ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЦЕНТР ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Математика»

Учебно-методическое пособие

и варианты заданий для выполнения контрольной работы по дисциплине

«Математическая статистика»

Авторы
Ворович Е. И., Золотых С. А., Тукодова О. М., Фролова Н. В.

Ростов-на-Дону, 2016

Аннотация

Методическая разработка предназначена для студентов очной формы обучения всех специальностей. Содержит методические указания и варианты заданий для выполнения контрольной работы по дисциплине «Математическая статистика». Даны основные определения и формулы по курсу «Математическая статистика», используемые при решении контрольных заданий. В контрольной работе представлены задачи, содержащие тридцать вариантов.

Авторы

Доцент, к.т.н.

Ворович Е. И.

Старший преподаватель

Золотых С. А.

Доцент, к.т.н.

Тукодова О. М.

Старший преподаватель

Фролова Н. В.

Оглавление

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Основные определения и формулы

Статистикой называется наука о сборе, классификации, обработке и анализе качественных и количественных данных, о получении из фактов обобщающих выводов.

Математическая статистика – раздел математики, посвященный математическим методам систематизации, обработки и использовании статистических данных для научных и практических выводов.

В статистике применяют два основных метода: метод сплошных наблюдений (описательная статистика) и выборочный метод.

Метод сплошных наблюдений предполагает изучение всех элементов совокупности. Он применяется, когда количество изучаемых объектов не слишком велико. При большом количестве изучаемых объектов применяется выборочный метод, при котором из всей совокупности объектов выбирают случайным образом ограниченное число объектов и их подвергают изучению. В данной лабораторной работе применяется выборочный метод к исследованию закона распределения случайной величины.

Цель данной работы состоит в том, чтобы, провести выборочное обследование, вычислить с возможно большей степенью точности вероятностные характеристики рассматриваемой случайной величины, т.е. закон распределения и важнейшие числовые характеристики.

Обработка выборки

В соответствии с выборочным методом из совокупности всех значений случайной величины, которую называют генеральной совокупностью, случайным образом выбирают n значений. Полученную совокупность значений называют выборкой объема n.

Затем в выборке производится группировка элементов и разбиение на классы. Для этого в выборке разыскивается минимальный $(x_{\min})$ и максимальный $(x_{\max})$элементы. Затем все элементы заключаются в интервал $[a;b]$ $(a \le x_{\min}, b \ge x_{\max})$, который разбивает на k частичных интервалов (классов). Ширина каждого класса равна $h = \dfrac{b-a}{k}$. В качестве представителя каждого класса берут се- редину интервала:

$x_1 = a + \frac{h}{2}$, $x_{i+1} = x_i + h$ $(i = 1,\dots,k-1)$. Если в i-ый класс попало n_i значений случайной величины, то считают, что в данной выборке n_i раз встретилось значение x_i.

Разбиение на классы рекомендуется производить таким образом, чтобы выполнялось условие $n_i \geq 5$. При объеме выборки $n = 100$ можно взять число $k \geq 5$.

Составляется статистическое распределение выборки или вариационный ряд. Данные заносятся в таблицу:

x_i	x_1	x_2	...	x_k
Классы	$[a, a+h)$	$[a+h, a+2h)$	...	$[b-h, b)$
Частоты n_i	n_1	n_2	...	n_k
Относительные частоты $\omega_i = \frac{n_i}{n}$	ω_1	ω_2	...	ω_k

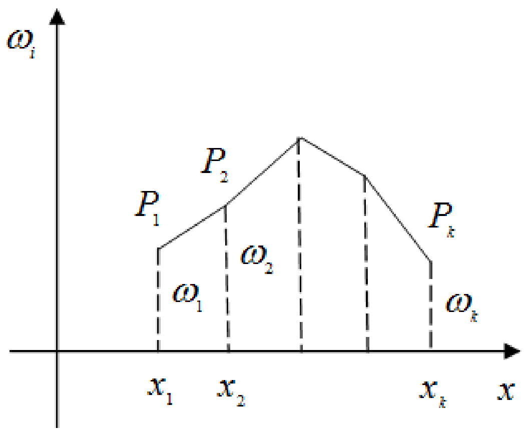
Необходимо следить за тем, чтобы выполнялись соотношения

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n, \qquad \sum_{i=1}^{k} \omega_i = 1.$$

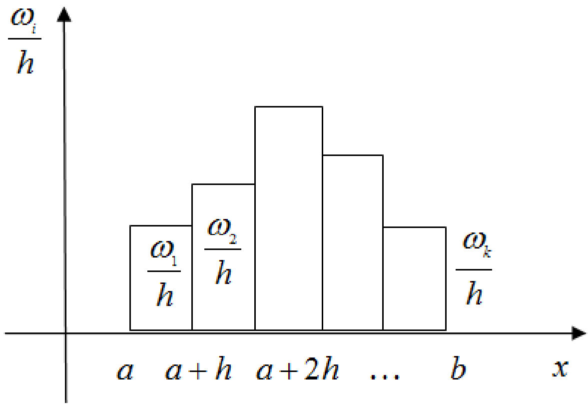
Полигон. Гистограмма. Эмпирическая функция распределения

Для графической иллюстрации статистического распределения строятся полигон и гистограмма относительных частот.

