ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Высшая математика»

Учебное пособие

по дисциплине

«Математические основы теории систем»

Авторы
Щербакова Е. Е.,
Князев С. Ю.

Ростов-на-Дону, 2020

Аннотация

Учебное пособие предназначено для студентов заочной формы обучения направлений 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств», 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника», 27.03.04 «Управление в технических системах».

Содержит программу по дисциплине Математические основы теории систем, теоретический материал, варианты контрольной работы и краткие справочные сведения с образцами решения примеров. Даны основные определения и формулы, используемые при решении контрольных заданий. Данное пособие ставит своей целью оказание помощи студентам заочной формы обучения овладеть системой знаний, умений и навыков в объеме программы по дисциплине Математические основы теории систем.

В контрольной работе представлены задачи, содержащие десять вариантов. Вариант задания студент определяет по последней цифре номера зачетной книжки. Цифра 0 соответствует варианту 10.

Авторы

к.т.н., доцент кафедры «Высшая математика» Щербакова Е. Е.,

д.т.н., доцент кафедры «Высшая математика» Князев С. Ю.

Оглавление

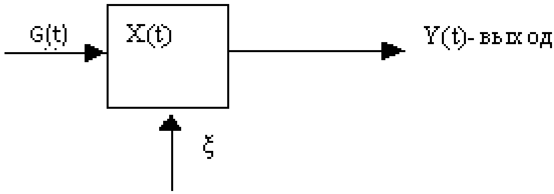
ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ.

1. Модели и моделирование
2. Системы, их общее описание и классификация. Типы моделей
3. Динамические модели системы
4. Системы с непрерывными во времени переменными
5. Описание систем дифференциальными уравнениями
6. Классические методы решение дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами
7. Однородные уравнения
8. Неоднородные уравнения
9. Интегральные преобразования Лапласа
10. Преобразование Лапласа и дифференциальные уравнения
11. Операторное описание дискретных по времени систем
12. Прямой и обратный разностные операторы
13. Разностные линейные уравнения динамики
14. Решение однородных уравнений. Решение неоднородных уравнений
15. Дискретное преобразование Лапласа. Z-преобразование
16. Разностные уравнения и Z -преобразование
17. Автоматное описание систем. Теория конечных автоматов
18. Основные понятия. Способы задания автоматов

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

Систе́мой (др.-греч. σύστημα «целое, составленное из частей; соединение») — называется множество элементов, находящихся в отношениях и связях друг с другом, которое образует определённую целостность, единство. Изучением систем занимаются такие инженерные и научные дисциплины как общая теория систем, системный анализ, системология, кибернетика, системная инженерия, термодинамика, ТРИЗ, системная динамика и т. д.

Динамика системы описывается ее математической моделью, например обыкновенными дифференциальными уравнениями и/или алгебраическими соотношениями. Математическая модель отражает зависимость между тремя множествами переменных: переменные входа G, состояния X и выхода Y.



Если преобразование сигналов происходит непрерывно по времени, то динамические объекты именуются *непрерывными*, а математический инструментарий преобразования сигналов строится на базе аппарата дифференциальных уравнений. Если преобразование сигналов происходит дискретно по времени с интервалом дискретности Δt в моменты времени $t = k(\Delta t)$, где k – дискретное время, выраженное в числе интервалов дискретности, то динамические объекты именуются *дискретными,* а математический инструментарий преобразования сигналов строится на базе аппарата *рекуррентных* (разностных) уравнений. Так как аппарат дифференциальных и разностных уравнений связывает входной сигнал, размещаемый в правой части уравнений, а выходной – в их левой, то математические модели, основанные на указанных уравнениях, принято называть моделями «вход–выход» (ВВ).

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВВ НЕПРЕРЫВНЫХ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ.

Классический способ решения

Рассмотрим общий случай нелинейного непрерывного одномерного динамического объекта (ДО), то есть объекта, имеющего один вход и один выход, динамика которого в терминах «вход–выход» описываются нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка:

$$F\left(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y, g^{(m)}, \dots, g, t\right) = 0, \tag{1}$$

где $g(t)$ – входной (независимая переменная) сигнал объекта, $y(t)$ – выходная зависимая переменная объекта. Если осуществить линеаризацию уравнения (1) относительно некоторой траектории, принятой за номинальную и зависимые переменные оставить в левой части, а независимые переменные в правой, то получим каноническое представление линейного (линеаризованного) дифференциального уравнения

$$a_n(t)y^{(n)}(t)+a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_0(t)y(t)=b_m(t)g^{(m)}(t)+\ldots+b_0(t)g(t) \qquad (2)$$

Выражение (2) называют уравнением в отклонениях или уравнением в вариациях. Динамические объекты, математические модели которых могут быть представлены в виде уравнения (2), называются *непрерывными линейными* (точнее линеаризованными) объектами.

Если объект является стационарным по времени, то все коэффициенты уравнения (2) являются постоянными величинами, так, что уравнение (2) может быть записано в виде

$$a_n y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_0 y(t)=b_m g^{(m)}(t)+\ldots+b_0 g(t). \qquad (3)$$

Уравнение (3) является первой математической моделью линейного непрерывного динамического объекта с постоянными параметрами типа «вход–выход».

