ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Прикладная математика»

по дисциплине

Высшая математика: «Элементы линейной алгебры»

Автор
Ермилова О.В.

Ростов-на-Дону, 2024

Аннотация

Пособие содержит теоретический и практический материал по теории матриц и систем линейных алгебраических уравнений, предусмотренный программой при изучении курса «Высшая математика» и может быть использовано при подготовке и проведении практических и теоретических занятий по разделу «Элементы линейной алгебры». Пособие предназначено студентов технических специальностей. Изложение теории сопровождается большим количеством примеров с подробными решением, что должно способствовать лучшему усвоению материала, самостоятельной работе и приобретению навыков решения задач. В пособие включены задачи для аудиторных занятий и самостоятельной работы с ответами, благодаря чему преподавателю не приходится тратить время на составление и решение домашних заданий для студентов, а студентам поможет закрепить пройденный материал и проверить правильность решенного задания.

Автор

Старший преподаватель
каф. «Прикладная математика»
Ермилова О.В.

Оглавление

ГЛАВА 1. МАТРИЦЫ

Матрицы в математике - один из важнейших объектов, имеющих прикладное значение.

Например, телефонные книги любого размера и с любым числом данных об абоненте - ни что иное, как матрицы. Ясно, что такими матрицами мы все пользуемся почти каждый день.

1.1. Матрицы. Основные понятия.

Матрица - математический объект, записываемый в виде прямоугольной таблицы элементов, содержащая m строк и n столбцов одинаковой длины. Матрицу можно записать в виде

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots. & \ldots. \;\ldots \;\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Матрицы обозначаются большими латинскими буквами и записываются в круглых скобках.

Числа a_{ij}, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$, составляющие данную матрицу, называются ее **элементами**, элементы матрицы обозначаются малыми латинскими буквами.

Любой элемент матрицы A можно записать в виде a_{ij}, где индекс i указывает номер строки, а индекс j определяет номер столбца, на пересечении которых находится данный элемент.

Например, элемент a_{12} стоит в первой строке, втором столбце.

Матрицу (1.1) сокращенно можно записать в виде (1.2):

$$A = (a_{ij}) \quad (1.2)$$

Одна из ключевых характеристик матрицы — это её **размерность**, то есть количество строк и столбцов, из которых она состоит. Если в матрице имеется m строк и n столбцов, то говорят, что матрица A имеет размер $m \times n$.

Обозначение: $A_{m \times n}$

Например, матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ имеет размер 2×2,так как у неё две строки и два столбца ,а матрица $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ размера 2×3,так как имеет две строки и два столбца.

Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера называются **равными**, если равны все соответствующие элементы этих матриц, то есть $A = B$, если $a_{ij} = b_{ij}$.

Например, матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ равные матрицы $A = B$, так как размеры матриц совпадают 2×2 и соответствующие элементы равны $a_{ij} = b_{ij}$,а матрицы $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ и $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ не равны $C \neq D$, у данных матриц не совпадают соответствующие элементы $c_{21} \neq d_{21}$, $c_{22} \neq d_{22}$.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов ($m = n$) называют **квадратной**. Квадратную матрицу

размера $n \times n$ называют матрицей порядка n .

Диагональ квадратной матрицы начинающаяся в левом верхнем и оканчивающаяся в правом нижнем углу, называется **главной**, вторая диагональ **побочная**.

Квадратная матрица, все элементы которой, стоящие вне главной диагонали, равны нулю, называется **диагональной**.

Например, матрица $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - диагональная матрица n-го порядка.

В частности, матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ - диагональная матрица третьего порядка.

Диагональная матрица, у которой элементы главной диагонали равны единице называется **единичной матрицей**.

Обозначение: E

Например, матрица $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ единичная матрица n-го порядка.

В частности, при $n = 2$ получим единичную матрицу второго порядка: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Квадратная матрица называется **треугольной**, если все элементы, стоящие выше или ниже главной диагонали, равны нулю. Различают **верхнюю треугольную матрицу**, у которой все элементы, стоящие ниже главной диагонали равны нулю и **нижнюю треугольную** - элементы, стоящие выше главной её диагонали равны нулю.

Например, матрица $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ - нижняя треугольная, третьего порядка, а матрица $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ - верхняя треугольная того же порядка.

В частности, матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ - верхняя треугольная (третьего порядка), $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ - нижняя треугольная (третьего порядка).

Матрица, состоящая из одной строки (столбца), называется **матрицей-строкой (матрицей-столбцом).**

Например, $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ - матрица-столбец размера $m \times 1$, $(a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n})$ - матрица-строка размера $1 \times n$.

В частности, $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ - матрица-столбец размера 3×1, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ - матрица-строка размера 1×3.

Матрица, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом и называется **матрица -число.**

Матрица-число A в общем виде записывается так $A = (a_{11})$.

В частности, при $a_{11} = 3$,получим матрицу $A = (3)$.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой матрицей**.

Обозначение: O.

Например, матрица $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ нулевая матрица n-го порядка.

В частности, при $n = 2$,получим $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$- нулевую матрицу второго порядка.

1.2. Линейные операции над матрицами и их свойства.

Линейными операциями над матрицами называются операции сложения матриц и умножения матрицы на число.

Пусть даны матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$, $B_{m\times n} = (b_{ij}), C_{m\times n} = (c_{ij})$,где $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$, α, β - произвольные числа.

1) Умножением матрицы A **на число** α называется матрица $C = \alpha A$ того же размера, каждый элемент которой равен произведению соответствующего элемента матрицы A на число α:

$$C=\alpha\cdot A \Leftrightarrow c_{ij}=\alpha\cdot a_{ij} \quad (1.3)$$

2) Суммой двух матриц A и B, размерности $m\times n$, называется матрица $C = A + B$ того же размера, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B:

$$C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (1.4)$$

Аналогично, определяется разность $A - B = A + (-B)$.

Замечание: складывать (вычитать) можно только матрицы одинакового размера.

Пример 1.1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C = 2A - 3B$.

Решение.

Размеры матриц A и B совпадают, то есть данные матрицы содержат равное количество строк и столбцов, поэтому согласно определению умножения матрицы на число и сложению матриц имеем:

$$2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 3 \cdot 2 \\ (-2) \cdot 2 & (-4) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}, \quad 3 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 & 8 \cdot 3 \\ 1 \cdot 3 & (-4) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 24 \\ 3 & -12 \end{pmatrix},$$

$$C = 2 \cdot A - 3 \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 24 \\ 3 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 & 6-24 \\ -4-3 & -8-(-12) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -18 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Свойства линейных операции над матрицами.

Если $A, B, C -$ матрицы одинаковой размерности, α, β -произвольные числа, то справедливы равенства:

1) $A + B = B + A$ (коммутативность сложения матриц);

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (ассоциативность сложения матриц);

3) $A + O = A$;

4) $A + (-A) = O$;

5) $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$ (ассоциативность относительно умножения чисел);

6) $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$ (дистрибутивность умножения на матрицу относительно сложения чисел);

7) $\alpha\cdot(A+B)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B$ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения матриц).

Мы не будем доказывать эти свойства, поскольку они непосредственно вытекают из определения операций над матрицами.

Заканчивая этот пункт, введем еще одно понятие, которое будет часто встречаться во многих разделах математики – понятие **линейной комбинации**. Пусть M – некоторое множество, элементы которого можно складывать и умножать на числа (например, множество матриц одинакового размера, множество векторов, множество функций с одинаковой областью определения и так далее). Пусть $m_1,\ m_2,\ldots,m_k$ – элементы множества M, $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ – некоторые числа. Элемент $\alpha_1\cdot m_1+\alpha_2\cdot m_2+\ldots+\alpha_k\cdot m_k$ называют **линейной комбинацией** элементов $m_1,\ m_2,\ldots,m_k$ с коэффициентами $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$.

Пример 1.2. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&-3&1\\-1&-2&-1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\end{pmatrix}$. Найти линейную комбинацию $D=-A-2B+3C$.

Решение.

Линейной комбинацией матриц $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&-3&1\\-1&-2&-1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\end{pmatrix}$ с коэффициентами -1, -2, 3 является матрица

$$D=-A-2B+3C=-\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}2&-3&1\\-1&-2&-1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\end{pmatrix}=$$

$$=\left(\begin{pmatrix}-1&-2&-3\\-4&-5&-6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&-6&2\\-2&-4&-2\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}3&0&6\\0&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-4&-2-(-6)&-3-2\\-4-(-2)&-5-(-4)&-6-(-2)\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}3&0&6\\0&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&4&-5\\-2&-1&-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0&6\\0&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5+3&4+0&-5+6\\-2+0&-1+3&-4+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&4&1\\-2&2&-4\end{pmatrix}.$$

1.3. Нелинейные операции над матрицами и их свойства.

Нелинейными операциями над матрицами являются произведение матриц, возведение в степень и транспонирование матриц.

Произведением матрицы A размерности $m\times n$ на матрицу B размерности $n\times p$ называется матрица $C=A\cdot B$ размерности $m\times p$, каждый элемент которой c_{ij} стоящий в i -й строке и j -м столбце, равен сумме попарных произведений соответствующих элементов i -й строки матрицы A и j -го столбца матрицы B :

Из этого определения следует формула для вычисления элементов матрицы C:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot b_{kj} \quad (1.5)$$

Таким образом, в результате умножения матрицы A на матрицу B получается матрица C, число строк которой равно числу строк матрицы A, а число столбцов равно числу столбцов матрицы B.

Замечание: произведение определено, тогда и только тогда, когда число столбцов первой матрицы $A_{m\times \underline{n}}$ равно количеству строк второй матрицы $B_{\underline{n}\times p}$.

Покажем, как работает формула (1.5) на примере произведения матриц $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ второго порядка, то есть при $i = 1,2; k = 1,2$ имеем:

если $i = 1, j = 1$, то $c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}$;

если $i = 1, j = 2$, то $c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22}$;

если $i = 2, j = 1$, то $c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21}$;

если $i = 2, j = 2$, то $c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22}$.

Таким образом,

$$C_{2\times2} = A_{2\times2} \cdot B_{2\times2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}.$$

Пример 1.3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 1 \\ -9 & -12 & 5 \\ -15 & -8 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ -18 \end{pmatrix}$.Найти матрицу $C = A \cdot B$.

Решение.

Для начала определим размеры матриц: матрица A размера 3×3 (число строк на число столбцов), матрица B

размера 3×1.

Так как число столбцов матрицы A равно числу столбцов матрицы B, то матрица их произведения имеет вид:

$$C_{3\times1} = A_{3\times3} \cdot B_{3\times1} = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 1 \\ -9 & -12 & 5 \\ -15 & -8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ -18 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 \cdot 0 + (-6) \cdot (-12) + 1 \cdot (-18) \\ -9 \cdot 0 + (-12) \cdot (-12) + 5 \cdot (-18) \\ -15 \cdot 0 + (-8) \cdot (-12) + 2 \cdot (-18) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 - 18 \\ 144 - 90 \\ 96 - 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 \\ 54 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

Пример 1.4. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Найти: **а)** $C = A \cdot B$; **б)** $D = B \cdot A$.

Решение.

Матрица A размера 2×3 (число строк на число столбцов), матрица B размера 3×3 .

а) Так как число столбцов матрицы A равно числу столбцов матрицы B, то произведение $C_{2\times3} = A_{2\times3} \cdot B_{3\times3}$ существует и элементы матрицы C равны:

$c_{11} = 1\cdot1 + 2\cdot2 + (-1)\cdot3 = 2$, $c_{12} = 1\cdot2 + 2\cdot0 + (-1)\cdot5 = -3$,

$c_{13} = 1\cdot3 + 2\cdot1 + (-1)\cdot4 = 1$, $c_{21} = 5\cdot1 + 1\cdot2 + 3\cdot3 = 16$,

$c_{22} = 5\cdot2 + 1\cdot0 + 3\cdot5 = 25$, $\quad c_{23} = 5\cdot3 + 1\cdot1 + 3\cdot4 = 28$.

Таким образом, $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 16 & 25 & 28 \end{pmatrix}$.

б) Произведение $B \cdot A$ неопределенно, так как число столбцов матрицы A(3) не равно числу столбцов матрицы B (2), $3 \neq 2$.

Пример 1.5. Найти произведение матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$ и $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$A_{1\times3} \cdot B_{3\times1} = C_{1\times1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (1\cdot1 + 5\cdot2 + 3\cdot3) = (20),$$

$$B_{3\times1} \cdot A_{1\times3} = C_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (1\,5\,3) = \begin{pmatrix} 1\cdot1 & 1\cdot5 & 1\cdot3 \\ 2\cdot1 & 2\cdot5 & 2\cdot3 \\ 3\cdot1 & 3\cdot5 & 3\cdot3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 10 & 6 \\ 3 & 15 & 9 \end{pmatrix}.$$

Замечание: пример 1.5. показывает, что если произведения $A \cdot B, B \cdot A$ существуют, то в общем случае для произвольных матриц A и B произведение некоммутативно $A \cdot B \neq B \cdot A$, но для некоторых матриц равенство выполняется $A \cdot B = B \cdot A$, такие матрицы A и B называются **коммутативными (перестановочными)**. Единичная матрица коммутативна с любой другой, то есть $A \cdot E = E \cdot A = A$ и играет роль единицы при умножении.

Пример 1.6. Показать, что матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ перестановочны.

Решение.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & -1+1 \\ 1-1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 1-1 \\ -1+1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, $A \cdot B = B \cdot A$, следовательно матрицы A и B перестановочны.

Свойства умножения матриц.

Пусть A, B, C -матрицы, α, β - произвольные числа.

1) $E \cdot A = A \cdot E = A$;

2) $A \cdot O = O$;

3) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (ассоциативность умножения матриц);

4) $\begin{cases} (A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \\ C \cdot (A+B) = C \cdot A + C \cdot B \end{cases}$ (дистрибутивность умножения матриц относительно сложения матриц);

5) $A\cdot B\neq B\cdot A$,в общем случае умножение матриц не коммутативно.

Мы не будем доказывать эти свойства, поскольку они непосредственно вытекают из определения операций над матрицами.

Пример 1.7. Даны матрицы

$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\\ 1 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-1 & 0\end{pmatrix}$. Найти матрицу

$A\cdot B\cdot C$.

Решение.