Для построения полигона следует отложить на плоскости точки $P_i(x_i;\omega_i)$ и соединяют их отрезками прямых.



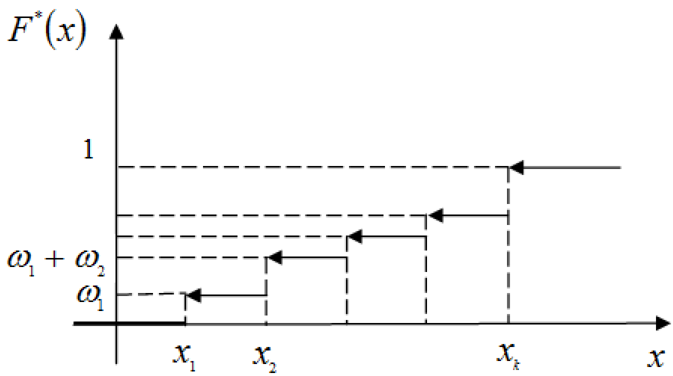
Для получения гистограммы на оси Ох откладываются отрезки (классы) ширины h, на каждом отрезке, как на основании, строится прямоугольник высотой $\dfrac{\omega_i}{h}$, так чтобы площадь прямоугольника была равна ω_i.



Далее строится эмпирическая функция распределения:

$$F^*(x)=\begin{cases} 0, \ x \le x_1 \\ \omega_1, \ x_1 < x \le x_2 \\ \omega_1+\omega_2, \ x_2 < x \le x_3 \\ \dots \\ \omega_1+\omega_2+\dots+\omega_i, \ x_i < x \le x_{i+1} \\ \dots \\ 1, \ x > x_k \end{cases}$$

График функции $F^*(x)$:



Вариационный ряд является статистическим аналогом распределения случайной величины X. В этом смысле полигон и гистограмма аналогичны кривой распределения, а эмпирическая функция распределения – функции распределения случайной величины X.

Вариационый ряд содержит достаточно полную информацию о вариации случайной величины. Однако на практике оказывается достаточным знание лишь сводных характеристик вариационных рядов. Расчет этих характеристик представляет собой второй этап обработки данных наблюдений.

Числовые характеристики, определяемые по выборке

Основными числовыми характеристиками являются:

Выборочная средняя – по определению это сумма произведений всех вариантов на соответствующие частоты, деленная на сумму этих частот:

$$M_{в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i\,;$$

Выборочная дисперсия – средняя арифметическая квадратов отклонений вариантов от их выборочной средней:

$$D_{в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} (x_i - M_{в})^2 \cdot n_i\,;$$

Выборочное среднее - квадратичное отклонение:

$$\sigma_{в} = \sqrt{D_{в}}\,.$$

<u>Замечание</u>. Поскольку $D_{в}$ *является смещенной оценкой дисперсии, то более правильным будет взять исправленную оценку* $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} (x_i - M_{в})^2 \cdot n_i$ *. Одна-*

ко, при достаточно большом объеме выборки $(n \geq 20)$ *расхождением между* $D_в$ *и* S^2 *можно пренебречь.*

Еще одной характеристикой является безразмерная величина - коэффициент вариации:

$$\upsilon = \frac{\sigma_в}{M_в} \cdot 100\% .$$

Заменяя математическое ожидание случайной величины M выборочной средней $M_в$, можно допустить некоторую ошибку. Среднее - квадратичное значение этой ошибки называется коротко срединной ошибкой и обозначается m. При достаточно большом числе испытаний срединная ошибка вычисляется по формуле:

$$m = \frac{\sigma_в}{\sqrt{n}} .$$

Вводятся также понятие относительной срединной ошибки, определяемой формулой $\delta = \frac{m}{M_в} \cdot 100\%$ или, что то же самое: $\delta = \frac{\sigma_в}{\sqrt{n} M_в} \cdot 100\%$.