Уравнение (3) допускает алгебраизацию. Для этого введем обозначения:

$$\frac{d}{dt}=p,\ \frac{d^2}{dt^2}=p^2,\ldots\frac{d^i}{dt^i}=p^i$$

Теперь левая часть уравнения (3) имеет следующее *операторное алгебраическое* представление:

$$a_n y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_0 y(t)=\left(a_n p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1 p+a_0\right)y(t)=D(p)y(t).$$

Аналогично, правая часть уравнения (3) принимает вид

$$b_m g^{(m)}(t)+b_{m-1}g^{(m-1)}(t)+\ldots+b_0 g(t)=\left(b_m p^m(t)+b_{m-1}p^{m-1}(t)+\ldots+b_0\right)g(t)=B(p)g(t).$$

В результате дифференциальное уравнение (3) получает алгебраическое операторное представление

$$D(p)y(t)=B(p)g(t). \qquad (4)$$

Для решения дифференциального уравнения (3) необходимо задать начальные условия, в которых пребывал объект на момент $t=t_0=0$, т.е. задать значения

$$y(0)=y_0,\ y^{(1)}(0)=y_0^{(1)},\ldots,y^{(n-1)}(0)=y_0^{(n-1)}. \qquad (5)$$

$g(t)$ - входная независимая переменная является вынуждающей силой. Тогда общее решение уравнения (3) на основе принципа суперпозиции представимо в виде суммы двух слагаемых. Первая составляющая решения носит название свободная составляющая движения и обозначается как $y_c(t)$, а второе слагаемое носит название вынужденная составляющая движения и обозначается как $y_в(t)$. Очевидно, общее решение дифференциального уравнения (3)

$$y(t)=y_c(t)+y_в(t),$$

может быть сформировано покомпонентно. Компонент $y_c(t)$ ищется при условиях (5) и $g(t)=0$, то есть при нулевой правой части (3). Компонента $y_в(t)$, напротив, ищется при нулевых начальных условиях $y(0)=0,\ y^{(1)}(0)=0,\dots,y^{(n-1)}(0)=0$ и при ненулевой правой части, равной $B(p)g(t)$.

Экспоненциальная функция

$$y_k(t)=e^{\lambda_k t} \tag{6}$$

является частным решением однородного дифференциального уравнения

$$a_n y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\dots+a_0 y(t)=0 \tag{7}$$

полученного из неоднородного дифференциального уравнения (3) подстановкой в его правую часть $g(t)=0$, если величина λ_k обнуляет характеристический полином $D(\lambda)$ так, что $D(\lambda_k)=0$.

Экспоненциальная функция (6) является частным решением однородного уравнения (7). Общим решением уравнения (7), очевидно, является линейная комбинация решений вида (6) так, что для $y_c(t)$ можно записать

$$y_c(t)=\sum_{k=1}^{n}C_k e^{\lambda_k t}\ , \tag{8}$$

где все λ_k являются корнями характеристического уравнения $D(\lambda)=0$. В (8) коэффициенты C_k определяются как решение системы алгебраических уравнений

$$\left.\begin{array}{c} C_1+C_2+\dots+C_n=y(0) \\ \lambda_1 C_1+\lambda_2 C_2+\dots+\lambda_n C_n=y^{(1)}(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_1^{n-1}C_1+\lambda_2^{n-1}C_2+\dots+\lambda_n^{n-1}C_n=y^{(n-1)}(t) \end{array}\right\} \tag{9}$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения (7), в форме (8) справедливо для случая, когда все корни

λ_k характеристического уравнения $D(\lambda)=0$, вещественны и не кратны. Если среди решений уравнения есть хотя бы одна пара комплексно–сопряженных корней, скажем, определенности ради $\lambda_{1,2}=\alpha+i\beta$, то этой паре будет соответствовать два частных вещественных решения однородного дифференциального уравнения (7) вида

$$y_1(t)=e^{\alpha t}\cos(\beta t),\ y_2(t)=e^{\alpha t}\sin(\beta t).$$

Если спектр корней уравнения $D(\lambda)=0$ вещественный, но один из них, скажем λ_1 имеет кратность, равную μ, то этому корню соответствуют μ частных вещественных решений однородного дифференциального уравнения вида

$$y_1(t)=e^{\lambda_1 t},\ y_2(t)=te^{\lambda_1 t},\dots,y_\mu(t)=\frac{t^{(\mu-1)}}{(\mu-1)!}e^{\lambda_1 t}.$$

И наконец, если среди решений уравнения есть хотя бы одна пара комплексно–сопряженных корней, скажем, определенности ради $\lambda_{1,2}=\alpha+i\beta$ и эта пара характеризуется кратностью равной μ, то этой паре будет соответствовать *2μ* линейно независимых вещественных решений однородного дифференциального уравнения

$$y_1(t)=e^{\alpha t}\cos(\beta t), y_2(t)=e^{\alpha t}\sin(\beta t),\dots,y_{2\mu-1}(t)=\frac{t^{(\mu-1)}}{(\mu-1)!}e^{\alpha t}\cos(\beta t), y_{2\mu}(t)=\frac{t^{(\mu-1)}}{(\mu-1)!}e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

Каждому корню λ_k характеристического уравнения $D(\lambda)=0$ соответствует частная составляющая вынужденного решения неоднородного дифференциального уравнения (3), равная

$$y_{вk}(t)=\int_0^t\frac{B(\lambda_k)}{D'(\lambda_k)}e^{\lambda_k(t-\tau)}g(\tau)d\tau\ ,\quad \text{где}\quad D'(\lambda_k)=\left.\frac{dD}{dp}\right|_{p=\lambda_k}. \tag{10}$$

