ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Математика»

Учебное пособие «Принятие оптимальных решений и Теория игр»

Часть 1

Авторы
Азаров Д.А., ст. преподаватель
Азарова Л.В.,ст. преподаватель
Ароева Г.А.,ст. преподаватель
Золотых С.А., ассистенк
Тукодова О.М., к.ф-м.н., доцент

Ростов-на-Дону, 2014

Оглавление

ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Линейное программирование это математическая дисциплина, в которой рассматривается решение задач об оптимизации (нахождении минимума или максимума) линейного функционала $f(x_1, x_2, \ldots x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$, называемого целевой функцией, при наличии ограничений, накладываемых системой уравнений и неравенств на значения переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$. Линейное программирование является частным случаем выпуклого программирования, которое, в свою очередь, является частью математического программирования. Термин «программирование» не имеет отношения к написанию программ для ЭВМ на алгоритмических языках, а должен пониматься в смысле «проектирование», «планирование», «составление плана». Термин был введен еще в 40-х годах 20 века, когда еще не была создана ЭВМ. В основе математического программирования лежат труды многих ученых, но наибольший вклад внесли в начале 20 века такие математики, как Л.В.Канторович, Д. фон Нейман, Д.Б.Данциг.

В общем виде формулировка задачи линейного программирования (ЛП) такова: найти величины $x_1, x_2, \ldots x_n$ доставляющие максимум (или минимум) некоторой линейной функции - *целевой функции*

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \rightarrow opt(max, min)$$

и удовлетворяющие ограничениям вида

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i & 1 \le i \le I \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k & 1 \le j \le J \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n \ge b_j & 1 \le k \le K \end{cases}$$

Среди этих ограничений часто (но не всегда обязательно) встречаются условия неотрицательности всех или части переменных: $x_p \ge 0 \quad 1 \le p \le P$. Вообще-то эти условия являются частным случаем условий общего вида, но их выделяют в отдельную группу.

Допустимым решением (планом) задачи линейного программирования называется такой n-мерный вектор $X(x_1, x_2, \ldots x_n)$, который удовлетворяет системе ограничений задачи и условиям неотрицательности. Множество всех допустимых решений задачи образуют *область допустимых решений*. *Оптимальным решением* (планом) задачи линейного программирования называется такое допустимое решение, на котором функция достигает своего оптимума (минимума или максимума).

Канонической формой записи задачи ЛП называется:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to opt(max, min)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

Она отличается от других форм тем, что все ограничения являются равенствами, а все переменные подчиняются условию неотрицательности.

Любой другой вид записи задачи ЛП может быть приведен к канонической форме путем введения дополнительных переменных или их разности. Так, неравенство вида $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i$ может быть приведено к равенству путем добавления новой неотрицательной переменной x_{n+1} так, что $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i, \quad x_{n+1} \geq 0$. Неравенство вида $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n \geq b_j$ может быть приведено к равенству путем добавления новой неотрицательной переменной x_{n+1} так, что $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n - x_{n+1} = b_j, \quad x_{n+1} \geq 0$. Переменная x_t, на которую не было наложено условие неотрицательности, заменяется на разность двух других неотрицательных переменных: $x'_t - x''_t, \quad x'_t > 0, \; x''_t > 0$. Все дополнительно введенные переменные входят в целевую функцию с нулевыми коэффициентами.

В канонической форме задача линейного программирования может как минимизироваться, так и максимизироваться. Для того, чтобы перейти от максимума к минимуму достаточно только поменять все знаки коэффициен- тов целевой функции на противоположные. Тогда оптимальные решения таких двух задач не будут отличаться, а значения целевых функций будут отличаться только знаком.

СИМПЛЕКС-МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Симплекс-метод был разработан в 1949 году американским математиком Джорджем Бернардом Данцигом. Этот метод основывается на следующих фактах:

1) Область допустимых значений задачи ЛП является выпуклым множеством с конечным числом угловых точек
2) Оптимальным решением задачи ЛП является одна из угловых точек многогранника области допустимых значений
3) Угловые точки области допустимых значений алгебраически представляют некоторые базисные решения (опорные решения) системы ограничений задачи.

Симплекс-метод представляет собой целенаправленный перебор опорных решений задачи линейного программирования, производимый по определенному алгоритму и позволяющий за конечное число шагов либо найти оптимальное решение, либо сделать вывод о его отсутствии.

Ход симплекс-метода представляет собой последовательность шагов:

Шаг 1) нахождение какого-либо опорного решения.

Шаг 2) переход от этого опорного решения к следующему, которое обеспечит более близкое к оптимальному значение целевой функции.

Шаг 3) повторение шага 2) до тех пор, пока не будут выполнены критерии либо подтверждающие оптимальность решения, либо позволяющие сделать заключение об его отсутствии.

Пусть дана задача ЛП в канонической форме и целевая функция подлежит максимизации:

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

Не нарушая общности, можно считать все правые части систему уравнений неотрицательными (если это не так, то можно умножить соответствующее уравнение на -1).

Опорным решением задачи ЛП называется такое допустимое решение, для которого векторы условий (столбцы коэффициентов при неизвестных в системе ограничений), соответствующие положительным координатам, линейно независимы. Число отличных от нуля координат опорного решения не может быть больше ранга системы векторов условий (т.е. больше числа линейно независимых уравнений системы ограничений).

При составлении симплекс-таблицы в строке невязки целевой функции будем записывать коэффициенты целевой функции с противоположным знаком:

	x_1	x_2	x_3		x_n	
	a_{11} a_{21} … a_{m1}	a_{12} a_{22} … a_{m2}	a_{13} a_{23} … a_{m3}	… … … …	a_{1n} a_{2n} … a_{mn}	b_1 b_2 … b_m
ΔF	$-c_1$	$-c_2$	$-c_3$	…	$-c_n$	0

Переход от одного опорного решения к другому осуществляется с помощью метода Жордана-Гаусса. Разрешающий столбец выбирается из условия максимального по модулю отрицательного элемента c_i в строке невязки целевой функции. Разрешающие элементы для преобразований Жордана выбираются так, чтобы обеспечить неотрицательность правой части системы, т.е. такие элементы, для которых выполняется условие $\theta_{0k} = \min\limits_i \left(\dfrac{b_i}{a_{ik}} \right)$,

где k – номер столбца симплекс-таблицы, вводимого в базис, i – номер столбца симплекс-таблицы, выводимого из базиса.

Перебор опорных решений будет производиться до тех пор, пока не выполнится одно из условий:

1) в строке невязки целевой функции останутся только положительные или нулевые элементы.
2) в строке невязки целевой функции есть отрицательные элементы, но все элементы в столбцах условий над ними тоже отрицательные.
3) процесс перебора базисных решений «зациклился», т.е. на очередном шаге мы вводим в базис *i*-й столбец и выводим *j*-й, а потом наоборот вводим в базис *j*-й столбец и выводим *i*-й, и кроме этих двух столбцов нет других, которые можно было бы ввести в базис.

Условие 1) означает «нормальное» завершение симплекс-метода, решение единственно.

Условие 2) означает, что задача ЛП не имеет решения.

Условие 3) означает, что задача ЛП имеет бесконечное множество решений с одинаковыми значениями максимума целевой функции.

Рассмотрим пример. Решить задачу линейного программирования:

$$F(x_1, x_2) = 3x_1 + 5x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \le 13 \\ x_1 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Приведем задачу к каноническому виду. Так как все неравенства системы (кроме условий неотрицательности) содержат знак «меньше-равно», то для этого необходимо ввести в каждое неравенство неотрицательную слабую переменную. Система ограничений примет вид:

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 13 \\ x_1 + x_5 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Теперь можно записать симплекс-таблицу:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B
	-3 1 1	2 1 0	1 0 0	0 1 0	0 0 1	6 13 6
ΔF	-3	-5	0	0	0	0

Решение на этом этапе выглядит следующим образом: X(0,0,6,13,6) – переменная, не входящая в базис равна 0, базисные переменные равны правой части. Значение целевой функции равно 0 – правый нижний угол таблицы.

Шаг 1

Выберем разрешающий столбец и разрешающий элемент из этого столбца. Разрешающий столбец находится из условия максимального по модулю отрицательного элемента невязки функции, в данном примере -5 (выделена подчеркиванием), и разрешающий столбец - второй. Справа от таблицы указаны оценки строк (отношение правой части к соответствующему элементу разрешающего столбца). Из этих оценок необходимо выбрать минимальную: в данном примере это 3, и разрешающий элемент 2 во втором столбце (выделен подчеркиванием).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B	
	-3 1 1	**2** 1 0	1 0 0	0 1 0	0 0 1	6 13 6	6/2=3 13/1=13 6/1=6
ΔF	-3	**-5**	0	0	0	0	

“Запускаем” алгоритм метода Жордана-Гаусса. Надо ввести в базис второй столбец (автоматически из базиса выведется третий). Для этого сначала разделим первую строку на 2. Потом из второй строки вычтем первую, к четвертой прибавим первую, умноженную на 5.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B	
	-3	**2**	1	0	0	6	C_1:2
	1	1	0	1	0	13	
	1	0	0	0	1	6	
ΔF	-3	-5	0	0	0	0	
	-3/2	**1**	1/2	0	0	3	
	1	1	0	1	0	13	C_2-C_1
	1	0	0	0	1	6	
ΔF	-3	-5	0	0	0	0	C_4+5C_1
	-3/2	1	1/2	0	0	3	
	5/2	0	-1/2	1	0	10	
	1	0	0	0	1	6	
ΔF	-21/2	0	5/2	0	0	15	

Решение на первом шаге: X(0,3,0,10,6). Значение целевой функции равно 15.

Шаг 2

Не все значения невязки целевой функции неотрицательны. Есть элемент -21/2. Так как других отрицательных элементов в строке невязки ΔF нет, то разрешающим столбцом выбираем первый. Справа снова выпишем оценки строк. Элемент -3/2 не имеет оценки, так как он не является положительным. Разрешающим элементом выберем 5/2. Разделим вторую строку на 5/2 (умножим на 2/5).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B	
	-3/2	1	1/2	0	0	3	-
	5/2	0	-1/2	1	0	10	10/2.5=4
	1	0	0	0	1	6	6/1=6
ΔF	**-21/2**	0	5/2	0	0	15	

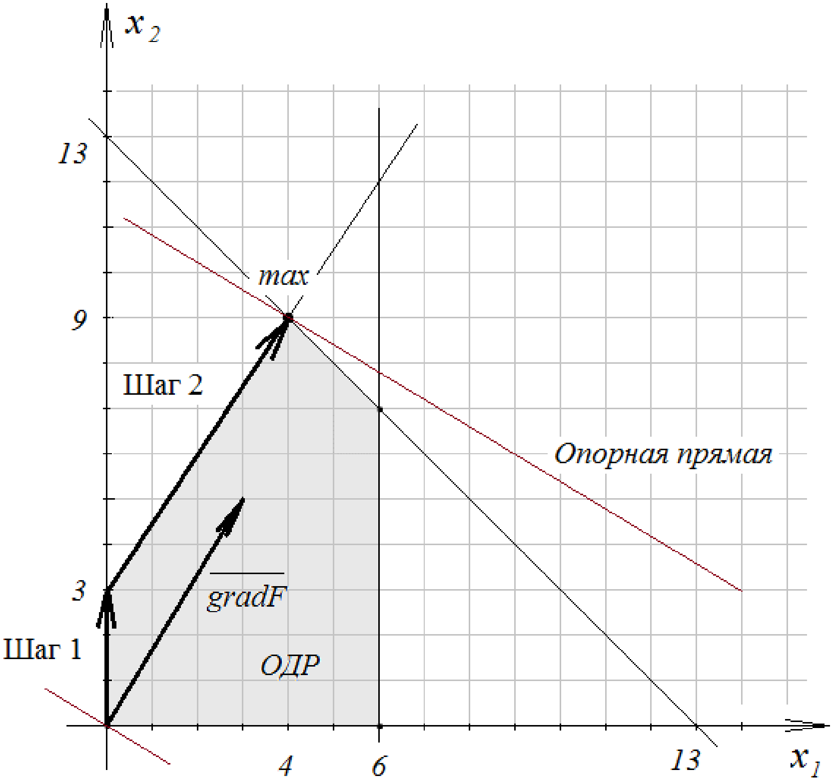
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B	
	-3/2	1	1/2	0	0	3	
	5/2	0	-1/2	1	0	10	$C_2 \cdot 2/5$
	1	0	0	0	1	6	
ΔF	-21/2	0	5/2	0	0	15	
	-3/2	1	1/2	0	0	3	$C_1+3/2C_2$
	1	0	-1/5	2/5	0	4	
	1	0	0	0	1	6	C_3-C_2
ΔF	-21/2	0	5/2	0	0	15	$C_4+21/2C_2$
	0	1	1/5	3/5	0	9	
	1	0	-1/5	2/5	0	4	
	0	0	1/5	-2/5	1	2	
ΔF	0	0	2/5	21/5	0	57	

Решение на втором шаге: X(4,9,0,0,2). Значение целевой функции равно 57.

Шаг 3.

Так как среди коэффициентов невязки целевой функции (последняя строка таблицы) нет отрицательных, то решение завершено, найден максимум целевой функции, который равен F_{max}=57 и достигается при значениях переменных x_1=4, x_2=9. Значения дополнительных (слабых) переменных: x_3= x_4 =0, x_5=2.

Весь ход решения данного примера легко проследить, если воспользоваться графическим способом решения задачи ЛП. Построим область допустимых решений (ОДР). Как известно, область допустимых решений на плоскости представляет собой выпуклый многоугольник. Вычислим градиент целевой функции (вектор нормали): $\overrightarrow{gradF} = \{3;5\}$. Двигаясь по направлению градиента, будем проводить линии уровня целевой функции, проходящие через вершины многоугольника ОДР – опорные прямые. Максимум достигнется в опорном решении, наиболее удаленном от начала координат вдоль вектора градиента. Очевидно, в нашем примере это будет точка (4; 9), а значение целевой функции F_{max}=F(4; 9)=57, что согласуется с решением полученным симплекс-методом. На данном графике точка (0; 0) является первым опорным решением, для которого и была составлена начальная симплекс-таблица. Затем, выбрав второй столбец в качестве разрешающего, мы двинулись по оси x_2 и на первом шаге попали в следующее опорное решение (0;3). Значение целевой функции в нем оказалось равным F(0; 3)=15, что отражено в симплекс-таблице. Далее, на втором шаге, был сделан ход, который привел нас в точку (4; 9), которая и оказалась точкой максимума.



Если бы мы не подчинялись бы требованиям алгоритма симплекс-метода, касающихся выбора разрешающего столбца и разрешающего элемента, то мы все равно рано или поздно (в силу конечного числа опорных решений) пришли бы к оптимальному решению, правда пи этом наш путь был бы длиннее.

Очевидно, что и при количестве переменных более 2 сохраняется весь смысл симплекс-метода, как перебора опорных решений (вершин n-мерного многогранника) по аналогичному алгоритму.

МЕТОД ИСКУССТВЕННОГО БАЗИСА

Для начала применения алгоритма симплекс-метода система ограничений должна быть разрешена относительно некоторого исходного базиса. Однако в некоторых задачах линейного программирования не удается сразу построить базисное решение. В этом случае используется *метод искусственного базиса*. Рассмотрим основные его положения.

