ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Математика»

Методические указания

и варианты заданий для выполнения контрольной работы №1 по дисциплине

«Математика»

для студентов заочной формы обучения гуманитарных направлений (нормативный и сокращенный срок обучения, двухсеместровый курс)

Составители
Волокитин Г.И.

Ростов-на-Дону, 2013

Аннотация

Методическая разработка предназначена для студентов заочной формы обучения гуманитарных направлений 100100, 100100S, 100700, 100700S. Содержит программу изучения основных разделов курса математики, включающую темы: «Линейная алгебра», «Векторная алгебра и аналитическая геометрия», «Введение в анализ», «Дифференциальное исчисление». Указана рекомендуемая литература, а также 10 вариантов заданий контрольной работы (первый семестр). Даны образцы решения всех задач. **Номер варианта в задаче студент определяет по последней цифре номера зачетной книжки. Цифра 0 соответствует варианту №10.**

Составители: к.ф.-м.н., доц. Волокитин Г.И.

Оглавление

Экзаменационная программа по математике

для студентов 1-го курса заочного факультета.

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ.

Матрицы, виды матриц и действия с матрицами. Числовые характеристики матриц. Определители второго и третьего порядков: определения, свойства и способы вычисления. Элементарные преобразования матриц. Обратная матрица: определение, критерий существования и способы вычисления обратной матрицы. Базисный минор и ранг матрицы. Системы линейны алгебраических уравнений, их виды. Теорема Кронекера-Капелли. Решение определенных систем третьего порядка методом Крамера, матричным методом и методом Гаусса. Общее решение однородных и неоднородных неопределенных систем. Понятие линейного пространства. Линейный оператор, матрица линейного оператора

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ.

Понятие геометрического вектора. Проекция вектора на ось. Линейные операции над векторами. Линейная независимость векторов, базис на плоскости и в пространстве. Координаты вектора, их геометрический смысл. Действия с векторами в координатах. Условие коллинеарности векторов. Скалярное произведение двух векторов: определение, свойства, вычисление в координатах и приложения. Векторное произведение двух векторов: определение, свойства, вычисление в координатах и приложения. Смешанное произведение трех векторов, теорема о геометрическом смысле, вычисление в координатах и свойства. Условие компланарности трех векторов.

Прямая на плоскости. Угловой коэффициент прямой. Различные виды уравнений прямой (каноническое уравнение, общее, «в отрезках», нормальное). Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой.

Плоскость: нормальный вектор, общее уравнение плоскости. Различные виды уравнений плоскости («в отрезках», нормальное уравнение). Угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости.

Прямая в пространстве: канонические, параметрические уравнения. Прямая как пересечение двух плоскостей. Угол между прямыми и угол между прямой и плоскостью.

Системы координат на плоскости: прямоугольная и полярная. Системы координат в пространстве: прямоугольная, цилиндрическая и сферическая. Кривые второго порядка: определения и канонические уравнения эллипса, окружности, гиперболы и параболы. Поверхности второго порядка: Эллипсоиды, сфера, однополостный и двуполостный гиперболоиды, эллиптический и гиперболический параболоиды. Конус второго порядка. Цилиндры второго порядка.

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ.

Функция одной переменной. Предел последовательности и функции. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Сравнение бесконечно малых. Теоремы о первом и втором специальных пределах. Число e , экспонента, натуральный логарифм. Непрерывность функции. Точки разрыва, их классификация. Свойства непрерывных на отрезке функций.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