Найдем отношение коэффициента вариации к относительной срединной ошибке:

$$\frac{\upsilon}{\delta}=\frac{\sigma_{в}}{M_{в}}\cdot\frac{\sqrt{n}M_{в}}{\sigma_{в}}=\sqrt{n}\text{, откуда } n=\left(\frac{\upsilon}{\delta}\right)^{2}.$$

Зная коэффициент вариации υ, можно задавать число δ и рассчитывать по полученной формуле количество испытаний n, необходимых для того, чтобы относительная срединная ошибка не превосходила δ.

Теоретическое распределение

Сравнив полигон и гистограмму относительных частот с известными графиками плотностей распределения вероятностей, выдвигаем гипотезу о некотором законе распределения с плотностью распределения $f(x)$. Статистической гипотезой называется любое предположение о виде или параметрах неизвестного закона распределения.

Такую гипотезу принято называть нулевой гипотезой и обозначать H_0. Теперь необходимо сравнить гипотезу H_0 с реальностью. С этой целью сравниваются два вариационных ряда. Первый вариационный ряд - это ряд полученной из экспериментальной выборки, приближенно отражающий свойства случайной величины на генеральной совокупности ее значений. Распределение, описываемое этим рядом, называют эмпирическим распределением. Второй вариационный ряд - это ряд, который должен был бы получиться, если бы выборка того же объема n идеально реализовала распределение, соответствующее гипотезе H_0. Такое распределение называют теоретическим распределением.

Если расхождение между эмпирическим и теоретическим распределениями велико, то это говорит о том, что гипотеза H_0 плохо согласуется с реальностью и поэтому ее следует отвергнуть.

Для того, чтобы осуществить описанное сравнение, прежде всего, необходимо знать частоты теоретического распределения. Условимся коротко называть эти частоты теоретическими частотами и обозначать $\tilde{n}_i \ (i = 1, 2, \ldots, k)$.

Теоретические относительные частоты вычисляются по формулам

$$p_i = P\left(a + (i-1)h < X < a + ih\right) = \int\limits_{a+(i-1)h}^{a+ih} f(x)dx.$$

Обычно здесь пользуются приближенной формулой

$$p_i \approx h \cdot f(x_i).$$

Теоретические частоты равны

$$\tilde{n}_i = n \cdot p_i = n \cdot h \cdot f(x_i).$$

Нормальное распределение

Если выдвинута гипотеза о нормальном законе распределения, то в качестве плотности $f(x)$ берется функция

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_в \sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-M_d)^2}{2\sigma^2{}_в}}.$$

Значения p_i вычисляются по формулам:

$$p_i = h \cdot \frac{1}{\sigma_в \sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-M_в)^2}{2\sigma^2{}_в}} = \frac{h}{\sigma_в} \varphi\left(\frac{x_i - M_в}{\sigma_в}\right).$$

(Значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$ определяются по таблице).

Критерий согласия Пирсона

Для того, чтобы принять или отвергнуть гипотезу о каком-либо конкретном законе распределения случайной величины, нужно определенным образом оценить меру расхождения между теоретическими и эмпирическими частотами.

Правило, по которому нулевая гипотеза H_0 принимается или отвергается, называется статистическим критерием.

Для того, чтобы оценить реальность H_0, рассматривается случайная величина K – критерий, характеризующая расхождение между теоретическим и эмпирическим распределением, закон распределения которой при достаточно больших n известен и практически не зависит от закона распределения случайной величины X. Для решения этой задачи существуют критерии согласия.

В данной работе применяется наиболее часто используемый критерий согласия χ^2- Пирсона, в соответствии с которым в качестве меры расхождения K

(статистического критерия) берется величина $\chi^2_{набл}$, определяемая формулой:

$$\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - \tilde{n}_i)^2}{\tilde{n}_i} = n \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{(\omega_i - p_i)^2}{p_i}.$$

Известно, что величина $\chi^2_{набл}$ подчиняется χ^2-распределению с $l = k - r - 1$ степенями свободы, где k - число классов, r - число параметров распределения. (В приведенном выше примере нормального распределения число параметра $r = 2$). При выборе уровня значимости α (α - вероятность, того, что будет отвергнута правильная гипотеза) вопрос о принятии гипотезы определяется условием $P(\chi^2_{набл} \geq \chi^2_{кр}) = \alpha$, где $\chi^2_{кр}$ - критическое значение χ^2-распределения.

Таким образом, если выполнено неравенство $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$, то гипотеза может быть принята; если $\chi^2_{набл} \geq \chi^2_{кр}$, то гипотеза отвергается.