Пусть требуется найти максимум целевой функции $F(x_1, x_2 ... x_m) = C_1 x_1 + C_2 x_2 + ... + C_m x_m \to \max$ и пусть среди ограничений системы условий есть условия со строгим равенством или с неравенством вида «больше или равно».

$$a_{1j} x_1 + a_{2j} x_2 + a_{3j} x_3 + ... + a_{nj} x_n = b_j$$

$$a_{1k} x_1 + a_{2k} x_2 + a_{3k} x_3 + ... + a_{nk} x_n \ge b_k$$

В первом случае равенство и так имеется в наличии, но в нем нет базисных переменных. Во втором случае невозможно введение дополнительной неотрицательной переменной так, чтобы ограничение стало равенством. И тогда для того, чтобы получить базисное решение вводят искусственные переменные ω_i.

$$a_{1j} x_1 + a_{2j} x_2 + a_{3j} x_3 + ... + a_{nj} x_n + \omega_1 = b_j$$

$$a_{1k} x_1 + a_{2k} x_2 + a_{3k} x_3 + ... + a_{nk} x_n - x_{n+1} + \omega_2 = b_k$$

$$x_{n+1}, \omega_1, \omega_2 \ge 0$$

Далее вводится функция специального вида: $\psi = -\omega_1 - \omega_2$, которая максимизируется. Легко видеть, что максимум этой функции достигается при нулевых значениях искусственных переменных. Тогда полученная нами задача с искусственным базисом будет тождественна исходной. Но если мы добьемся равенства нулю наших искусственных переменных, то это будет означать, что они выведутся из базиса, а их место займут переменные исходной задачи, которые до этого не были в базисе. Таким образом, мы получим одно из опорных решений задачи ЛП, от которого можем продолжить оптимизацию исходной функции $F(x_1, x_2 ... x_m)$ стандартным симплекс-методом.

Возможен случай, когда не все искусственные переменные выведены из базиса, а максимум функции ψ уже найден. В этом случае исходная задача ЛП не имеет решения.

Рассмотрим пример: решить задачу ЛП

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + x_2 + 5x_3 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 10 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 \ge 5 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Приведем задачу к канонической форме:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_5 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Для того, чтобы построить базисное решение, введем еще две искусственные переменные ω_1 и ω_2:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + \omega_1 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + \omega_2 - x_5 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Дополнительная функция

$$\psi(\omega_1, \omega_2) = -\omega_1 - \omega_2 \to max.$$

Выразив из второго и третьего уравнений системы ω_1 и ω_2 и подставив их в функцию ψ, получим:

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 - 7 \to max$$

Строим симплекс таблицу:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	ω_1	ω_2		
	1	4	2	1	0	0	0	10	10/1
	2	-1	3	0	0	1	0	2	2/2
									C_2:2
	1	3	-4	0	-1	0	1	5	5/1
ΔF	-3	-1	-5	0	0	0	0	0	
$\Delta\psi$	**-3**	-2	1	0	1	0	0	-7	

Сначала максимизируем функцию ψ.

Выбираем разрешающий столбец (первый, так как в строке $\Delta\psi$ наибольшим по модулю, но отрицательным элементом является -3 – выделена жирным шрифтом и подчеркнута) и разрешающий элемент 2 - выделен жирным шрифтом и подчеркнут (так как из приведенных справа оценок минимальной является вторая). Для того, чтобы начать применение метода Жордана-Гаусса приведем разрешающий элемент к 1 (разделим вторую строку на 2), а затем «запускаем» метод Жордана-Гаусса (справа от строк указаны их преобразования).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	ω_1	ω_2		
	1	4	2	1	0	0	0	10	C_1-C_2
	1	-1/2	3/2	0	0	1/2	0	1	
	1	3	-4	0	-1	0	1	5	C_3-C_2
ΔF	-3	-1	-5	0	0	0	0	0	C_4+3C_2
$\Delta\psi$	-3	-2	1	0	1	0	0	-7	C_5+3C_2
	0	9/2	1/2	1	0	-1/2	0	9	
	1	-1/2	3/2	0	0	1/2	0	1	
	0	7/2	-11/2	0	-1	-1/2	1	4	
ΔF	0	-5/2	-1/2	0	0	3/2	0	3	
$\Delta\psi$	0	-7/2	11/2	0	1	3/2	0	-4	

Значения обеих функций (и F и ψ) приблизились к их соответствующим максимумам. Решение X(1,0,0,9,0,0,4). Одна из искусственных переменных ω_1 стала равна 0, т.е. выведена нами из базиса, и для дальнейших преобразований больше не понадобиться. Поэтому мы можем вычеркнуть весь столбец этой переменной.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	ω_1	ω_2		
	0 1 0	9/2 -1/2 **7/2**	1/2 3/2 -11/2	1 0 0	0 0 -1		0 0 1	9 1 4	9/4.5=2 4/3.5=8/7 $C_3 \cdot 2/7$
ΔF	0	-5/2	-1/2	0	0		0	3	
Δψ	0	**-7/2**	11/2	0	1		0	-4	
	0 1 0	9/2 -1/2 1	1/2 3/2 -11/7	1 0 0	0 0 -2/7		0 0 2/7	9 1 8/7	$C_1-9/2C_3$ $C_2+1/2C_3$
ΔF	0	-5/2	-1/2	0	0		0	3	$C_4-5/2C_3$
Δψ	0	-7/2	11/2	0	1		0	-4	$C_5+7/2C_3$
	0 1 0	0 0 1	53/7 5/7 -11/7	1 0 0	9/7 -1/7 -2/7		-9/7 1/7 2/7	27/7 11/7 8/7	
ΔF	0	0	-31/7	0	-5/7		5/7	41/7	
Δψ	0	0	0	0	0		1	0	

Значения функции F приблизилось к максимуму, а значение функции ψ достигло его (ψ_{max}=0). Решение X(11/7,8/7,0,27/7,0,0). Вторая искусственная переменная ω_2 также стала нулевой, т.е. и она выведена нами из базиса, и для дальнейших преобразований больше не понадобиться. Поэтому мы можем вычеркнуть весь столбец этой переменной. Таким образом, обе искусственные переменные были нами выведены из базиса, а значение дополнительной функции ψ стало равным 0. Мы вернулись к стандартной задаче ЛП уже без искусственных переменных, и теперь продолжаем ее решение симплекс-методом для функции F.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
	0	0	**53/7**	1	9/7	27/7	27/53	$C_1 \cdot 7/53$
	1	0	5/7	0	-1/7	11/7	11/5	
	0	1	-11/7	0	-2/7	8/7		
ΔF	0	0	**-31/7**	0	-5/7	41/7		

Разрешающий столбец второй, в нем разрешающий элемент 55/7. Приведем его к единице, умножив строку на 7/53.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
	0	0	1	7/53	9/53	27/53	
	1	0	5/7	0	-1/7	11/7	C_2-5/7C_1
	0	1	-11/7	0	-2/7	8/7	C_3+11/7C_1
ΔF	0	0	-31/7	0	-5/7	41/7	C_4+31/7C_1
	0	0	1	7/53	9/53	27/53	
	1	0	0	-5/33	-98/371	64/53	
	0	1	0	11/53	-1/53	103/53	
ΔF	0	0	0	31/53	2/53	430/53	

Все значения в строке ΔF неотрицательны, следовательно функция приняла свое максимальное значение.

Решение: X(64/53, 103/53, 27/53, 0, 0), т.е. x_1=64/53, x_2=103/53 , x_3=27/53 и максимальное значение целевой функции F_{max}=430/53.

ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ

С каждой задачей линейного программирования тесно связана другая задача, называемая *двойственной*; первоначальная задача называется *исходной* или *прямой*. Связь исходной и двойственной задач заключается, в частности, в том, что решение одной из них может быть получено непосредственно из решения другой. Каждая из задач двойственной пары фактически является самостоятельной задачей линейного программирования и может быть решена независимо от другой. Однако при определении симплекс–методом оптимального плана одной из задач автоматически находится решение и другой задачи.

Двойственная задача по отношению к исходной составляется согласно следующим правилам:

1) Целевые функции прямой и двойственной задач оптимизируются противоположным образом: если исходная функция максимизируется, то двойственная – минимизируется, и наоборот. При этом в задаче на максимум во всех неравенствах системы ограничений должен использоваться знак вида «меньше или равно ≤», а в задаче на минимум – знак «больше или равно ≥»

2) Матрица коэффициентов системы ограничений двойственной задачи является транспонированной матрицей коэффициентов системы исходной задачи ЛП.

3) Число неизвестных двойственной задачи равно числу ограничений исходной задачи.

4) Число ограничений двойственной задачи равно числу неизвестных исходной задачи.

5) Коэффициенты целевой функции двойственной задачи являются свободными членами в системе ограничений прямой задачи.

6) Свободные члены в системе ограничений двойственной задачи есть коэффициенты целевой функции прямой задачи.

7) Каждому ограничению прямой задачи соответствует неизвестная двойственной; при этом ограничению, записанному в виде неравенства, соответствует неизвестная, подчиняющаяся условию неотрицательности. Если ограничение исходной задачи является равенством, то соответствующая неизвестная двойственной задачи может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Математические модели пары двойственных задач могут быть симметричными и несимметричными.

В несимметричных двойственных задачах система ограничений исходной задачи задаётся в виде равенств, в двойственной – в виде неравенств, причём в последней неизвестные не подчиняются условиям неотрицательности.

В симметричных двойственных задачах система ограничений как исходной, так и двойственной задачи, задаётся неравенствами, причём на двойственные неизвестные налагается условие неотрицательности.

Приведем пары двойственных задач в матричной записи:

Прямая	Двойственная	Тип задач
$F(X) = CX \to \max$ $AX \le B$ $X \ge 0$	$G(Y) = B^T Y \to \min$ $A^T Y \ge C^T$ $Y \ge 0$	симметричные
$F(X) = CX \to \min$ $AX \ge B$ $X \ge 0$	$G(Y) = B^T Y \to \max$ $A^T Y \le C^T$ $Y \ge 0$	симметричные
$F(X) = CX \to \max$ $AX = B$ $X \ge 0$	$G(Y) = B^T Y \to \max$ $A^T Y \le C^T$ Y – любого знака	несимметричные
$F(X) = CX \to \min$ $AX = B$ $X \ge 0$	$G(Y) = B^T Y \to \max$ $A^T Y \le C^T$ Y – любого знака	несимметричные

Рассмотрим пример.
Построить двойственную задачу к данной:

$$F(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \le 5 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 10 \\ 3x_1 - 7x_2 - 4x_3 \ge 3 \\ x_1 + 8x_2 \le 9 \\ 5x_1 - 10x_3 = -4 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Количество переменных исходной задачи 3, а условий системы ограничений – 5 (не считая условий неотрицательности). Тогда количество переменных двойственной будет равно 5, а ограничений – 3. Для того, чтобы приступить к построению двойственной задачи надо выполнить пункт 1): в задаче на максимум все ограничения должны быть «повернуты» в сторону «≤». Третье неравенство не удовлетворяет требованию, поэтому умножим его на -1. Это неравенство примет вид: $-3x_1+7x_2+4x_3\le -3$

Тогда матрица исходной задачи $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ -3 & 7 & 4 \\ 1 & 8 & 0 \\ 5 & 0 & -10 \end{pmatrix}$, а правая часть $B=\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -3 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}$. Вектор-строка коэффициентов целевой функции: $C=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

Транспонированные матрицы и вектора:

$$A^T=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 7 & 8 & 0 \\ 5 & -3 & 4 & 0 & -10 \end{pmatrix},$$

$$B^T=\begin{pmatrix} 5 & 10 & -3 & 9 & -4 \end{pmatrix}, \qquad C^T=\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Теперь строим двойственную задачу:

$$G(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)=5y_1+10y_2-3y_3+9y_4-4y_5\to\min$$

$$\begin{cases} 3y_1+2y_2-3y_3+y_4+5y_5\ge 2 \\ -2y_1+y_2+7y_3+8y_4\ge 7 \\ 5y_1-3y_2+4y_3-10y_5\ge 4 \\ y_1,y_3,y_4\ge 0 \\ y_2,y_5 \text{ - ëþ áîãî çí àêà} \end{cases}$$

Переменные y_2 и y_5 не подчиняются условию неотрицательности в силу того, что они соответствуют уравнениям, а не неравенствам (как переменные y_1, y_3 и y_4) в системе ограничений исходной задачи.

Прямая и двойственная задачи в этом примере не являются симметричными.

В теории двойственных задач существуют две основные теоремы, позволяющие установить связь между оптимальными решениями прямой и двойственной задач. С их помощью можно, решив одну из пары двойственных задач, можно найти решение второй задачи, не решая ее, или установить для нее отсутствие решения.

Первая теорема двойственности: *Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальное решение, то и вторая задача также имеет оптимальное решение и значения целевых функций задач на их оптимальных решениях совпадают. Если же одна из пары двойственных задач не имеет решения в силу неограниченности целевой функции, то двойственная ей задача не имеет решения в силу несовместности системы ограничений, и наоборот.*

Пусть есть пара двойственных задач:

$F(X) = CX \to \max$	$G(Y) = B^T Y \to \min$
$AX \le B$	$A^T Y \ge C^T$
$X \ge 0$	$Y \ge 0$

Вторая теорема двойственности: *Допустимые решения $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Y(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ являются оптимальными решениями пары двойственных задач, тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

$$x_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j\right) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$y_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i\right) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Или другая формулировка: *если при подстановке оптимального решения в систему ограничений i-е ограничение исходной задачи превращается в строгое неравенство, то i-я координата* *оптимального решения двойственной задачи равна нулю, и наоборот, если i-я координата оптимального решения двойственной задачи отлична от нуля, то i-е ограничение исходной задачи удовлетворяется оптимальным решением как равенство*.

Рассмотрим пример.

Построить двойственную задачу, решить ее графическим методом и, используя теоремы двойственности, найти решение исходной задачи.

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 5x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 \to \max$$

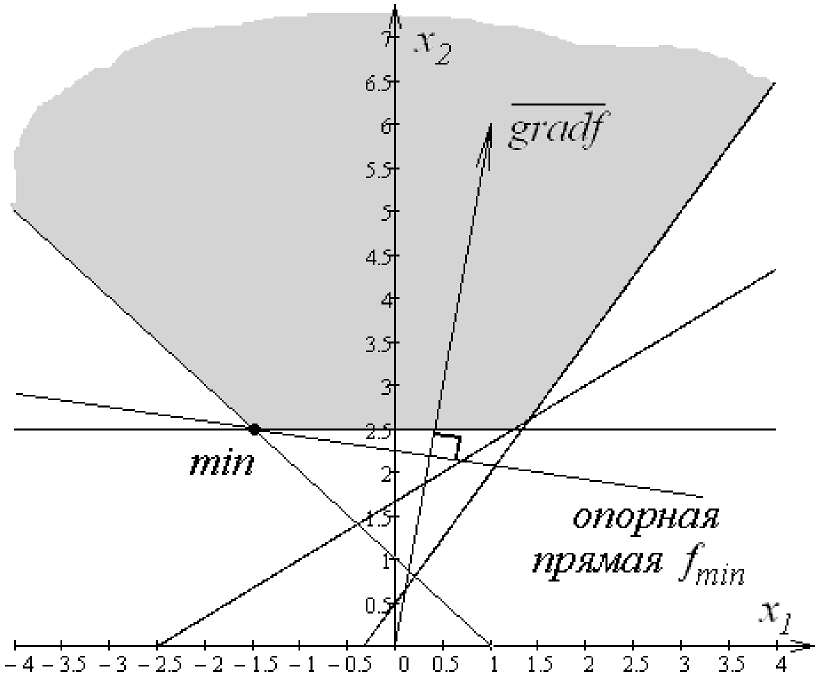
$$\begin{cases} -2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Построим двойственную задачу

$$G(y_1, y_2) = y_1 + 6y_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 2y_2 \geq 5 \\ -2y_1 + 3y_2 \geq 5 \\ -3y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ y_1 + y_2 \geq 1 \\ y_1, y_2 \text{ - ëþáîãî çíàêà} \end{cases}$$

Решим задачу графическим способом. Построим область, ограниченную прямыми и найдем точку, доставляющую минимум функции.