Задачи, приводящие к понятию производной (о касательной к кривой и о скорости). Определение производной, ее геометрический и механический смысл. Правила дифференцирования. Таблица производных основных элементарных функций. Повторное дифференцирование. Вычисление производных функций, заданных неявно и параметрически. Дифференциал функции: определение, свойства, геометрический смысл, инвариантность. Применение дифференциалов в приближенных вычислениях. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей. Приложение дифференциального исчисления к исследованию функций: монотонность, экстремумы, направление выпуклости кривых и точки перегиба. Асимптоты. Общая схема исследования функции. Формула Тэйлора для многочлена и для функции с остаточным членом в форме Лагранжа, формулы для основных элементарных функций.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М.: Наука, 1984.
2. Волокитин Г.И., Ларченко В.В., Азаров Д.А., Редько Ю.С. Начала линейной алгебры. Учебное пособие. – Ростов-на-Дону: Издательский центр ДГТУ, 2012.
3. Я.С. Бугров, С.М. Никольский. Элементы линейной алгебры и аналитическая геометрия. Москва «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1980.
4. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Аналитическая геометрия. Издание четвертое, дополненное. Москва «Наука» Главная редакция физико-математической литературы, 1973.
5. А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович. Краткий курс математического анализа для втузов. Москва: “Наука”. Главная редакция физико-математической литературы, 1973.
6. Г.М. Берман, Сборник задач по курсу математического анализа (для втузов). Москва: “Наука”. 1985.
7. П. Е. Данко, и др. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учебное пособие для втузов. В 2-х ч. 1980 – ч.1, 1984 – ч.2.
8. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.1. – М.: Интеграл-Пресс, 2005.
9. Ворович Е.И., Глушкова В.Н., Тукодова О.М., Федосеев В.Б. Введение в математический анализ. Понятие производной. Учебное пособие. – Ростов н/Д. Издательский центр ДГТУ, 2012.
10. Мишняков Н.Т., Ароева Г.А., Коровина К.С. Приложение производной к исследованию функций. Учебное пособие. – Ростов н/Д. Издательский центр ДГТУ, 2012.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задача 1.

Даны матрицы A и B. E - единичная матрица. Найти:

а) матрицу $(A-2E)\cdot B$; б) обратную матрицу A^{-1} и проверить, что $A^{-1}\cdot A=E$:

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 \\ -13 \\ 16 \end{pmatrix}$;

2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

3. $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$;

4. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$;

5. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$;

6. $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

7. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$;

8. $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$;

9. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix};$

10. $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Задача 2.

Даны точки

$A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$, $D(x_4; y_4; z_4)$. Найти:

а). Координаты, модуль и направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$;

б). Проекцию вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{CD}$;

в). Скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, а также угол между ними;

г). Векторное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, а также площадь треугольника $\triangle ABC$;

д). Смешанное произведение векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, а также объем пирамиды *ABCD*.

1. $A(1; 3; 1)$; $B(2; 3; -2)$; $C(-1; 2; 1)$; $D(1; 3; 2)$;
2. $A(2; -1; 1)$; $B(5; 5; 4)$; $C(3; 2; -1)$; $D(4; 1; 3)$;
3. $A(1; 0; 1)$; $B(3; 2; 4)$; $C(-1; 4; 4)$; $D(1; 1; 3)$;
4. $A(2; -1; -1)$; $B(5; 5; 4)$; $C(3; 2; -1)$; $D(9; 0; 1)$;
5. $A(2; 3; 1)$; $B(4; 1; -2)$; $C(6; 3; 7)$; $D(-5; -4; 8)$;
6. $A(2; 0; 0)$; $B(0; 3; 0)$; $C(0; 0; 6)$; $D(2; 3; 8)$;
7. $A(1; 3; 1)$; $B(2; 1; -1)$; $C(-1; 2; -2)$; $D(1; 1; 1)$;
8. $A(5; 1; -4)$; $B(1; 2; -1)$; $C(3; 3; -4)$; $D(2; 2; 2)$;
9. $A(2; 1; -3)$; $B(3; -1; 3)$; $C(1; -2; 4)$; $D(2; -1; 3)$;
10. $A(1; 2; 3)$; $B(9; 6; 4)$; $C(3; 0; 4)$; $D(5; 2; 6)$.

Задача 3.