Ниже приводится таблица критических значений χ^2-распределения:

Число степеней свободы l	α	
	0,01	0,05
1	6,6	3,8
2	9,2	6,0
3	11,3	7,8
4	13,3	9,5
5	15,1	11,1
6	16,8	12,6
7	18,5	14,1
8	20,1	15,5
9	21,7	16,9
10	23,2	18,3

Образец решения задачи

Дана выборка объема $n = 100$:

282	253	308	313	314	278	126	211	266	241	218	176	132
426	272	198	375	246	327	194	286	349	328	210	280	276
139	217	296	218	293	325	284	176	247	333	418	226	165
88	252	276	210	142	184	236	285	212	199	197	262	268
241	251	332	302	308	236	248	375	340	274	75	297	187
289	248	379	310	365	288	200	297	375	219	200	230	213
125	362	276	347	320	306	176	296	374	363	295	185	326
259	292	372	329	177	295	282	166	233				

Требуется:

1) составить статистическое распределение, полагая число классов равным 5;
2) построить гистограмму;
3) построить полигон частот;
4) определить M, σ, υ;
5) вычислить коэффициент вариации;
6) определить относительную срединную ошибку;
7) определить количество испытаний, необходимых для того, чтобы относительная срединная ошибка не превосходила 2%;
8) найти теоретические частоты нор-

мального распределения;

9) построить (на одном чертеже) полигон частот эмпирического и теоретического нормального распределений;

10) применить критерий Пирсона для исследования согласия теоретического и эмпирического распределений.

Решение:

По данным таблицы определяем границы выборки:

$$x_{\min} = 75,\ x_{\max} = 426.$$

Возьмём: $a = 70$, $b = 430$.

Тогда: $h = \dfrac{430-70}{5} = \dfrac{360}{5} = 72$.

Далее последовательно:

а) разбиваем выборку на классы;

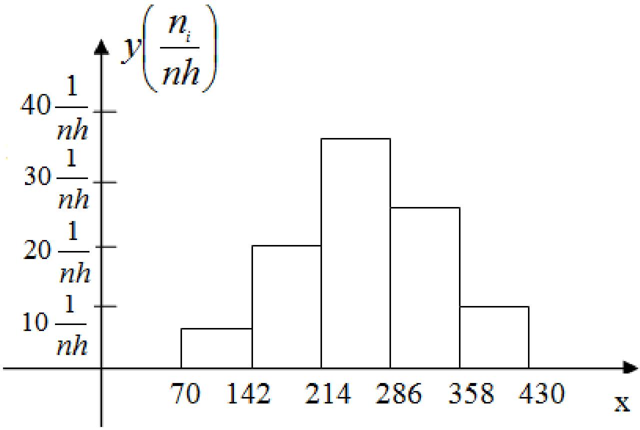
б) определяем середины классов;

в) находим частоты вариант (то есть, количество измерений, попавших в каждый класс);

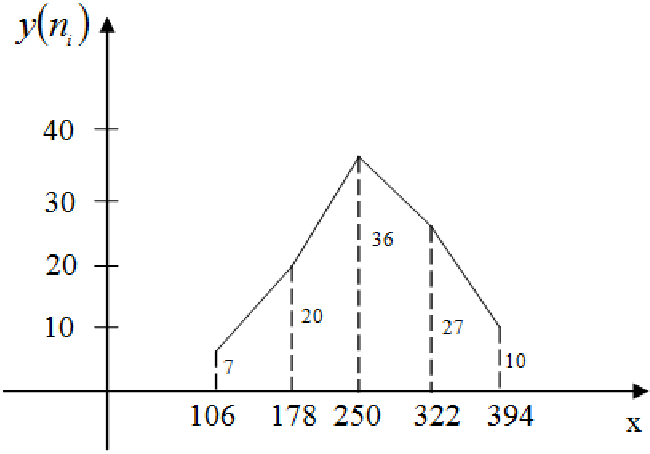
г) составляем статистическое распределение.

Границы классов	70_142	142_214	214_286	286_358	358_430
Середины классов x_i	106	178	250	322	394
Частоты n_i	7	20	36	27	10
Относительные частоты $\omega_i = \dfrac{n_i}{100}$	0,07	0,2	0,36	0,27	0,1

Строим гистограмму:



Строим полигон частот:



Вычисляем числовые характеристики построенного вариационного ряда:

$$M_в = 259,\ \sigma_в = 77,\ \upsilon = 30\%.$$

Определяем срединную ошибку:

$$m = \frac{77}{\sqrt{100}} = 7{,}7.$$

Относительная срединная ошибка:

$$\delta = \frac{m}{M} \cdot 100\% = \frac{7{,}7}{259} \cdot 100\% = 3\%.$$

Определяем количество испытаний, необходимых для того, чтобы относительная срединная ошибка не превосходила 2% (при коэффициенте вариации $\upsilon = 30\%$)