Отсюда следует, что результирующая вынужденная составляющая решения неоднородного дифференциального уравнения (3) на основании справедливости принципа суперпозиции и соотношения (10) может быть представлена в форме

$$y_в(t)=\int_0^t\sum_{k=1}^n\frac{B(\lambda_k)}{D'(\lambda_k)}e^{\lambda_k(t-\tau)}g(\tau)d\tau$$

(11)

Окончательно, общее решение неоднородного дифференциального уравнения (3) как аддитивная композиция свободной и вынужденной составляющей решения принимает вид

$$y(t)=\sum_{k=1}^{n}C_k e^{\lambda_k t}+\int_0^t\sum_{k=1}^{n}\frac{B(\lambda_k)}{D'(\lambda_k)}e^{\lambda_k(t-\tau)}g(\tau)d\tau\,.$$

(12)

Решение с помощью преобразования Лапласа

В теории управления широко применяется операционное исчисление, под которым понимается совокупность методов прикладного математического анализа, позволяющих значительно упростить решение линейных дифференциальных уравнений. Сущность операционного метода заключается в следующем. Пусть задана некоторая функция $f(t)$ действительной переменной t, причем такая, что для нее существует преобразование Лапласа:

$$F(s)=\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt\,. \qquad (13)$$

Это преобразование переводит функцию $f(t)$ действительного переменного t $(0\le t<\infty)$, называемую оригиналом, в функцию $F(s)$ комплексного переменного s, называемую изображением функции $f(t)$.

Операция определения изображения по оригиналу сокращенно записывается в следующем виде:

$$F(s)=L\{f(t)\},$$

где L – символ прямого преобразования Лапласа.

Наряду с прямым преобразованием возможно обратное преобразование Лапласа, позволяющее по изображению функции $F(s)$ найти ее оригинал $f(t)$.

Преобразование Лапласа позволяет дифференциальное уравнение, записанное относительно искомой функции $f(t)$, заменить в пространстве изображений на алгебраическое уравнение относительно изображения $F(s)=L\{f(t)\}$. Решив это алгебраическое уравнение и найдя $F(s)$, получим изображение решения исходного уравнения. Далее, выполняя обратное преобразование Лапласа, устанавливающее связь между изображением и соответствующим ему оригиналом, определяют саму искомую функцию $f(t)$.

На практике для выполнения прямого и обратного преобразований Лапласа используются таблицы изображений типовых функций.

Таблица 1
Изображение по Лапласу типовых функций

Оригинал $f(t)$	Изображение $F(s)$	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(s)$
1	2	3	4
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$e^{\pm\alpha t}\cos\omega t$	$\frac{s\pm\alpha}{(s\mp\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{\pm\alpha t}$	$\frac{1}{s\mp\alpha}$	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$t^n e^{\pm\alpha t}$	$\frac{n!}{(s\mp\alpha)^{n+1}}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$t\sin\omega t$	$\frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}$
$sh\,\omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$t\cos\omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$ch\,\omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	$e^{\alpha t}\sin(\omega t+\varphi)$	$\frac{\omega\cos\varphi+(s-\alpha)\sin\varphi}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{\pm\alpha t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s\mp\alpha)^2+\omega^2}$	$e^{\alpha t}\cos(\omega t+\varphi)$	$\frac{(s-\alpha)\cos\varphi-\omega\sin\varphi}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$

Решение дифференциального уравнения производится следующим образом.

Пусть задано дифференциальное уравнение (например, 2-го порядка) с постоянными коэффициентами

$$a_2 y''(t)+a_1 y'(t)+a_0 y(t)=g(t). \tag{14}$$

Требуется найти решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(0)=y_0,\ y'(0)=y_1.$$

Пусть $Y(s)=F(s)$ является изображением искомого решения (оригинала) $y(t)=f(t)$. Используя теорему о дифференцировании оригинала, находим изображения производных, входящих в уравнение. В нашем случае

$$y'(t)\to sY(s)-y(0);\ y''(t)\to s^2Y(s)-sy(0)-y'(0) \tag{15}$$

Далее находим изображение $G(s)=L\{g(t)\}$ или $g(t)\to G(s)$ правой части уравнения (14). Наконец, применяя преобразование Лапласа к обеим частям уравнения (14) и пользуясь свойством линейности преобразования Лапласа, получаем операторное уравнение

$$a_2\left(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right)+a_1\left(sY(s)-y(0)\right)+a_0Y(s)=G(s). \tag{16}$$

Решая операторное уравнение (16), находим $Y(s)$, и затем, по $Y(s)$, с помощью обратного преобразования Лапласа, восстанавливаем искомую функцию, оригинал $y(t)$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВВ ДИСКРЕТНЫХ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

Классический способ решения

В теории управления рассматривается класс систем, у которых выходные сигналы одного или нескольких элементов представляют набор импульсов. Для математического описания работы таких систем используется специальный математический аппарат, рассмотренный ниже.

Процесс перевода непрерывной (аналоговой) функции (сигнала) в дискретную называется *дискретизацией*. Процесс, обратный этому, называется *восстановлением*. Исходная непрерывная функция $f(t)$ преобразуется в последовательность дискретных значений $f(t_k)$, где t_k –это дискретные моменты времени. Чаще всего, имеет место случай периодической дискретизации с постоянным *периодом* T. При этом $t_k=kT$, где число k может принимать все целые значения от –∞ до +∞. Обратная периоду T_0 величина называется *частотой дискретизации*: $\omega_0={}^1\!/_{T_0}$.