Учитывая ассоциативность умножения матриц $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$ можем получить 2 способа решения;

<u>1 способ:</u>

$$A_{3\times\underline{2}}\cdot B_{\underline{2}\times 1}\cdot C_{1\times 2}=(A\cdot B)_{3\times\underline{1}}\cdot C_{\underline{1}\times 2}=\left(\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 2-2\cdot 1\\ 3\cdot 2-4\cdot 1\\ 1\cdot 2-1\cdot 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot(-1) & 0\cdot 0\\ 2\cdot(-1) & 2\cdot 0\\ 1\cdot(-1) & 1\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -2 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

<u>2 способ:</u>

$$A\cdot B\cdot C=A\cdot(B\cdot C)=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\cdot(-1) & 2\cdot 0\\ 1\cdot(-1) & 1\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot(-2)+(-2)\cdot(-1) & 1\cdot 0+(-2)\cdot 0\\ 3\cdot(-2)+(-4)\cdot(-1) & 3\cdot 0+(-4)\cdot 0\\ 1\cdot(-2)+(-1)\cdot(-1) & 1\cdot 0+(-1)\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -2 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Возведение матрицы в степень.

Частным случаем умножения матриц, является возведение матрицы в степень.

Возведение матрицы в степень представляет собой умножение заданной матрицы саму на себя n-е количество раз, где n – степень, в которую необходимо возвести исходную матрицу.

Таким образом, $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{n\text{ раз}}$, где n – целое неотрицательное число, то есть

$$A^1=A,\ A^2=A\cdot A,\ A^3=A^2\cdot A,\ \ldots,\ A^n=A^{n-1}\cdot A.$$

В частности, при $n=0$, получим $A^0=E$, где E – единичная матрица соответствующего порядка.

Как известно, при умножении матриц должно выполняться равенство количества столбцов первой матрицы и количества строк второй матрицы, получается, что при умножении матрицы саму на себя в ней должно быть равное количество строк и столбцов. Отсюда вытекает следующее правило.

Правило: допускается возводить в степень только квадратные матрицы, то есть матрицы с равным количеством строк и столбцов.

Пример 1.8. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.Найти матрицу: **а)** A^2; **б)** A^3; **в)** A^n.

Решение.

а) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 1+1 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 1+2 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

в) В соответствии с выше полученными результатами получим общую формулу для возведения исходной матрицы A в степень n : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример 1.9. Найти матрицу $R = C^2 + 2C^{\text{т}}$,если

$C = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение.

Найдем матрицу C^2:

$$C^2 = C \cdot C = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \cdot (-3) + 4 \cdot 1 & -3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 \\ 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 4 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу $2C^{\text{т}}$:

$$C^{\text{т}} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, 2C^{\text{т}} = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix},$$

следовательно,

$$R = C^2 + 2C^{\text{т}} = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 13-6 & 0+2 \\ 0+8 & 13+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 19 \end{pmatrix}.$$

Пример 1.10. Найти значение матричного многочлена $f(A)$, если известно, что

$$f(x)=-2x^2-5x+9,\ A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}.$$

Решение.

Подставляя $x=A$ в $f(x)$ и учитывая, что единичному элементу в матрицах соответствует единичная матрица, получим матричный многочлен $f(A)=-2A^2-5A+9E$.

Найдём его значение $f(A)$:

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-6 & -2+8\\ 3-12 & -6+16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 6\\ -9 & 10\end{pmatrix},$$

$$-2A^2=-2\cdot\begin{pmatrix}-5 & 6\\ -9 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & -12\\ 18 & -20\end{pmatrix}, 5\cdot A=\begin{pmatrix}5 & -10\\ 15 & -20\end{pmatrix}, 9\cdot E=\begin{pmatrix}9 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix},$$

$$f(A)=-2A^2-5A+9E=\left(\begin{pmatrix}10 & -12\\ 18 & -20\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & -10\\ 15 & -20\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}9 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & -2\\ 3 & 9\end{pmatrix}.$$

Транспонирование матриц.

Матрица называется **транспонированной** к матрице A, если она получена из матрицы A заменой строк на столбцы с сохранением их порядка.

Обозначение: A^T

Таким образом, имеет место равенство

$$A^T=\left(a_{ij}\right)^T=\left(a_{ji}\right)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Пример 1.11. Найти матрицу транспонированную к матрице: **а)** $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; **б)** $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение.

а) Первая строка идёт на место первого столбца, вторая на место второго столбца: $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$;

б) Аналогично поступая, имеем: $B^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Свойства транспонирования матриц.

1)Дважды транспонированная матрица равна исходной матрице, то есть $\left(A^T\right)^T=A$;

2)Транспонированная матрица суммы равна сумме транспонированных матриц, то есть $(A+B)^T=A^T+B^T$;

3)Транспонированная матрица произведения равна произведению транспонированных матриц сомножителей, взятых в обратном порядке, то есть $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$;

4) При транспонировании можно выносить число за скобки, то есть $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$;

5) Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы, то есть $|A| = |A^T|$.

Данные свойства вытекают из определения операций над матрицами.

Пример 1.12. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

а) Найти матрицу $C = 3A^T - 2B$; **б)** Показать, что $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Решение.

а) $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$, $3 \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 & 3 \cdot 3 \\ (-2) \cdot 3 & (-4) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$,

$2 \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$, $C = 3A^T - 2B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & -4 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 3-6 & 9-8 \\ -6-10 & -12-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -16 & -8 \end{pmatrix}$;

б) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-10 & 4+4 \\ 9-20 & 12+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -11 & 20 \end{pmatrix}$,

$(A \cdot B)^T = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -11 & 20 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -7 & -11 \\ 8 & 20 \end{pmatrix}$;

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$,

$B^T \cdot A^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-10 & 9-20 \\ 4+4 & 12+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -11 \\ 8 & 20 \end{pmatrix}$.

Итак, $(A\cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Симметричной (симметрической) называют квадратную матрицу, элементы которой симметричны относительно главной диагонали. Формально, матрица называется симметрической, если она совпадает со своей транспонированной, то есть если $A = A^T$.

Например, матрица $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ симметричная, так как $A^T = A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Очевидно, что сумма двух симметричных матриц одного порядка и произведение симметричной матрицы на число являются симметричными матрицами.

Пример 1.13. Даны матрицы

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. Показать, что:

а) матрицы A, B симметричные; **б)** матрица $A+B$ симметричная.

Решение.

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, тогда $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Таким образом, $A = A^T$ следовательно матрица A симметричная.

Аналогично для B, $B = B^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$;

б) $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, тогда

$(A+B)^T = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Итак, $A+B = (A+B)^T$, следовательно матрица $A+B$ симметричная.

1.4. Элементарные преобразования матрицы.

Элементарные преобразования матрицы-это такие преобразования матрицы, в результате которых сохраняется эквивалентность матриц, то есть элементарные преобразования не изменяют множество решений систем линейных алгебраических уравнений, которую представляет эта матрица.

Условимся здесь и далее строки обозначать через c_i (i-тая строка), а столбцы через l_j (j-тый столбец).

Элементарными преобразованиями строк матрицы называют:

1)Перестановка двух любых строк $c_i \leftrightarrow c_j$ (i-тую

строку поменяли местами с j-той строкой);

2)Умножение строки на число отличное от нуля $\alpha \cdot c_i$ (умножили i-тую строку на число α);

3)Прибавление к одной строке другой строки, умноженной на некоторое число отличное от нуля $\alpha \neq 0$, $c_i + \alpha \cdot c_j$ (к i-той строке прибавили j-тую умноженную на произвольное число $\alpha \neq 0$).

Аналогично определяются элементарные преобразования над столбцами.

Замечание: в дальнейшем мы в основном будем выполнять преобразования над строками матрицы, поскольку с ними работать удобнее.

Две матрицы называются **эквивалентными**, если одна из них получается из другой с помощью конечного множества элементарных преобразований над строками. Заметим, что эквивалентные матрицы не являются равными.

Обозначение: $A \sim B$

Рассмотрим, как работают элементарные преобразования над строками матрицы на примере матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}:$$

1)Поменяем местами первую и третью строки матрицы A, при этом получится эквивалентная матрица B, поэтому между ними ставим знак эквивалентности:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ -4 & 2 & -2\end{pmatrix}\overset{c_1\leftrightarrow c_3}{\sim}\begin{pmatrix}-4 & 2 & -2\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}=B;$$

2) Умножим первую строку последней матрицы (матрицы B) на $-\frac{1}{2}$,получим эквивалентную ей матрицу-

матрицу C :

$$B=\begin{pmatrix}-4 & 2 & -2\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\overset{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot c_1}{\sim}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}=C;$$

3) Прибавим к первой строке матрицы C вторую строку, умноженную на -1, получим эквивалентную ей матрицу D:

$$C=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\overset{c_1-c_2}{\sim}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}=D;$$

4)Вычёркивая нулевую (первую) строчку матрицы D, получим эквивалентную ей матрицу F:

$$D=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}=F.$$

Ступенчатая матрица- матрица в каждой строке которой стоит нулей больше, чем в предыдущей, при этом учитываются лишь нули, стоящие в начале строки до первого ненулевого элемента, таким образом, ступенчатая матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \underline{a_{11}} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \underline{a_{22}} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \underline{a_{mn}} \end{pmatrix}.$$

Первый ненулевой элемент строки ступенчатой матрицы при отсчёте слева направо будем подчеркивать одной чертой и называть **ведущим**. В данном случае ведущими являются элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mn}$.

Например, матрица $\begin{pmatrix} \underline{2} & 1 & 0 \\ 0 & \underline{2} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{1} \end{pmatrix}$-ступенчатая, а элементы $a_{11} = 2, a_{22} = 2, a_{33} = 1$-ведущие;

матрица $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$-не ступенчатая, так как в третьей строке нули не учитываются, они стоят после единицы (учитываются лишь нули стоящие в начале строки до первого ненулевого элемента).

Как известно, **любую ненулевую матрицу можно привести к ступенчатому виду при помощи конечного числа элементарных преобразований**, покажем на примере 1.14, как это сделать.

Пример 1.14. Привести матрицу к ступенчатому виду: **а)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;**б)** $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$;**в)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & -2 & 8 & 6 \\ -3 & -6 & 9 & -10 & -8 \\ 3 & 9 & -5 & 13 & 9 \end{pmatrix}$.

Решение.

а) Для того, чтобы привести исходную матрицу к ступенчатому виду, достаточно под двойкой получить ноль, для этого отнимем от второй строки удвоенную первую:

$$\begin{pmatrix} \underline{2} & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}_{c_2 - 2c_1} \begin{pmatrix} \underline{2} & 1 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 1 \end{pmatrix};$$

б) Для того, чтобы привести исходную матрицу к ступенчатому виду, в данном случае, удобно получить единицу в верхнем левом углу и последовательно по столбцам, начиная с первого, обнулить все элементы (при помощи элементарных преобразований), стоящие ниже главной диагонали:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \underset{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot c_1}{\overset{c_1 + c_3}{\sim}} \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{c_3 - 2c_1 \\ c_3 - c_2}}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 0 \\ 0 & \underline{-5} & 1 \end{pmatrix}.$$

в) Так как единица в верхнем левом углу уже имеется, достаточно при помощи элементарных преобразований обнулить все элементы, стоящие ниже главной диагонали, последовательно по столбцам, начиная с первого:

в) Так как единица в верхнем левом углу уже имеется, достаточно при помощи элементарных преобразований обнулить все элементы, стоящие ниже главной диагонали, последовательно по столбцам, начиная с первого:

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & -3 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & -2 & 8 & 6 \\ -3 & -6 & 9 & -10 & -8 \\ 3 & 9 & -5 & 13 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_2 - 2c_1 \\ c_3 + 3c_1 \\ c_4 + c_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underset{c_4 - c_2}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \underset{c_4 - c_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & -3 & 5 & 3 \\ 0 & \underline{3} & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{5} & 1 \end{pmatrix}.$$

При решении и исследовании систем линейных уравнений важную роль играют **приведённые ступенчатые матрицы**.

Матрица называется **приведённого ступенчатого вида по строкам (канонического вида**), если она удовлетворяет дополнительному условию: каждый ведущий элемент ненулевой строки — это единица, и он является единственным ненулевым элементом в своём столбце.

То есть, приведённая ступенчатая матрица не имеет нулевых строк, и все ведущие элементы её строк равны единице.

Примером приведенной ступенчатой матрицы может служит единичная матрица $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Отметим, что матрица ступенчатого приведенного вида необязательно имеет вид единичной матрицы. Например, матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ так же является приведенной, так как приведена к ступенчатой форме, не имеет нулевых строк и все ведущие элементы её строк равны единице, то есть как в первой, так и во второй строке найдена единица и остальное содержимое её столбца равно нулю, при этом константы в третьем столбце не являются ведущими элементами своих строк.

Известно, что любая матрица путем конечного числа элементарных преобразований строк (столбцов) может быть сведена к ступенчатому приведенному виду. Договоримся, при приведении матрицу к ступенчатому приведенному виду ,ведущий элемент обводить в кружок или обозначать в круглых скобка, тем самым показывая, что мы обнуляем, не только содержимое под этим элементом, но и выше него. Рассмотрим, как это сделать на примере 1.15.

Пример 1.15. Привести матрицу к каноническому виду:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & -9 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение.

а) Возьмём в качестве ведущего элемент $a_{11} = 1$ и обнулим содержимое его столбца, для этого из второй строки вычтем две первых строки и получим ступенчатую матрицу:

$$\begin{pmatrix} (1) & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{c_1 - 2c_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix};$$

Сделаем полученную матрицу ступенчатой приведенной, для этого разделим вторую строку на -3, далее в качестве ведущего возьмём элемент $a_{22} = 1$ и обнуляя содержимое его столбца получим приведенную ступенчатую матрицу:

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot c_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & (1) & 1 \end{pmatrix} c_1 - 2c_2 \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} (1) & 0 & 1 \\ 0 & (1) & 1 \end{pmatrix}.$$

б) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{\frac{c_2}{2}}{\sim} \begin{pmatrix} (1) & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ c_2 + c_1 \\ c_3 - 5c_1 \end{matrix} \sim$

$$\sim\begin{pmatrix} (1) & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & -15 & -3 & -9 \end{pmatrix}\underset{\frac{c_2}{-3}}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}\underset{c_3-c_2}{\sim}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}\overset{l_2\leftrightarrow l_3}{\sim}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & (1) & 5 & 3 \end{pmatrix}\overset{c_1-c_2}{\sim}\begin{pmatrix} (1) & 0 & -2 & -1 \\ 0 & (1) & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

в)

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & -9 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}\overset{c_1\leftrightarrow c_2}{\sim}\begin{pmatrix} (1) & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} c_3-5c_1 \\ c_4-2c_1 \end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -18 & -9 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} \frac{c_3}{(-9)} \\ \frac{c_4}{(-3)} \end{matrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & (1) \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \sim \\ c_3+c_2 \\ c_4+c_2 \end{matrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} c_3-c_4 \\ \frac{c_4}{3} \end{matrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \sim \\ \frac{c_3}{2} \end{matrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1) & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} c_1-4c_4 \\ c_2-3c_4 \\ c_3-c_4 \end{matrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & (1) & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} (-1)c_3\sim \\ c_3\leftrightarrow c_4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1) & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} c_1+2c_4 \\ c_2+c_4 \\ c_3-c_4 \\ \sim \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1) & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} c_1+2c_4 \\ c_2+c_4 \\ c_3-c_4 \\ \sim \end{matrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_2 \leftrightarrow c_3 \\ c_2 \leftrightarrow c_4 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} (1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1) \end{pmatrix}.$$

1.Задания для самостоятельного решения.