На плоскости даны вершины треугольника $\triangle ABC$. Найти:

а). Канонические уравнения сторон AB и AC;

б). Уравнение высоты, опущенной из вершины *B*;

в). Внутренний угол $\angle A$;

г). Уравнение медианы, проведенной из вершины *B*;

д). Расстояние от точки *B* до стороны AC. Сделать чертеж:

1. $A(1;3),\quad B(2;3),\quad C(-1;2)$;
2. $A(2;-1),\quad B(5;5),\quad C(3;2)$;
3. $A(1;0),\quad B(3;2),\quad C(-1;4)$;
4. $A(2;-1),\quad B(5;3),\quad C(3;-2)$;
5. $A(2;3),\quad B(4;1),\quad C(6;3)$;
6. $A(2;0),\quad B(0;3),\quad C(0;0)$;
7. $A(1;3),\quad B(2;1),\quad C(-1;2)$;
8. $A(5;1),\quad B(1;2),\quad C(3;3)$;
9. $A(2;1),\quad B(3;-1),\quad C(1;-2)$;
10. $A(1;2),\quad B(9;6),\quad C(3;0)$.

Задача 4.

Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

Вариант 1.

а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2x^2-11x-21}{x^2-9x+14}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-tg^2 x}{x^4}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2}{x^2+5}\right)^{3x^2}$.

Вариант 2.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+4}{3x^2-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} x[\ln(2+x)-\ln x]$.

Вариант 3.

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-6x+8}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{x^2-4x})$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x+2}\right)^{2x}$.

Вариант 4.

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+5x+4x^2}-3}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x-\sin x}{x(1-\cos 2x)}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln(1-3/x)$.

Вариант 5.

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{12x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2-4}\right)^{3x^2}$.

Вариант 6.

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+2\sin x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln(1-3/x)$.

Вариант 7.

. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+3x^2}{x^2+1}-x\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x-\sin x}{x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+3}\right)^{2x}$.

Вариант 8.

а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}{x^2-1}\right)$; б)

$\lim\limits_{x\to +\infty}(3x-2)[\ln(2x-1)-\ln(2x+1)]$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-5}\right)^{2x}$;

Вариант 9.

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}{x^2-1}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x-\sin x}{x\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)[\ln(x+3)-\ln x]$;

Вариант 10.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x+1\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{tg^2 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}$.

Задача 5.

Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$: а) исходя из определения производной функции $y = y(x)$; б) используя правила дифференцирования и формулы таблицы производных основных элементарных функций; в) сложной функции $y = y(u(v(x)))$; г) функции, заданной в неявном виде; д) функции, заданной параметрически:

1. а) $y = 2x^2 - x$; б) $y = 2\sqrt{x} + x^5 \sin x - \dfrac{\lg(2x+1)}{\arcsin x}$; в) $y = e^{\cos^2 x}$;

   г) $\left(x^2 + y^2\right)^3 = xy$; д) $x = \dfrac{1+t^3}{t^2-1}$, $y = \dfrac{t}{t^2-1}$.

2. а) $y = 3 - x^2$; б) $y = 1 + \dfrac{2}{x} - \sqrt{x}\mathrm{tg}x + \dfrac{5^x}{\sin x}$; в) $y = \lg^2(3x-4)$;

   г) $y = \arcsin(x+y)$; д) $x = \ln t - \dfrac{1}{t}$, $y = e^{2t} + t^2$.

3. а) $y = x + \dfrac{1}{x} + 1$; б) $y = 1 + x^2 e^{-x} + \dfrac{\arccos x}{3\sqrt{x}}$;

   в) $y = \mathrm{arctg}^2\left(6\sqrt[3]{x} + 1\right)$;

   г) $\ln^2(x-y) = x + y$; д) $x = te^t$, $y = te^{-t}$.

4. а) $y = e^{2x} + 1$; б) $y = 2 + 10x\ln x - \dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x}}$;

   в) $y = \left(3^{x^2} + \mathrm{arctg}2x + \dfrac{1}{2}\right)^5$;

   г) $x^4 + y^4 = 9\left(x^2 + y^2\right)$; д) $x = \dfrac{3t}{t^3+1}$, $y = \dfrac{3t^2}{t^3+1}$.