Решение $Y_0(-3/2,\ 5/2)$, $G_{min}=27/2$.

Подставим оптимальное решение $Y_0(-3/2,\ 5/2)$ в систему ограничений. Получим, что второе и третье ограничения выполняются как строгие неравенства, а первое и четвертое – как равенства.

$$\begin{cases} 2\cdot\frac{5}{2}=5 & \\ -2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+3\cdot\frac{5}{3}>5 & \Rightarrow\quad x_2=0 \\ -3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+2\cdot\frac{5}{3}>1 & \Rightarrow\quad x_3=0 \\ -\frac{3}{2}+\cdot\frac{5}{3}=1 & \end{cases}$$

Подставив в систему $x_2=x_3=0$, получим

$$\begin{cases} \qquad x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_4 = 6 \end{cases}$$

Откуда x_1=5/2, x_4=1.
Решение X(5/2, 0, 0, 1), F_{max}= G_{min}=27/2.

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Экономические процессы характеризуются протяженностью во времени. В таких случаях оптимальное решение, принятое в начале процесса, может оказаться на каком-то этапе не самым лучшим. Оптимизационными задачами, связанными с выработкой оптимальных решений, допускающих последующую коррекцию, занимается особый раздел математического программирования - динамическое программирование.

В отличие от линейного программирования, имеющего определенный набор достаточно универсальных методов, динамическое программирование такими методами не располагает. Некоторые задачи решаются графическими методами с применением так называемой теории графов. Разработаны графические методы анализа некоторых оптимизационных задач с помощью сетевых моделей. Существует также метод рекуррентных соотношений, разработанный американским математиком Р. Беллманом. Однако для большинства задач динамического программирования приходится всякий раз изобретать специальный метод решения. Общим подходом является, пожалуй, лишь разбиение экономического процесса на отдельные временные отрезки (шаги) и решение на каждом шаге какой-то оптимизационной задачи.

Примерами подобных задач являются:

- Задача о ценообразовании с применением паутинной модели рынка,
- Задача оптимального распределения капиталовложений,
- Задача о замене оборудования,
- Задача об управлении запасами
- Задача о выборе траектории,
- Задача последовательного принятия решения,
- Задача об использовании рабочей силы,
- Задача о ранце: из неограниченного множества предметов со свойствами «стоимость» и «вес» требуется отобрать не-

кое число предметов таким образом, чтобы получить максимальную суммарную стоимость при ограниченном суммарном весе.

- Задача о нахождении кратчайшего расстояния между всеми вершинами взвешенного ориентированного графа (Алгоритм Флойда-Уоршелла).
- Задача о нахождении кратчайшего пути во взвешенном графе между двумя заданными вершинами (Алгоритм Беллмана — Форда).

Сформулируем задачу оптимального управления. В начальный момент времени динамическая система находится в состоянии, которое описывается конечномерным вектором S_0. Требуется перевести систему из данного состояния в конечное состояние S* по таким траекториям системы, чтобы добиться наилучшего результата. Для дискретных систем разновидностью методов оптимизации является динамическое программирование. Динамическое программирование — способ решения сложных задач путём разбиения их на более простые подзадачи. Как правило, чтобы решить поставленную задачу методами динамического программирования, требуется решить отдельные подзадачи, и объединить их решения в одно общее решение.

Итак, рассматривается управляемый процесс. В результате управления система S переводится из начального состояния S0 в S*. Управление можно разбить на N шагов. Обозначим Xk – управление на k-ом шаге. Согласно каждому шагу управления получаем последовательность состояний: S0, S1, …, SN=S*. Целевая функция Z зависит от начального состояния и управления.

Обозначим показатели эффективности каждого шага:

$$Z_k = f_k(S_{k-1}, X_k)$$

Формально постановка задачи динамического программирования имеет вид:

$$Z = \sum_{k=1}^{N} f_k(S_{k-1}, X_k) \to \max(\min)$$

при условии, что $\sum_{j=1}^{N} a_j x_j \le b; \quad a_j \ge 0; \quad x_j \ge 0$.

Из локальных экстремумов функции $f_k(S_{k-1}, X_k)$ находится окончательный глобальный экстремум целевой функции Z.

Отметим, что задача динамического программирования должна удовлетворять нескольким условиям:

1. Задача оптимизации интерпретируется как n-шаговый процесс управления
2. Целевая функция равна сумме целевых функций каждого шага (условие аддитивности целевой функции задачи)
3. Выбор управления на k-ом шаге зависит только от состояния системы к этому шагу, не влияет на предшествующие шаги (нет обратной связи)
4. Состояние S_k после k-го шага управления зависит только от предшествующего состояния S_{k-1} и управления X_k (отсутствие последействия)
5. На каждом шаге управления X_k зависит от конечного числа управляющих переменных, а состояние S_k – от конечного числа параметров.

Отметим еще раз, что одним из основных свойств задач, решаемых с помощью динамического программирования, является свойство аддитивности. Неаддитивные задачи решаются другими методами.

Словосочетание «динамическое программирование» впервые было введено Р. Беллманом для описания процесса нахождения решения задачи, основываясь на решении «предшествующей» ей задачи. Принцип оптимальности Беллмана гласит, какое бы не было состояние системы перед очередным шагом, надо выбрать управление на этом шаге так, чтобы выигрыш на данном шаге плюс оптимальный выигрыш на всех последующих шагах был максимальным.

Основной результат теории динамического программирования носит название уравнения Беллмана, согласно которому каждый шаг управления X_k выбирается из условия:

$$Z_k^*(S_{k-1}) = \max_{\{X_k\}}[f_k(S_{k-1}, X_k) + Z_{k+1}^*(S_k)]$$

Это рекуррентные соотношения, позволяющие найти предыдущие значения функции, зная последующие (по цепочке).

Особенностью моделей динамического программирования является то, что увеличение количества переменных в задачах часто влечет рост возможных вариантов решения.

Динамическое программирование обычно придерживается двух подходов к решению задач:

- нисходящее динамическое программирование: задача разбивается на подзадачи меньшего размера, они решаются и затем комбинируются для решения исходной задачи.
- восходящее динамическое программирование: все подзадачи, которые впоследствии понадобятся для решения исходной задачи, просчитываются заранее и затем используются для построения решения исходной задачи.

В рекуррентных соотношениях начинать вычисления можно с последнего этапа и затем передвигаться назад до первого этапа. Такой метод вычислений известен как алгоритм обратной прогонки. Если расчеты осуществляются в естественном порядке следования этапов, то такой метод вычислений известен как алгоритм прямой прогонки.

Типовая задача о распределении капиталовложений по нескольким предприятиям

Рассмотрим обобщенную схему задачи распределения ресурсов. Предположим, что есть два предприятия и ресурсы x, которые распределяются между ними: на первое y, на второе - $x-y$.

Пусть в течение определенного периода количество y приносит доход $g(y)$, а количество $x-y$ доход $h(x-y)$. Тогда общий доход с двух предприятий $R(x,y)=g(y)+h(x-y)$.

Обозначим $F_1(x)$ - наибольший доход, который могут принести ресурсы x при оптимальном распределении их между предприятиями.

Тогда $F_1(x)=\max\limits_{0\le y\le x}[g(y)+h(x-y)]$.

Теперь рассмотрим двухшаговый процесс, состоящий из двух этапов. Так как доход получается вследствие выпуска и реализации продукции, что связано с определенными издержками, то к началу второго периода первоначальная сумма y уменьшится до величины ay $(0 \le a \le 1)$, а сумма $x - y$ до величины $b(x - y)$ $(0 \le b \le 1)$. Наибольший доход, который можно получить от суммарного остатка $ay + b(x - y)$ в течение второго этапа равен $F_1(ay + b(x - y))$.

Обозначим через $F_2(x)$ - наибольший доход, который может быть получен от суммы x за оба периода. Этот доход равен максимальному значению суммы доходов первого и второго периодов при условии, что начальные для каждого периода ресурсы распределялись наилучшим образом.

$$F_2(x) = \max_{0 \le y \le x}[g(y) + h(x - y) + F_1(ay + b(x - y))].$$

Рассматривая n-шаговый процесс, приходим к основному функциональному уравнению Беллмана:

$$F_n(x) = \max_{0 \le y \le x}[g(y) + h(x - y) + F_{n-1}(ay + b(x - y))]$$

$F_n(x)$ является доходом, полученным за n шагов.

Проиллюстрируем решение на конкретном примере

На реконструкцию и модернизацию производства на четырех предприятиях выделены денежные средства в размере К=100 д.е. Для каждого из предприятий известен прирост выпуска продукции в зависимости от выделяемых ему средств. Требуется распределить денежные средства между предприятиями оптимальным образом, т.е. так, чтобы суммарный прирост выпуска продукции на всех предприятиях достиг наибольшей величины.

Табл. 1

Выделяемые средства, д.е.	Прирост выпуска продукции i-го предприятия $g_i(x)$ д.е./год			
x	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
0	0	0	0	0
20	10	12	13	11
40	27	22	20	21
60	33	34	42	40
80	57	55	45	54
100	69	60	61	62

Реализация задачи будет заключаться в последовательном решении аналогичных уравнений Беллмана, которые имеют следующий вид.

$F_1(x) = \max\limits_{0 \le y_1 \le x} [g_1(y_1)]$ - максимальный прирост выпуска продукции при распределении x средств ($0 \le x \le K$) только на одном предприятии (первом предприятии, что очевидно будет соответствовать значениям графы $g_1(x)$).

$F_2(x) = \max\limits_{0 \le y_2 \le x} [g_2(y_2) + F_1(x - y_2)]$ - максимальный прирост выпуска продукции при распределении x средств ($0 \le x \le K$) только на двух предприятиях (для первого и второго).

Аналогично,

$$F_3(x) = \max_{0 \le y_3 \le x} [g_3(y_3) + F_2(x - y_3)],$$

$$F_4(x) = \max_{0 \le y_4 \le x} [g_4(y_4) + F_3(x - y_4)].$$

Итак, на первом шаге получаем

$F_1(0) = 0$, $F_1(20) = 10$, $F_1(40) = 27$, $F_1(60) = 33$, $F_1(80) = 57$, $F_1(100) = 69$,

что достигается при $y_1 = 0$, $y_1 = 20$, $y_1 = 40$, $y_1 = 60$, $y_1 = 80$, $y_1 = 100$.

На следующем этапе считаем, что денежные средства распределяем только между первым и вторым предприятиями. Тогда определим соответствующие прибыли (отметим, что для вычислений необходимы столбцы $g_2(x)$ и $F_1(x)$):

$F_2(0) = 0$, что соответствует $y_2 = 0$.

$F_2(20) = \max\limits_{0 \le y_2 \le 20} [g_2(y_2) + F_1(20 - y_2)] =$

$\max[g_2(0) + F_1(20); g_2(20) + F_1(0)] =$

$= \max[0 + 10; 12 + 0] = 12$, что достигается при $y_2 = 20$.

$$F_2(40)=\max_{0\le y_2\le 40}[g_2(y_2)+F_1(40-y_2)]=$$

$$=\max[g_2(0)+F_1(40);\ g_2(20)+F_1(20);\ g_2(40)+F_1(0)]=$$

$=\max[0+27;12+10;22+0]=27$, что достигается при $y_2=0$.

$$F_2(60)=\max_{0\le y_2\le 60}[g_2(y_2)+F_1(60-y_2)]=$$

$$=\max[g_2(0)+F_1(60);\ g_2(20)+F_1(40);\ g_2(40)+F_1(20);\ g_2(60)+F_1(0)]=$$

$=\max[0+33;12+27;22+10;34+0]=39$, что соответствует $y_2=20$.

$$F_2(80)=\max_{0\le y_2\le 80}[g_2(y_2)+F_1(80-y_2)]=$$

$$\max[g_2(0)+F_1(80);\ g_2(20)+F_1(60);$$

$$g_2(40)+F_1(40);\ g_2(60)+F_1(20);\ g_2(80)+F_1(0)]=$$

$$=\max[0+57;12+33;22+27;34+10;55+0]=57$$

, при $y_2=0$.

$$F_2(100)=\max_{0\le y_2\le 100}[g_2(y_2)+F_1(100-y_2)]=$$

$$\max[g_2(0)+F_1(100);$$

$$g_2(20)+F_1(80);\ g_2(40)+F_1(60);\ g_2(60)+F_1(40);\ g_2(80)+F_1(20);g_2(100)+F_1(0)]=$$

$$=\max[0+69;12+57;22+33;34+27;55+10;60+0]=69$$

, при $y_2=0$ или $y_2=20$.

Зная оптимальное распределение капитала для двух предприятий, найдем оптимальное распределение для трех предприятий. Для этого рассматриваем столбцы $g_3(x)$ и $F_2(x)$ и применяем следующую формулу:

$$F_3(x)=\max_{0\le y_3\le x}[g_3(y_3)+F_2(x-y_3)].$$

Аналогично поступаем для всех четырех предприятий (для вычислений рассматриваем столбец $g_4(x)$ и $F_3(x)$):

$$F_4(x) = \max_{0 \le y_4 \le x} [g_4(y_4) + F_3(x - y_4)] \cdot$$

Результаты этих вычислений представлены в таблице 2

Табл. 2

x	$F_1(x)$	y_1	$F_2(x)$	y_2	$F_3(x)$	y_3	$F_4(x)$	y_4
0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	10	20	12	20	13	20	13	0
40	27	40	27	0	27	0	27	0
60	33	60	39	20	42	60	42	0
80	**57**	**80**	**57**	**0**	57	0	57	0
100	69	100	69	0;20	**70**	**20**	**70**	**0**

Из анализа результатов расчетов (таблица 2) следует, что наибольший прирост продукции, который может быть достигнут, составит

$70 = F_4(100) = g_4(0) + F_3(100)$, т.е. $x_4=0$

Это означает, что четвертому предприятию не следует выделять денежные средства, а первым трем – все 100 д.е.

Тогда

$70 = F_3(100) = g_3(20) + F_2(80)$, т.е. $x_3=20$ (третьему предприятию выделяем 20 д.е.)

Теперь необходимо обеспечить максимальную прибыль при распределении оставшихся 80 д.е. между первым и вторым предприятиями. Из пятой строки таблицы 2 (при $x = 80$ д.е.) видно, что наибольший прирост выпуска продукции в этом случае составит

$$57 = F_2(80) = g_2(0) + F_1(80)$$

и может быть достигнут, если второму предприятию не выделять капитал ($x_2=0$), а первому предприятию выделить $x_1=80$ д.е.