1.Найти матрицу C, если:

а) $C = A + B, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $C = 2B - 5A,\ A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}$;

в) $C = 2A + 5B, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

г) $C = (2B)^T + A,\ A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$;

д) $C = B - 2A^T, A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 10 & -5 \\ 3 & 16 \end{pmatrix}$;

е) $C = 5A - 3B + 2D,\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

2. Найти произведение матриц $A \cdot B$, $B \cdot A$:

а) $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & -7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$; **б)** $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 1 & -5\\ 3 & 2 & 7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & -3 & 1\\ 3 & 0 & -2\end{pmatrix}$; **г)** $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 5 & 4 & -5\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & -3 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$; **д)** $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$;

е) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4 & 5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$; **ё)** $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 5 & 7 & 1\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}5 & -1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 5 & 4\end{pmatrix}$;

ж) $A=\begin{pmatrix}5 & 7 & -4\\ 2 & 5 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$; **з)** $A=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -1\\ 5\\ 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 0 & -2 & 3 & 1\end{pmatrix}$;

и) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4 & 3\\ 2 & 1 & -2 & 0\\ -1 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

3. Найти матрицу $A \cdot B - 4C^T$, если

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-5 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-5 & 1 & 7\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

4. Показать, что матрицы коммутативны:

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $B=\begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

5. Найти матрицу $A^2+3A+2E$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

6.Найти матрицу $2A^2+3(B-4E)$,

если $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Найти произведение матриц $A\cdot B$, $B\cdot A$ и показать,

что $B\cdot A\neq A\cdot B$,если:

а) $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;**б)** $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

8. Найти значение матричного многочлена $f(A)$:

а) $f(x)=2x^3-x^2+3,\ A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$;

б) $f(x)=x^2-x-1,\ A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$;

в) $f(x)=2x^2+3x-5, A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

9. Найти произведение матриц $(A\cdot B)\cdot C$, $A\cdot(B\cdot C)$ и показать, что $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ -2 & 5 & -1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-2 & 4 & -3 & 0\\ 0 & 2 & 5 & -2\\ 3 & -1 & 2 & 4\end{pmatrix}.$$

10. Найти произведение матриц $A\cdot B\cdot C$, если

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 4 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

11. Найти действительные числа p и q, при которых матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ удовлетворяет уравнению $A^3=pA^2+qA$.

12. Вычислить A^n, если $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

13. Привести матрицу А к ступенчатому виду:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 2\\ 2 & 4 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 6 & 6\end{pmatrix}$;**б)** $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & -8\\ 2 & 1 & -3\\ 4 & 1 & -5\end{pmatrix}$;**в)**$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ 1 & 5 & 5\\ 0 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

14. Привести матрицу A к каноническому виду:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 5\end{pmatrix}$;**б)** $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}$.

Ответы:

1.1.а) $C=\begin{pmatrix}3 & 3 & 4\\ 5 & 3 & 3\end{pmatrix}$;**б)** $C=\begin{pmatrix}12 & -21 & -15\\ -7 & 4 & 24\\ 27 & -7 & -5\end{pmatrix}$;**в)** $C=\begin{pmatrix}2 & 9 & 11\\ 9 & 12 & 17\end{pmatrix}$;

г) $C=\begin{pmatrix}3 & 5 & 8\\ -4 & -3 & 16\\ 13 & 10 & 5\end{pmatrix}$;**д)** $C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$;**е)** $C=\begin{pmatrix}-20 & -7 & 8\\ 28 & 19 & -6\\ -5 & 18 & 27\end{pmatrix}$.

1.2. а) $A\cdot B=\begin{pmatrix}-8 & 13\\ 9 & -11\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}8 & -17\\ 11 & -27\end{pmatrix}$;

б) $B\cdot A=\begin{pmatrix}10 & 5 & 1\\ 7 & 4 & 1\end{pmatrix}$, $A\cdot B$ -неопределенно;

в) $A\cdot B=\begin{pmatrix}8 & 6 & -3\\ -19 & -3 & 9\\ 20 & -6 & -9\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 8\\ 7 & 3 & 20\\ -3 & -10 & -11\end{pmatrix}$;

г) $B\cdot A$ -неопределенно, $A\cdot B=\begin{pmatrix}10 & -4 & 12\\ 12 & -2 & 14\end{pmatrix}$;

д) $A\cdot B=\begin{pmatrix}2&3\\0&5\end{pmatrix}, B\cdot A=\begin{pmatrix}5&0&3\\4&3&3\\-2&1&-1\end{pmatrix}$;

е) $A\cdot B=(-5), B\cdot A=\begin{pmatrix}2&-1&4&5\\4&-2&8&10\\0&0&0&0\\-2&1&-4&-5\end{pmatrix}$;

ё) $A\cdot B=\begin{pmatrix}4&-4&7&4\\12&0&4&6\\40&8&15&16\\16&4&17&17\end{pmatrix}, B\cdot A=\begin{pmatrix}14&12&10\\7&4&5\\32&51&18\end{pmatrix}$;

ж) $A\cdot B=\begin{pmatrix}33\\15\end{pmatrix}$, $B\cdot A$- неопределенно;

з) $A\cdot B=\begin{pmatrix}12&0&-6&9&3\\4&0&-2&3&1\\-4&0&2&-3&-1\\20&0&-10&15&5\\4&0&-2&3&1\end{pmatrix}, B\cdot A=(30)$;

и) $A\cdot B=\begin{pmatrix}2&11&3&15\\-2&1&17&13\end{pmatrix}$, $B\cdot A$- неопределенно.

1.3. $A\cdot B-4C^T=\begin{pmatrix}13&-4\\-10&-15\\-17&-13\end{pmatrix}$. **1.4. а)**коммутативны,

так как $E\cdot A=A\cdot E=A$;**б)** коммутативны, так как $E \cdot B = B \cdot E = B$; **в)** коммутативны, так

как $A \cdot B = B \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; **1.5.** $A^2 + 3A + 2E = \begin{pmatrix} 15 & 7 & 8 \\ 13 & 9 & 8 \\ 9 & 7 & 14 \end{pmatrix}$.

1.6. $2A^2 + 3(B - 4E) = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$;

1.7.а) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq B \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$;

б) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \neq B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 6 \\ 2 & 16 & 11 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; **в)** Произведение $A \cdot B$

неопределенно, $B \cdot A = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. **1.8.а)** $f(A) = \begin{pmatrix} 18 & -20 \\ 30 & -2 \end{pmatrix}$;

б) $f(A) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; **в)** $f(A) = \begin{pmatrix} 12 & 24 & 11 \\ 19 & 28 & 13 \\ 30 & 27 & 10 \end{pmatrix}$.

1.9. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & -17 & -68 & 38 \end{pmatrix}$.

1.10. $A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} 16 & -18 \end{pmatrix}$. **1.11.** $p = 3, q = -2$. **1.12.**

$A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **1.13. а)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & -3 \\ 0 & \underline{-1} & 3 \\ 0 & 0 & \underline{-2} \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **1.14. а)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

ГЛАВА 2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Определитель – в математике запись чисел в виде квадратной таблицы, в соответствие которой ставится другое число (его значение). Определители позволяют удобно записывать сложные выражения, возникающие, например, при решении линейных уравнений, помогают установить существует ли решение задачи, выяснить имеет ли система линейных алгебраических уравнений одно решение или множество, и даже позволяют найти площадь треугольника.

2.1. Определители первого, второго, третьего порядка и их вычисление.

Определители играют важную роль в решении систем линейных уравнений.

Для квадратной матрицы A можно ввести определенную характеристику-определитель (детерминант), вычисляемый по некоторому правилу с помощью элементов матрицы A. При этом порядком определителя называют порядок соответствующей матрицы.

Обозначение: $|A|$, $\det A$, Δ.

Определитель первого порядка квадратной матрицы $A=(a_{11})$ равен единственному элементу этой матрицы

$$|A| = |a_{11}| = a_{11} \quad (2.1)$$

Таким образом, для матрицы первого порядка значение определителя равно значению элемента этой матрицы. Например, $|A| = |5| = 5$.

Определителем второго порядка квадратной матрицы $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ называется число $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21} \quad (2.2)$$

Формула (2.2) представляет собой правило вычисления определителя второго порядка по элементам соответствующей ему матрицы**: определитель второго порядка равен разности произведения элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, и произведения элементов, стоящих на ее побочной диагонали.**

Пример 2.1. Вычислить определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Решение.

По формуле (2.2) имеем:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 1\cdot(-4)-(-2)\cdot 3 = -4+6=2.$$

Замечание: обычно элементами определителя являются числа, тогда и сам определитель — это число, но иногда элементами определителя могут быть и другие математические объекты, например, функции.

Пример 2.2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x.$$

Пример 2.3. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 2x+1 & 3 \\ x+5 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

Решение.

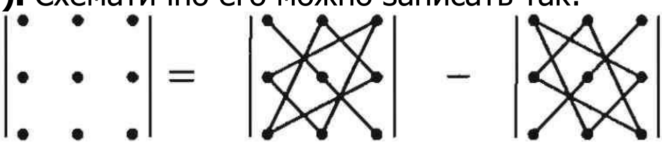
$$\begin{vmatrix} 2x+1 & 3 \\ x+5 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(2x+1) - 3\cdot(x+5) = 0,\ x-13=0,\ x=13.$$

Определителем третьего порядка квадратной матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ называется число $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} -$$

$$- a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33} - a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11} \quad (2.3)$$

Вычисления определителей 3-го порядка по формуле (2.3) называется **правилом «треугольников»(правило Саррюса).** Схематично его можно записать так:



Правило «треугольников»: для матрицы размера 3×3 значение определителя равно сумме произведений элементов главной диагонали и произведений элементов, лежащих на треугольниках с гранью параллельной главной диагонали, от которой вычитается произведение элементов побочной диагонали и произведение элементов лежащих на треугольниках с гранью параллельной побочной диагонали.

Пример 2.4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}$ используя правило треугольников.

Решение.

По формуле (2.3) имеем:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5\cdot 1\cdot(-3)+(-2)\cdot(-4)\cdot 6+3\cdot 0\cdot 1-6\cdot 1\cdot 1-3\cdot(-2)\cdot(-3)-0\cdot(-4)\cdot 5=$$

$$=-15+48-6-18=9.$$

Замечание: правило «треугольников» (для вычисления определителей третьего порядка) будем применять, только в тех случаях, когда это рационализирует решение, то есть в случае вычисления определителя треугольной матрицы или диагональной матрицы, или в случае, когда это действительно упрощает решение. В других случаях будем находить определитель используя правило разложения по строке или столбцу (как это сделать рассмотрим чуть позже), поскольку это действие является универсальным правилом-правилом, позволяющим вычислять определитель любого порядка.

Применяя правило «треугольников» получим,что определитель треугольного вида равен произведению элементов главной диагонали, так как из шести слагаемых не равным нулю будет только одно:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot 0 + 0\cdot 0\cdot a_{13} -$$

$$- a_{13}\cdot a_{22}\cdot 0 - 0\cdot a_{12}\cdot a_{33} - 0\cdot a_{23}\cdot a_{11} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}.$$

Аналогично вычисляется определитель диагонального вида: $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}.$

Пример 2.5. Вычислить определитель: **а)** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение.

а)Так как данный определитель треугольного вида(под главной диагональю этого определителя стоят нули), для его вычисления используем правило треугольников-значение данного определителя равно произведению элементов главной диагонали, то есть

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 2\cdot 5\cdot 8 = 80;$$

б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

2.2. Свойства определителей. Миноры, алгебраические дополнения.

Сформулируем основные свойства определителей, присущие определителям всех порядков. Поясним и докажем эти свойства на примере определителей второго порядка(n=2).

1) Если одна из строк (столбцов) определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю;

Доказательство.

Пусть вторая строка нулевая, получим: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot 0 - a_{12} \cdot 0 = 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$.Доказано.

Пример 2.6. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$.

Решение.

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$, так все элементы второго столбца равны нулю.

2) Если в определителе переставить две строки (столбца), определитель поменяет знак;

Доказательство.

Поменяем местами первую и вторую строку $c_1 \leftrightarrow c_2$, получим: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$;

Действительно,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = -(a_{12} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{22}) = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix},$$

доказано.

3)Определитель, содержащий две одинаковые строки (столбца), равен нулю;

Доказательство.

Пусть вторая строка совпадает с первой, имеем:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{12} - a_{11} \cdot a_{12} = 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = 0.$$

Доказано.

Пример 2.7. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$.

Решение.

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$, так как определитель содержит одинаковые строки (первая и третья строки совпадают).

4)Общий множитель какой-либо строки (столбца) можно вынести за знак определителя;

Доказательство.

Пусть первая строка содержит общий множитель k, тогда

$$\begin{vmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k\cdot a_{11}\cdot a_{22} - k\cdot a_{12}\cdot a_{21} =$$

$$= k\cdot(a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}) = k\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Доказано.

5)Определитель, содержащий две пропорциональные строки (столбца), равен нулю;

Доказательство.

Пусть первая и вторая строка пропорциональны, тогда

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} \end{vmatrix} = k\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = k\cdot(a_{11}\cdot a_{12} - a_{11}\cdot a_{12}) = 0,$$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} \end{vmatrix} = 0$.Доказано.

Пример 2.8. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -3 & 6 & -6 \end{vmatrix}$.

Решение.

Так как, элементы первого столбца пропорциональны элементам третьего столбца $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{-6}{-3} = 2$, следовательно

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -3 & 6 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

6) Определитель не меняется, если к элементам одной из его строк (столбцов) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженной на какой-либо число отличное от нуля;

Доказательство.

Прибавим к первой строке элементы второй строки, умноженной на число $k \neq 0$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} c_1 + k \cdot c_2 = \begin{vmatrix} a_{11} + k \cdot a_{21} & a_{12} + k \cdot a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \left(a_{11} + k \cdot a_{21}\right) \cdot a_{22} -$$

$$-\left(a_{12} + k \cdot a_{22}\right) \cdot a_{21} = a_{11} \cdot a_{22} + k \cdot a_{21} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} - k \cdot a_{21} \cdot a_{22} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + k \cdot a_{21} & a_{12} + k \cdot a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Доказано.