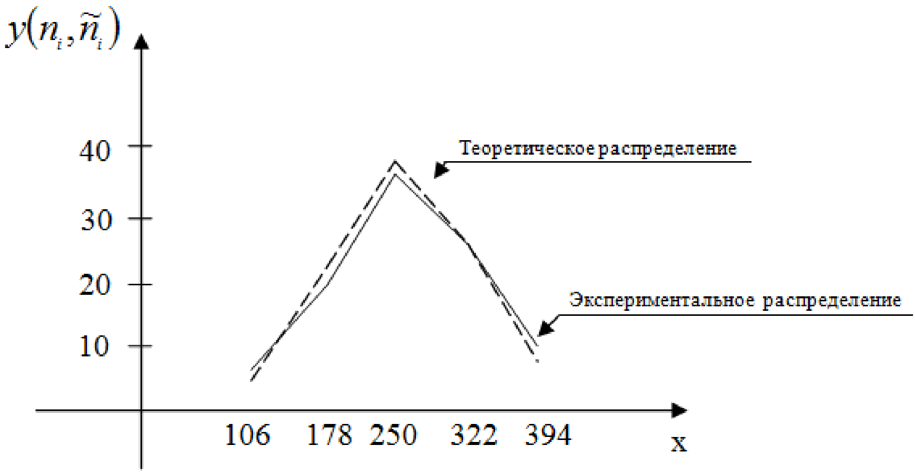
$$n = \left(\frac{\upsilon}{\delta}\right)^2 = \left(\frac{30}{2}\right)^2 = 225.$$

Теоретическое распределение

Найдём теоретические частоты нормального распределения:

Середины классов x_i	106	178	250	322	394
Теоретические частоты $\tilde{n}_i$	5	22	37	27	8
Экспериментальные частоты n_i	7	20	36	27	10

Строим полигоны частот теоретического и эмпирического распределений:



Итак, нами найдены теоретические частоты нормального распределения. Внешнее сравнение с полигоном частот эмпирического распределения говорит о хорошем согласии эмпирического распределения с нормальным распределением. Дальше требуется с помощью критерия Пирсона проверить согласие эмпирического распределения с теоретическим распределением.

Выбираем уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

Число степеней свободы распределения χ^2 определяется формулой $l = k - 1 - r$, где k – число классов, r – число параметров распределения.

В рассматриваемом примере во всех трёх случаях $k = 5$, $r = a$. Значит, $l = a$.

При $\alpha = 0{,}05$ по таблиц распределения находим $\chi^2_{кр} = 6{,}0$.

Вычисляем $\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{5} \frac{(n_i - \tilde{n}_i)^2}{\tilde{n}_i}$.

Нормальное распределение: $\chi^2_{набл} = 1{,}509 < \chi^2_{кр}$.

Это значит, что при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ выборочные данные не дают оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении.

Варианты заданий

Вариант 1

83	135	70	138	144	136	133	131	127	122	115	104	136
102	99	114	126	106	96	116	125	107	97	117	126	111
105	129	99	90	106	113	134	110	107	130	101	94	111
119	93	127	70	129	131	123	119	109	90	115	121	102
77	105	107	123	94	137	90	86	98	104	115	136	114
112	83	115	118	99	133	94	88	102	108	122	95	135
90	85	97	103	113	129	108	102	122	82	126	131	122
116	104	142	104	103	116	118	100	71				

Вариант 2

690	441	641	695	558	449	614	670	499	807	475	446	544
600	738	549	488	628	715	562	482	637	722	577	508	672
940	662	653	539	937	538	583	660	207	664	669	558	400
591	623	357	641	660	523	845	513	503	610	706	533	423
578	620	260	624	627	451	886	766	660	616	476	691	816
676	660	559	378	584	608	889	606	603	337	617	630	444
686	757	644	606	450	661	727	604	545	746	489	407	534
572	691	467	797	430	381	474	510	587				

Вариант 3

118	105	82	106	113	99	93	108	122	107	104	93	120
117	118	106	104	124	125	119	120	96	132	127	126	101
86	130	111	116	123	128	133	104	99	139	121	115	133
93	107	96	111	135	101	134	116	110	119	112	159	114
109	108	138	110	116	138	113	124	99	106	115	107	137
117	76	103	107	133	96	125	146	103	100	93	132	66
108	130	126	100	101	111	110	118	103	145	132	129	116
89	87	109	90	104	154	128	89	125				

Вариант 4

1000	739	671	840	944	745	615	812	876	620	950	1071	925
902	793	631	856	944	772	657	860	968	779	682	844	1022
844	804	512	829	854	608	917	997	860	806	572	851	896
706	1103	690	672	801	900	641	999	512	1049	1166	1041	1032
977	931	859	754	1137	747	739	902	496	925	952	836	747
1030	703	652	797	882	601	946	1037	907	872	745	1178	742
738	795	462	911	972	803	680	908	1074	887	867	717	1042
675	625	760	830	1042	798	766	994	701				

