вполне смешанными (то есть такими, в которых обе чистые стратегии применяются с положительными вероятностями). Вполне смешанная ситуация $\left(p,q\right)$ будет ситуацией равновесия в биматричной игре при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} b_{11}p_1 + b_{21}p_2 = b_{12}p_1 + b_{22}p_2 \ , \\ p_1, p_2 > 0 \ , \\ p_1 + p_2 = 1 \ . \end{cases}$$

(5)

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = a_{21}q_1 + a_{22}q_2 \ , \\ q_1, q_2 > 0 \ , \\ q_1 + q_2 = 1 \ . \end{cases}$$

(6)

Введем обозначения

$$\beta = \frac{b_{22} - b_{21}}{(b_{11} + b_{22}) - (b_{12} + b_{21})} \ , \ \alpha = \frac{a_{22} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} \ .$$

Получаем, что система (5) имеет решение (единственное) тогда и только тогда, когда $0<\beta<1$, причем в этом случае решение системы (5) есть $p_1= \beta$, $p_2= 1 - \beta$. Аналогичным образом получаем, что система (6) имеет решение (единственное) тогда и только тогда, когда $0<\alpha<1$, и в этом случае решение системы (6) есть $q_1= \alpha$, $q_2= 1 - \alpha$.

Итак, если $0< \beta,\alpha<1$, то , биматричная игра имеет вполне смешанную, причем единственную, ситуацию равновесия. Например, для игры «Семейный спор» (Пример 4) смешанная ситуация равновесия находится так:

$$\alpha = \frac{1-0}{5-0} = \frac{1}{5} \quad , \quad \beta = \frac{4-0}{5-0} = \frac{4}{5} \quad , \quad p = \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right) \quad ,$$

$$q = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

Выигрыш обоих игроков при использовании такой смешанной стратегии составит .4/5. Как видим, выигрыш игроков в состоянии равновесия невелик. Это произошло потому, что, как уже отмечалось выше, выбор стратегий в биматричной игре производится игроками независимо друг от друга. Ситуация резко изменяется, если позволить игрокам предварительно договариваться друг с другом. Если игра повторяется многократно, то игрокам имеет смысл с вероятностью 0.5 выбирать каждую из двух чистых стратегий (A_1, B_1) и (A_2, B_2). Тогда средний выигрыш каждого составит 2.5 единицы. Но соответствующая ситуации точка не лежит во множестве точек, определяемом правилами бескоалиционной биматричной игры, т.е. не может быть реализована, если игроки выбирают свои стратегии независимо друг от друга.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Исследование операций в экономике: Учебное пособие для вузов под ред. Н.Ш.Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2004.
2. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учебное пособие для вузов под ред. В.В.Федосеева. – М.: ЮНИТИ, 2002.
3. Общий курс высшей математики для экономистов: Учебник под ред. В.И.Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2004.
4. Шапкин А.С., Мазаева Н.П. Математические методы и модели исследования операций: Учебник. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К^0», 2004.
5. Афанасьев М.Ю., Багриновский К.А., Матюшок В.М. Прикладные задачи исследования операций. Учебное пособ. – М.: ИНФРА-М, 2006.
6. Владимирский Б.М., Горстко А.Б., Ерусалимский Я.М. Математика. Общий курс.: Учебник. – СПб.: «Лань», 2006.
7. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование: Учебное пособ. – М.: Высш. школа, 1980.