Дальнейшие свойства определителя связаны с понятием минора и алгебраического дополнения.

Минором элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель (n –1)-го порядка, полученный из исходного путём вычеркивания i -й строки и j -го столбца.

Обозначение: M_{ij}

Например, минор M_{12} элемента a_{12} определителя второго порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,получается из данного определителя вычеркиванием первой строки и второго столбца (элемент a_{12} находится в первой строке, втором столбце). Таким образом, $M_{12} = |a_{21}| = a_{21}$;

Аналогично ,найдем минор M_{21} элемента a_{21} определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,который получается из исходного определителя вычеркиванием второй строки первого столбца (элемент a_{21} находится во второй строке и первом столбце), то есть $M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знаком плюс, если сумма $i + j$ -четное число и со знаком минус, если данная сумма нечетна.

Обозначение: A_{ij}

Таким образом, алгебраическое дополнение определяется равенством

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \quad (2.4)$$

Например, алгебраическое дополнение A_{32} элемента a_{32} определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,получается путем вычеркивания третьей строки и второго столбца исходного определителя (элемент a_{32} находится в третьей строке и втором столбце) с учетом знака $(-1)^{3+2}$ имеем $A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$.

Вернемся к свойствам.

7) Разложение определителя по строке или столбцу: определитель равен сумме произведений всех элементов произвольной его строки (столбца) на соответствующие им алгебраические дополнения.

Докажем данное свойство на примере определителя третьего порядка.

Доказательство.

Используя определение алгебраического дополнения и формулу (2.3) вычисления определителей имеем:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} -$$

$$- a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} = a_{11}(a_{22} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23}) - a_{12}(a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) +$$

$$+ a_{13}(a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31}) = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= .a_{12} \cdot A_{12} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}.$$

Доказано.

Итак, формулу (2.3) можно записать в виде

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} \quad (2.5)$$

Формула (2.5) называется **разложением определителя третьего порядка по элементам первой строки**.

Замечание: определитель можно разложить как по элементам любой строки, так и по элементам любого столбца (рациональней по строке или столбцу, содержащим наибольшее количество нулей). Таким образом, имеют место шесть разложений:

$|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} (\textit{по первой строке});$

$|A| = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} (\textit{по второй строке});$

$|A| = a_{31} \cdot A_{31} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{33} \cdot A_{33} (\textit{по третьей строке});$

$|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} (\textit{по первому столбцу});$

$|A| = a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32} (\textit{по второму столбцу});$

$|A| = a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33} (\textit{по третьему столбцу}).$

Пример 2.9. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, разложив его по элементам первой строки.

Решение.

Раскладывая определитель по элементам первой строки, то есть по формуле $|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$, получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = a_{13}\cdot A_{13} + a_{23}\cdot A_{23} + a_{33}\cdot A_{33} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+(-2)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^2\cdot(5\cdot 2 - 1\cdot 1) -$$

$$-2\cdot(-1)^3\cdot(3\cdot 2 - 4\cdot 1) + 3\cdot(-1)^4\cdot(3\cdot 1 - 5\cdot 4) = 9 + 4 - 51 = -38.$$

Пример 2.10. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, раскладывая его по элементам третьего столбца.

Решение.

Разложим определитель по формуле $|A| = a_{13}\cdot A_{13} + a_{23}\cdot A_{23} + a_{33}\cdot A_{33}$,но перед этим, для упрощения решения, вынесем общий множитель 2 из третьего столбца:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 7 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot\left(1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} - 2\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} +\right.$$

$$\left.+3\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\right) = 2\cdot((-1)\cdot 3 - 7\cdot 2 + 2\cdot(5\cdot 3 - 7\cdot 3) + 3\cdot(5\cdot 2 - (-1)\cdot 3)) =$$

$$= 2\cdot(-17 - 12 + 39) = 20.$$

Пример 2.11. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение.

Разложим определитель по элементам второго столбца, так как он содержит наибольшее количество нулей:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + 0 - 2 = -2.$$

8) Сумма произведений элементов какой–либо строки(столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельной строки(столбца) равна нулю.

Доказательство

Докажем на примере определителя второго порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, что сумма произведений элементов первого столбца на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного (второго) столбца равна нулю, то есть $a_{11}\cdot A_{12} + a_{21}\cdot A_{22} = 0$.Действительно, $a_{11}\cdot A_{12} + a_{21}\cdot A_{22} = a_{11}\cdot(-1)^3\cdot a_{21} +$

$$+a_{21}\cdot(-1)^4\cdot a_{11}=a_{11}\cdot a_{21}-a_{11}\cdot a_{21}=0.$$

Доказано.

Например, для определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ имеем $a_{12}\cdot A_{21}+a_{12}\cdot A_{22}+a_{13}\cdot A_{23}=0$ (сумма произведений элементов первой строки на алгебраические дополнения соответствующих элементов второй (параллельной) строки равна нулю, прейдите к этому самостоятельно.

Пример 2.12. Вычислить определитель, используя свойства определителей:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$; **б)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix}$; **в)** $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 20 \\ 1 & 6 & 27 \\ 1 & 8 & 21 \end{vmatrix}$.

Решение.

а) Упростим вычисления, для этого воспользуемся свойством 6 определителя, вычтем из третьей строки первую умноженную на два и полученный определитель разложим по элементам третьей строки:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}\underset{c_3-2c_1}{=}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=$$

$$=-3\cdot(6-5)=-3;$$

б) Отнимем от первого столбца третий, получим в первом столбце два нуля и разложим определитель по этому столбцу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} \overset{l_1 - l_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 3 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 33;$$

в) Упростим решение, вычтем из первой и второй строки первую, получим два нуля в первом столбце и разложим определитель по этому столбцу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 20 \\ 1 & 6 & 27 \\ 1 & 8 & 21 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ c_2 - c_1 \\ c_3 - c_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 20 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{c_1 - c_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -20.$$

2.3. Определение и вычисление определителей высших порядков.

Во многих задачах, кроме определителей второго и третьего порядка, встречаются также определители высших порядков-определители порядка выше третьего.

Определители высших порядков вычисляются аналогично определителям третьего порядка, то есть разложением по строке или столбцу.

Выпишем формулу для вычисления определителей четвертого порядка:

Определителем n -го порядка матрицы (1.1) (или определителем матрицы n -го порядка) называется число, равное $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$, вычисляемое по формуле

$$|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \ldots + a_{1n} \cdot A_{1n} \quad (2.6)$$

Формула (2.6) называется **разложением определителя n-го порядка по элементам первой строки.**

При $n = 4$, получим формулу для вычисления четвертого порядка $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$:

$$|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + a_{14} \cdot A_{14} \quad (2.7)$$

Формула (2.7) называется **разложением определителя четвертого порядка по элементам первой строки.**

В соответствии со свойством 8 (определитель n-го порядка равен сумме произведений всех элементов произвольной его строки (столбца) на соответствующие им алгебраические дополнения), запишем универсальную формулу для вычисления определителей любого порядка:

$$|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in},\ i = 1,2\ldots,n$$ (2.8)- **разложение определителя n-го порядка по элементам i- й строки.**

$$|A| = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj},\quad j = 1,2,\ldots,n$$ (2.9)- **разложение определителя n-го порядка по элементам j- го столбца**

В частности, при $n = 3,\ i = 1$, получим формулу (2.5)

$|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$-разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки.

В частности, при $n = 3$, $j = 1$ получим $|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31}$ -разложение определителя третьего порядка по элементам первого столбца.

На практике для вычисления определителей высших порядков $(n = 4,5,\ldots)$ применяется метод понижения порядка определителя, основан на обращении всех, кроме одного, элементов строки (столбца) определителя в ноль с помощью свойств определителей. Таким образом, вычисление определителя n-го порядка сводится к вычислению определителей (n-1)-го порядка, что значительно упрощает решение.

Пример 2.13. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -2 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$.

Решение

Прибавим к первому столбцу третий и разложим получившийся определитель по элементам первого столбца:

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -3 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} l_1 + l_3 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ -1 & -3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} l_3 - l_1 \\ \\ \\ \end{matrix} = -6 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -18 \cdot \left(\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) = -18 \cdot \left(10 - (-4)\right) = -18 \cdot 14 = -252.$$

Применение метода понижения порядка определителя значительно упрощает решение, иначе нам пришлось бы вычислять четыре определителя третьего порядка (разложение по элементам первой строки):

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & -1 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \ldots = -252.$$

Пример 2.14. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение.

Чтобы упростить решение понизим порядок определителя, обнулим содержимое первого столбца: прибавим к элементам второй строки элементы первой строки, элементы первой строки умножим на (-2) и прибавим к элементам третьей строки, элементы первой строки умножим на (-1) и прибавим к элементам четвертой строки:

$$\begin{vmatrix} \underline{1} & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ c_2+c_1 \\ c_3-2c_1 \\ c_4-c_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} -$$

$$-0\cdot\begin{vmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} l_1-l_3 \\ \\ \\ \end{matrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 9.$$

2.Задания для самостоятельного решения.

1.Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}$;**б)** $\begin{vmatrix} x & xy \\ 1 & y \end{vmatrix}$;**в)** $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$;**г)** $\begin{vmatrix} tg\varphi & 1 \\ -1 & tg\varphi \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}$;**е)** $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; **ё)** $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 6 & -3 & -1 \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;**з)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix}$;**и)** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

2.Вычислить, используя свойства определителей и разлагая по элементам какой-либо строке (столбцу):

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;**б)** $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -4 \\ 8 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$; **в)** $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$;**г)** $\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$;**е)** $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;**ё)** $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$; **ж)** $\begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$;

з) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$;**и)** $\begin{vmatrix} 1 & \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \\ 1 & \sin^2\beta & \cos^2\beta \\ 1 & \sin^2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$.

3.Вычислить определители, используя правило треугольников:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$;**б)** $\begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix}$;**в)** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$;**г)** $\begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;**е)** $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$.

4.Решить уравнения:

а) $\begin{vmatrix} x+3 & x-1 \\ 7-x & x-1 \end{vmatrix} = 0$;**б)** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 7 & x-3 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0$;**в)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3-x & 3 \\ 1 & 2 & 5+x \end{vmatrix} = 0$;

г) $\begin{vmatrix} 3 & x \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 4 = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$.

5. Решить неравенства:

а) $\begin{vmatrix} 2x-2 & 1 \\ 7x & 2 \end{vmatrix} > 5$; **б)** $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14$; **в)** $\begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} \geq 0.$

6. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$;**б)** $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$; **в)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 8 \end{vmatrix}$; **д)** $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;**е)** $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Ответы:

2.1.а)16; **б)**0; **в)**4ab; **г)** $\dfrac{1}{\cos^2\varphi}$;**д)**1;**е)**102; **ё)**119;**ж)**6;**з)**1; **и)** $3abc-a^3-b^3-c^3$. **2.2.а)** -4; **б)**6; **в)** -5; **г)** $x-y-z-2$; **д)**0;**е)**0; **ё)** $-4a^3$;**ж)**72;**з)**144; **и)**0. **2.3.а)** -8; **б)** $2a^3$; **в)**0; **г)** - xyz ;**д)** -1;**е)**0.**2.4.а)** $x_1=1, x_2=2$; **б)** $x=5$;**в)** $x_1=1, x_2=-2$;**г)** $x=\dfrac{1}{3}$. **2.5.а)** $x<-3$;**б)** $-1<x<7$; **в)** $x \geq 3$. **2.6.а)**100; **б)** 2; **в)**160; **г)**60; **д)** 8; **е)**-26.

ГЛАВА 3. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Матрица задает линейное преобразование, обратная матрица задает обратное линейное преобразование. Обратная матрица используется при решении систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в том случае, если число неизвестных равняется числу уравнений.

3.1. Обратная матрица. Основные понятия.

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ размера $n \times n$.

Квадратная матрица A называется **невырожденной**, если ее определитель отличен от нуля ($\det A = |A| \neq 0$), и **вырожденной** в противном случае ($\det A = |A| = 0$).

Например, матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$-вырожденная, так как, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$,а матрица $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ – невырожденная, так как $|B| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 21 + 4 = 25 \neq 0.$

Матрица A^{-1}называется **обратной** к матрице A, если выполняется равенство

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E \quad (3.1)$$

Здесь E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A. Матрица A^{-1} имеет те же размеры, что и матрица A.

Матрица называется **присоединенной (союзной)** к матрице A, если она является транспонированной матрицей, составленной из алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A.

Обозначение: A^*

Таким образом, союзная матрица определяется равенством $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, где

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}, i = 1,2,3, j = 1,2,3$ (3.2)

Пример 3.1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$. Найти матрицу, присоединенную к матрице A.

Решение.

Найдем алгебраические дополнения $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ к элементам матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 6 - 8 \cdot 4 = -6 - 32 = -38;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -(18 - 20) = 2;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 - 5 \cdot (-1) = 24 + 5 = 29;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = -(0 \cdot 6 - 8 \cdot 1) = 8;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 5 \cdot 1 = 12 - 5 = 7;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 8 - 5 \cdot 0) = -16;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=0\cdot4-(-1)\cdot1=1;$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-(2\cdot4-3\cdot1)=-(8-3)=-5;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 3 & -1\end{vmatrix}=2\cdot(-1)-3\cdot0=-2.$$

Составим матрицу A^*, присоединенную к матрице A:

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-38 & 8 & 1\\ 2 & 7 & -5\\ 29 & -16 & -2\end{pmatrix}.$$

Пример 3.2. Показать, что матрица A^{-1} является обратной для матрицы A, если $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 6\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}3 & -3 & 1\\ -3 & 5 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

Решение.

Покажем, что $A^{-1}\cdot A=E$ (или $A\cdot A^{-1}=E$):

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-3&1\\-3&5&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot3+1\cdot(-3)+1\cdot1 & 1\cdot(-3)+1\cdot5+1\cdot(-2) & 1\cdot1+1\cdot(-2)+1\cdot1\\ 1\cdot3+2\cdot(-3)+3\cdot1 & 1\cdot(-3)+2\cdot5+3\cdot(-2) & 1\cdot1+2\cdot(-2)+3\cdot1\\ 1\cdot3+3\cdot(-3)+6\cdot1 & 1\cdot(-3)+3\cdot5+6\cdot(-2) & 1\cdot1+3\cdot(-2)+6\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E.$$

Следовательно, матрица A^{-1} является обратной для матрицы A.

3.2. Методы вычисления обратной матрицы.

Рассмотрим основные методы вычисления обратной матрицы: метод присоединенной матрицы, метод элементарных преобразований.

Метод присоединенной матрицы основан на теореме 3.1.