Числовую последовательность, в которой аргумент изменяется через равные интервалы, можно также представить в виде решетчатой функции $f[kT]$, т.е. функции, значения которой определяются только в дискретные равноотстоящие друг от друга моменты времени. решетчатая функция $f[kT]$, или в сокращенной форме записи $f[k]$, это функция, значения которой определены в дискретные моменты времени $t = kT$, где T – период повторения:

$$f[k] = f(t)\Big|_{t=kT}.$$

Для описания импульсных процессов используют разностные уравнения, основу которых составляют так называемые прямые и обратные конечные разности.

Прямая конечная разность – это разность между значениями функции в последующем и текущем тактах:

$$\Delta f[kT] = f[(k+1)T] - f[kT] \qquad (17)$$

или сокращенно $\Delta f[k] = f[k+1] - f[k]$.

Обратная конечная разность – это разность между значением функции в текущем такте и значением функции в предыдущем такте:

$$\nabla f[kT] = f[kT] - f[(k-1)T]$$

или сокращенно $\nabla f[k] = f[k] - f[k-1]$.

Прямые (17) и обратные разности являются аналогами первых производных непрерывных функций.

Аналогами вторых производных непрерывных функций для решетчатых функций служат вторые прямые и обратные разности. Прямая конечная разность второго порядка определяется через первые прямые разности:

$$\Delta^2 f[kT] = \Delta f[(k+1)T] - \Delta f[kT] = \Delta f[k+1] - \Delta f[k]$$

$$\Delta^2 f[kT] = f[(k+2)T] - 2f[(k+1)T] + f[kT] = f[k+2] - 2f[k+1] + f[k]$$

$$\Delta^2 f[k] = f[k+2] - 2f[k+1] + f[k] \qquad (18)$$

Аналогичным образом вычисляются обратные конечные разности 2-го порядка.

Конечные разности произвольного порядка определяются из рекуррентных выражений. Например, прямая конечная разность *m*-го порядка:

$$\Delta^m f[k] = \Delta\left[\Delta^{m-1} f[k]\right] = \Delta^{m-1} f[k+1] - \Delta^{m-1} f[k]. \qquad (19)$$

При исследовании непрерывных систем пользуются дифференциальными уравнениями, определяющими связь между непрерывной функцией $y(t)$ и ее производными $d^m y(t) / dt^m$. Аналогично, соотношение между решетчатой функцией $y[k]$ и ее разностями $\Delta^m y[k]$ или $\nabla^m y[k]$ определяет уравнение в конечных разностях или разностное уравнение.

При использовании прямых разностей неоднородные линейные разностные уравнения имеют вид:

$$a_m \Delta^m y[k] + \ldots + a_1 \Delta^1 y[k] + a_0 y[k] = g[k], \qquad (20)$$

где $g[k]$ – заданная решетчатая функция; $y[k]$ – искомая решетчатая функция. Используя значения прямых разностей решетчатое уравнение можно также записать в виде:

$$\alpha_m y[k+m] + \alpha_{m-1} y[k+m-1] + \ldots + \alpha_0 y[k] = g[k]. \qquad (21)$$

Рекуррентное уравнение (21) является первой математической моделью отношения «вход-выход» дискретного объекта (ДО) или *дискретной математической моделью* «вход-выход» непрерывного объекта.

Решение разностных уравнений аналогичны классическим методам решения дифференциальных уравнений. Как и в случае непрерывных объектов, опираясь на суперпозицию свободного и вынужденного движений дискретного объекта, общее решение уравнения (21) можно записать в форме

$$y[k] = y_c[k] + y_в[k].$$

Первое слагаемое в выражении для переменной $y[k]$ носит название *свободная* составляющая движения и обозначается как $y_c[k]$, а второе слагаемое носит названия *вынужденная* составляющая движения и обозначается как $y_в[k]$. Очевидно, общее решение рекуррентного уравнения (21), записанное в форме $y[k] = y_c[k] + y_в[k]$ может быть сформировано *покомпонентно*. Компонент $y_c[k]$ ищется при условиях $y[i] \neq 0; i = \overline{0, m-1}$ и $g[k] = 0$, то есть при нулевой правой части (21). Компонент $y_в[k]$ ищется при условиях $y[i] = 0; i = \overline{0, m-1}$ и $g[k] \neq 0$. И всякий раз для каждого вида $g[k] \neq 0$ он свой.

Показательная (степенная) функция

$$y_i[k] = \lambda_i^k \qquad (22)$$

является решением *однородного* рекуррентного уравнения

$$\alpha_m y[k+m] + \alpha_{m-1} y[k+m-1] + \ldots + \alpha_0 y[k] = 0$$

(23)

полученного из неоднородного рекуррентного уравнения (21) подстановкой в его правую часть $g[k]=0$, если величина λ_i обнуляет характеристический полином $D(\lambda)$ так, что $D(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_i}=0$.