5. а) $y = x^3 + 2$; б) $y = \dfrac{3}{x^4} + x2^x - \dfrac{\lg x}{\sqrt[4]{x}}$;

   в) $y = \cos^3\left(\dfrac{1}{x} - e^{2x}\right)$;г) $\mathrm{arctg}(x - y) = xy$;

   д) $x = 4\cos t - 2\cos 2t$, $y = 4\sin t - 2\sin 2t$.

6. а) $y=6x-5x^2$; б) $y=\dfrac{\sqrt[10]{x}}{2}-3x\ln x+\dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}$;

в) $y=2^{\sin\left(x^2+1\right)}$; г) $y=1+xe^y$; д) $x=2\sin^3 t,\quad y=2\cos^3 t$.

7. а) $y=2x-x^2$; б) $y=1+4\sqrt[4]{x}-x^5e^{-3x}+\dfrac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{x}}$;

в) $y=\arcsin^2\left(x^3-\dfrac{1}{x}\right)$; г) $2^{x^3+y^3}=xy$;

д) $x=t^3+3t+1,\quad y=t^3-3t+1$.

8. $y=\dfrac{1}{3}x^3-2$; б) $y=1+3x+x^2 2^{2x}-\dfrac{\mathrm{ctg}x}{\sqrt{x}}$;

в) $y=\left(\arccos^5 x+\sqrt{1-x^2}\right)^4$;г) $x^3+y^3-3xy=\ln y$;

д) $x=e^t\cos t,\quad y=e^t\sin t$.

9. $y=\sin x$; б) $y=12-3x^4+\sqrt{x}\mathrm{arcctg}x+\dfrac{\ln x}{x}$;

в) $y=\cos\left(2^{\sqrt{x}+1}\right)$;г) $e^x\sin y-e^{-y}\cos x=0$;

д) $x=2\ln\mathrm{ctg}t,\quad y=\mathrm{tg}t+\mathrm{ctg}t$.

10. а) $y=\cos x$; б) $y=5+3^x\sin x-\dfrac{3x^2+6x}{\sqrt{x+1}}$; в) $y=\sqrt{\ln\left(x^2+1\right)}$;

г) $x+2\sqrt{x-y}+y=0$; д) $x=\sqrt{1-t^2},\quad y=\dfrac{\ln t}{t}$.

ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Пример 1. Даны матрицы A и B. E - единичная матрица. Найти: а) матрицу $(A-2E)\cdot B$; б) обратную матрицу A^{-1} и проверить, что $A^{-1}\cdot A=E$:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&5&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Решение. а). Раскроем скобки, получим

$$(A-2E)\cdot B=A\cdot B-2E\cdot B=A\cdot B-2B.$$

Применяя правило умножения матрицы на матрицу, имеем

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&5&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 2+2\cdot 0+3\cdot 0\\2\cdot 2+3\cdot 0+1\cdot 0\\3\cdot 2+5\cdot 0+2\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$(A-2E)\cdot B=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\\6\end{pmatrix}.$$

б). Обратную матрицу A^{-1} найдем, используя присоединенную матрицу A^{+}. Элементы присоединенной матрицы - это алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы A, расположенные по столбцам:

$$A^{+}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}.$$

Обратная матрица определяется формулой:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^{+}.$$

Вычислим определитель матрицы, проверим, что матрица невырожденная, следовательно, имеет обратную матрицу. Определитель найдем, раскрывая по элементам первой строки:

$$\det A=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&5&2\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}3&1\\5&2\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}2&1\\3&2\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}2&3\\3&5\end{vmatrix}=1-2\cdot(4-3)+3\cdot(10-9)=2\neq 0$$

.