Теорема 3.1: Всякая невырожденная матрица имеет обратную, вычисляемую по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^{*} \quad (3.3)$$

Доказательство.

Докажем теорему на примере матриц второго порядка.

Пусть $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$- матрица второго порядка, причем $|A|\neq 0$.Составим союзную матрицу к матрице A и найдем произведение матриц A и A^*:

$$A\cdot A^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12} & a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22} \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12} & a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |A| & 0 \\ 0 & |A| \end{pmatrix}=|A|\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=|A|\cdot E.$$

Сравнивая полученные результаты $A\cdot A^*=|A|\cdot E$,

$A\cdot\dfrac{A^*}{|A|}=E$ с определением обратной матрицы

$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$ имеем: $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$. Доказано.

Таким образом, обратную матрицу можно вычислить **с помощью присоединенной (союзной) матрицы**, то есть по формуле $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$ — это и есть первый способ нахождения обратной матрицы.

Пример 3.3. Найти обратную A^{-1} к матрице $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ с помощью присоединенной матрицы.

Решение.

Найдем определитель матрицы A:

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ значит, обратная матрица A^{-1} к матрице A существует (матрица A невырожденная).

Найдем A^{-1} с помощью присоединенной матрицы, то есть по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^* = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$ -

алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A.

Для начала найдем союзную матрицу A^* для этого вычислим алгебраические дополнения матрицы A:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = |2| = 2;$ $A_{21} = (-1)^{1+2} \cdot M_{21} = -|-2| = 2;$
$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -|1| = -1;$ $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = |1| = 1$

Итак, $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Таким образом,

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{4} & \frac{2}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

<u>Проверка</u>: По определению обратной матрицы $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, имеем:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2+2 & -4+4 \\ -1+1 & 2+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

верно.

Замечание: нахождение обратной матрицы при помощи присоединенной матрицы, то есть по формуле (3.3) требует трудоемких вычислений, особенно для матриц порядка выше третьего, поэтому для их нахождения применяют метод элементарных преобразований.

Метод элементарных преобразований основан на том, что для нахождения обратной матрицы A^{-1} невырожденной матрицы A $n-$го порядка строят прямоугольную матрицу $(A|E)$ размера $n\times 2n$,приписывая к A справа единичную матрицу E .Далее , используя элементарные преобразования только для строк (или только для столбцов одновременно в матрицах слева и справа от черты),приводят матрицу A к приведенной (единичной) матрице , то есть к виду $(E|A^{-1})$, при этом матрица полученная справа от черты - будет обратной к матрице A:

$$(A\,|E)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots' & \dots' & \dots & \dots' \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{n1} & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{array}\right)=(E|A^{-1}).$$

Кратко алгоритм нахождения обратной матрицы методом элементарных преобразований можно записать так $A^{-1}:(A|E)\overset{э.п.}{\sim}(E|A^{-1})$.

Пример 3.4. Найти обратную к матрице $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ методом элементарных преобразований.

Решение.

В примере 3.3 мы уже находили обратную матрицу к данной с помощью присоединенной матрицы $|A|=4\neq 0$, где установили, что обратная матрица существует (матрица A невырожденная).

Найдем обратную матрицу A^{-1} метод элементарных преобразований, то есть по формуле $A^{-1}:\left(A|E\right)\sim\left(E|A^{-1}\right)$.

Приписываем к исходной матрице справа единичную матрицу того же порядка $\left(A|E\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)$ и с помощью элементарных преобразований строк матрицы приведем левую часть расширенной матрицы к приведенному-единичному виду, совершая одновременно точно такие преобразования над правой частью матрицы:

$$\left(A|E\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}(1) & -2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)_{c_2-c_1}\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 4 & -1 & 1\end{array}\right)_{\frac{c_2}{4}}\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & (1) & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{array}\right)^{c_1+2c_2}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{array}\right)=\left(E|A^{-1}\right).$$ Полученная справа от вертикаль-

ной черты квадратная матрица является обратной к матрице A, то есть $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Пример 3.5. Для матрицы A, найти обратную A^{-1} двумя способами: **а)** $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;**б)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}$.

Решение.

а) $|A| = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 4 = -13 \neq 0$, значит, обратная матрица A^{-1} к матрице A существует (матрица A невырожденная).

<u>1 способ:</u> (метод присоединенной матрицы)
Заключается в нахождении обратной матрицы по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^* = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix};$$

Находим A^*:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = |1| = 1$; $A_{21} = (-1)^{1+2} \cdot M_{21} = -|4| = 4$;
$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -|1| = -1$; $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = |-3| = -3$.

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, следовательно,

$$A^{-1} = -\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{13} & -\frac{4}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{3}{13} \end{pmatrix}.$$

<u>2 способ</u>: (метод элементарных преобразований)

Заключается в нахождении обратной матрицы по формуле $A^{-1} : (A|E) \overset{э.п.}{\sim} (E|A^{-1})$.

$$A^{-1}: (A|E) = \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{c_1 \leftrightarrow c_2} \left(\begin{array}{cc|cc} (1) & 3 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\sim}{c_2 + 3c_1}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 13 & 1 & 3 \end{array}\right) \overset{\sim}{\frac{c_2}{13}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & (1) & \frac{1}{13} & \frac{3}{13} \end{array}\right) \underset{\sim}{c_1 - 3c_2}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{-3}{13} & \frac{4}{13} \\ 0 & 1 & \frac{1}{13} & \frac{3}{13} \end{array}\right) = (E|A^{-1}).$$

Таким образом,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{13} & -\frac{4}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{3}{13} \end{pmatrix}.$$

б) Найдем $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 8 + 3 = 1 \neq 0,$$ следовательно, A^{-1} существует.

<u>1 способ:</u> (метод присоединенной матрицы)

Заключается в нахождении обратной матрицы по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^{*}\ ,\quad A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}.$$

Находим A^{*}:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}3 & 6\\ 4 & 10\end{vmatrix}=6;\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 10\end{vmatrix}=-8;\quad A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 6\end{vmatrix}=3;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 6\\ 1 & 10\end{vmatrix}=-4;\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 10\end{vmatrix}=7;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 6\end{vmatrix}=-3;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix}=1;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}=-2;\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=1.$$

Итак, $A^{*}=\begin{pmatrix}6 & -8 & 3\\ -4 & 7 & -3\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$, тогда $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^{*}=\begin{pmatrix}6 & -8 & 3\\ -4 & 7 & -3\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$;

<u>2 способ</u>: (метод элементарных преобразований)

$$A^{-1}:(A|E)\overset{э.п.}{\sim}(E|A^{-1})$$

$$(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}(1) & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 10 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ c_2-c_1\\ c_3-c_1\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & (1) & 3 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 7 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}c_1-2c_2\\ \sim\\ c_3-2c_2\end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -3 & 3 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (1) & 1 & -2 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}c_1+3c_3\\ c_2-3c_3\\ \ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 6 & -8 & 3\\ 0 & 1 & 0 & -4 & 7 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1\end{array}\right)=(E|A^{-1})$$

Итак, $A^{-1}=\begin{pmatrix} 6 & -8 & 3 \\ -4 & 7 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример 3.6. Найти обратную к матрице $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

Найдем определитель матрицы A:

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}-(-1)\cdot\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=,$$

$$=3(2-15)+(5-10)+4\cdot(15-4)=-39-5+44=0$$

следовательно матрица A – вырожденная, значит обратной для нее матрицы не существует.

Свойства обратной матрицы.

1) $(A^{-1})^{-1}=A$;

2) $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$;

3) $(A^{-1})^{T}=(A^{T})^{-1}$;

4) $\left|A^{-1}\right|=\dfrac{1}{|A|}$;

5) $(\alpha\cdot A)^{-1}=\dfrac{1}{\alpha}\cdot A^{-1}$.

Данные свойства непосредственно вытекают из определения обратной матрицы и свойств произведения матриц.

Докажем, например, 4 свойство:

Так как, $A\cdot A^{-1}=E$, $\left|A\cdot A^{-1}\right|=\left|E\right|=1$, $\left|A\right|\cdot\left|A^{-1}\right|=1$,

то $\left|A^{-1}\right|=\dfrac{1}{\left|A\right|}$.Доказано.

Пример 3.7. Показать, что матрица C нулевая, если $C=(A\cdot B)^{-1}-B^{-1}\cdot A^{-1}$.

Решение.

Воспользуемся вторым свойством обратной матрицы $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$,получим:

$C=(A\cdot B)^{-1}-B^{-1}\cdot A^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}-B^{-1}\cdot A^{-1}=0$,

следовательно матрица C -нулевая.

3.Задания для самостоятельного решения.

1. Найти обратную к матрице A методом присоединенной матрицы:

а) $A=\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 5\end{pmatrix}$;**б)** $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & -2\\ -2 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$;**в)** $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{pmatrix}$;**д)** $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$;**е)** $A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{pmatrix}$;

ё) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$;**ж)** $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

2. Для матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} методом элементарных преобразований:

а) $A=\begin{pmatrix}7&4\\5&3\end{pmatrix}$; **б)** $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$;**в)** $A=\begin{pmatrix}3&4&2\\2&-1&-3\\1&5&1\end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix}5&2&0\\2&1&1\\3&3&8\end{pmatrix}$;**д)** $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\1&0&2\\1&2&3\end{pmatrix}$; **е)** $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&2&0\\3&2&1\end{pmatrix}$;

ё) $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&5&1\\1&4&2\end{pmatrix}$;**ж)** $A=\begin{pmatrix}2&3&2&2\\-1&-1&0&-1\\-2&-2&-2&-1\\3&2&2&2\end{pmatrix}$.

3. Найти обратную к матрице A методом присоединенной матрицы и методом элементарных преобразований:

а) $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$; **б)** $A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\3&2&2\\1&-2&1\end{pmatrix}$; **в)** $A=\begin{pmatrix}-2&0&3\\0&2&1\\3&0&-2\end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&1&2\\0&0&2\end{pmatrix}$; **д)** $A=\begin{pmatrix}2&5&7\\6&3&4\\5&-2&-3\end{pmatrix}$;**е)** $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&-5&3\\2&7&-1\end{pmatrix}$;

ё) $A=\begin{pmatrix}2&3&1\\3&4&2\\1&1&2\end{pmatrix}$;**ж)** $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&3\\0&1&2\end{pmatrix}$.

4. Найти при каких значениях λ существуют матрицы, обратные к данным:

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ **;б)** $A=\begin{pmatrix} \lambda-2 & 2 & 3 \\ 0 & \lambda-2 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ **;в)** $A=\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1+\lambda & 9 \end{pmatrix}$.

Ответы:

3.1.а) $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$ **;б)** $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{16} & \frac{11}{16} \end{pmatrix}$;

в) $A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{7}{12} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$ **;г)** $A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{16}{33} & \frac{3}{11} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & 0 \\ \frac{31}{33} & -\frac{1}{11} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$;

д) $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$; **е)** $A^{-1}=\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$;

ё) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ **;ж)** $A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

3.2.а) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$ **;б)** $A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ **;г)** $A^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & 16 & -2\\ 13 & -40 & 5\\ -3 & 9 & -1\end{pmatrix}$;

д) $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{12} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{12}\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$ **;е)** $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -3 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$;

ё) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-6 & -4 & -5\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ **;ж)** $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -1\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 1 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

3.3.а) $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ **;б)** $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{6}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5}\\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5}\\ -\frac{8}{5} & \frac{3}{5} & \frac{7}{5}\end{pmatrix}$;

в) $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & 0 & -\frac{3}{5}\\ \frac{3}{10} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{5}\\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5}\end{pmatrix}$ **;г)** $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & \frac{7}{2}\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$;

д) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -38 & 41 & -34\\ 27 & -29 & 24\end{pmatrix}$;

е) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{16}{33} & \frac{3}{11} & \frac{1}{3}\\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & 0\\ \frac{31}{33} & -\frac{1}{11} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ **;ё)** $A^{-1}=\begin{pmatrix}-6 & 5 & -2\\ 3 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$;

ж) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -3\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

3.4. а) $\lambda \neq -1$; **б)** $\lambda \neq 2$ **;в)** ни при каких λ.

ГЛАВА 4. РАНГ МАТРИЦЫ

Ранг матрицы представляет собой важную числовую характеристику. Наиболее характерной задачей, требующей нахождения ранга матрицы, является проверка совместности системы линейных алгебраических уравнений.

4.1. Ранг матрицы и его свойства.

Рассмотрим прямоугольную матрицу

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots. & \dots. \;\dots \;\dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

, размера $m\times n$.Выберем произвольно в этой матрице k строк и k столбцов. Элементы, стоящие на пересечении выделенных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу k-го порядка, определитель которой называется **минором k-го порядка матрицы** A.

Пример 4.1. Выписать какие -нибудь миноры первого, второго, третьего и четвертого порядка матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 & 4 \\ -5 & 3 & -1 & 6 \\ 7 & -2 & 1 & 4 \\ 8 & 1 & 9 & -6 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Матрица A размера 4×4 , $m=n=4$,следовательно $k\le 4$.

1)Рассмотрим миноры первого порядка $k=1$.

Миноры первого порядка – это элементы матрицы, данная матрица содержит $m\times n=4\times 4=16$ элементов, следовательно 16 миноров (определителей) первого порядка: $|2|=2, |-5|=-5$ и так далее;

2)Найдем какой-нибудь минор второго порядка $k=2$. Для этого выделим в матрице $A_{4\times 4}$ две произвольные строки, например c_2, c_4 и два произвольных столбца, например l_1 и l_3, числа, находящиеся на их пересечении запишем в минор второго порядка:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 & 4 \\ -5 & 3 & -1 & 6 \\ 7 & -2 & 1 & 4 \\ 8 & 1 & 9 & -6 \end{pmatrix}$$

,следовательно $\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$-минор второго порядка. Таким образом, миноров второго порядка для данной матрицы существуют очень много;

3)Запишем какой-нибудь минор третьего порядка $k=3$.Для этого рассмотрим три произвольные строки, например, c_1, c_3, c_4 и три произвольных столбца, например, l_1, l_2, l_4 элементы стоящие на их пересечении образуют минор третьего порядка:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 & 4 \\ -5 & 3 & -1 & 6 \\ 7 & -2 & 1 & 4 \\ 8 & 1 & 9 & -6 \end{pmatrix}$$, получим $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 7 & -2 & 4 \\ 8 & 1 & -6 \end{vmatrix}$-минор третье-го порядка, их может быть очень много;

4)Минор четвертого порядка $k = 4$, единственный $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 & 4 \\ -5 & 3 & -1 & 6 \\ 7 & -2 & 1 & 4 \\ 8 & 1 & 9 & -6 \end{vmatrix}$.

Пример 4.2. В матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ указать все существующие миноры.

Решение.