Итак, оптимальное распределение капитала имеет вид: $x_2 = x_4 = 0$, $x_1 = 80$ д.е., $x_3 = 20$ д.е.

Типовая задача о замене оборудования

На предприятии используется некоторое оборудование, которое со временем изнашивается. Прибыль от его эксплуатации становится все меньше, и на некотором этапе его продажа, приобретение и использование нового оборудования становится выгоднее. Поэтому возникает задача о выборе наиболее подходящего момента замены оборудования.

Рассмотрим сразу численный пример

На предприятии используется оборудование не старше 10 лет. Известны стоимость r(t) продукции, производимой в течение года рассматриваемого периода с использованием данного оборудования; u(t) – ежегодные затраты на эксплуатацию оборудования возраста t лет; остаточная стоимость оборудования s(t); стоимость P нового оборудования (сюда же включаются расходы, связанные с установкой, наладкой и запуском этого оборудования, причем данная стоимость считается постоянной в течение всего планового периода). Составить оптимальную политику обновления оборудования заданного возраста T в плановом периоде продолжительности N.

N=10, T=7, s(t)=0, P=8

	Возраст оборудования, t										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r(t)	24	24	24	23	23	22	21	21	21	20	20
u(t)	13	14	15	16	17	17	17	18	19	19	20

Составим матрицу максимальных прибылей при эксплуатации оборудования. При этом будем использовать логическую переменную $X_k = \{\tilde{N}; Ç\}$, что соответствует сохранению или замене оборудования в начале k-го периода.

Функциональные уравнения прибыли имеют следующий вид:

$$z_N(t) = \max\begin{cases} r(t) - u(t) \\ s(t) - P + r(0) - u(0) \end{cases}$$

$$z_k(t) = \max\begin{cases} r(t) - u(t) + z_{n+1}(t+1) \\ s(t) - P + r(0) - u(0) + z_{n+1}(1) \end{cases}$$ при

$k = N-1,\ldots,1$

Отметим, что если максимальное значение прибыли соответствует значению из первой строки, то оборудование следует сохранить $X_k = C$, а если из второй – то заменить $X_k = Ç$.

Итак, начинаем с последнего года планового периода.

$$z_{10}(t) = \max\begin{cases} r(t) - u(t) \\ 0 - 8 + 24 - 13 \end{cases} = \max\begin{cases} r(t) - u(t) \\ 3 \end{cases},$$

$z_{10}(1) = \max\begin{cases} 24 - 14 \\ 3 \end{cases} = 10$, $X_{10}(1) = C$, т.е. в начале первого года планового периода оборудование, которое имеет возраст 1 год, целесообразно сохранить.

$z_{10}(2) = \max\begin{cases} 24 - 15 \\ 3 \end{cases} = 9$, $X_{10}(2) = C$, т.е. в начале первого года рассматриваемого периода оборудование, которое имеет возраст 2 года, целесообразно сохранить.

$$z_{10}(3) = \max\begin{cases} 23 - 16 \\ 3 \end{cases} = 7, \quad X_{10}(3) = C,$$

$$z_{10}(4) = \max\begin{cases} 23 - 17 \\ 3 \end{cases} = 6, \quad X_{10}(4) = C,$$

$$z_{10}(5) = \max\begin{cases} 22 - 17 \\ 3 \end{cases} = 5, \quad X_{10}(5) = C,$$

$$z_{10}(6) = \max\begin{cases} 21 - 17 \\ 3 \end{cases} = 4, \quad X_{10}(6) = C,$$

$z_{10}(7) = \max\begin{cases} 21 - 18 \\ 3 \end{cases} = 3$, $X_{10}(7) = C / Ç$, это означает, что в начале первого года планового периода оборудование, которое имеет возраст 7 лет можно как оставить, так и заменить, так как прибыль одинакова. Выбираем, например, $X_{10}(7) = C$.

$$z_{10}(8) = \max\begin{cases}21-19\\3\end{cases} = 3,\quad X_{10}(8) = Ç,$$ т.о. в начале первого года рассматриваемого периода оборудование возраста 8 лет нужно заменить.

$$z_{10}(9) = \max\begin{cases}20-19\\3\end{cases} = 3,\quad X_{10}(9) = Ç,$$

$$z_{10}(10) = \max\begin{cases}20-20\\3\end{cases} = 3,\quad X_{10}(10) = Ç.$$

Аналогично просчитываем:

$$z_9(t) = \max\begin{cases}r(t)-u(t)+z_{10}(t+1)\\0-8+24-13+10\end{cases} = \max\begin{cases}r(t)-u(t)+z_{10}(t+1)\\13\end{cases},$$

$$z_8(t) = \max\begin{cases}r(t)-u(t)+z_9(t+1)\\0-8+24-13+19\end{cases} = \max\begin{cases}r(t)-u(t)+z_9(t+1)\\22\end{cases},$$

…

$$z_1(t) = \max\begin{cases}r(t)-u(t)+z_2(t+1)\\0-8+24-13+70\end{cases} = \max\begin{cases}r(t)-u(t)+z_2(t+1)\\73\end{cases}.$$

Значения прибыли занесем в таблицу, в которой строки соответствуют годам планового периода производства (k), а столбцы – возрасту оборудования в начале текущего года (t).

k \ t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	77	75	73	73	73	73	**73**	73	73	73
2	**70**	67	66	66	66	66	66	66	66	66
3	63	**60**	58	58	58	58	58	58	58	58
4	55	53	**51**	51	51	51	51	51	51	51
5	48	45	44	**44**	44	44	44	44	44	44
6	**41**	38	36	35	35	35	35	35	35	35
7	32	**31**	29	29	29	29	29	29	29	29
8	26	22	**22**	22	22	22	22	22	22	22
9	**19**	16	13	13	13	13	13	13	13	13
10	10	**9**	7	6	5	4	3	3	3	3

Серым цветом выделены ячейки, которые соответствуют решению о замене оборудования ($X_k(t) = Ç$).

Итак, для оборудования начального возраста 7 лет в плановом периоде эксплуатации оборудования в течение 10 лет целесообразно заменить оборудование в начале 1-го, 5-го и 8-го годов. А максимальная прибыль составляет 73 у.е.

В рассмотренном примере максимизировалась прибыль. С другой стороны можно использовать условие минимизации затрат. Например:

На некотором предприятии оборудование эксплуатируется в течение 5 лет, после чего продается. В начале каждого года можно принять решение сохранить оборудование или же продать и заменить новым. Стоимость нового оборудования P=320. В зависимости от срока эксплуатации ($1 \le t \le 5$) оборудование можно продать по так называемой ликвидной стоимости $g(t) = P\,2^{-t}$. Издержки на содержание оборудования в течение года зависят от возраста оборудования $r(t) = 40(t+1)$. Составить оптимальную стратегию обновления-сохранения оборудования из условия минимизации суммарных затрат с учетом начальной покупки и заключительной продажи оборудования.

Решение:

Будем рассматривать 5 периодов, каждый из которых соответствует одному году. В начале каждого года вычисляя значения затрат принимаем решение сохранить или заменить оборудование. Показатель эффективности k-го шага:

$$f_k(t)=\begin{cases} r(t), & \text{åñëè îáîðóäîâàí èå ñîõðàíÿåòñ ÿ} \\ P+r(0)-g(t), & \text{åñëè îáîðóäîâàí èå çàìåíÿåòñÿ} \end{cases}$$

,

т.е.

$$f_k(t)=\begin{cases} 40(t+1), & \text{åñëè îáîðóäîâàí èå ñîõðàíÿåòñ ÿ} \\ 320+40-320\cdot 2^{-t}, & \text{åñëè îáîðóäîâàí èå çàìåíÿåòñÿ} \end{cases}$$

Так как после рассматриваемого периода в пять лет оборудование всегда продается, то условные оптимальные затраты на эксплуатацию в конце пятого года соответствуют выручке от продажи оборудования возраста t лет (так как целевая функция определяет затраты, то величина дохода от продажи оборудования должна рассматриваться со знаком «-»):

$$Z_5(t)=-g(t);$$

Т.е. $Z_5(1)=-160$, $Z_5(2)=-80$, $Z_5(3)=-40$, $Z_5(4)=-20$, $Z_5(5)=-10$,

Условные оптимальные затраты на эксплуатацию машины, начиная с k-го шага до конца периода, при условии, что к началу k-го шага машина имеет возраст t лет определяются формулой:

$$Z_k(t)=\min\begin{cases} r(t)+Z_{k+1}(t+1), & \text{åñëè îáîðóäîâàí èå ñîõðàíÿåòñ ÿ} \\ P+r(0)-g(t)+Z_{k+1}(1), & \text{åñëè îáîðóäîâàí èå çàìåíÿåòñÿ} \end{cases}$$

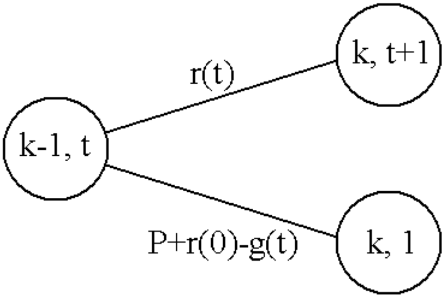
при k=4, 3, 2, 1.

Т.о.

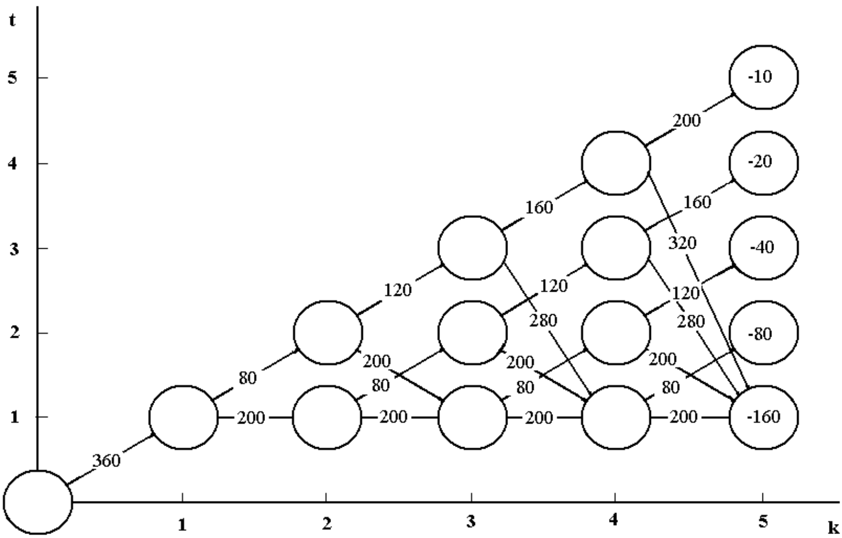
$$Z_k(t)=\min\begin{cases} 40(t+1)+Z_{k+1}(t+1), & \text{åñëè îáîðóäîâàí èå ñîõðàíÿåòñ ÿ} \\ 320+40-320\cdot 2^{-t}+Z_{k+1}(1), & \text{åñëè îáîðóäîâàí èå çàìåíÿåòñÿ} \end{cases}$$

для k=4, 3, 2, 1.

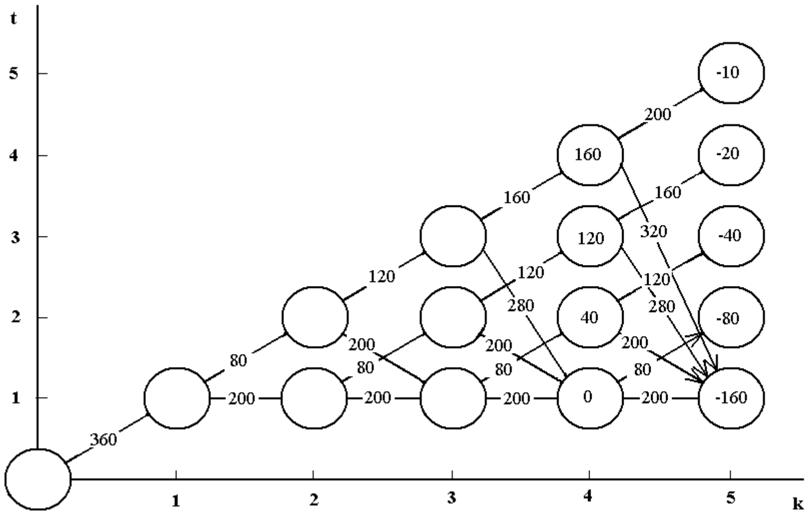
Условно управление на каждом шаге удобно изобразить:



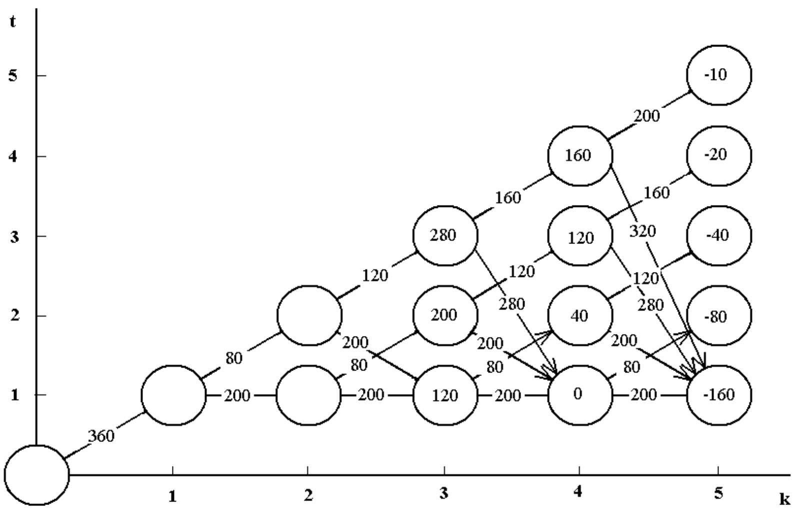
Схематическое изображение оптимальных затрат в конце 5-го года:



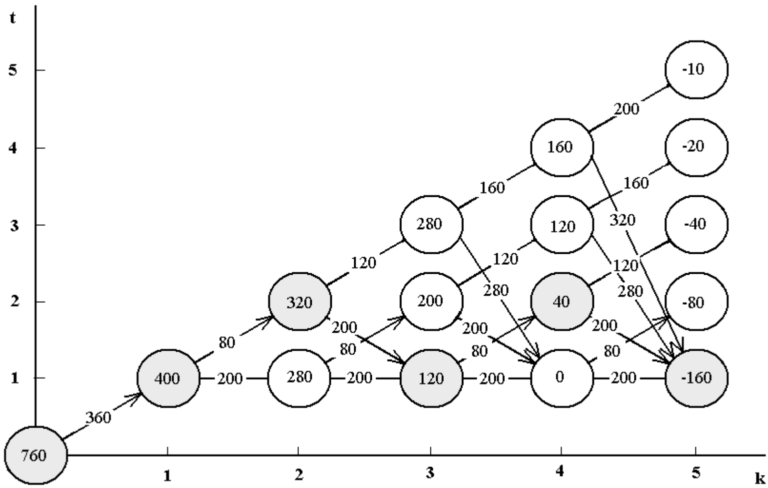
Схематическое изображение оптимальных затрат для 4-го и 5-го годов (стрелками указан выбор минимальных затрат на эксплуатацию):



Схематическое изображение оптимальных затрат для 3-го, 4-го и 5-го годов:



Схематическое изображение оптимальных затрат для всего срока использования оборудования (серым цветом помечены оптимальные управления):



Итак, оптимальной стратегией обновления-сохранения оборудования считаем следующую: оборудование разумно заменить в начале третьего и пятого годов эксплуатации, при этом затраты на его эксплуатацию составят 760 д.е.

ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Некоторые задачи линейного программирования требуют целочисленного решения. К ним относятся задачи по производству и распределению неделимой продукции (выпуска станков, телевизоров, автомобилей и т.д.).

В общем виде задача линейного целочисленного программирования формулируется так: найти такое решение (план) $\overline{X}$ = (x_1, x_2, … , x_n), при котором линейная функция

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

принимает максимальное или минимальное значение при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \text{ i=1, 2, …, m;} \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0, \text{ j=1, 2, …, n} \qquad (3)$$

$$x_j \text{ – целые числа.} \qquad (4)$$

Оптимальное решение задачи, найденное симплексным методом, часто не является целочисленным. Его можно округлить до ближайших целых чисел. Однако такое округление может привести к далеко неоптимальному решению. Поэтому для нахождения целочисленного решения применяются особые методы целочисленной оптимизации.

При наличии в задаче линейного программирования двух переменных, а в системе ограничений – неравенств она может быть решения графическим методом.

В системе координат x_1Ox_2 находят область допустимых решений, строят вектор ***C*** и линию уровня. Перемещая линию уровня по направлению ***C*** для задач на максимум, находим наиболее удаленную от начала координат точку и ее координаты.

В том случае, когда координаты этой точки нецелочисленные, в области допустимых решений строят целочисленную решетку и находят на ней такие числа, которые удовлетворяют системе ограничений и при которых значение целевой функции наиболее близко к экстремальному целочисленному решению. Координаты такой вершины и являются целочисленным решением. Аналогично решается задача на минимум.

Другой метод, метод отсечения, был предложен Гомори и состоит в следующем.

Сначала задача решается без условия целочисленности. Если полученный план целочисленный, задача решена. В противном случае к ограничениям задачи добавляется новое ограничение, обладающее следующими свойствами: оно должно быть линейным; должно отсекать найденный оптимальный нецелочисленный план; не должно отсекать ни одного нецелочисленного плана. Дополнительное ограничение, обладающее указанными свойствами, называется правильным отсечением. Далее задача решается с учетом нового ограничения. Если полученное решение также является нецелочисленным, то вновь накладывается дополнительное ограничение по целочисленности. Вычисления продолжают до тех пор, пока не будет получено целочисленное решение или показано, что задача не имеет целочисленного решения.

Пусть получено оптимальное решение, которое не является целочисленным и на последнем шаге решения задачи симплексным методом получены следующие уравнения, выражающие базисные переменные x_1, x_2, … , x_m оптимального решения через небазисные x_{m+1}, x_{m+2}, … , x_n

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - \alpha_{1m+1}x_{m+1} - \ldots - \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \beta_2 - \alpha_{1m+1}x_{m+1} - \ldots - \alpha_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = \beta_m - \alpha_{mm+1}x_{m+1} - \ldots - \alpha_{mn}x_n \end{cases} \quad (5)$$

Так что оптимальным решением задачи является $\overline{x} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, 0, 0, \ldots, 0)$, в котором, например, β_i – нецелая компонента. В этом случае неравенство

$$\{\beta_i\} - \{\alpha_{im+1}\}x_{m+1} - \ldots - \{\alpha_{in}\}x_n \le 0 \quad (6)$$

Обладает всеми свойствами правильного отсечения.

Замечание. В неравенстве (6) символ *{a}* означает дробную часть числа *a*.

Определение. Целой частью числа *a* называется наибольшее целое число *[a]*, не превосходящее *a*, а дробной частью – число *{a}*, равное разности между этим числом и его целой частью., т.е. *{a}=a–[a]*.

Например, $\left[\frac{4}{5}\right] = 0 \quad \left\{\frac{4}{5}\right\} = \frac{4}{5} - 0 = \frac{4}{5};$

$$\left[\frac{8}{3}\right] = 2 \quad \left\{\frac{8}{3}\right\} = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3};$$

$$\left[-\frac{4}{5}\right] = -1 \quad \left\{-\frac{4}{5}\right\} = -\frac{4}{5} - (-1) = \frac{1}{5};$$

$$\left[-\frac{8}{3}\right] = -3 \quad \left\{-\frac{8}{3}\right\} = -\frac{8}{3} - (-3) = \frac{1}{3};$$

Для решения задачи целочисленного линейного программирования методом Гомори используется следующий алгоритм:

1. Симплексным методом решить задачу (1)-(3) без учета целочисленности. Если все компоненты оптимального плана целые, то он является оптимальным и для целочисленного программирования (1)-(4). Если первая задача (1)-(3) неразрешима (т.е. не имеет конечного оптимума или условия ее противоречивы), то и вторая задача (1)-(4) также неразрешима.

2. Если среди компонент оптимального решения есть нецелые, то выбрать компоненту с наибольшей целой частью и по соответствующему уравнению системы (5) сформировать правильное отсечение (6).

3. Неравенство (6) введением дополнительной неотрицательной целочисленной переменной преобразовать в равносильное уравнение

$$\{\beta_i\} - \{\alpha_{im+1}\}x_{m+1} - \ldots - \{\alpha_{in}\}x_n + x_{n+1} = 0 \qquad (7)$$

и включить его в систему ограничений (2).

4. Полученную расширенную задачу решить симплексным методом. Если найденный оптимальный план будет целочисленным, то задача целочисленного программирования (1)-(4) решена. В противном случае вернуться к п.2 алгоритма.

Если в процессе решения появится уравнение с нецелым свободным членом и целыми остальными коэффициентами, то соответствующее уравнение не имеет решения в целых числах. В этом случае и данная задача не имеет целочисленного оптимального решения.

Пример. Пусть предприятие для производства трех наименований изделий использует три вида ресурсов в количестве 10, 11 и 13 ед. Затраты каждого из перечисленных трех видов ресурсов на изготовление одного изделия 1-го, 2-го или 3-го видов и прибыль от реализации одного из каждого видов приведены в таблице

Объем ресурсов	Затраты на одно изделие		
	1-го вида	2-го вида	3-го вида
10	3	2	0
11	1	4	0
13	3	3	1
Прибыль в усл.ед.	4	5	1

Предполагая, что предприятие может выпускать изделия разных наименований в любых соотношениях, найти план производства, обеспечивающий максимальную рентабельность.

Обозначим x_1, x_2, x_3 – количество изделий, которые должно выпускать предприятие для обеспечения максимальной рентабельности, f – максимальную прибыль. Тогда математическая модель задачи примет вид:

$$f(x) = 4x_1 + 5x_2 + x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 + 4x_2 \le 11 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \le 13 \end{cases}$$

$$x_{1,2,3} \ge 0 - \textit{целые}$$

Приведем задачу к каноническому виду:

$$f - 4x_1 - 5x_2 - x_3 = 0$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ x_1 + 4x_2 + x_5 = 11 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_6 = 13 \end{cases}$$

$$x_{1,2,3,4,5,6} \ge 0 - \textit{целые}$$

Составим симплексную таблицу с базисными переменными (БП) x_4, x_5, x_6. Проводим три шага симплексных преобразований

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Св.чл.	Оц.
f	–4	–5	–1	0	0	0	0	
x_4	3	2	0	1	0	0	10	5
x_5	1	4	0	0	1	0	11	$\frac{11}{4}$
x_6	3	3	1	0	0	1	13	$\frac{13}{3}$

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Св.чл.	Оц.
f	$-\frac{11}{4}$	0	–1	0	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{55}{4}$	
x_4	$\boxed{\frac{5}{2}}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{5}$

x_2	$\frac{1}{4}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{11}{4}$	11
x_6	$\frac{9}{4}$	0	1	0	$-\frac{3}{4}$	1	$\frac{19}{4}$	$\frac{171}{4}$

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Св.чл.
f	0	0	−1	$\frac{11}{10}$	$\frac{7}{10}$	0	$\frac{187}{10}$
x_1	1	0	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{9}{5}$
x_2	0	1	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{23}{10}$
x_6	0	0	$\boxed{1}$	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{3}{10}$	1	$\frac{7}{10}$

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Св.чл.
f	0	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{97}{5}$
x_1	1	0	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{9}{5}$
x_2	0	1	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{23}{10}$
x_3	0	0	1	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{3}{10}$	1	$\frac{7}{10}$

Получаем оптимальное, но нецелочисленное решение

$$\bar{x} = \left(\frac{9}{5}, \frac{23}{10}, \frac{7}{10}, 0, 0, 0\right) \text{ и } f(\bar{x}) = \frac{97}{5}.$$

Для отыскания целочисленного решения нужно ввести дополнительное ограничение. Для этого найдем дробные части чисел $\frac{9}{5}, \frac{23}{10}, \frac{7}{10}$.

$$\left\{\frac{9}{5}\right\} = \frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5}, \qquad \left\{\frac{23}{10}\right\} = \frac{23}{10} - 2 = \frac{3}{10},$$

$$\left\{\frac{7}{10}\right\} = \frac{7}{10} - 0 = \frac{7}{10}.$$

Т.к. $\max\left\{\frac{9}{5}, \frac{23}{10}, \frac{7}{10}\right\} = \frac{9}{5}$, то дополнительное ограничение строим для первой строки.

$$x_1 = \frac{9}{5} - \frac{2}{5}x_4 + \frac{1}{5}x_5:$$

$$\left\{\frac{9}{5}\right\} - \left\{\frac{2}{5}\right\}x_4 + \left\{\frac{1}{5}\right\}x_5 \le 0.$$

Т.к. дробные части $\left\{\frac{9}{5}\right\} = \frac{4}{5}$, $\left\{\frac{2}{5}\right\} = \frac{2}{5}$, $\left\{-\frac{1}{5}\right\} = \frac{4}{5}$, то последнее неравенство запишется в виде:

$$\frac{4}{5} - \frac{2}{5}x_4 - \frac{4}{5}x_5 \le 0$$

или, введя дополнительную целочисленную переменную $x_7 \ge 0$, получим равносильное неравенству уравнение

$$\frac{2}{5}x_4 + \frac{4}{5}x_5 - x_7 = \frac{4}{5} \text{ или } x_7 = -\frac{4}{5} + \frac{2}{5}x_4 + \frac{4}{5}x_5.$$

Это уравнение необходимо включить в систему ограничений исходной канонической задачи, после чего повторить процесс решения задачи симплексным методом применительно к расширенной задаче. При этом для сокращения числа шагов дополнительное уравнение вводится в систему, полученную на последнем шаге решения задачи без условия целочисленности.

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Св.чл.
f	0	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	0	$\frac{97}{5}$
x_1	1	0	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{9}{5}$
x_2	0	1	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	0	$\frac{23}{10}$
x_3	0	0	1	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{3}{10}$	1	0	$\frac{7}{10}$
x_7	0	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\boxed{-\frac{4}{5}}$	0	–1	$-\frac{4}{5}$

Базисное решение $\bar{x} = \left(\frac{9}{5}, \frac{23}{10}, \frac{7}{10}, 0, 0, 0, -\frac{4}{5}\right)$ – недопустимое. Для получения допустимого базисного решения необходимо перевести в основные переменную, входящую с положительным коэффициентом в уравнение, в котором свободный член отрицателен (уравнение (8)), т.е. x_4 или x_5. Переведем в основные, например, переменную x_5.

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Св.чл.
f	0	0	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	19
x_1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	2
x_2	0	1	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{3}{8}$	2
x_3	0	0	1	$-\frac{3}{4}$	0	1	$-\frac{3}{8}$	1
x_5	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{5}{4}$	1

Из последней таблицы получаем оптимальное целочисленное решение

$$\bar{x} = (2,2,1,0,1,0,0), \quad f_{\max} = 19.$$

Следовательно, максимальная прибыль в 19 усл.ед. будет достигнута при производстве двух ед. изделий 1-го вида, двух ед. изделий 2-го вида и одной ед. изделий 3-го вида.

МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задачами нелинейного программирования называются задачи математического программирования, в которых нелинейны и (или) целевая функция, и (или) ограничения в виде неравенств или равенств.

Задачи нелинейного программирования можно классифицировать в соответствии с видом функции $F(x)$, функциями ограничений и размерностью вектора x (вектора решений).

В самом общем виде классификация представлена в таблице.

Вид $F(x)$	Вид функции ограничений	Число переменных	Название задачи
Нелинейная	Отсутствуют	1	Безусловная однопараметрическая оптимизация
Нелинейная	Отсутствуют	Более 1	Безусловная многопараметрическая оптимизация
Нелинейная или линейная	Нелинейные или линейные	Более 1	Условная нелинейная оптимизация

Общих способов решения, аналогичных симплекс-методу линейного программирования, для нелинейного программирования не существует. В каждом конкретном случае способ выбирается в зависимости от вида функции $F(x)$.

Задачи нелинейного программирования на практике возникают довольно часто, когда, например, затраты растут не пропорционально количеству закупленных или произведённых товаров.

Многие ***задачи нелинейного программирования*** могут быть приближены к ***задачам линейного программирования***, и найдено близкое к оптимальному решению.

Задачи нелинейного программирования относятся ***к трудным*** вычислительным задачам. При их решении часто приходится прибегать к приближенным ***методам оптимизации***. Мощным средством для решения задач нелинейного программирования являются численные методы. Они позволяют найти решение задачи с заданной степенью точности.

Общая формулировка нелинейных задач:

Найти переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i, i = 1, 2, \ldots, m$$

и обращающие в максимум (минимум) целевую функцию

$$Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Примером типичной и простой нелинейной задачи является следующая:
Данное предприятие для производства какого-то продукта расходует два средства в количестве $\boldsymbol{x_1}$ и $\boldsymbol{x_2}$ соответственно. Это факторы производства, например, машины и труд, два различных сырья и т.п., а величины x_1 и x_2 – затраты факторов производства. Факторы производства впредь будем считать взаимозаменяемыми. Если это «труд» и «машины», то можно применять такие методы производства, при которых величина затрат машин в сопоставлении с величиной затрат труда оказывается больше или меньше (производство более или менее трудоемкое).

Объем производства (выраженный в натуральных или стоимостных единицах) является функцией затрат производства $Z = f(x_1, x_2)$. Эта зависимость называется **производственной функцией**. Издержки зависят от расхода обоих факторов (x_1 и x_2) и от цен этих факторов (c_1 и c_2). Совокупные издержки выражаются формулой $b = c_1x_1 + c_2x_2$. Требуется при данных совокупных издержках определить такое количество факторов производства, которое максимизирует объем продукции Z.

Математическая модель этой задачи имеет вид: определить такие переменные x_1 и x_2, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} c_1x_1 + c_2x_2 = b \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

при которых функция

$$Z = f(x_1, x_2)$$

достигает максимума. Как правило, функция может иметь произвольный нелинейный вид.