После подстановки в уравнение (23) частного решения (22), уравнение (23) принимает вид

$$\alpha_m\lambda_i^{k+m}+\alpha_{m-1}\lambda_i^{k+m-1}+\ldots+\alpha_0\lambda_i^{k}=0$$

(24)

$$\left(\alpha_m\lambda_i^{m}+\alpha_{m-1}\lambda_i^{m-1}+\ldots+\alpha_0\right)\lambda_i^{k}=0$$

Выражение в скобках является характеристическим полиномом $D(\lambda)$:

$$D(\lambda)=\alpha_m\lambda^{m}+\alpha_{m-1}\lambda^{m-1}+\ldots+\alpha_0 .$$

(25)

Показательная функция (22) является частным решением однородного уравнения (23). Пусть все корни $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ характеристического уравнения

$$D(\lambda)=0$$

(26)

вещественны и попарно различны. Тогда общим решением уравнения (23), очевидно, является линейная комбинация решений вида (22) так, что для $y_c[k]$ можно записать

$$y_c[k]=\sum_{i=1}^{m}C_i\lambda_i^{k} \qquad (27)$$

где все $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ являются корнями характеристического уравнения $D(\lambda)=0$.

В (27) коэффициенты $C_1,C_2,\ldots,C_m$ определяются как решение системы алгебраических уравнений

$$\left.\begin{array}{c} C_1+C_2+\ldots+C_m=y[0] \\ \lambda_1C_1+\lambda_2C_2+\ldots+\lambda_mC_m=y[1] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1^{m-1}C_1+\lambda_2^{m-1}C_2+\ldots+\lambda_m^{m-1}C_m=y[m-1] \end{array}\right\} \qquad (28)$$

Если характеристическое уравнение (26) имеет s кратных корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ соответственно кратностей $m_1, m_2, \ldots, m_s$, причем $m_1 + m_2 + \ldots + m_s = m$, то общее решение линейного однородного разностного стационарного уравнения имеет вид:

$$y_c[k] = \sum_{j=1}^{s} \left(C_{0j} + C_{1j}k + C_{2j}k^2 + \ldots + C_{m_j-1,j}k^{m_j-1} \right) \lambda_j^k, \qquad (29)$$

где C_{ij} – произвольные постоянные.

Если характеристическое уравнение (26) имеет комплексные корни, то в этом случае формула (29) дает общее комплексное решение. Если $\lambda = \alpha + i\beta$ – комплексный корень кратности *m* характеристического уравнения и, $\lambda = |\lambda|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$где $|\lambda|$ – модуль числа, а φ – аргумент числа λ, причем $0 \le \varphi \le 2\pi$, то общее решение линейного однородного разностного уравнения записывается в виде:

$$y_{lk} = k^l \lambda^k = k^l \left|\lambda^k\right| (\cos k\varphi + i\sin\varphi)$$

для всех $l = 0, 1, 2, \ldots, m-1$.

Частная составляющая $y_{вi}[k]$ общего вынужденного решения неоднородного рекуррентного уравнения (21) может быть сформирована в силу соотношения

$$y_{вi}[k] = \lambda_i^k \psi_i[k].$$

в котором неизвестная функция $\psi_i[k]$ ищется путем подстановки гипотетического решения в исходное рекуррентное уравнение (21) с целью получения соотношения относительно искомой функции $\psi_i[k]$, допускающего его явного разрешения относительно последней.

Общее решение неоднородного рекуррентного уравнения (21) как аддитивная композиция свободной и вынужденной составляющей решения принимает вид

$$y[k] = y_c[k] + y_в[k] = \sum_{i=1}^{n} C_i \lambda_i^k + \sum_{i=1}^{n} \psi_l[k] \lambda_i^k. \qquad (30)$$

Решение с помощью Z-преобразования

Для исследования импульсных систем управления, а также решения других прикладных задач, связанных с решетчатыми функциями и разностными уравнениями, используется дискретное преобразование Лапласа. Для решетчатых функций $f[kT]$ преобразование Лапласа определяется формулой:

$$F^*(s)=\sum_{k=1}^{\infty} e^{-skT} f[kT]=f[0]+e^{-sT} f[T]+e^{-s2T} f[2T]+\dots \qquad (31)$$

Введем новую комплексную переменную $z=e^{sT}$. Тогда функцию $F^*(s)$ можно представить в виде ряда

$$F^*(s)\Big|_{e^{sT}\to z}=F(z)=\sum_{k=1}^{\infty} f[kT]z^{-k}=f[0]+f[T]z^{-1}+f[2T]z^{-2}+\dots$$

.

Обычно для решетчатой функции используется краткая запись $f[kT]\to f[k]$.

Функция

$$F(z)=\sum_{k=1}^{\infty} f[k]z^{-k}$$

называется *Z-преобразованием* решетчатой функции. Условно *Z*-преобразование записывается следующим образом: $F(z)=Z\{f[k]\}$.

Нахождение оригинала решетчатой функции выполняется с помощью обратного *Z*-преобразования с использованием теоремы обращения, которая заключается в следующем. Если $F(z)$ есть *Z*-преобразование функции $f[k]$, то эта функция определяется как:

$$f[k]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} F(z)z^{k-1}dz\ , \qquad (32)$$

где Γ – замкнутый контур, охватывающий все особые точки (полюсы) функции $F(z)$. Нахождение $f[k]$ по формуле (32) называется *обратным Z-преобразованием*. Интеграл (32) вычисляется на основе теоремы о вычетах:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} F(z)z^{k-1}dz=\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Res}\left[F(z)z^{k-1};z_i\right]$$

где z_i – корни знаменателя функции $F(z)$; m – количество корней полюсов.