Вариант 5

355	361	295	255	291	311	435	276	212	181	337	335	317
332	394	343	194	369	249	327	277	221	109	98	128	339
386	294	318	431	148	165	320	340	321	312	378	447	287
187	297	219	267	230	445	244	381	281	91	206	249	300
218	194	231	278	254	266	276	174	345	180	197	262	277
421	350	332	211	418	369	359	325	167	386	362	252	336
249	383	222	232	394	284	226	337	226	192	249	217	293
257	463	289	425	66	278	121	422	446				

Вариант 6

33	41	50	36	29	41	47	34	20	35	37	48	28
64	22	59	17	64	15	9	15	15	18	19	22	25
29	33	39	47	30	57	27	23	30	33	40	49	33
23	36	38	50	33	25	36	39	52	35	30	41	46
32	59	30	29	35	42	57	40	30	58	37	36	48
26	53	66	52	52	47	43	34	55	31	28	37	41
57	40	38	55	36	33	44	58	41	39	18	40	41
18	41	42	27	47	52	45	39	23				

Вариант 7

111	109	123	85	116	116	106	101	126	131	117	138	120
108	119	148	39	131	82	130	133	139	123	102	121	108
143	138	105	95	119	138	105	111	113	99	108	105	140
117	116	101	80	111	103	123	124	129	149	115	128	170
111	128	107	143	125	86	121	143	125	105	137	113	120
134	117	135	102	120	122	88	123	89	140	91	121	132
92	120	132	125	142	154	121	110	124	108	115	123	120
114	95	114	134	113	114	113	121	48				

Вариант 8

661	686	570	456	629	691	641	411	579	616	188	616	745
616	413	654	694	571	468	637	709	567	482	647	728	378
586	523	698	392	738	795	709	684	611	512	715	398	709
764	877	757	751	697	651	571	385	598	625	388	653	510
682	559	429	604	649	455	714	839	703	692	613	524	607
733	448	216	450	451	259	589	706	509	368	535	559	685
677	421	728	810	706	687	612	519	725	427	813	390	703
333	423	449	510	572	669	430	723	813				

Вариант 9

105	957	926	847	128	1006	682	568	720	767	903	561	701
959	1098	919	883	769	533	800	831	428	839	847	615	767
914	998	857	904	536	843	882	677	1010	597	420	613	992
629	721	799	640	690	462	709	727	858	1041	826	795	826
1219	764	793	1032	755	714	887	1096	873	859	689	987	738
583	1104	553	512	612	654	737	827	997	772	709	899	656
1140	893	886	745	436	757	769	941	649	1107	629	606	606
716	783	917	637	1023	550	1160	536	523				

Вариант 10

587	775	561	536	351	619	740	577	539	378	646	143	402
651	656	544	470	153	155	480	686	410	320	473	530	402
802	513	546	837	486	575	698	414	337	486	554	229	1058
573	595	437	192	448	459	621	315	700	945	697	695	402
314	550	430	738	385	330	456	521	729	479	435	631	617
287	688	779	653	624	530	417	680	324	849	309	239	523
376	427	524	684	458	383	559	679	489	416	622	219	368
642	664	553	473	168	480	437	707	432				

Вариант 11

264	262	371	259	251	377	234	292	293	295	281	347	359
384	255	246	145	492	345	255	275	403	403	301	172	229
375	382	343	233	227	311	226	131	310	324	130	415	291
228	124	369	195	228	313	392	200	78	203	181	296	187
325	214	358	81	350	383	246	200	401	276	322	283	346
318	153	214	308	176	370	157	329	291	101	279	294	302
282	236	167	402	233	263	293	23	297	248	215	347	426
309	322	284	164	250	409	93	181	401				

Вариант 12

266	329	376	448	543	766	516	489	816	745	461	658	256
364	132	367	370	471	562	207	576	591	435	168	441	696
448	603	261	639	682	563	496	283	534	573	366	682	366
229	716	763	668	630	546	440	753	404	364	495	582	583
317	648	746	606	568	441	845	432	422	566	760	536	525
507	245	530	554	332	624	721	573	526	353	609	724	318
561	516	320	575	642	479	372	572	687	507	441	767	468
353	175	365	375	473	567	233	590	612				