Миноры первого порядка $|1|, |-2|, |0|$;

Миноры второго порядка $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$;

Миноров третьего порядка и выше матрица не имеет, так как у матрицы всего две строки.

Ранг матрицы — это наивысший порядок минора матрицы, отличного от нуля.

Обозначение: $r(A)$ или $rang(A)$.

Из определения ранга следует, что:

1) Ранг определяется числом между нулем и наименьшим из чисел m и n, то есть

$0 \le r(A) \le \min(m,n)$,где m -количество строк,n- количество столбцов;

2) Ранг матрицы равен нулю, если матрица нулевая и единице для любой ненулевой матрицы вектора-строки (вектора-столбца);

3) Для квадратной матрицы A n-го порядка $r(A) = n$,тогда и только тогда, когда матрица A невырожденная.

Свойства ранга матрицы.

1) При транспонировании матрицы ее ранг не меняется, то есть $r(A) = r(A^T)$;

2)Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы, то есть, если $A \sim B$, то $r(A) = r(B)$.

4.2. Методы нахождения ранга матрицы.

Приведем основные методы вычисления ранга матрицы: метод окаймляющих миноров и метод элементарных преобразований.

Метод окаймляющих миноров основан на определении ранга матрицы, напомним, рангом матрицы называется наибольший порядок минора матрицы, отличного от нуля. При вычислении ранга матрицы данным способом следует переходить от миноров низших порядков к минорам более высокого порядка по следующему алгоритму:

1) Найти какой-нибудь минор M_1 первого порядка (то есть элемент матрицы), отличный от нуля. Если такого минора нет, то матрица A нулевая и $r(A) = 0$,если есть, то $r(A) \ge 1$;

2) Вычисляем миноры второго порядка, содержащие M_1 (окаймляющие M_1) до тех пор, пока не найдется минор второго порядка M_2 отличный от нуля. Если такого минора нет, то $r(A)=1$,если есть, то $r(A)\geq 2$ и так далее.

Замечание:

1) При нахождении ранга таким способом на каждом шаге достаточно найти всего один ненулевой минор k -го порядка, причем искать его необходимо среди миноров, содержащих минор (k -1)-го порядка отличных от нуля.

2)Для удобства проверку миноров второго порядка начинаем с так называемого углового минора- минора, находящегося в левом верхнем углу.

Пример 4.3. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров: **а)** $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$;**б)** $A=\begin{pmatrix} 3-2 & 2 \\ 0 \quad 0 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$;**г)** $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение.

а) $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $r(A)\geq 1$, так как в матрице есть хотя бы один ненулевой элемент-минор первого порядка, например $|\,2\,|=2\neq 0$;

$r(A)=2$, так как существует минор второго порядка $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=-6\neq 0$,а миноров третьего порядка нет.

б) $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, r(A)\geq 1$, так как, например $\left|3\right|=3\neq 0$;

Любой из миноров второго порядка, содержащий (окаймляющий) минор $\left|3\right|$ данной матрицы равен нулю $\begin{vmatrix}3 & -2\\ 0 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}3 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$,следовательно $r(A)=1$;

в) $A=\begin{pmatrix}2 & 7 & 3 & 1\\ 3 & 5 & 2 & 2\\ 9 & 4 & 1 & 7\end{pmatrix}, r(A)\geq 1, \left|2\right|=2\neq 0$;

$r(A)\geq 2$, $\begin{vmatrix}2 & 7\\ 3 & 5\end{vmatrix}=-11\neq 0$;

$$r(A)\geq 3, \begin{vmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & 5 & 2\\ 9 & 4 & 1\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}5 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix}-7\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 9 & 1\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}3 & 5\\ 9 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=-6+105-99=0,$$

$$\begin{vmatrix}2 & 7 & 1\\ 3 & 5 & 2\\ 9 & 4 & 7\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}5 & 2\\ 4 & 7\end{vmatrix}-7\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 9 & 7\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3 & 5\\ 9 & 4\end{vmatrix}=54-21-33=0,$$

так как все миноры (окаймляющие минор второго порядка) третьего порядка равны нулю, то $r(A)=2$.

г) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3\\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1\\ 0 & 7 & 3 & 1 & -3\end{pmatrix}, r(A)\geq 1, \left|1\right|=1\neq 0$;

$r(A)\geq 2$, $\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\neq 1$;

$$r(A)\geq 3,\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=3-1=2\neq 0;$$

$$r(A)\geq 4,\begin{vmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 0 & -3\\ 0 & 7 & 3 & 1\end{vmatrix}\underset{c_3-c_1}{=}\begin{vmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 5 & -3 & 1\\ 0 & 7 & 3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 5 & -3 & 1\\ 7 & 3 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5 & 1\\ 7 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5 & -3\\ 7 & 3\end{vmatrix}=-6-2+36=28\neq 0.$$

Так как, нашелся минор четвертого порядка отличный от нуля, а миноров пятого порядка матрица не имеет $r(A)=4$.

Замечание: в случае матриц высших порядков метод окаймляющих миноров становится очень громоздким, поэтому рассмотрим ещё один метод нахождения ранга матрицы-метод элементарных преобразований.

Учитывая, что любую матрицу с помощью элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду, а элементарные преобразования не меняют ранга матрицы, то можно дать еще одно эквивалентное определение ранга матицы:

Ранг матрицы ступенчатой формы равен количеству ее ненулевых строк.

Метод элементарных преобразований - заключается в том, что матрица A приводится с помощью элементарных преобразований строк(столбцов) к ступенчатой форме. Количество ненулевых строк полученной ступенчатой матрицы и есть искомый ранг матрицы.

Замечание: в основном элементарные преобразования будем проводить над строками (со строками работать проще), точно так же можно работать и со столбцами.

Пример 4.4. Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований:

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$;**б)** $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -8 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

Решение.

а) Приведем исходную матрицу к ступенчатому вид- при помощи элементарных преобразований над строками. Для удобства поменяем местами первую и вторую строку, затем обнулим элементы первого столбца, стоящие ниже главной диагонали, затем обнуляем элементы второго столбца, стоящие ниже главной диагонали и так далее:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ c_2-2c_1 \sim \\ c_3-c_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -6 & -2 & -8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ c_2\cdot(-1) \\ c_3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & \underline{3} & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \sim \\ c_3-c_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 3 & 5 \\ 0 & \underline{3} & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Итак, мы получили ступенчатую матрицу, содержащую две не нулевые строки (нулевую строку можно вычеркнуть), следовательно $r(A)=2$;

б) Чтобы избежать действий с дробями (упростить решение) отнимем от элементов первой строки элементы третьей строки и так далее:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -8 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{matrix} c_1-c_3 \\ \sim \\ \end{matrix}\begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ c_2-2c_1 \\ c_3-4c_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & \underline{-1} & 3 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \sim \\ c_3-3c_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & -3 \\ 0 & \underline{-1} & 3 \\ 0 & 0 & \underline{-2} \end{pmatrix}, r(A)=3.$$

Пример 4.5. Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ методом элементарных преобразований и методом окаймляющих миноров.

Решение.

<u>1 способ:</u> (метод элементарных преобразований)

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ c_2-2c_1 \\ c_3-c_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \underline{5} & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \sim \\ 5c_3-7c_2 \end{matrix}\begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \underline{5} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{34} \end{pmatrix}.$$

Итак, $r(A)=3$.

<u>2 способ:</u> (методом окаймляющих миноров)

1) $r(A)\geq 1$, $|1|=1\neq 0$;

2) $r(A)\geq 2$, окаймляя минор $|1|$ при помощи второй строки и второго столбца получим $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=0$, двигаясь да-

лее (окаймляя $|1|$ при помощи второй строки и третьего столбца), получаем минор $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$;

3) $r(A) = 3$, так как нашелся минор третьего порядка (их всего два) окаймляющий минор $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ отличный от нуля:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$ (первый и второй столбец пропорциональны),

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 6 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 36 + 15 = 51 \neq 0$, а миноров четвертого порядка данная матрица не имеет.

Пример 4.6. Найти ранг матрицы

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, используя свойства ранга матрицы.

Решение.

Заметим, что матрица, транспонированная к данной, является ступенчатой, следовательно по свойству 1) ранга матрицы $r(A) = r(A^T)$,имеем:

$$A^T=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\4&-1&1&0\\1&6&1&2\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}\underline{1}&2&4&1\\0&\underline{1}&-1&6\\0&0&\underline{1}&1\\0&0&0&\underline{2}\end{pmatrix},\quad r(A)=r(A^T)=4.$$

4.Задания для самостоятельного решения.

1. Найти ранг матрицы A методом элементарных преобразований:

а) $A=\begin{pmatrix}2&3&5&-3&-2\\3&4&3&-1&-3\\5&6&-1&3&-5\end{pmatrix}$; **б)** $A=\begin{pmatrix}0&2&-4\\-1&-4&5\\3&1&7\\0&5&-10\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\\7&8&9\end{pmatrix}$ **;г)** $A=\begin{pmatrix}4&-1&5&2\\1&0&-3&3\\7&-2&13&1\\3&-1&8&-2\end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix}0&4&10&1\\4&8&18&7\\10&18&40&17\\1&7&17&3\end{pmatrix}$ **;е)** $A=\begin{pmatrix}0&1&0&3\\2&-1&-2&-3\\-6&4&6&-2\\4&3&1&3\\0&-2&5&4\end{pmatrix}$.

2. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & -1\\ 4 & 1 & -3\end{pmatrix}$; **б)** $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1 & -14 & 22\\ -2 & 1 & 3 & 3 & -9\\ -4 & -3 & 11 & -19 & 17\end{pmatrix}$; **в)** $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -7\\ 2 & 1 & -3\\ 3 & 1 & -5\\ 4 & 2 & -1\end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & -4 & 2\\ 5 & -2 & 2 & 4\end{pmatrix}$; **д)** $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5 & 6 & 1\\ -2 & -4 & 6 & 5 & 2\\ 4 & -2 & 3 & -2 & 3\\ -8 & 4 & -6 & 4 & -6\end{pmatrix}$; **е)** $A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 3 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1\\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5\end{pmatrix}$.

3. Найти ранг матрицы A двумя способами (методом элементарных преобразований, методом окаймляющих миноров):

а) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 4 & -1 & 5\end{pmatrix}$; **б)** $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & -4 & 2\\ 5 & -2 & 2 & 4\end{pmatrix}$; **в)** $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 2\\ 1 & 3 & 6 & 3\\ 1 & 4 & 10 & 3\end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$; **д)** $A=\begin{pmatrix}5 & 0 & -3 & 0 & 2\\ 7 & 0 & -4 & 0 & 3\\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$; **е)** $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 5 & 3\end{pmatrix}$;

ё) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -2\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -3 & 1\end{pmatrix}$.

4. Найти ранг матрицы A используя свойства ранга матрицы:

а) $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;**б)** $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответы:

4.1.а) $r(A)=2$; **б)** $r(A)=2$; **в)** $r(A)=3$;**г)** $r(A)=3$; **д)** $r(A)=2$; **е)**$r(A)=4$. **4.2. а)** $r(A)=2$;**б)** $r(A)=2$; **в)** $r(A)=3$; **г)** $r(A)=2$; **д)** $r(A)=3$;**е)** $r(A)=3$.
4.3. а) $r(A)=3$;**б)** $r(A)=2$; **в)** $r(A)=3$; **г)** $r(A)=3$; **д)** $r(A)=2$;**е)** $r(A)=2$; **ё)** $r(A)=3$.**4.4. а)** $r(A)=3$; **б)** $r(A)=3$; **в)** $r(A)=2$.

ГЛАВА 5. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Системы линейных уравнений широко используются в задачах экономики, физики, электротехники, программирования и других наук.

5.1. Системы линейных уравнений (СЛУ). Основные Метод координат на плоскости.

определения.

Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{cases} \qquad (5.1)$$

Здесь a_{ij} - числа называемые **коэффициентами** системы $\left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n};\right)$, числа b_i -**свободные члены**, x_j - **неизвестные** действительные числа, их необходимо найти.

Введем обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

-матрица из коэффициентов при неизвестных, называемая **основной матрицей системы**;

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – **вектор-столбец неизвестных**; $$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$ –

вектор-столбец свободных членов;

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$ — **расширенная матрица**

системы.

Используя понятие произведения матриц, систему (5.1) можно записать в компактной матричной форме

$$A\cdot X=B \quad (5.2)$$

Действительно, поскольку

$$A\cdot X=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{21}\dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots.\ \ \dots.\ \dots\ \dots \\ a_{m1}\ a_{m2}\dots a_{mn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\dots+a_{1n}\cdot x_n \\ a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+\dots+a_{2n}\cdot x_n \\ \dots \\ a_{m1}\cdot x_1+a_{m2}\cdot x_2+\dots+a_{mn}\cdot x_n \end{pmatrix}=B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

,используя понятие равных матриц получим систему (5.1).

Например, систему линейных уравнений общего вида $\begin{cases} -2x_1-x_2=1 \\ -2x_1+x_2=-7 \end{cases}$ легко записать в матричной форме. Система состоит из двух уравнений $(m=2)$ с двумя неизвестными x_1,x_2 $(n=2)$,где $A=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$-основная матрица системы, $B=\begin{pmatrix}1\\-7\end{pmatrix}$- столбец свободных членов, $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ - столбец неизвестных. В матричной форме система уравнений имеет вид $\begin{pmatrix}-2 & -1\\-2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-7\end{pmatrix}$.

Решением системы (5.1) называется n значений неизвестных $x_1=c_1, x_2=c_2, \ldots, x_n=c_n$,при подстановке которых в уравнения системы (5.1), получаются верные равенства.

Система уравнений **совместна**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместна**, если она не имеет решения.

Решить систему- это значит выяснить, совместна она или несовместна. Если система совместна, найти общее решение. Решение системы, полученное из общего при фиксированных значениях $c_1, c_2, \ldots, c_n$ называется **частным решением.**

Система уравнений называется **определённой**, если она имеет единственное решение, и **неопределённой**, если она имеет бесконечное множество решений.

Две системы уравнений называются **равносильными (эквивалентными)**, если множества их решений совпадают.

Эквивалентные системы получаются, в частности, при элементарных преобразованиях системы при условии, что преобразования выполняются лишь над строками матрицы.

Система уравнений называется **неоднородной**, если $B\neq 0$, и **однородной**, если $B = 0$.

5.2. Методы решения квадратных систем линейных алгебраических уравнений: метод Крамера, матричный метод.

Метод Крамера и матричный метод применяются для решения неоднородных систем n уравнений с n неизвестными, у которых определитель основной матрицы системы отличен от нуля:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + \ \ldots + a_{nn}\cdot x_n = b_n \end{cases} \quad (5.3)$$

, где $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$.