Находим алгебраические дополнения элементов исходной матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3&1\\5&2\end{vmatrix}=3\cdot 2-5\cdot 1=1;\qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&1\\3&2\end{vmatrix}=-(4-3)=-1;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&3\\3&5\end{vmatrix}=10-9=1;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}2&3\\5&2\end{vmatrix}=11;\qquad A_{22}=\begin{vmatrix}1&3\\3&2\end{vmatrix}=-7;\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&2\\3&5\end{vmatrix}=1;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2&3\\3&1\end{vmatrix}=-7;\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix}=5;\qquad A_{33}=\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}=-1.$$

Итак, присоединенная матрица имеет вид:

$$A^{+}=\begin{pmatrix}1&11&-7\\-1&-7&5\\1&1&-1\end{pmatrix}.$$

Таким образом, обратная матрица равна

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&11&-7\\-1&-7&5\\1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2&11/2&-7/2\\-1/2&-7/2&5/2\\1/2&1/2&-1/2\end{pmatrix}.$$

Проверим, что обратная матрица найдена правильно, должно выполняться условие $A^{-1}\cdot A=E$. Вычислим элементы произведения матриц:

$$e_{11}=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{11}{2}\cdot 2+\left(-\frac{7}{2}\right)\cdot 3=\frac{23-21}{2}=1$$ - верно,

$$e_{21}=-\frac{1}{2}\cdot 1+\left(-\frac{7}{2}\right)\cdot 2+\frac{5}{2}\cdot 3=\frac{-1-14+15}{2}=0$$ - верно,

$$e_{31}=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 2+\left(-\frac{1}{2}\cdot 3\right)=0$$ - верно.

Пример 2. Даны точки

$A(1;0;-1)$, $B(2;2;-3)$, $C(3;1;1)$, $D(4;-3;5)$. Найти:

а). Координаты, модуль и направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$;

б). Проекцию вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{CD}$;

в). Скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, а также угол между ними;

г). Векторное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, а также площадь треугольника $\triangle ABC$;

д). Смешанное произведение векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, а также объем пирамиды *ABCD*.

Решение. а) Вектор $\overline{AB}$ найдем по формуле $\overline{AB}=\{x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A\}$: $\overline{AB}=\{2-1;2-0;-3-(-1)\}=\{1;2;-2\}$. Модуль вектора $\mathbf{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$ определяется соотношением $|\mathbf{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$. Получаем отсюда $\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=3$. Направляющие косинусы – это координаты орта вектора $\overline{AB}$. Т.е. вектора $\overline{AB}^0=\frac{\overline{AB}}{\left|\overline{AB}\right|}=\frac{\{1;2;-2\}}{3}=\left\{\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right\}$. Направляющие косинусы равны:

$\cos\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\beta=\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=-\frac{2}{3}$.

б). Проекцию вектора вычислим с помощью скалярного произведения:

$$np_{\overline{CD}}\overline{AB}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{\left|\overline{CD}\right|}.$$

Найдем вектор $\overline{CD}=\{1;-4;4\}$. Учитывая формулу вычисления скалярного произведения векторов в координатах

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,$$

найдем проекцию

$$np_{\overline{CD}}\overline{AB}=\frac{1\cdot 1+2\cdot(-4)+(-2)\cdot 4}{\sqrt{1^2+(-4)^2+4^2}}=\frac{-15}{\sqrt{33}}.$$

в). Найдем вектор $\overline{BC}$ и вычислим скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$. $\overline{BC}=\{1;-1;4\}$. $\overline{AB}\cdot\overline{BC}=\{1;2;-2\}\cdot\{1;-1;4\}=1\cdot 1+2\cdot(-1)+(-2)\cdot 4=-9$.

Косинус угла φ между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ определяется равенством

$$\cos\varphi=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{\left|\overline{AB}\right|\left|\overline{BC}\right|}=\frac{-9}{3\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда заключаем, что угол $\varphi=\dfrac{3}{4}\pi$.