Вариант 13

56	66	55	55	51	48	43	35	58	34	32	41	43
49	35	28	40	45	29	21	21	55	59	53	51	42
46	42	33	51	25	57	20	64	19	18	22	24	21
28	32	37	44	17	44	45	35	9	35	35	44	40
63	44	44	33	54	28	22	31	33	40	49	34	41
25	37	40	54	37	34	47	20	48	50	42	37	55
60	36	35	46	20	47	49	41	35	52	30	23	41
33	36	44	17	45	46	36	23	39				

Вариант 14

650	957	318	959	962	871	793	568	835	878	661	985	820
626	1038	1158	1029	1020	961	911	831	700	958	550	1013	878
1121	998	984	915	850	728	1023	677	613	754	819	1012	992
772	721	910	456	925	941	287	727	984	641	468	664	941
687	794	904	634	998	492	1037	1096	1009	986	924	859	553
748	1104	734	720	873	1004	850	827	597	882	943	788	899
679	893	1034	857	822	601	879	941	784	672	883	1005	460
833	783	1141	777	771	968	682	536	724				

Вариант 15

114	116	107	122	117	99	115	89	108	111	107	132	90
133	81	113	122	108	124	132	112	88	115	124	92	114
106	120	117	129	118	114	122	102	135	104	134	128	122
110	111	135	126	119	121	85	119	95	120	115	84	117
115	88	149	96	125	129	104	132	97	141	117	110	128
105	120	109	89	123	117	100	130	127	102	105	124	107
126	122	98	92	106	113	117	92	99	102	114	123	111
81	107	123	110	110	104	124	124	82				

Вариант 16

78	132	138	129	127	121	114	101	128	92	69	93	111
96	105	114	136	111	109	137	107	105	124	93	138	132
90	87	99	105	116	141	115	114	93	122	133	119	114
116	101	130	94	84	100	104	116	139	115	114	91	103
120	128	114	109	72	110	111	141	110	110	136	108	90
105	126	94	144	93	92	103	111	127	104	94	112	136
121	99	143	98	98	111	121	97	137	94	90	103	94
110	125	100	82	104	107	123	85	139				

Вариант 17

351	180	291	312	177	139	371	298	194	383	332	366	408
217	340	228	396	309	302	317	301	150	289	176	266	252
167	408	362	263	194	500	467	199	295	182	360	294	306
83	222	225	168	168	300	294	231	165	207	384	172	231
423	409	311	295	255	229	304	334	339	354	223	217	76
302	218	367	273	264	201	100	326	344	45	318	194	349
361	199	234	258	264	336	274	377	323	311	305	363	337
227	395	237	293	353	254	243	321	255				

Вариант 18

576	607	450	275	486	520	819	507	434	795	475	456	428
456	651	349	819	327	304	396	450	560	845	551	484	767
542	346	621	736	577	538	376	642	966	640	638	773	509
533	433	708	370	283	418	460	591	260	626	665	461	534
541	462	804	444	426	584	851	575	566	408	730	378	345
355	281	404	446	564	849	556	547	359	638	809	597	779
619	601	485	330	549	618	432	256	461	489	679	587	406
416	321	477	535	865	529	522	266	554				

Вариант 19

389	904	909	780	620	846	915	723	488	745	767	951	492
928	626	1030	539	1166	529	516	597	645	722	809	836	686
953	716	577	769	915	1028	777	736	929	568	984	991	894
1071	955	930	842	733	1019	679	608	754	817	1007	492	962
767	712	896	1133	889	882	736	1219	735	133	885	701	936
280	885	885	736	342	739	742	896	478	914	934	812	972
1013	921	873	759	436	771	782	705	976	595	768	823	1043
792	760	975	675	536	717	753	887	395				

Вариант 20

46	48	39	32	47	62	46	46	37	25	40	43	26
47	51	42	59	36	34	45	64	45	44	34	59	33
31	40	47	32	61	31	30	37	43	18	44	45	34
60	33	32	40	48	33	20	35	36	46	25	50	55
47	44	36	18	37	38	52	34	28	38	43	22	45
47	37	27	41	45	31	54	25	13	26	32	36	43
11	44	44	32	53	28	20	30	31	38	45	24	47
51	42	36	13	38	38	52	18	58				

Вариант 21

277	258	123	206	328	318	281	184	280	248	171	100	327
319	255	263	259	316	358	313	405	203	245	276	276	167
202	116	174	385	211	173	201	267	341	274	267	294	184
325	234	310	299	235	115	271	284	158	133	249	288	240
310	325	313	299	193	194	310	280	325	114	247	130	189
192	275	428	235	376	281	235	310	340	277	230	166	172
305	522	299	262	253	292	192	211	320	283	204	122	265
177	152	220	359	369	429	307	334	348				