Метод Крамера.

Применяется только для решения систем с невырожденной основной матрицей A. Метод основан на следующей теореме.

Теорема 5.1: если определитель основной матрицы системы отличен от нуля $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое формулами:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = 1,2,\ldots,n, \quad (5.4)$$

где Δ_i - определитель, полученный из определителя Δ заменой i-го столбца столбцом свободных членов B.

Доказательство.

Докажем теорему на примере систем третьего порядка. Пусть имеется система третьего порядка:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 = b_2, \\ a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_2 + a_{33}\cdot x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Умножим уравнения исходной системы на алгебраические дополнения элементов первого столбца и складывая полученные равенства имеем:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 = b_2 \\ a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_2 + a_{33}\cdot x_3 = b_3 \end{cases} \left| \begin{matrix} \cdot A_{11} \\ \cdot A_{21} \\ \cdot A_{31} \end{matrix} \right. \quad +$$

$$\left(a_{11}\cdot A_{11} + a_{21}\cdot A_{21} + a_{31}\cdot A_{31}\right)\cdot x_1 + \left(a_{12}\cdot A_{11} + a_{22}\cdot A_{21} + a_{32}\cdot A_{31}\right)\cdot x_2 +$$
$$+\left(a_{13}\cdot A_{11} + a_{23}\cdot A_{21} + a_{33}\cdot A_{31}\right)\cdot x_3 = b_1\cdot A_{11} + b_2\cdot A_{21} + b_3\cdot A_{31}$$

По свойству 9 определителей имеем:

$$a_{12}\cdot A_{11} + a_{22}\cdot A_{21} + a_{32}\cdot A_{31} = 0,\ a_{13}\cdot A_{11} + a_{23}\cdot A_{21} + a_{33}\cdot A_{31} = 0,$$

$$a_{11}\cdot A_{11} + a_{21}\cdot A_{21} + a_{31}\cdot A_{31} = \Delta.$$

В итоге получим, $\Delta \cdot x_1 = b_1 \cdot A_{11} + b_2 \cdot A_{21} + b_3 \cdot A_{31}$, выражение в правой части равенства отличается от Δ тем, что на местах элементов первого столбца стоят элементы столбца свободных членов, то есть $b_1 \cdot A_{11} + b_2 \cdot A_{21} + b_3 \cdot A_{31} = \Delta_1$.Итак, $\Delta \cdot x_1 = \Delta_1, x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$. Формулы $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$ выводятся аналогично. Доказано.

Алгоритм (метода Крамера):

1)Находим определитель основной матрицы системы A, то есть $\Delta = \det A = |A|$,если $\Delta = 0$,то система не имеет решения (несовместна) или не может быть решена методом Крамера, поскольку совместна и неопределенна;

2) Затем (в случае $\Delta \neq 0$) последовательно вычисляем n вспомогательных определителей Δ_i, подставляем найденные значения в формулы Крамера $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$ получим единственное решение системы.

Пример 5.1. Решить методом Крамера систему уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 = -1 \\ 2x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$.

Решение.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$-основная матрица системы, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$- столбец свободных членов, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ - столбец неизвестных.

Вычисляем определитель основной матрицы $\Delta=|A|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1-2\cdot(-1)=3\neq 0$, следовательно, матрица системы невырожденная, СУ имеет единственное решение.

Вычисляем вспомогательные определители $\Delta_i\,(i=1,2)$:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 7 & 1\end{vmatrix}=-1-7\cdot(-1)=6;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 7\end{vmatrix}=7-2\cdot(-1)=9.$$

По формулам Крамера (5.4) находим неизвестные

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{6}{3}=2,\; x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{9}{3}=3.$$

То есть, $\begin{cases}x_1=2\\ x_2=3\end{cases}$,полученное решение можно записать в матричной форме $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$.

Проверка: подставим $x_1=2, x_2=3$ в исходную систему уравнений $\begin{cases}2-3=-1\\ 2\cdot 2+3=7\end{cases}$,верно.

Пример 5.2. Решить методом Крамера систему уравнений:**а)** $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=6\\ 2x_1-x_2+x_3=3\\ 3x_1+2x_2-x_3=4\end{cases}$;**б)** $\begin{cases}-6x_1-6x_2+x_3=0\\ -9x_1-12x_2+5x_3=-\;12.\\ -15x_1-8x_2+2x_3=-18\end{cases}$

Решение.

а) Вычислим определитель основной матрицы системы, раскладывая его по элементам первой строки:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\3&2&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1\\2&-1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&1\\3&-1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&-1\\3&2\end{vmatrix}=-1+5+7=11\neq 0,$$

следовательно, система имеет единственное решение.

Находим вспомогательные определители $\Delta_i\left(i=1,2,3\right)$,раскладывая определители Δ_1 и Δ_2по элементам третьего столбца, Δ_3-по первой строке:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}6&1&1\\3&-1&1\\4&2&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-1\\4&2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}6&1\\4&2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}6&1\\3&-1\end{vmatrix}=$$

$$=6+4-(12-4)-(-6-3)=10-8+9=11;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&6&1\\2&3&1\\3&4&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3\\3&4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&6\\3&4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&6\\2&3\end{vmatrix}=-1+14+9=22;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&1&6\\2&-1&3\\3&2&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&3\\2&4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&3\\3&4\end{vmatrix}+6\cdot\begin{vmatrix}2&-1\\3&2\end{vmatrix}=-10+1+42=33.$$

Итак, $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{11}{11}=1, x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{22}{11}=2, x_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}=\dfrac{33}{11}=3$

или в матричной форме $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.Проверку сделайте самостоятельно.

б) $\Delta=|A|=\begin{vmatrix}-6&-6&1\\-9&-12&5\\-15&-8&2\end{vmatrix}\overset{l_1-l_2}{=}\begin{vmatrix}0&-6&1\\3&-12&5\\-7&-8&2\end{vmatrix}=$

$$=-2\cdot\begin{vmatrix}0&3&1\\3&6&5\\-7&4&2\end{vmatrix}=-2\left(-3\begin{vmatrix}3&5\\-7&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&6\\-7&4\end{vmatrix}\right)=$$

$= -2(-3(6+35)+12+42) = -2(-123+54) =$
$= -2(-69) = 138 \neq 0$, СУ имеет единственное решение.
Найдем вспомогательные определители $\Delta_i\,(i=1,2,3)$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -6 & 1 \\ -12 & -12 & 5 \\ -18 & -8 & 2 \end{vmatrix} = (-6)\cdot(-2)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 12\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 12\cdot\left(-3\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= 12(-3(4-15)+8-18) = 12(33-10) = 12\cdot 23 = 276;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & 0 & 1 \\ -9 & -12 & 5 \\ -15 & -18 & 2 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-6)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 18\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 18\left(2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= 18(2(4-15)+9-10) = 18(-23) = -414;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -6 & -6 & 0 \\ -9 & -12 & -12 \\ -15 & -8 & -18 \end{vmatrix} \overset{l_1 - l_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & -6 & 0 \\ 3 & -12 & -12 \\ -7 & -8 & -18 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2)\cdot(-6)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \\ -7 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 12\cdot(-3)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -36(9+14) = -36\cdot 23 = -828.$$

Таким образом,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{276}{138} = 2; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-414}{138} = -3;\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-828}{138} = -6.$$

Проверку сделайте самостоятельно.

Матричный метод.

Применяется при тех же условиях, что и метод Крамера, то есть только для решения систем с невырожденной матрицей A. Метод основан на следующей теореме:

Теорема 5.2: если определитель основной матрицы системы (5.3) отличен от нуля $|A| \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое равенством

$$X = A^{-1} \cdot B \quad (5.5)$$

Доказательство.

Так как $|A| \neq 0$,то матрица A имеет обратную A^{-1}.Умножим обе части матричной формы записи системы $A \cdot X = B$ на матрицу A^{-1}слева, учитывая определение обратной матрицы $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ и то ,что умножение матрицы на единичную матрицу не меняет матрицу $E \cdot X = X$ имеем: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$,

$E \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$.Доказано.

Пример 5.3. Решить матричным методом систему уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 = -4 \\ 2x_1 + x_2 = -5. \end{cases}$

Решение.

Вычисляем определитель основной матрицы системы: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 \cdot (-1) = 3 \neq 0$, следовательно, система имеет единственное решение.

Найдем обратную матрицу A^{-1} по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^* = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}:$$

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 1 = 1;$ $\qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-1) = 1;$

$A_{12} = (-1)^{1+1} \cdot 2 = -2;$ $\qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1.$

Таким образом, $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

Найдем столбец неизвестных $X = A^{-1} \cdot B$:

$$X = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Таким образом, $\begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$.

Пример 5.4. Решить матричным методом систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9 \\ 7x_1 + 8x_2 = -6 \end{cases}$.

Решение.

Находим $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -21 + 48 = 27 \neq 0.$$

Находим A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*, \quad A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij},$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}5 & 6\\ 8 & 0\end{vmatrix}=-48;\qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 8 & 0\end{vmatrix}=24;\qquad A_{31}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-3;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}4 & 6\\ 7 & 0\end{vmatrix}=42;\qquad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 7 & 0\end{vmatrix}=-21;\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}=6;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}4 & 5\\ 7 & 8\end{vmatrix}=-3;\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 7 & 8\end{vmatrix}=6;\qquad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-3.$$

Итак, $A^{-1}=\dfrac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix}-48 & 24 & -3\\ 42 & -21 & 6\\ -3 & 6 & -3\end{pmatrix}$.

Найдем решения системы X :

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix}-48 & 24 & -3\\ 42 & -21 & 6\\ -3 & 6 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\ 9\\ -6\end{pmatrix}=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}-48\cdot 6+24\cdot 9+(-3)\cdot(-6)\\ 42\cdot 6+(-21)\cdot 9+6\cdot(-6)\\ (-3)\cdot 6+6\cdot 9+(-3)\cdot(-6)\end{pmatrix}=$$

$=\dfrac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix}-54\\ 27\\ 54\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$. Таким образом, $x_1=-2, x_2=1, x_3=2.$

Пример 5.5. Решить по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы (матричным методом) систему уравнений $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=6\\ 4x_1+5x_2+6x_3=15\\ 7x_1+8x_2+9x_3=24\end{cases}$.

Решение.

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&6\\8&9\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}4&6\\7&9\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix}=-3+12-9=0,$$

A^{-1}-не существует (матрица A вырождена).

Замечание: если главный определитель системы Δ и все вспомогательные определители Δ_{i} $(\mathrm{i}=1,2,\ldots,n)$ равны нулю, то система совместна и неопределенна (имеет бесчисленное множество решений), которые находятся методом Гаусса или Жордана-Гаусса. Если главный определитель системы $\Delta=0$, а хотя бы один вспомогательный определитель отличен от нуля, то система несовместна (не имеет решения).

Проверим имеет ли система из примера 5.5 решение. Для найдем вспомогательные определители Δ_{i} $(\mathrm{i}=1,2,3)$:

$\Delta_1=\begin{vmatrix}6&2&3\\15&5&6\\24&8&9\end{vmatrix}=0,$ первый и второй столбцы определителя пропорциональны;

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&6&3\\4&15&6\\7&24&9\end{vmatrix}=3\cdot3\cdot\begin{vmatrix}1&2&1\\4&5&2\\7&8&3\end{vmatrix}\begin{matrix}l_1-l_3\\l_2-2l_3\\ \end{matrix}=6\cdot\begin{vmatrix}0&0&1\\2&1&2\\4&2&3\end{vmatrix}=12\cdot\begin{vmatrix}0&0&1\\1&1&2\\2&2&3\end{vmatrix}=$$

$$=12\cdot\begin{vmatrix}1&1\\2&2\end{vmatrix}=0;$$

$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&2&6\\4&5&15\\7&8&24\end{vmatrix}=0$, так как второй и третий столбцы пропорциональны.

Итак, все вспомогательные определители Δ_i равны нулю, следовательно система совместна и неопределенна (имеет бесчисленное множество решений)- не может быть решена ни с помощью обратной матрицы ни по формулам Крамера, ее решение можно найти методом Гаусса либо Жордана-Гаусса(модифицированным методом Гаусса), которые мы рассмотрим чуть позже и вернемся к данному примеру.

5.3. Методы решения произвольных систем линейных алгебраических уравнений: метод Гаусса, метод Жордана-Гаусса.

Метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных).

Одним из наиболее универсальных методов решения и исследования систем линейных уравнений является метод Гаусса-метод последовательного исключения неизвестных, так как применяется для решения неоднородных и однородных систем с произвольным числом уравнений m и произвольным числом неизвестных n. Изложенные выше методы (метод Крамера, матричный метод) решения систем применимы только при $\Delta \neq 0$ и исключительно для квадратных матриц $m = n$, причем если $n > 3$ данные методы становятся очень громоздкими.

Сущность метода Гаусса состоит в том, что посредством последовательного исключения неизвестных данная система приводится к ступенчатой системе, равносильной данной. При практическом решении системы линейных уравнений данным методом удобнее приводить к ступенчатому виду не саму систему уравнений, а расширенную матрицу этой системы, выполняя элементарные преобразования над ее строками, элементарные преобразования не изменяют множество решений системы линейных алгебраических уравнений, которую представляет эта матрица. Последовательно получающиеся в ходе преобразования матрицы обычно соединяют знаком эквивалентности ~, далее по полученной ступенчатой матрице идет последовательное определение неизвестных.

Таким образом, процесс решения по методу Гаусса состоит из двух частей.

Первый этап (прямой ход метода Гаусса):

На первом этапе с помощью элементарных преобразований привести расширенную матрицу системы

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + \ldots + a_{nn}\cdot x_n = b_n \end{cases}$$

к ступенчатой форме (сначала обнуляются все элементы, стоящие ниже главной диагонали последовательно по столбцам, начиная с первого),то есть к виду

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \widetilde{a_{22}} & \ldots & \widetilde{a_{2n}} & \widetilde{b_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \widetilde{a_{mn}} & \widetilde{b_m} \end{array}\right).$$

Неизвестные соответствующие ведущим элементам $a_{11}, \widetilde{a_{22}}, \ldots, \widetilde{a_{mn}}$ называются **главными (базисными)**, остальные неизвестные(не базисные) называются **свободными**.

Затем находим ранги - основной A и расширенной $(A|B)$ матриц системы и применяем теорему Кронекера-

Капелли, которая дает ответ на вопрос о совместности системы.

Теорема 5.3. (Кронекера-Капелли):

Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы, то есть $r(A)=r(A|B)$.

При этом возможны три варианта:

1) если $r(A)=r(A|B)=n$, система совместна и определена (система имеет единственное решение), n - количество переменных системы;

2) если $r(A)=r(A|B)<n$, система совместна и не определена (имеет бесконечное множество решений);

Замечание: В случае, когда $r(A)\neq r(A|B)$, система несовместна (не имеет решения).