Метод Лагранжа для решения задач нелинейного программирования

Пусть дана целевая функция $Z = f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $\bar{x} \in X \subset R^n$. Будем считать, что множество допустимых значений X удовлетворяет следующим требованиям:

все элементы множества X удовлетворяют системе ограничений данной оптимизационной задачи;

множество X компактно, т.е. является одновременно замкнутым и ограниченным в R^n;

множество X является выпуклым, т.е. если две любые точки $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ принадлежат X, то и точка $\bar{x}_3 = \alpha\bar{x}_1 + (1-\alpha)\bar{x}_2$, где $0 \le \alpha \le 1$, также принадлежит X;

4) функция $Z = f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является, по крайней мере, дважды дифференцируемой на *X.*

В задачах нелинейного программирования требуется найти такую точку $\bar{x}_0 \in X$, в которой нелинейная целевая функция принимает наибольшее (либо наименьшее) значение. В математическом анализе такая задача формулируется как задача нахождения глобального условного экстремума функции n переменных $Z = f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Множество допустимых значений *X,* на котором ищется точка экстремума, может быть задано с помощью одного или нескольких уравнений (или неравенств) связи. Например, системой m уравнений вида $\varphi_1(\bar{x}) = 0; \varphi_2(\bar{x}) = 0; \ldots; \varphi_m(\bar{x}) = 0$. Причем искомая точка экстремума $\bar{x}_0$ должна удовлетворять всем уравнениям связи.

Для решения таких задач существует так называемый обобщенный метод Лагранжа. Однако прежде чем приступить к изложению алгоритма этого метода, заметим, что полезно выяснить: существует ли решение задачи и если существует, является ли оно единственным?

Для этого существует две возможности.

Первая связана с теоремой Вейерштрасса.

Теорема Вейерштрасса. Для того чтобы функция $Z = f(\bar{x})$ имела точку глобального максимума (минимума) $\bar{x}_0 \in X$, достаточно, чтобы множество X было компактным в R^n, а функция $Z = f(\bar{x})$ - непрерывной на X.

Иногда вместо теоремы Вейерштрасса бывает удобнее проверить выполнение следствия из нее.

Следствие. Если функция $Z = f(\overline{x})$ непрерывна на R^n и

$$\lim_{|\overline{x}|\to\infty} f(\overline{x}) = +\infty, \ \left(\lim_{|\overline{x}|\to\infty} f(\overline{x}) = -\infty\right),$$

то эта функция достигает своего глобального минимума (максимума) в любом замкнутом множестве $X \subset R^n$.

Вторая возможность связана с проверкой функции $Z = f(\overline{x})$ на выпуклость (вогнутость). Для решения этого вопроса необходимо исследовать так называемую матрицу Гессе, составленную из частных производных 2-го порядка от функции $Z = f(\overline{x})$:

$$H = \begin{pmatrix} Z''_{x_1x_1} & Z''_{x_1x_2} & \cdots & Z''_{x_1x_n} \\ Z''_{x_2x_1} & Z''_{x_2x_2} & \cdots & Z''_{x_2x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z''_{x_nx_1} & Z''_{x_nx_2} & \cdots & Z''_{x_nx_n} \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы функция $Z = f(\overline{x})$ была строго выпуклой на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\overline{x} \in X$ матрица Гессе была положительно определенной. Для строгой вогнутости функции $Z = f(\overline{x})$ на X необходимо и достаточно, чтобы матрица Гессе была отрицательно определенной для любого $\overline{x} \in X$.

Если функция $Z = f(\overline{x})$ имеет на множестве X единственную стационарную точку $\overline{x}_0$, т.е. точку, в которой все ее частные производные первого порядка равны нулю, то из строгой выпуклости функции $Z = f(\overline{x})$ на X следует существование единственной точки глобального минимума $\overline{x} \in X$.

Из строгой вогнутости в этом случае следует существование единственной точки глобального максимума $\overline{x} \in X$.

Замечание 1. Для проверки квадратной матрицы на положительную или отрицательную определенность проще всего воспользоваться критерием Сильвестра:

Если все главные миноры квадратной матрицы положительны (включая определитель данной матрицы), то матрица называется положительно определенной.

Если главные миноры этой матрицы чередуют знаки, причем $a_{11} < 0$, то матрица называется отрицательно определенной.

Если требования 1) и 2) выполняются нестрого, т.е. некоторые миноры не строго положительны либо не строго отрицательны, то матрица называется положительно либо отрицательно полуопределенной.

Замечание 2. Если матрица Гессе является положительно (или отрицательно) полуопределенной, то функция $Z = f\left(\overline{x}\right)$ может быть нестрого выпуклой (вогнутой).

Полуопределенность матрицы Гессе в стационарной точке $\overline{x} \in X$ не является достаточным условием экстремума в этой точке. Необходимо дополнительное исследование.

Перейдем к описанию алгоритма метода Лагранжа:

Составляем функцию Лагранжа:

$$Z = f\left(\overline{x}\right) + \lambda_1\varphi_1\left(\overline{x}\right) + \lambda_2\varphi_2\left(\overline{x}\right) + \ldots + \lambda_m\varphi_m\left(\overline{x}\right),$$

где $Z = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\right)$ - функция $n + m$ переменных;

$f\left(\overline{x}\right) = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ - заданная в задаче целевая функция;

$\varphi_1\left(\overline{x}\right), \varphi_2\left(\overline{x}\right), \ldots, \varphi_m\left(\overline{x}\right)$, - функции из заданных уравнений связи;

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ - множители Лагранжа $\lambda_i \geq 0, \left(i = 1, 2, \ldots, m\right)$, которые не могут быть равны нулю все одновременно.

Проверяем для функции Лагранжа выполнение теоремы Вейерштрасса (или следствия из нее) для того, чтобы убедиться в существовании экстремальных точек.

Находим все частные производные функции, а затем все ее стационарные точки.

Проверяем выполнение достаточных условий экстремума в найденных стационарных точках. Для этого (в случае необходимости) исследуем матрицу Гессе.

Если стационарных точек немного, то точку глобального, условного максимума (минимума) находим, сравнивая значения целевой функции в стационарных точках.

Задача 1. Найти наибольшее значение целевой функции $Z = 2x_1^{\frac{1}{2}} \cdot x_2^{\frac{1}{2}}$ при условии, что: $x_1 + 2x_2 = 4; x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$.

Решение.

Данная задача представляет собой задачу нелинейного программирования с одним уравнением связи, которое запишем в виде $\varphi(x) = 4 - x_1 - 2x_2 = 0$. Применим метод Лагранжа.

Составим функцию Лагранжа:

$$Z = Z(x_1, x_2, \lambda) = 2x_1^{\frac{1}{2}} \cdot x_2^{\frac{1}{2}} + \lambda(4 - x_1 - 2x_2).$$

Проверим выполнение следствия из теоремы Вейерштрасса. Пусть $\lambda = 1$. Тогда функцию Лагранжа можно записать в виде:

$$Z = 4 - x_2 - \left(x_1 + x_2 - 2x_1^{\frac{1}{2}} \cdot x_2^{\frac{1}{2}}\right) = 4 - x_2 - \left(x_1^{\frac{1}{2}} - x_2^{\frac{1}{2}}\right)^2.$$

Очевидно:

$$\lim_{\left[\begin{smallmatrix} x_1 \to \infty \\ x_2 \to \infty \end{smallmatrix}\right.} \left(4 - x_2 - \left(x_1^{\frac{1}{2}} - x_2^{\frac{1}{2}}\right)^2\right) = -\infty.$$

Такой же результат получается и при других значениях $\lambda \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Следовательно, функция $Z = Z(x_1, x_2, \lambda)$ имеет глобальный максимум, при условии, что $\lambda \geq \frac{\sqrt{2}}{2}, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Найдем частные производные функции $Z = Z(x_1, x_2, \lambda)$.

$$Z'_{x_1} = x_1^{-\frac{1}{2}} \cdot x_2^{\frac{1}{2}} - \lambda;$$

$$Z'_{x_2} = x_1^{\frac{1}{2}} \cdot x_2^{-\frac{1}{2}} - 2\lambda;$$

$$Z'_{\lambda} = 4 - x_1 - 2x_2.$$

Для нахождения стационарных точек решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1^{-\frac{1}{2}} \cdot x_2^{\frac{1}{2}} - \lambda = 0, \\ x_1^{\frac{1}{2}} \cdot x_2^{-\frac{1}{2}} - 2\lambda = 0, \\ 4 - x_1 - 2x_2 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x_2}{x_1} = \lambda^2, \\ \dfrac{x_1}{x_2} = 4\lambda^2, \\ x_1 + 2x_2 = 4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 = 4x_2^2, \\ (x_1 - 4)^2 = 4x_2^2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 1, \\ \lambda = \dfrac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \left(2;1;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ -стационарная точка.

4) Проверку выполнения достаточных условий экстремума и определение характера экстремума в данной задаче можно не производить. Из пункта 2) известно, что функция Лагранжа имеет глобальный максимум во множестве, которое определено неравенствами: $\lambda \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$. В пункте 3) найдена единственная стационарная точка, которая удовлетворяет этим неравенствам: $\left(2;1;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Следовательно, альтернативы нет. Найденная точка - есть точка глобального максимума функции Лагранжа. Отсюда следует, что точка $\bar{x}_0 = (2;1)$ будет точкой глобального условного максимума целевой функции $Z = 2x_1^{\frac{1}{2}} \cdot x_2^{\frac{1}{2}}$. Найдем:

$$Z_{\max} = f(\bar{x}_0) = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{1} = 2\sqrt{2}.$$

Ответ: $Z_{\max} = 2\sqrt{2}$.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ ГРАФИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

В тех случаях, когда система ограничений задачи задана в виде системы нелинейных неравенств, но целевая функция линейна, причем число неизвестных равно двум, можно применить обычный графический метод.

Задача 2. Найти наибольшее значение целевой функции

$$Z = f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 16 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение.

На рис. 1 изображены: область допустимых решений данной задачи D, нормальный вектор $\vec{n} = grad\left(Z(x_1, x_2)\right) = (2;3)$, две линии уровня l_0: проходящая через начало координат $(l_0 \perp \vec{n})$ и параллельная ей l_m. Точка касания линии l_m с окружностью $x_1^2 + x_2^2 = 16$ является той точкой области D, в которой целевая функция принимает наибольшее значение. Координаты искомой точки касания M можно найти, решив систему уравнений, в которую входят уравнение окружности и уравнение прямой, на которой лежит вектор $\vec{n}$:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 16, \\ x_1 = \dfrac{3}{2} x_1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{8}{\sqrt{13}}, \\ x_2 = \dfrac{12}{\sqrt{13}}. \end{cases}$$

Подставляя найденное решение в целевую функцию, получим наибольшее значение целевой функции при заданной системе ограничений

$$Z_{\max} = 4\sqrt{13}.$$

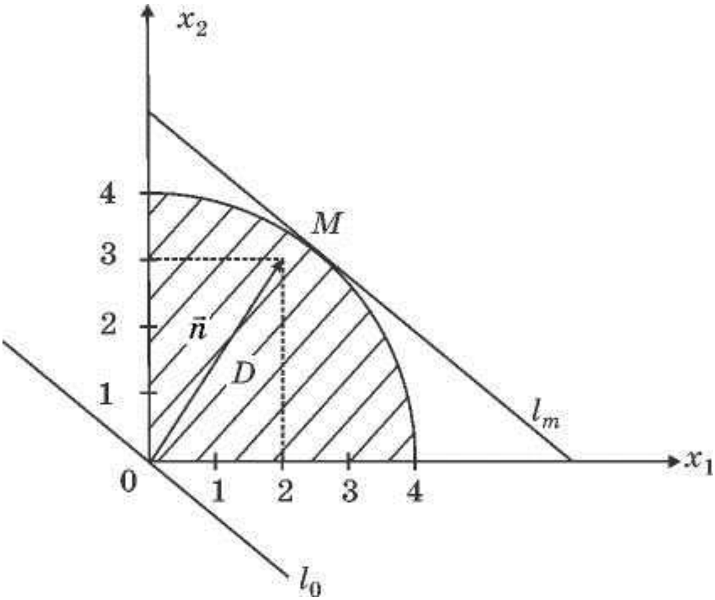


Рис. 1.

В некоторых случаях графическим методом удается решать оптимизационные задачи, в которых нелинейными являются не только ограничения, но и целевая функция. Достаточно простое решение получается, если линии уровня целевой функции представляют собой концентрические окружности.

ЗАДАЧИ ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Общая постановка задачи дробно-линейного программирования заключается в следующем. Найти наибольшее (наименьшее) значение целевой функции

$$Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n}{d_1 x_1 + d_2 x_2 + \ldots + d_n x_n}$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ ----------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, (i = 1,2,\ldots,n).$$

Эта задача может быть приведена к эквивалентной ей задаче линейного программирования.

Обозначим $y_0 = \dfrac{1}{d_1x_1 + d_2x_2 + \ldots + d_nx_n}$ и введем новые переменные $y_i = y_0 \cdot x_i (i = 1,2,\ldots,n)$. В результате получается задача линейного программирования в каноническом виде относительно новых переменных $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Если эта задача имеет решение, то соответствующие значения прежних переменных можно найти из соотношений $y_i = y_0 \cdot x_i (i = 1,2,\ldots,n)$. Задачи дробно-линейного программирования возникают обычно при решении проблем, связанных с определением оптимальной рентабельности, оптимальной себестоимости и т.д.

Задача 3. Завод выпускает изделия двух видов. Затраты на производство изделия первого вида - 2 тыс. рублей, второго вида - 3 тыс. рублей. Найти оптимальное соотношение между количествами x_1 и x_2 изделий 1-го и 2-го вида, чтобы средняя себестоимость была минимальной, при условии выполнения системы ограничений, связанных с производственно-техническими возможностями завода:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4, \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 24, \\ 10x_1 + 5x_2 \leq 40. \end{cases}$$

Решение.

Целевая функция в данной задаче имеет вид:

$$Z = f(x_1, x_2) = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} \to \min.$$

Обозначим:

$$y_0 = \frac{1}{x_1 + x_2}, y_1 = \frac{x_1}{x_1 + x_2}, y_2 = \frac{x_2}{x_1 + x_2}.$$

Тогда целевая функция примет вид: $M = M(y_1, y_2) = 2y_1 + 3y_2$. После умножения каждого из неравенств системы ограничений на $\dfrac{1}{x_1 + x_2}$ и введения новых переменных y_0, y_1, y_2, получим новую систему ограничений:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \ge 4y_0, \\ 2y_1 + 6y_2 \le 24y_0, \\ 10y_1 + 5y_2 \le 40y_0, \\ y_1 + y_2 = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y_0 \le 1, \\ 24y_0 + 4y_1 \ge 6, \\ 40y_0 - 5y_1 \ge 5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 \le 0.25, \\ y_1 \ge 1.5 - 6y_0, \\ y_1 \le -1 + 8y_0. \end{cases}$$

Целевую функцию, учитывая, что $y_1 + y_2 = 1$, запишем в виде: $M = 3 - y_1 \to \min$.

Областью допустимых решений в этой задаче будет треугольник ABC в системе координат (y_0, y_1).