Тогда для оригинала решетчатой функции

$$f[k]=\sum_{i=1}^{m}\mathrm{Res}\left[F(z)z^{k-1};z_i\right] \qquad (33)$$

Для полюсов первого порядка вычеты находятся с помощью формулы

$$\mathrm{Res}\left[F(z)z^{k-1};z_i\right]=\lim_{z\to z_i}\left[(z-z_i)F(z)z^{k-1}\right].$$

Если есть *m* одинаковых корней функции $F(z)$, т.е. z_i являются полюсом *m*-го порядка функции, то:

$$\mathrm{Res}\left[F(z)z^{k-1};z_i\right]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_i}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_i)^m F(z)z^{k-1}\right].$$

Для выполнения *Z*-преобразования решетчатых функций удобно пользоваться таблицами *Z*-преобразования (табл.2). В случае, когда *Z*-изображения представляют сложные функции, то для нахождения функции оригинала используют различные методы разложения ее на типовые функции. Обычно функции оригинала находят методом разложения функции *Z*-изображения на элементарные дроби с использованием метода неопределенных коэффициентов.

Пусть функция *Z*-изображения представляет собой дробь

$$F^*(z)=\frac{zM(z)}{N(z)}.$$

При разложении этой функции на элементарные дроби необходимо учитывать, что возможны варианты.

1. Корни знаменателя $N(z)=0$ действительные числа;
2. Корни знаменателя $N(z)=0$ действительные числа, но среди них есть кратные корни;
3. Среди корней знаменателя $N(z)=0$ есть комплексно-сопряженные однократные корни;
4. Среди корней знаменателя $N(z)=0$ есть комплексно-сопряженные кратные корни.

Таблица 2

Z-преобразования типовых функций

$f(t)$	$f[kT_0]$	$F(z)$
$1(t)$	$1[kT_0]$	$\dfrac{z}{z-1}$
t	kT_0	$\dfrac{T_0 z}{(z-1)^2}$
t^2	$(kT_0)^2$	$\dfrac{T_0^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$
$e^{-\alpha t}$	$e^{-\alpha(kT_0)}$	$\dfrac{z}{z-e^{-\alpha T_0}}$
a^t	a^{kT_0}	$\dfrac{z}{z-a^{T_0}}$
$\sin\omega t$	$\sin\omega kT_0$	$\dfrac{z\sin\omega T_0}{z^2-2z\cos\omega T_0+1}$
$\cos\omega t$	$\cos\omega kT_0$	$\dfrac{z^2-z\cos\omega T_0}{z^2-2z\cos\omega T_0+1}$
$e^{-\alpha t}\sin\omega t$	$e^{-\alpha kT_0}\sin\omega kT_0$	$\dfrac{ze^{-\alpha T_0}\sin\omega T_0}{z^2-2ze^{-\alpha T_0}\cos\omega T_0+e^{-2\alpha T_0}}$
$e^{-\alpha t}\cos\omega t$	$e^{-\alpha kT_0}\cos\omega kT_0$	$\dfrac{z^2-ze^{-\alpha T_0}\cos\omega T_0}{z^2-2ze^{-\alpha T_0}\cos\omega T_0+e^{-2\alpha T_0}}$

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

по дисциплине «Математические основы теории систем»

Задание 1. Решить дифференциальное уравнение классическим методом

1. $y''+4y'-5y=0$; $y(0)=3$, $y'(0)=-3$.

2. $y'' - 6y' + 9y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

3. $y'' + 4y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 6$.

4. $y'' + y' - 2y = 1$; $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$.

5. $y'' - 4y' + 4y = 4t$; $y(0) = 4$, $y'(0) = 7$.

6. $y'' - 2y' + 5y = 1 - t$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

7. $y'' - 2y' + 2y = 1$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

8. $y'' - y' = e^t$; $y(0) = 4$, $y'(0) = 4$.

9. $y'' + y = 1$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.

10. $y'' + 2y' + y = t$; $y(0) = 0$, $y'(0) = -0$.

Задание 2. Решить дифференциальное уравнение, используя преобразование Лапласа

1. $y'' + 2y' + y = t$; $y(0) = 0$, $y'(0) = -0$.
2. $y'' + y = 1$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.
3. $y'' - y' = e^t$; $y(0) = 4$, $y'(0) = 4$.
4. $y'' - 2y' + 2y = 1$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
5. $y'' - 2y' + 5y = 1 - t$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
6. $y'' - 4y' + 4y = 4t$; $y(0) = 4$, $y'(0) = 7$.
7. $y'' + y' - 2y = 1$; $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$.
8. $y'' + 4y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 6$.
9. $y'' - 6y' + 9y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
10. $y'' + 4y' - 5y = 0$; $y(0) = 3$, $y'(0) = -3$.