Вариант 22

429	538	711	488	435	642	306	720	132	726	732	658	607
520	387	630	977	730	629	616	406	646	253	685	736	631
586	481	297	526	572	352	664	945	662	660	566	483	258
512	540	268	573	608	450	279	488	524	858	517	509	175
517	524	236	545	564	373	681	245	724	791	668	658	582
497	320	555	618	439	270	474	507	738	469	429	613	238
640	669	554	479	207	506	785	485	463	644	381	253	413
443	570	867	563	556	382	676	256	189				

Вариант 23

42	308	372	358	369	286	101	334	315	207	247	418	369
198	162	333	202	284	278	298	66	247	330	250	288	246
185	232	254	166	340	353	301	222	92	247	61	496	330
300	260	265	319	256	395	338	232	168	280	162	235	206
96	370	210	73	309	367	189	223	308	297	290	339	307
239	266	211	334	245	319	295	113	240	314	133	194	272
281	193	205	303	202	342	238	198	193	356	228	227	253
320	248	332	199	249	256	304	176	262				

Вариант 24

1033	750	707	876	1046	846	817	563	858	900	720	361	724
729	871	1082	854	837	625	907	995	850	794	501	816	838
536	869	902	736	483	756	775	948	767	389	674	681	796
902	635	996	488	1033	1089	1004	979	916	847	725	1016	667
587	667	587	733	788	940	676	389	684	692	811	926	691
361	696	701	825	952	736	610	801	862	565	905	954	820
731	979	640	443	658	675	781	881	560	924	974	851	782
443	794	806	1066	783	760	962	661	450				

Вариант 25

309	402	250	382	200	222	329	200	232	232	299	275	279
223	303	279	211	380	326	409	277	347	293	286	119	186
324	270	177	355	221	297	299	245	242	203	326	248	213
330	182	363	363	291	223	268	366	309	441	352	208	167
277	137	187	369	146	294	328	181	306	231	258	285	464
180	156	251	169	265	123	326	292	261	358	342	364	289
250	235	134	157	260	128	323	224	331	220	314	249	225
108	252	103	257	205	259	238	369	269				

Вариант 26

604	455	663	733	609	556	572	520	478	598	671	479	773
426	333	451	473	546	617	774	583	577	739	499	418	547
588	724	524	436	577	625	293	631	638	481	722	337	742
766	696	659	578	424	620	636	499	789	465	421	522	568
675	433	733	854	724	715	648	582	407	617	652	479	740
378	216	791	795	749	717	667	602	479	676	784	650	624
488	711	315	724	739	665	615	496	706	329	722	739	664
615	494	703	299	712	723	645	585	389				

Вариант 27

25	42	45	31	54	26	16	27	28	34	39	48	32
17	33	33	42	51	37	32	45	57	43	42	30	48
58	46	45	36	20	38	39	54	36	33	44	57	43
41	27	45	49	39	33	47	15	48	40	33	49	23
53	58	51	49	43	37	17	38	39	53	35	31	42
49	35	27	40	44	27	48	55	45	53	33	29	23
32	35	43	56	40	38	60	37	50	31	19	32	33
41	51	37	31	43	51	19	22	58				

Вариант 28

492	424	636	275	686	758	642	606	507	869	600	733	557
517	315	572	634	470	350	547	630	441	298	488	534	117
535	538	314	593	659	508	423	655	302	737	187	760	789
713	678	612	538	413	687	326	909	321	315	500	460	575
215	591	608	467	309	518	570	337	649	782	620	595	480
311	532	586	380	723	312	176	324	337	417	480	777	392
285	432	536	712	486	434	638	297	705	847	690	676	595
522	378	627	625	827	611	579	182	493				

Вариант 29

256	186	304	192	356	313	303	265	277	335	328	285	291
255	71	278	413	468	283	230	305	217	276	184	357	213
252	380	241	528	232	284	488	305	263	246	296	283	285
110	381	224	279	278	379	173	178	345	314	309	347	399
263	217	419	275	270	315	270	179	230	84	380	194	338
242	181	322	183	305	265	409	288	388	201	281	270	164
264	304	211	206	464	344	205	346	237	347	260	275	393
251	232	257	145	229	380	271	288	365				

Вариант 30

283	321	405	259	386	196	246	197	316	320	363	329	169
215	254	176	300	327	44	322	133	436	241	359	241	301
255	301	255	293	90	142	275	338	92	222	189	309	143
317	158	358	311	274	141	236	203	136	242	281	289	111
204	298	162	332	269	278	194	236	309	186	114	319	238
364	373	214	295	167	395	211	312	270	336	229	326	278
272	298	205	212	165	214	253	124	248	132	424	202	189
353	244	340	139	337	282	330	134	347				

Литература

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2011.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 2011.
3. Кремер И.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Юнити, 2000.