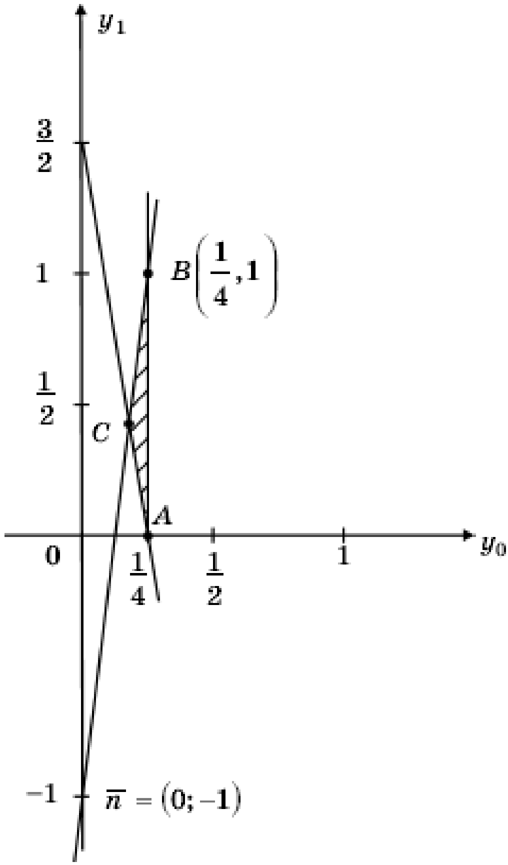


Рис. 2.

Нетрудно найти его вершины как точки пересечения соответствующих прямых:

$$A\left(\frac{1}{4};0\right); B\left(\frac{1}{4};1\right); C\left(\frac{5}{28};\frac{3}{7}\right).$$

Очевидно, что наименьшее значение функции $M=3-y_1$ получается в точке $B\left(\frac{1}{4};1\right)$, в которой значение $y_1=1$.

Оптимальное решение задачи получено при

$y_0 = \frac{1}{4}, y_1 = 1, y_2 = 0$, соответствующие значения x_1 и x_2: $x_1 = 4$; $x_2 = 0$.

Тогда $Z_{\min} = f(x_1, x_2) = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} = \frac{8}{4} = 2$

Ответ: завод должен выпускать только изделия первого вида, в количестве $x_1 = 4$.

Оптимизационные задачи с дополнительными условиями целочисленности переменных. Метод Гомори

Многие оптимизационные задачи экономического содержания требуют целочисленного решения. К таким задачам относятся те, у которых некоторые или все переменные означают количество неделимых единиц (количество станков, машин, сотрудников и т.п.) Подобные задачи называются задачами целочисленного программирования. Иногда их решение удается найти, рассматривая значения целевой функции в допустимых точках, близких к оптимальному нецелочисленному решению. Оптимальное нецелочисленное решение может быть найдено любым известным методом. Более универсальный метод решения задач целочисленного программирования предложен Гомори.

Идея этого метода заключается в следующем:

Находим оптимальное решение задачи без учета требований целочисленности. Если оно целочисленное, то задача решена.

Если первое оптимальное решение нецелочисленное, то к системе ограничений добавляется одно (или несколько) дополнительных ограничений по целочисленности и процесс нахождения оптимального решения повторяется.

Существуют задачи, которые не имеют целочисленных решений. Например, если некоторая задача линейного программирования решена симплекс-методом и в столбце свободных членов b_i имеются нецелые значения, но все элементы симплекс-матрицы целые, то это означает, что целочисленного решения данная задача не имеет.

Задача 4. Найти наибольшее значение целевой функции

$$Z = f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 16, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \\ x_1 \in Z, x_2 \in Z, \end{cases}$$ где Z - множество целых чисел.

Решение.

Изобразим область допустимых значений D (без учета ограничения по целочисленности). На рис. 3 она заштрихована. Найдем точки с целыми координатами, принадлежащие области D. Выделим и соединим те из них, которые либо лежат на линиях, ограничивающих область D, либо расположены ближе всех других к этим линиям. Получим многоугольник *OABCE.* Очевидно, задача эквивалентна задаче линейного программирования, в которой многоугольник *OABCE* является областью допустимых решений.

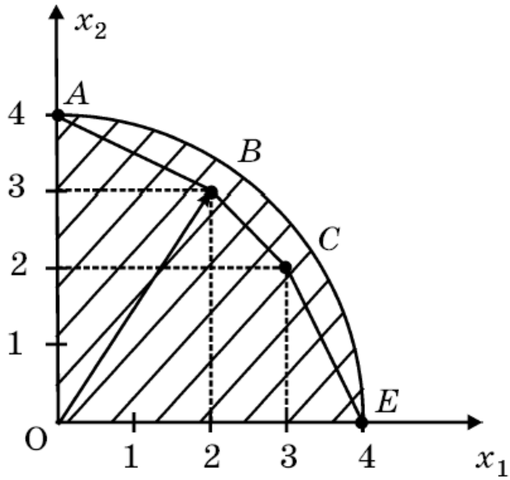


Рис. 3.

Оптимальное решение задачи линейного программирования достигается в одной из вершин многоугольника допустимых решений. Так как координаты всех вершин *OABCE* целые, то целочисленность искомого оптимального решения гарантирована.

Решением представленной задачи являются координаты точки $B(2;3)$, через которую проходит наиболее «продвинутая» в направлении вектора $\vec{n}=(2;3)$ линия уровня. Значение целевой функции: $Z_{\max}=Z(2;3)=13$.

Замечание 1. Если количество переменных в задачах целочисленного линейного программирования больше двух, то метод Гомори применяется в комбинации с симплекс-методом.

Замечание 2. В некоторых задачах линейного (или нелинейного) программирования требуется найти решение, оптимальное относительно нескольких целевых функций. Такие задачи называются многокритериальными. Основное различие между ними заключается в подходах к нахождению компромисса между требованиями заданных целевых функций.

Градиентные методы решения задач нелинейного программирования

Используя градиентные методы, можно найти, решение любой задачи нелинейного программирования. Применение этих методов в общем случае позволяет найти точку локального экстремума. Поэтому более целесообразно использовать их для нахождения решения задач выпуклого программирования. Процесс нахождения решения задачи с помощью градиентных методов

состоит в том, что начиная с некоторой точки $X^{(k)}$ осуществляется последовательный переход к некоторым другим точкам до тех пор, пока не будет найдено приемлемое решение исходной задачи. Градиентные методы могут быть подразделены на две группы.

К первой группе относятся методы, при использовании которых исследуемые точки не выходят за пределы области допустимых решений задачи. В данном случае наиболее распространенным является метод Франка - Вульфа. Ко второй - методы, при использовании которых исследуемые точки могут как принадлежать, так и не принадлежать области допустимых решений. Однако в результате реализации итерационного процесса находится точка области допустимых решений, определяющая приемлемое решение. Наиболее часто используются метод штрафных функций и метод Эрроу - Гурвица. При нахождении решения задачи градиентными методами итерационный процесс продолжается до тех пор, пока градиент функции $Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в очередной точке $X^{(k+1)}$ не станет равным нулю или же пока не выполнится неравенство $\left| f\left(X^{(k+1)}\right) - f\left(X^{(k)}\right) \right| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ (точность полученного решения).

Метод Франка - Вульфа

Пусть требуется найти максимальное значение вогнутой функции

$$Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

при условиях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ ------------------ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ограничения содержат только линейные неравенства. Эта особенность является основой для замены в окрестности исследуемой точки нелинейной целевой функции линейной, в результате чего решение исходной задачи сводится к последовательному решению задач линейного программирования.

Процесс нахождения решения начинают с определения точки, принадлежащей области допустимых решений. Пусть это точка $X^{(k)}$. Вычисляют в этой точке градиент функции:

$$\nabla f\left(X^{(k)}\right) = \left(\frac{\partial f\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_1}; \frac{\partial f\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial f\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_n} \right),$$

строят линейную функцию

$$F_k = \frac{\partial f\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_2} x_2 + \ldots + \frac{\partial f\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_n} x_n .$$

Находят максимум функции. Пусть решение данной задачи определяется точкой $Z^{(k)}$. За новое допустимое решение исходной задачи принимают координаты точки $X^{(k+1)}$, которые находят по формулам

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \lambda_k \left(Z^{(k)} - X^{(k)}\right),$$

где λ_k - некоторое число, называемое шагом вычислений $(0 < \lambda_k < 1)$. За λ_k принимают наименьший корень уравнения $\frac{df\left(X^{(k+1)}\right)}{d\lambda_k} = 0$ или выбирают произвольно, если он не принадлежит интервалу $(0;1)$.

Метод штрафных функций

Рассмотрим задачу нелинейного программирования :

$$Z = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$$

при условиях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ ------------------ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, (i = 1,2,\ldots,n)$$

где $g_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ - выпуклые функции.

Вместо того, чтобы решать эту задачу, находят максимум функции

$$Z\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) + N\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right),$$

где $N\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ определяется системой ограничений и называется **штрафной функцией**. Последнюю можно построить различными способами. Наиболее часто она имеет вид

$$N(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{m}a_i(x_1,x_2,\dots,x_n)g_i(x_1,x_2,\dots,x_n),$$

где

$$a_i(x_1,x_2,\dots,x_n)=\begin{cases}0, если b_i-g_i(x_1,x_2,\dots,x_n)\ge 0,\\ 1, если b_i-g_i(x_1,x_2,\dots,x_n)<0;\end{cases}$$

а $a_i>0$ - некоторые постоянные числа, представляющие собой весовые коэффициенты.

Используя штрафную функцию, последовательно переходят от одной точки к другой до тех пор, пока не получат приемлемое решение. Координаты последующей точки находят по формуле

$$x_j^{(k+1)}=\max\left\{0;x_j^{(k)}+\lambda\left[\frac{\partial f\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m}a_i\frac{\partial g_i\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_j}\right]\right\}$$

,

где λ - шаг вычислений $(0<\lambda_k<1)$.

Итерационный процесс обычно начинают при сравнительно малых значениях a_i и, продолжая его, эти значения постепенно увеличивают.

Метод Эрроу - Гурвица

При нахождении решения задачи нелинейного программирования методом штрафных функций значения a_i, выбирают произвольно, что приводит к значительным колебаниям удаленности определяемых точек от области допустимых решений. Этот недостаток устраняется при решении задачи методом Эрроу - Гурвица, согласно которому на очередном шаге числа $a_i^{(k)}$ находят по формуле

$$a_i^{(k)}=\max\left\{0;a_i^{(k+1)}-\lambda g_i\left(X^{(k)}\right)\right\}, i=1,2,\dots,m.$$

В качестве начальных значений $a_i^{(0)}$ берут произвольные неотрицательные числа.

Методы Монте-Карло

Схема методов основана на отыскании n - мерного параллелепипеда, включающего в себя множество планов, и затем моделируются N случайных точек с равномерным законом распределения в параллелепипеде.

В точках, попавших во множество планов, вычисляются значения функции и запоминается точка текущего экстремума. После этого берется параллелепипед меньших размеров с центром в найденной точке, и в нем вновь моделируются N случайных точек. Процесс такого стохастического моделирования заканчивается при малых размерах параллелепипеда. Методы Монте-Карло имеют преимущество над моделированием на детерминированной сетке, так как их точность имеет порядок $\dfrac{1}{\sqrt{N}}$ и не зависит от размерности задачи.

Одномерный метод Монте-Карло

Генерируем с помощью какого-либо программного генератора случайных чисел, равномерно распределенных в интервале $[a,b]$, случайное число $x_1 = \tilde{x}^*$.

Производим испытание в точке $x_1 = \tilde{x}^*$ - вычисляем значения $\tilde{Z}^*$ функции $Z(x)$ в этой точке.

Полагаем $r = 2$.

Аналогично п. 1) генерируем случайное число $x_r \in [a,b]$.

Производим испытание в точке x_r - вычисляем значение $Z_r = Z(x_r)$ функции $Z(x)$ в этой точке.

Если $Z_r < \tilde{Z}^*$, то выполняем присваивания $\tilde{x}^* = x_r$, $\tilde{Z}^* = Z_r$.

Если $r < N_r$, то выполняем присваивание $r = r + 1$ и переходим на п. 4). Иначе - заканчиваем вычисления.

Здесь N – количество испытаний.

Принимаем $\tilde{x}^*$ в качестве приближенного значения точки глобального минимума функции $Z(x)$ на интервале $[a,b]$ или организуем в окрестности точки $\tilde{x}^*$ поиск локального минимума этой функции.

При достаточно большом N метода гарантирует нахождение глобального минимума с высокой вероятностью.

Многомерный метод Монте-Карло

Задаем общее количество испытаний N и полагаем счетчик числа итераций $r = 1$.

С помощью какого-либо программного генератора случайных чисел генерируем n компонент вектора $x_1 \in D$.

Вычисляем $Z(x_1)$ и полагаем $\tilde{x}^* = x_1$, $\tilde{Z}^* = Z_1$, $r = r = 1$.

Аналогично п.2 генерируем случайную точку $x_r \in D$. Вычисляем соответствующее значение критерия оптимальности $Z(x_r) = \tilde{Z}^*$.

Выполняем следующие присваивания:

$$\tilde{x}^* = \begin{cases} x_r, \text{åñëè} Z_r < \tilde{Z}^*, \\ \tilde{x}^*, \text{èíà÷å}. \end{cases}$$

Если $r < N_r$ полагаем $r = r + 1$ и переходим на п.4, иначе принимаем $\tilde{x}^*, \tilde{Z}^*$ в качестве приближенного решения задачи и заканчиваем вычисления.

Отметим, что в простейшем случае точки $x_r \in D$ генерируются равномерно распределенными в области D. С целью сокращения вычислительных затрат и при наличии априорной информации о положении точки глобального минимума, целесообразно использовать законы распределения, в которых вероятность генерации точки в окрестности предполагаемого глобального минимума выше, чем вне этой окрестности.

Модель межотраслевого баланса Леонтьева

При экономическом планировании на уровне регионов или страны возникает необходимость определения объема выпуска товаров, обеспечивающего заданный спрос населения и производственные нужды. Решить эту задачу можно с использованием балансовых моделей.

Автором современной модели межотраслевого баланса является американский ученный Василий Леонтьев. В 1973г. за разработанные методы экономического анализа (модель «Затраты-выпуск») ему была присуждена Нобелевская премия.

В межотраслевом балансе понятие отрасли отличается от общепринятого, здесь используется понятие «чистой», т.е. условной отрасли, объединяющей все производство данного продукта независимо от ведомственной подчиненности предприятий и фирм.

Пусть экономическая система состоит из n «чистых» отраслей, каждая из которых производит свой продукт. Отрасли взаимосвязаны, т.е. для выпуска своего продукта каждая отрасль используют продукцию других отраслей в качестве сырья, полуфабрикатов и т.п. Таким образом, с одной стороны, каждая отрасль является производителем, а с другой – потребителем продукции, выпускаемой другими отраслями.

Обозначим :

x_i - валовой выпуск i - той отрасли,

x_{ij} - объем продукции i - той отрасли, потребляемый j - той отраслью для обеспечения своего валового выпуска.

Величины x_{ij} характеризуют межотраслевые поставки сырья, материалов, топлива и энергии, обусловленные производственной деятельностью.

y_i - объем конечной продукции i - той отрасли, т.е. потребление продукции i - той отрасли, не идущее на текущие производственные нужды. В конечную продукцию, как правило, включаются: накопление, возмещение выбытия основных средств, прирост запасов, личное потребление населения, расходы на содержание государственного аппарата, здравоохранение, просвещение и т.д., а также сальдо экспорта и импорта.