Задание 3. Преобразовать дифференциальное уравнение в разностное и решить задачу классическим способом

1. $y''-2y'+5y=0$; $y(0)=0$, $y'(0)=0$.
2. $y''-2y'+2y=0$; $y(0)=0$, $y'(0)=0$.
3. $y''+y'-2y=0$; $y(0)=0$, $y'(0)=-2$.
4. $y''-3y'+10y=0$; $y(0)=0$, $y'(0)=-2$.
5. $y''-4y'+4y=0$; $y(0)=4$, $y'(0)=7$.
6. $y''-y'=0$; $y(0)=4$, $y'(0)=4$.
7. $y''-y=0$; $y(0)=-1$, $y'(0)=0$.
8. $y''+2y'+y=0$; $y(0)=0$, $y'(0)=-0$.
9. $y''+4y'-5y=0$; $y(0)=3$, $y'(0)=-3$.
10. $y''-6y'+9y=0$; $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

Задание 4. Преобразовать дифференциальное уравнение в разностное и решить задачу, используя Z-преобразование

1. $y''+y=1;\ y(0)=-1,\ y'(0)=0$.
2. $y''+2y'+y=t;\ y(0)=0,\ y'(0)=-0$.
3. $y''+4y'-5y=0;\ y(0)=3,\ y'(0)=-3$.
4. $y''-6y'+9y=0;\ y(0)=1,\ y'(0)=2$.
5. $y''+2y'+y=t+2;\ y(0)=0,\ y'(0)=2$.
6. $y''-2y'+5y=1-t;\ y(0)=0,\ y'(0)=0$.
7. $y''-2y'+2y=1;\ y(0)=0,\ y'(0)=0$.
8. $y''+4y=0;\ y(0)=1,\ y'(0)=6$.
9. $y''+y'-2y=1;\ y(0)=0,\ y'(0)=-2$.
10. $y''-4y'+4y=4t;\ y(0)=4,\ y'(0)=7$.

ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задание 1. Решить дифференциальное уравнение классическим методом

$$y''+9y=2\cos 3t;\ y(0)=-2,\ y'(0)=1 .$$

1. Корни характеристического уравнения $D(\lambda)=\lambda^2+9=0$ равны: $\lambda_1=3i$ и $\lambda_1=-3i$, поэтому общее решение однородного уравнения $y''+9y=0$ равно $y_c(t)=C_1\cos 3t+C_2\sin 3t$.

2. По известным начальным условиям задачи составляем систему уравнений относительно постоянных интегрирования C_1 и C_2, которая принимает вид

$$\begin{cases} C_1\cos 0+C_2\sin 0=-2 \\ -3C_1\sin 0+3C_2\cos 0=1 \end{cases}$$

Отсюда получаем C_1=-2, C_2=1/3.

3. Определяем свободное движение объекта, которое на основании общего решения однородного уравнения равно

$$y_c(t) = -2\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t$$

4. Поскольку для данной задачи $D(p) = p^2 + 9$; $B(p) = 1$; $D'(p) = 2p$, то $D'(\lambda_1) = 6i$, $D'(\lambda_2) = -6i$

5. Вынужденная компонента движения в соответствии (11) определяется соотношением

$$y_в(t) = \int_0^t \sum_{k=1}^n \frac{B(\lambda_k)}{D'(\lambda_k)} e^{\lambda_k(t-\tau)} g(\tau) d\tau = \int_0^t \left(\frac{e^{3(t-\tau)i}}{6i} - \frac{e^{-3(t-\tau)i}}{6i} \right) 2\cos 3\tau d\tau$$

;

$$y_в(t) = \int_0^t \frac{1}{3}\sin 3(t-\tau) 2\cos 3\tau d\tau = \frac{1}{3} t \sin 3t$$

6. Полное движение объекта, удовлетворяющее заданным условиям согласно (12), равно

$$y(t) = -2\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{3} t \sin 3t.$$

Задание 2. Решить дифференциальное уравнение, используя преобразование Лапласа

$$y'' - 2y' + y = e^t \; ; y(0) = 1, \; y'(0) = 2 .$$

1. Пусть изображением функции $y(t)$ является $Y(s)$, т.е. $y(t) \to Y(s)$. Тогда согласно (15)

$$y'(t) \to sY(s) - y(0) = sY(s) - 1 ,$$

$$y''(t) \to s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s - 2 .$$

2. Из таблицы преобразований Лапласа (табл. 1) находим изображение правой части уравнения: $e^t \to \dfrac{1}{s-1}$.

3. Согласно (16) операторное уравнение имеет вид

$$s^2Y(s) - s - 2sY(s) + 4 + Y(s) = \frac{1}{s-1} .$$

4. Решая операторное уравнение, находим изображение искомого решения:

$$Y(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{2-1}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^3} .$$

5. С помощью таблиц преобразования Лапласа (табл. 1) окончательно находим искомое решение $Y(s) \to y(t)$:

$$y(t) = e^t + (2-1)te^t + \frac{1}{2}t^2e^t$$

Задание 3. Преобразовать дифференциальное уравнение в разностное и решить задачу классическим способом

$$y'' - 3y' + 2y = 0\,;\; y(0) = 1,\; y'(0) = 3.$$

1. Полагаем период *T*=1, дискретные моменты времени *t*=*t_k*=*kT*=*k*.

2. Заменяем функцию от непрерывного аргумента $y(t)$ на решетчатую функцию $y[k]$, а производные в уравнении и в начальных условиях заменяем разностными соотношениями согласно (17), (18): $y'(t) \to y[k+1] - y[k]$, $y''(t) \to y[k+2] - 2y[k+1] + y[k]$ и поручаем разностное уравнение

$$y[k+2] - 5y[k+1] + 6y[k] = 0\,.$$

3. Используя разностное выражение для начального значения производной, найдем $y[1]$: $y'(0) = y[1] - y[0] = 3 = y[1] - 1$. Следовательно, $y[1] = 4$.