Найдем вектор $\overline{AC}$ и вычислим векторное произведение векторов с помощью формулы

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}.$$

$\overline{AC}=\{2;1;2\}$. $\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}=6\mathbf{i}-6\mathbf{j}+(-3)\mathbf{k}=\{6;6;-3\}$. Учитывая, что модуль векторного произведения – площадь параллелограмма, для площади треугольника имеем соотношение

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|\{6;6;-3\}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+6^2+(-3)^2}=\frac{9}{2}.$$

д). Найдем вектор $\overline{AD}$ и вычислим смешанное произведение по формуле

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Имеем $\overline{AD}=\{3;-3;6\}$. $\left(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}\right)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix}=18$.

Учитывая, что модуль смешанного произведения численно равен объему параллелепипеда, построенного па векторах-сомножителях, а объем пирамиды составляет шестую часть объема параллелепипеда, получаем

$$V_{пир}=\frac{18}{6}=3.$$

Пример 3. На плоскости даны вершины треугольника $\triangle ABC$. Найти:

а). Канонические уравнения сторон AB и AC;

б). Уравнение высоты, опущенной из вершины *B*;

в). Внутренний угол $\angle A$;

г). Уравнение медианы, проведенной из вершины *B*;

д). Расстояние от точки *B* до стороны AC. Сделать чертеж:

$A(1;0)$, $B(2;2)$, $C(3;1)$.

Решение. а). Уравнения сторон найдем, используя уравнение прямой, проходящей через две заданные точки: $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$.

$AB:\dfrac{y-0}{2-0}=\dfrac{x-1}{2-1}$, $y=2x-2$. $AC:\dfrac{y-0}{1-0}=\dfrac{x-1}{3-1}$, $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$. Угловой коэффициент прямой AC равен $k_{AC}=\dfrac{1}{2}$.

б). Угловой коэффициент высоты BH связан с угловым коэффициентом стороны AC соотношением $k_{AC}\cdot k_{BH}=-1$. Отсюда находим, $k_{BH}=-2$.

Уравнение высоты составим, используя уравнение прямой, имеющей заданный наклон и проходящей через заданную точку: $y-y_0=k(x-x_0)$.

$BH: y-2=-2(x-2), \quad y=-2x+6$.

в). Для нахождения внутреннего угла $\angle A$ используем формулу

$$tg\angle A=\frac{k_{AB}-k_{AC}}{1+k_{AB}\cdot k_{AC}}.$$

Получаем, $tg\angle A=\frac{2-1/2}{1+2\cdot 1/2}=\frac{3}{4}$. $\angle A=arctg\frac{3}{4}$.

г). Чтобы составить уравнение медианы, найдем координаты точки M - середины стороны AC: $x_M=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{1+3}{2}=2, \quad y_M=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$.

$BM: \frac{y-2}{1/2-2}=\frac{x-2}{2-2}, \quad x=2$ (каноническое уравнение вертикальной прямой).

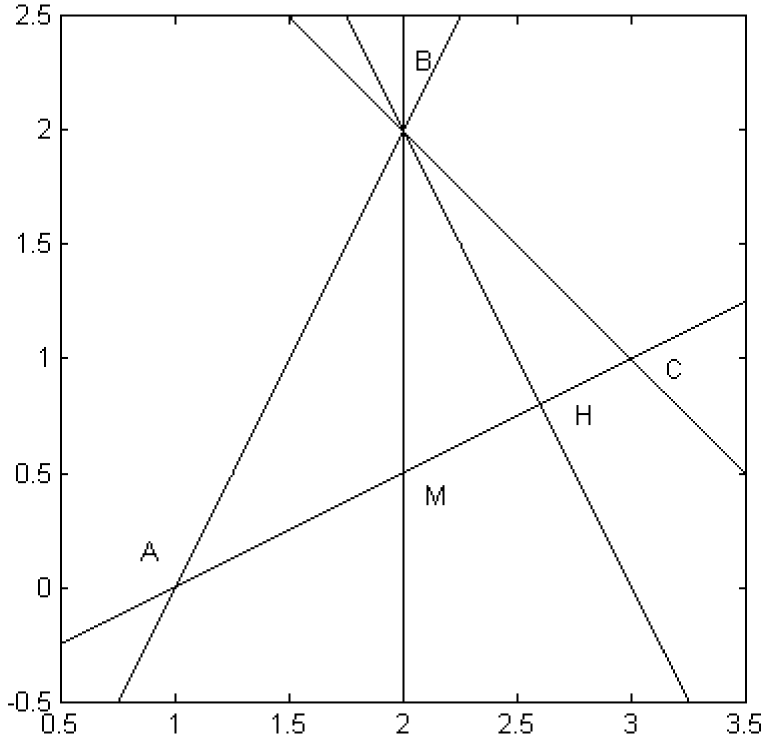
д). Расстояние от вершины B до стороны AC найдем по формуле:

$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, где $Ax+By+C=0$ - общее уравнение прямой,

$(x_0;y_0)$ -

точка, от которой определяется расстояние. Общее уравнение стороны AC имеет вид: $x-2y-1=0$. Поэтому $d=\frac{|2-2\cdot 2-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Строим треугольник в координатных осях:



Пример 4. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2-3x+4)(x+\sqrt{x})}{(3x-5)^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{2-x}-1}{x^3-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\operatorname{tg}x\arcsin 2x}{1-\cos x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)^{3x}$.

Решение. а). Это неопределенность типа $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. «Раскроем» ее:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-3x+4)(x+\sqrt{x})}{(3x-5)^3}=\text{в каждом сомножителе выносим за скобки старшую степень}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)x\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x^3\left(3-\dfrac{5}{x}\right)^3}=\frac{(1-0+0)(1+0)}{(3-0)^3}=\frac{1}{27}$$

б). Это неопределенность типа $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Чтобы ее раскрыть, выражения, не содержащие радикалы, раскладываем на множители. Среди них обязательно появится скобка, предельное значение которой 0: $(x-1)$. При этом используются известные формулы сокращенного умножения. Выражение с радикалами, предельное значение которого 0, умножаем и делим на соответствующее выражение, чтобы в результате применения формулы также появилась такая же скобка.

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{2-x}-1}{x^3-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt[3]{2-x}-1\right)\left((2-x)^{2/3}+(2-x)^{1/3}+1\right)}{\left((2-x)^{2/3}+(2-x)^{1/3}+1\right)(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(2-x)^{3/3}-1^3}{\left((2-1)^{2/3}+(2-1)^{1/3}+1\right)(x-1)\left(1^2+1+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{(1-x)}{3(x-1)3}=-\frac{1}{9}$$

в). В примерах этого типа используется «первый замечательный предел» или его следствия. Можно применять цепочку эквивалентных бесконечно малых: $x\sim\sin x\sim \mathrm{tg}x\sim\arcsin x\sim \mathrm{arctg}x$. Бесконечно малый сомножитель можем заменить более простой эквивалентной величиной.

$$\lim_{x\to0}\frac{4\,\mathrm{tg}x\arcsin 2x}{1-\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{4x\cancel{2}x}{\cancel{2}\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0}\frac{4x^2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\lim_{x\to0}\frac{16\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=16.$$

г) Здесь следует применить «второй замечательный предел» или его следствия.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)^{3x}=\left(1^\infty\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1-1+\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-x^2-x-1+x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)^{3x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2x}{x^2+x+1}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2x}{x^2+x+1}\right)^{\frac{x^2+x+1}{-2x}}\right]^{\left(\frac{-2x}{x^2+x+1}\right)3x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-6x^2}{x^2+x+1}}=e^{-6}$$

Пример 5. Найти производную $\frac{dy}{dx}$: а) исходя из определения производной функции $y=y(x)$; б) используя правила дифференцирования и формулы таблицы производных основных элементарных функций; в) сложной функции $y=y(u(v(x)))$; г) функции, заданной в неявном виде;

д) функции, заданной параметрически:

а) $y = x^3 - \dfrac{1}{x}$; б) $y = \dfrac{1}{2} + 3\mathrm{ctg}x - x^4 10^x + \dfrac{\sin 5x}{\sqrt{x}}$; в) $y = \lg^9(\arcsin x + x)$;