Связь между отраслями отображается в схеме межотраслевого баланса:

Отрасли как поставщики продуктов	Отрасли как потребители ресурсов						Потребление		Валовой выпуск $\bar{x}$
	1	2	…	k	…	n	производственное	Конечное $\bar{y}$	
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1k}	…	x_{1n}	$\sum x_{1k}$	y_1	x_1
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2k}	…	x_{2n}	$\sum x_{2k}$	y_2	x_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
i	x_{i1}	x_{i2}	…	x_{ik}	…	x_{in}	$\sum x_{ik}$	y_i	x_i
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nk}	…	x_{nn}	$\sum x_{nk}$	y_n	x_n
Итого производственные затраты	$\sum x_{i1}$	$\sum x_{i2}$	…	$\sum x_{ik}$	…	$\sum x_{in}$			

В.Леонтьев предложил гипотезу линейности, которая заключается в том, что элементы последних трех столбцов в каждой строке должны удовлетворять равенству:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} x_{1k} + y_1 = x_1, \\ \sum_{k=1}^{n} x_{2k} + y_2 = x_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{k=1}^{n} x_{nk} + y_n = x_n. \end{cases} \qquad (1)$$

Иначе говоря итоговый (производственный плюс конечный) спрос на продукцию j-ой отрасли (на j-ый товар) равен предложению j-го товара.

Если все слагаемые представлены в стоимостном выражении, то система (1) называется соотношениями баланса.

Одна из задач балансовых моделей состоит в том, чтобы на базе данных об исполнении баланса за предшествующий период определить исходные данные на планируемый период по заданному конечному продукту на планируемый период.

Система (1) в записанном виде не дает возможности решить эту задачу : n уравнений системы (1) содержит n неизвестных x_i и n^2 - неизвестных x_{ik} .

Леонтьев заметил, что на протяжении значительного отрезка времени затраты продукта i-той отрасли необходимые на производство продукции j-той отрасли практически не меняются, т.к. зависят, главным образом, от технологии производства j-той отрасли, т.е.

$$\frac{x'_{ij}}{x'_j} = \frac{x_{ij}}{x_j} = a_{ij} = const$$

x'_{ij} , x'_j - величины, относящиеся к истекшему периоду,

x_{ij} , x_j - аналогичные величины, относящиеся к планируемому периоду.

Числа a_{ij} Леонтьев назвал *коэффициентами прямых материальных затрат* или *технологическими коэффициентами.* Их значения могут быть получены двумя путями:

1) статистически. Коэффициенты определяются на основе анализа отчетных балансов за прошлые годы. Их неизменность во времени определяется подходящим выбором отраслей;

2) нормативно. Предполагается, что отрасль состоит из отдельных производств, для которых уже разработаны нормативы затрат; на их основе рассчитываются среднеотраслевые коэффициенты.

Выразив $x_{ij} = a_{ij}x_j$, соотношения баланса (1) можно записать в виде следующей системы:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_{1,} \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_{2,} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + y_n. \end{cases} \qquad (2)$$

Введем понятия:

вектор $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ - вектор валового выпуска или вектор – план,

вектор $\overline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$ - вектор конечного продукта или ассортиментный вектор, матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица коэффициентов прямых материальных затрат или технологическая матрица или структурная матрица.

Систему (2) запишем в матричной форме :

$x = Ax + y$ (3)

Модель Леонтьева сформирована.

Выражение (3) принято называть балансом распределения продукции. Его можно использовать для анализа и планирования структуры экономики.

Из матричного уравнения (3) следует :

$y = x - Ax$, или $y = (E - A)x$, где E – единичная матрица.

Вектор валового выпуска определяется в виде : $x = (E - A)^{-1} y$,

где $(E - A)^{-1}$ - матрица, обратная матрице $(E - A)$.

Задача определения вектора валового выпуска, если известна технологическая матрица A и задан вектор конечного продукта $\overline{y}$, не всегда имеет решение.

Если решение уравнения (3) существует, то матрица A называется *продуктивной.*

Критерий продуктивности:

Матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(E - A)^{-1}$ существует и ее элементы неотрицательны.

матрица A с неотрицательными элементами продуктивна, если сумма элементов по ее любому столбцу или строке не превосходит единицы, причем хотя бы для одного столбца или строки эта сумма строго меньше единицы.

Матрицу $(E - A)^{-1}$=S называют матрицей полных затрат, а ее элементы s_{ij} называют *коэффициентами полных материальных затрат,* которые показывают, сколько нужно произвести продукций i-той отрасли, чтобы была произведена единица конечной продукции j-той отрасли.

Полные затраты включают в себя сумму прямых и косвенных затрат продукции i-той отрасли на единицу продукции j-той отрасли. Прямые затраты отражают количество средств производства, израсходованных непосредственно на изготовление данного продукта отрасли. Косвенные затраты относятся к предшествующим стадиям производства и входят в продукт не прямо, а через другие средства производства.

Для примера рассмотрим затраты электроэнергии на производство хлеба – единицы выпуска хлебопекарной промышленности:

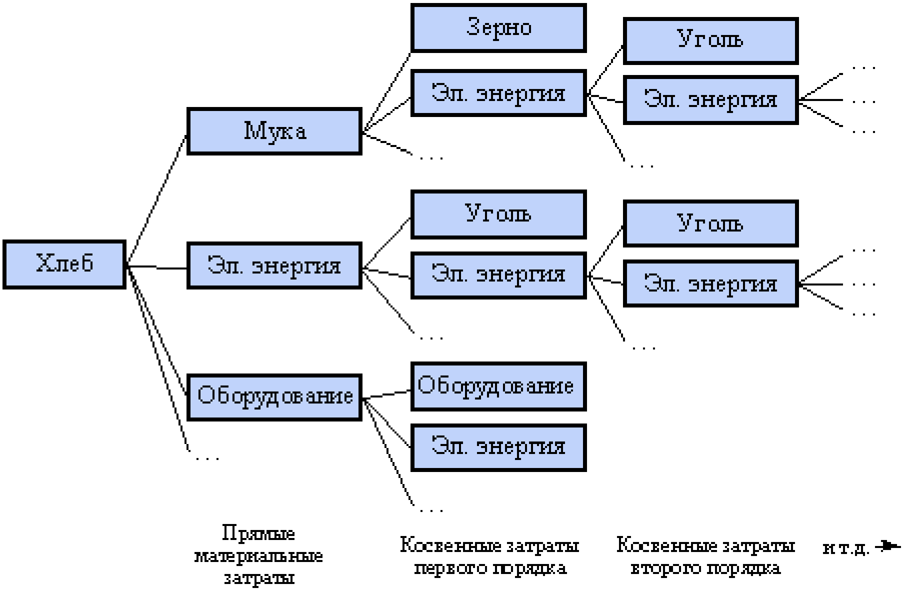


Рис. Взаимосвязь коэффициентов прямых и полных материальных затрат

Полные затраты электроэнергии для нашего примера складываются из прямых затрат и косвенных затрат всех уровней. Косвенные затраты высоких уровней являются незначительными и при практических расчетах ими можно пренебречь.

Важным следствием модели Леонтьева является двойственная к ней ценовая балансовая модель.

Обозначим через

$$\bar{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{pmatrix}$$ - вектор цен продуктов отраслей,

$$\bar{\upsilon} = \begin{pmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \\ \dots \\ \upsilon_n \end{pmatrix}$$ - вектор добавленной стоимости на единицу продукции (т.е. прибавка к стоимости товара после его производства). Эта часть дохода идет на выплату зарплаты и налогов, предпринимательскую прибыль и инвестиции.

Тогда, например, первая отрасль получит доход равный $p_1 x_1$. Часть своего дохода эта отрасль потратит на закупку продукции у других отраслей. Для выпуска единицы продукции ей необходимы продукция первой отрасли в объеме a_{11}, второй отрасли в объеме a_{21} и т.д., n-ной отрасли в объеме a_{n1}. На покупку этой продукции ею будет затрачена сумма $a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{n1}p_n$.

Следовательно, для выпуска продукции в объеме x_1 первой отрасли необходимо потратить на закупку продукции других отраслей сумму $x_1(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{n1}p_n)$.

Таким образом, имеет место следующее равенство:

$$x_1 p_1 = x_1(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{n1}p_n) + \upsilon_1 .$$

Разделим это равенство на x_1, получаем:

$$p_1 = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{n1}p_n + \upsilon_1^{'},$$

где $\upsilon_1^{'} = \dfrac{\upsilon_1}{x_1}$ - норма добавленной стоимости (доля добавленной стоимости, приходяща- яся на единицу выпускаемой продукции).

Таким же образом получаем и для других отраслей:

$$p_2 = a_{12} p_1 + a_{22} p_2 + \ldots + a_{n2} p_n + \upsilon_2',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_n = a_{1n} p_1 + a_{2n} p_2 + \ldots + a_{nn} p_n + \upsilon_n'.$$

Найденные равенства запишем в матричной форме:

$$p = A^T p + \upsilon', \qquad (4)$$

где $\overline{\upsilon'} = \begin{pmatrix} \upsilon'_1 \\ \upsilon'_2 \\ \ldots \\ \upsilon'_n \end{pmatrix}$ - вектор норм добавленной стоимости;

A^T - матрица транспонированная к матрице А технологических коэффициентов.

Равенство (4) называется *ценовой балансовой моделью.*

В модели (4) заданными считаются A^T и υ', и рассчитывается p.

Из матричного уравнения (4) следует :

$$p - A^T p = \upsilon',$$

$(E - A^T) p = \upsilon'$, где Е – единичная матрица.

Вектор цен определяется в виде:

$p = (E - A^T)^{-1} \upsilon'$, где $(E - A^T)^{-1}$ - матрица, обратная матрице $(E - A^T)$.

Можно показать, что $(E - A^T)^{-1} = ((E - A)^{-1})^T$, тогда $p = ((E - A)^{-1})^T \upsilon' = S^T \upsilon'$, где S^T транспонированная матрица S полных материальных затрат.

В ценовой модели (4) $A^T p$ можно интерпретировать как вектор с суммой издержек на единицу выпуска. Тогда разность $p - A^T p$ есть вектор чистого дохода от единицы выпуска. Этот чистый доход и приравнивается к добавленной стоимости.

Нетрудно установить соответствие между ценовой моделью и моделью объемов выпус- ка (моделью Леонтьева) :

$$x \leftrightarrow p\,,\quad A \leftrightarrow A^T\,,\quad y \leftrightarrow \upsilon'.$$

Имея в виду эти взаимные соответствия, модель объемов выпуска (модель Леонтьева) и ценовую модель называют **двойственными.**

Если уравнении (4) имеет не отрицательно решение $p=(p_1,\ldots,p_n)$, то модель называется *прибыльной.* Это свойство является двойственным к понятию продуктивности модели Леонтьева.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Для того чтобы модель Леонтьева (3) была продуктивной, необходимо и достаточно, чтобы двойственная к ней ценовая модель (4) была прибыльной.

Модель Неймана

Модель Неймана отслеживает производственный процесс внутри планового периода, т.е. затраты и выпуск, осуществляемые в каждый период времени (от квартала в квартал, от года в год и т.д.). В модели Неймана в качестве производственных единиц принимаются, не отрасли, а технологические процессы. Рассматривается производство, в котором n видов затрат с помощью m технологических процессов превращаются в n видов продукции. Один вид продукции может быть произведен при помощи разных технологических способов, а одна технология может быть применена для производства различной продукции. При этом затраты на производство единицы определенного продукта разными технологическими способами не одинаковы. Вводится понятие интенсивности производственного процесса.

Интенсивностью j-того производственного процесса называется объем продуктов, выпускаемых этим процессом за единицу времени.

Перейдем к описанию модели Неймана. Продукт i (i=1, …, n) в процессе j (j=1, …, m) затрачивается в количестве $a_{ij} \geq 0$ единиц и производится в количестве $b_{ij} \geq 0$ единиц. Из элементов a_{ij} составим матрицу затрат

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

а из элементов b_{ij} - матрицу выпуска

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}.$$

Моделирование процесса производства рассматривается на некотором конечном промежутке времени, разбитом на единичные отрезки точками $t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, T$ (T < ∞), и ведется по шагам в элементарные отрезки (периоды) времени [t, t+1], таким образом плановый горизонт состоит из T периодов (месяцев, кварталов, лет).

Уровень интенсивности j-го процесса в момент времени t обозначим через $x_j^t (j = 1, \dots, m)$, тогда $x^t (x_1^t, \dots, x_m^t) \geq 0$ есть вектор интенсивностей, Ax^t - вектор затрат, Bx^t - вектор выпуска. Матрицы затрат A и выпуска B не меняются в течении планового горизонта.

Основная экономическая предпосылка модели Неймана заключается в том, что для производства в данный (t) период можно тратить только те продукты, которые были произведены в предыдущем (t-1) периоде времени:

Время	…	t-1	t	t+1	…
Затраты		Ax^{t-1}	Ax^t	Ax^{t+1}	
Выпуск		Bx^{t-1}	Bx^t	Bx^{t+1}	

Рис. Последовательность затрат и выпуска

А в начальный (первый) период можно использовать не больше продуктов, чем имеется начальных запасов Bx^0.

Поэтому должны выполняться условия:

$Ax^t \le Bx^{t-1}, t = 1,...,T$ (1)

Обозначим цену единицы i-того продукта в период t через $p_i^t (i = 1,...,n)$. Тогда $p^t (p_1^t,..., p_n^t) \ge 0$ есть вектор цен товаров в период t. Неравенство (1) можно трактовать как не превышение спроса над предложением в момент t. Поэтому в стоимостном выражении (в ценах момента t) должно выполняться условие :

$p^t Ax^t = p^t Bx^{t-1}, t = 1,...,T$ (2),

которое показывает, что объем денежной массы в модели Неймана является постоянным.

А то, что вся денежная масса постоянно находится в обращении, показывает уравнение

$p^{t-1} Ax^t = p^t Bx^t, t = 1,...,T.$ (3)

Прибыль каждого процесса j (j=1,…m)на отрезке [t-1,t] равна величине $p^t b_j - p^{t-1} a_j$, т.е.затраты осуществляются по цене начала периода, а готовая продукция – по цене момента ее реализации. Т.о., издержки можно записать как $p^{t-1} A$, а выручку – как $p^t B$:

Время	…	t-1	t	t+1	…
Издержки		$p^{t-1} A$	$p^t A$	$p^{t+1} A$	
Выручка		$p^{t-1} B$	$p^t B$	$p^{t+1} B$	

Рис. Последовательность издержек и выручки

В модели Неймана предполагается не прибыльность каждого процесса j (j=1,…,m):

$p^{t-1} A \ge p^t B, t = 1,...,T.$ (4)

Описание модели Неймана завершено. Совокупность неравенств и уравнений (1)-(4):

$$\begin{cases} Ax^t \le Bx^{t-1}, \\ p^t Ax^t = p^t Bx^{t-1}, \\ p^{t-1} A \ge p^t B, \\ p^{t-1} Ax^t = p^t Bx^t, \\ x^t \ge 0, p^t \ge 0, t = 1, \dots, T. \end{cases}$$

называется (динамической) моделью Неймана.