4. Составляем характеристическое уравнение (26): $D(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$.

5. Находим корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$.

6. Составляем систему частных решений, фундаментальную систему решений: $y_1[k] = 2^k$, $y_2[k] = 3^k$.

5. Записываем общее решение задачи согласно (27): $y[k] = C_1 2^k + C_2 3^k$.

6. Составляем систему алгебраических уравнений (28) и находим постоянные C_1 и C_2, обеспечивающие выполнение начальных условий:

$\begin{cases} C_1 2^0 + C_2 3^0 = 1 \\ C_1 2^1 + C_2 3^1 = 4 \end{cases}$. Отсюда находим $C_1 = -1$, и C_2 =2.

7. Находим окончательно в аналитическом виде выходной процесс системы:

$$y[k] = -2^k + 2 \cdot 3^k$$

Задание 4. Преобразовать дифференциальное уравнение в разностное и решить задачу, используя Z-преобразование

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2t} \; ; \; y(0) = 1, \; y'(0) = 3.$$

1. Полагаем период *T*=1, дискретные моменты времени *t*=*t_k*=*kT*=*k*.

2. Заменяем функцию от непрерывного аргумента $y(t)$ на решетчатую функцию $y[k]$, а производные в уравнении и в начальных условиях заменяем разностными соотношениями согласно (17), (18): $y'(t) \to y[k+1] - y[k]$, $y''(t) \to y[k+2] - 2y[k+1] + y[k]$ и поручаем разностное уравнение

$$y[k+2] - 5y[k+1] + 6y[k] = 0\,.$$

3. Используя разностное выражение для начального значения производной, найдем $y[1]$: $y'(0) = y[1] - y[0] = 3 = y[1] - 1$. Следовательно, $y[1] = 4$.

4. Получаем разностное уравнение

$y[k+2] - 5y[k+1] + 6y[k] = e^{2k}$ с начальными условиями $y[0] = 1, \; y[1] = 4$.

5. Находим *Z*-преобразование (табл. 2) от левой части разностного уравнения:

$$Z\{y[k+2] - 5y[k+1] + 6y[k]\} = Z\{y[k+2]\} - 5Z\{y[k+1]\} + 6Z\{y[k]\}$$

.

Так как $Z\{y[k+2]\} = z^2Y(z) - z^2y[0] - zy[1] = z^2Y(z) - z^2 - 4z$, $Z\{y[k+1]\} = zY(z) - zy[0] = zY(z) - z$, $Z\{y[k]\} = Y(z)$, то Z- образ левой части равен $z^2Y(z) - z^2 - 4z - 5zY(z) + 5z + 6Y(z)$.

6. Находим *Z*-преобразование от правой части разностного уравнения. Используя таблицу *Z*-преобразований (табл. 2), находим:

$$Z\left\{e^{2k}\right\} = G(z) = \frac{z}{z - e^2}$$

7. Получаем уравнение для изображения $Y(z)$:

$$Y(z)\left(z^2 - 5z + 6\right) - z^2 - 4z + 5z = \frac{z}{z - e^2}\,.$$

8. Находим изображение выходного процесса системы

$$Y(s)=\frac{s}{(s-2)(s-3)\left(z-e^2\right)}+\frac{s^2-s}{(s-2)(s-3)}$$

9. Введем обозначения:

$$Y_1(z)=\frac{z}{(z-2)(z-3)\left(z-e^2\right)},\quad Y_2(z)=\frac{z^2-z}{(z-2)(z-3)}.$$

10. Оригиналы для $Y_1(z)$ и $Y_2(z)$ находим, используя правила вычетов (полюса z_1=2, z_2=3, z_3=e^2) согласно (33):

$$y_1[k]=\sum_{i=1}^{3}\operatorname{Re}s\left\{\frac{z}{(z-2)(z-3)\left(z-e^2\right)}z^{k-1},z_i\right\};$$

$$y_1[k]=\frac{1}{e^2-2}2^k-\frac{1}{e^2-3}3^k+\frac{1}{\left(e^2-2\right)\left(e^2-3\right)}e^{2k}.$$

$$y_2[k]=\sum_{i=1}^{2}\operatorname{Re}s\left\{\frac{z^2-z}{(z-2)(z-3)}z^{k-1},z_i\right\}=-2^k+2k3^k$$

11. Сложив найденные оригиналы, получим, окончательно, выходной процесс системы

$$y[k]=\frac{3-e^2}{e^2-2}2^k+\frac{2e^2-7}{e^2-3}3^k+\frac{1}{\left(e^2-2\right)\left(e^2-3\right)}e^{2k}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпов А.Г. Математические основы теории систем. Учебное пособие. – Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2016. – 230 с. http://www.iprbookshop.ru/72123.html.

2. Певзнер Л.Д., Чураков Е.П. Гмурман В.Е. Математические основы теории систем. Учебное пособие. – М: Высш. шк., 2009. – 503 с.

3. Паршин Д.Я., Цветкова О.Л. Математические основы теории управления – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2012. – 210 с.

4. Дударенко Н.А., Нуйя О.С., Сержантова М.В., Слита О.В., Ушаков А.В. Математические основы теории систем: лекционный курс и практикум. Учебное пособие для высших учебных заведений / Под ред. А. В. Ушакова – изд. 2–е, расширенное и дополненное.– СПб: НИУ ИТМО , 2014. – 292 с.