г) $\mathrm{arctg}^2(x+y) = xy$; д) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Решение. а) $y(x) = x^3 - \dfrac{1}{x}$, $y(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^3 - \dfrac{1}{x+\Delta x}$. Отсюда следует

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = \left((x+\Delta x)^3 - x^3\right) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+\Delta x} =$$

$$= (x+\Delta x - x)\left((x+\Delta x)^2 + x(x+\Delta x) + x^2\right) + \frac{x+\Delta x - x}{x(x+\Delta x)} =$$

$$= \Delta x\left((x+\Delta x)^2 + x(x+\Delta x) + x^2\right) + \frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$$

Используя определение производной, получаем

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\Delta x\left((x+\Delta x)^2 + x(x+\Delta x) + x^2\right) + \frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}\right) = 3x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

б) Применяя правила дифференцирования, получим

$$y' = \left(\frac{1}{2} + 3\mathrm{ctg}x - x^4 10^x + \frac{\sin 5x}{\sqrt{x}}\right)' = \left(\frac{1}{2}\right)' + 3(\mathrm{ctg}x)' - \left(x^4 10^x\right)' + \left(\frac{\sin 5x}{\sqrt{x}}\right)' =$$

$$= 0 + 3\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) - \left(x^4\right)' 10^x - x^4\left(10^x\right)' + \frac{(\sin 5x)'\sqrt{x} - \sin 5x\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \quad .$$

$$= -\frac{3}{\sin^2 x} - 4x^3 10^x - x^4 10^x \ln 10 + \frac{5\cos 5x\sqrt{x} - \dfrac{\sin 5x}{2\sqrt{x}}}{x}$$

в) Применим формулу дифференцирования сложной функции:

$$\left(y\left(u\left(v(x)\right)\right)\right)' = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x.$$

$$y'_x = \left(\lg^9\left(\arcsin x + x\right)\right)' = 9\lg^8\left(\arcsin x + x\right)\cdot\left(\lg\left(\arcsin x + x\right)\right)' =$$

$$= 9\lg^8\left(\arcsin x + x\right)\cdot\frac{1}{\left(\arcsin x + x\right)\ln 10}\left(\arcsin x + x\right)' = \qquad .$$

$$= 9\lg^8\left(\arcsin x + x\right)\cdot\frac{1}{\left(\arcsin x + x\right)\ln 10}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 1\right)$$

г) Если в уравнение, задающее неявную функцию, подставить решение $y = y(x)$, то уравнение превращается в тождество. Тождество можно дифференцировать – равенство не нарушится. Дифференцируем обе части соотношения $\operatorname{arctg}^2(x+y) = xy$, учитывая, что y - функция x:

$$\left(\operatorname{arctg}^2(x+y)\right)' = (xy)', \qquad 2\operatorname{arctg}(x+y)\left(\operatorname{arctg}(x+y)\right)' = x'y + xy',$$

$$2\operatorname{arctg}(x+y)\frac{1}{1+(x+y)^2}(1+y') = y + xy',$$

$$\frac{2\operatorname{arctg}(x+y)}{1+(x+y)^2} + y'\frac{2\operatorname{arctg}(x+y)}{1+(x+y)^2} = y + xy',$$

$$y'\left(\frac{2\operatorname{arctg}(x+y)}{1+(x+y)^2} - x\right) = y - \frac{2\operatorname{arctg}(x+y)}{1+(x+y)^2},$$

Получили уравнение относительно неизвестной y'. Решая его, находим

$$y' = -\frac{\dfrac{2\operatorname{arctg}(x+y)}{1+(x+y)^2} - y}{\dfrac{2\operatorname{arctg}(x+y)}{1+(x+y)^2} - x}.$$

д) Производную функции, заданной параметрически, определим по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Получаем: $$y'_x = \frac{a(1-\cos t)'}{a(t-\sin t)'} = \frac{\sin t}{1-\cos t} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$