Второй этап (обратный ход метода Гаусса):

На данном этапе идет последовательное определение неизвестных: записываем систему соответствующую полученной ступенчатой матрице и последовательно выражая главные неизвестные через свободные, получим общее решение системы.

Придавая свободным неизвестным произвольные вещественные значения, получим какое-нибудь частное решение исходной системы.

Вернемся, к примеру 5.5. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6 \\ 4x_1+5x_2+6x_3=15 \\ 7x_1+8x_2+9x_3=24 \end{cases}$, система совместна и неопределенна, не может быть решена ни методом Крамера, ни с помощью обратной матрицы. Решим ее универсальным методом- методом Гаусса.

Применяем <u>прямой ход</u> метода Гаусса:

Выписываем расширенную матрицу $(A|B)$ данной системы, и приводим ее к ступенчатой форме при помощи элементарных преобразований (над строками):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \underline{1} & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \\ 7 & 8 & 9 & 24 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ c_2-4c_1 \\ c_3-7c_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 0 & -6 & -12 & -18 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ :(-3) \\ :(-6) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & \underline{1} & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ c_3-c_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \underline{1} & 2 & 3 & 6 \\ 0 & \underline{1} & 2 & 3 \end{array}\right),$$

$r(A)=r(A|B)=2<n=3$.По теореме Кронекера-Капелли система совместна и неопределенна, то есть имеет бесконечное множество решений.

Для нахождения этих решений применяем <u>обратный ход</u> метода Гаусса: записываем систему соответствующую приведенной матрице $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6 \\ x_2+2x_3=3 \end{cases}$ и выражаем x_1, x_2 главные неизвестные (неизвестные соответствующие ведущим элементам) через свободные (оставшиеся) неизвестные x_3 ,таким образом, получим: $\begin{cases} x_1=6-2x_2-3x_3 \\ x_2=3-2x_3 \end{cases}$;

$\begin{cases} x_1=6-2\cdot(3-2x_3)-3x_3 \\ x_2=3-2x_3 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1=x_3 \\ x_2=3-2x_3 \end{cases}$,обозначая независимую неизвестную через любое число

$x_3 = c = const$,получим $\begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = 3 - 2c \\ x_3 = c \end{cases}$ - общее решение системы, запишем его в матричной форме $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 3-2c \\ c \end{pmatrix}$.

Придавая свободному неизвестному x_3 любое числовое значение (удобнее нулевое), получим какое-нибудь частное решение, например $x_3 = 0$, тогда частное решение имеет вид $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 0 \end{cases}$,таких решений может быть бесконечно много.

Проверим правильно ли найдено общее решение, для этого подставим полученное частное решение в исходную систему $\begin{cases} 0+2\cdot 3+3\cdot 0 = 6 \\ 4\cdot 0+5\cdot 3+6\cdot 0 = 15 \\ 7\cdot 0+8\cdot 3+9\cdot 0 = 24 \end{cases}$,получили верное тождество (равенство), следовательно общее решение найдено правильно.

Пример 5.6. Исследовать систему на совместность и найти ее решение, если она совместна:

а) $\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ x+y-z=0 \\ 4x-y+5z=3 \end{cases}$;**б)** $\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 - x_3 = 0 \\ 9x_1 + 12x_2 - 5x_3 = 12; \\ 15x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 18 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3 \\ 6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7 \\ 9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13 \end{cases}$ **;г)** $\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3=0 \\ -x_2+x_3=1 \\ 3x_1+2x_3=1 \\ 3x_1+2x_2=4 \end{cases}$.

Решение.

а) <u>Прямой ход</u> -выписываем расширенную матрицу системы и приводим ее при помощи элементарных преобразований к ступенчатой форме:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right) \overset{c_1 \leftrightarrow c_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \underline{1} & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ c_2-3c_1 \\ c_3-4c_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \underline{-1} & 4 & 5 \\ 0 & -5 & 9 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ c_3-5c_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \underline{-11} & -22 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (-1)\cdot c_2 \\ \dfrac{c_3}{(-11)} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \underline{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \underline{1} & -4 & -5 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 2 \end{array}\right), r(A)=r(A|B)=3=n,$$

следовательно, система имеет единственное решение.

<u>Обратный ход</u>-выписываем систему, соответствующую ступенчатой матрице, и последовательно находим неизвестные:

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ y-4z=-5 \\ z=2 \end{cases}, \begin{cases} x+y-z=0 \\ y-4\cdot 2=-5 \\ z=2 \end{cases}, \begin{cases} x+y-z=0 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases}, \begin{cases} x=z-y \\ y=3 \\ z=2 \end{cases}; \begin{cases} x=2-3 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases}.$$

Таким образом, общее решение (единственное решение) имеет вид $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases}$ или в матричной форме $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Проверка: Подставив полученное решение в исходное уравнение имеем $\begin{cases} 3\cdot(-1)+2\cdot3+2=5 \\ -1+3-2=0 \\ 4\cdot(-1)-3+5\cdot2=3 \end{cases}$,получили верное равенство, следовательно общее решение найдено правильно.

б) Прямой ход:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & -1 & 0 \\ 9 & 12 & -5 & 12 \\ 15 & 8 & -2 & 18 \end{array}\right) \begin{array}{c} \sim \\ c_2 - 2c_1 \\ c_3 - c_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \underline{6} & 6 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 12 \\ 6 & -4 & 3 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{c} \sim \\ 2c_2 + c_1 \\ c_3 - c_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & 24 \\ 0 & -10 & 4 & 6 \end{array}\right) \underset{\frac{c_3}{2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & 24 \\ 0 & -5 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \sim \\ c_2 + c_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & \underline{1} & -5 & 27 \\ 0 & -5 & 2 & 3 \end{array}\right) \underset{c_3 + 5c_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 27 \\ 0 & 0 & -23 & 138 \end{array}\right)$$

$r(A) = r(A|B) = 3 = n$, следовательно, система имеет единственное решение.

Обратный ход:

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 - x_3 = 0 \; (1) \\ -x_2 - 5x_3 = 27 \quad (2) \\ -23x_3 = 138 \quad (3) \end{cases};$$

Из третьего уравнения получаем:

$$x_3 = -\frac{138}{23} = -6.$$

Подставляя $x_3 = -6$ во второе уравнение СУ $-x_2 - 5x_3 = 27$ имеем:

$$-x_2 - 5\cdot(-6) = 27,$$

$x_2 = 3.$

Подставляя $x_2 = 3,\ \ x_3 = -6$ в первое уравнение СУ $6x_1 + 6x_2 - x_3 = 0$ имеем:

$6x_1 + 6 \cdot 3 - (-6) = 0,$

$6x_1 = -24,$

$x_1 = -4.$

Таким образом,

$$X = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Проверку сделайте самостоятельно.

в) Прямой ход:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \underline{3} & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 13 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ c_2 - 2c_1 \\ c_3 - 3c_1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} \sim \\ \\ c_3 - 4c_2 \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{l_1 \leftrightarrow l_3}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} \underline{1} & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 1 \end{array}\right) \end{array},$$

$r(A) = r(A|B) = 2 < n = 4$-система совместна и неопределенна (имеет бесконечное множество решений).

Обратный ход:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_4 = 1 \end{cases},$$ главные неизвестные x_3, x_4 выражаем через свободные x_2, x_1 (оставшиеся), $$\begin{cases} x_3 = 3 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_4 \\ x_4 = 1 \end{cases}, \begin{cases} x_3 = 3 - 3x_1 - 4x_2 - 2 \cdot 1 \\ x_4 = 1 \end{cases},$$

$\begin{cases} x_3 = 1 - 3x_1 - 4x_2 \\ x_4 = 1 \end{cases}$,пусть $x_2 = c_2, x_1 = c_1$,тогда общее решение имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ x_3 = 1 - 3c_1 - 4c_2 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

или в матричной форме

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 1 - 3c_1 - 4c_2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Найдём какое-нибудь частное решение (придавая свободным неизвестным любое числовое значение, можно получить бесконечно много частных решений), для упрощения решения, положим $x_2 = 0, x_1 = 0$,

получим $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$ - частное решение.

<u>Проверка:</u> для того, чтобы проверить правильность решения, подставим полученное частное решение в исходную систему

имеем $\begin{cases} 3\cdot 0+4\cdot 0+1+2\cdot 1=3 \\ 6\cdot 0+8\cdot 0+2\cdot 1+5\cdot 1=7 \\ 9\cdot 0+12\cdot 0+3\cdot 1+10\cdot 1=13 \end{cases}$,получили верное равенство, следовательно общее решение найдено правильно.

в) <u>Прямой ход:</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \underline{3} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \sim \\ c_3-c_1 \\ c_4-c_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \underline{-1} & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \sim \\ c_3-c_2 \\ c_4+c_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \underline{3} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \underline{-1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{5} \end{array}\right),\ r(A)=2,\ r(A|B)=3,\ r(A)\neq r(A|B),$$ следовательно система несовместна (не имеет решения), поэтому обратный ход применять нет необходимости.

Действительно из последней строчки приведенной матрицы системы видно, что

$0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3=5, \quad 0=5$, противоречие!

Метод Жордана-Гаусса.

Метод Жордана -Гаусса называют методом полного исключения неизвестных. Метод является модификацией метода Гаусса. Если метод Гаусса осуществляется в два этапа (прямой ход и обратный) то метод Жордана -Гаусса позволяет решить систему в один этап, который заключается в том, что при помощи элементарных преобразований каждая главная (базисная) неизвестная исключается из всех уравнений, кроме одного, то есть не только из всех последующих уравнений, но и из всех предыдущих (расширенная матрица системы приводится к каноническому виду-к ступенчатой приведенной форме), что позволит нам найти общее решение системы(свободные неизвестные будут автоматически исключены из главных неизвестных) .

Алгоритм: (метода Жордана-Гаусса)

1)При помощи элементарных преобразований расширенную матрицу системы $\left(A|B\right)$ приводим к каноническому виду, далее исследуем систему на совместность находим ранги - основной A и расширенной $\left(A|B\right)$ матриц системы и применяем теорему Кронекера-Капелли:

а) если $r\left(A\right)=r\left(A|B\right)=n$, система совместна и определена (система имеет единственное решение), n - количество переменных системы;

б) если $r\left(A\right)=r\left(A|B\right)<n$, система совместна и неопределена (имеет бесконечное множество решений);

в) $r\left(A\right)\neq r\left(A|B\right)$, система несовместна (не имеет решения).

2)Выписываем систему, соответствующую приведенной ступенчатой матрице системы (в случае если система имеет единственное решение) и выражая главные неизвестные через свободные получим общее решение исходной системы.

В частности, в случае единственности решения $r\left(A\right)=r\left(A|B\right)=n$, матрица системы $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ приводится к единичному виду $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$,при этом расширенная матрица $(A|B)$ системы принимает вид $(E|B')=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1' \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_m' \end{array}\right)$.В итоге на месте столбца свободных членов B получим столбец решений исходной системы $X=B'=\begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ \dots \\ b_m' \end{pmatrix}$,то есть $x_1=b_1', x_2=b_2', \dots, x_m=b_m'$ (см. пример 5.7.а)).

Пример 5.7. Решить систему методом Жордана –Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6 \\ -2x_1-x_2+4x_3=8; \\ 3x_1+2x_2-x_3=4 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 6x_1-3x_2-3x_3-x_4=-9 \\ x_1+2x_2+2x_3+3x_4=1 \\ -7x_1+x_2+x_3-2x_4=8 \\ -3x_1+9x_2+9x_3+10x_4=12 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7. \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 1 \end{cases}$

Решение.

а) Выпишем расширенную матрицу системы $(A|B)$ и при помощи элементарных преобразований приведём к каноническому виду:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 1 & 1 & 6 \\ -2 & -1 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ c_2 + 2c_1 \\ c_3 - 3c_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & (1) & 6 & 20 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \end{array}\right) \begin{array}{c} c_1 - c_2 \\ \sim \\ c_3 + c_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -14 \\ 0 & (1) & 6 & 20 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{c} \sim \\ \\ \frac{c_3}{2} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -14 \\ 0 & 1 & 6 & 20 \\ 0 & 0 & (1) & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} c_1 + 5c_3 \\ c_2 - 6c_3 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) = (E|X),$$

$r(A) = r(A|B) = 3 = n$, система имеет единственное решение,

следовательно $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ -общее решение.

Проверку сделайте самостоятельно.

б)Поступая аналогично имеем:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -3 & -3 & -1 & -9 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ -7 & 1 & 1 & -2 & 8 \\ -3 & 9 & 9 & 10 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{c} c_1 \leftrightarrow c_2 \\ \sim \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} (1) & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 & -1 & -9 \\ -7 & 1 & 1 & -2 & 8 \\ -3 & 9 & 9 & 10 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ c_2 - 6c_1 \\ c_3 + 7c_1 \\ c_4 + 3c_1 \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & (-15) & -15 & -19 & -15 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \end{array}\right) \begin{array}{c} 15c_1+2c_2 \\ \sim \\ c_3+c_2 \\ c_4+c_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 15 & 0 & 0 & 7 & -15 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \frac{1}{15}\cdot c_1 \\ \left(-\frac{1}{15}\right)\cdot c_2 \\ \sim \end{array}$$

$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{15} & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{19}{15} & 1 \end{array}\right)$ - матрица имеет канонический вид, так как в первой и во второй строке выбран ведущий элемент(единица) и содержимое их столбцов обнулено. Итак, $r(A)=r(A|B)=2<n=4$, система совместна и неопределенна.

Выписываем систему, соответствующую приведенной ступенчатой матрице и находим общее решение учитывая, что x_1, x_2-главные неизвестные, x_3, x_4-свободные неизвестные:

$$\begin{cases} x_1-\frac{7}{15}x_4=-1 \\ x_2+x_3+\frac{19}{15}x_4=1 \end{cases}, \begin{cases} x_1=-1+\frac{7}{15}x_4 \\ x_2=1-x_3-\frac{19}{15}x_4 \end{cases}$$,пусть $x_3=c_1, x_4=c_2$,

тогда $\begin{cases} x_1 = -1 + \frac{7}{15}c_2 \\ x_2 = 1 - c_1 - \frac{19}{15}c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$-общее решение или в матричной форме $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + \dfrac{7}{15}c_2 \\ 1 - c_1 - \dfrac{19}{15}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

Положим $x_{3,4} = 0$,тогда $x_1 = -1, x_2 = 1$.

Следовательно, $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$- одно из частных решений исходной системы, проверку сделайте самостоятельно.

в) $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & 2 & -1 & 8 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 5 & -3 & 1 & -8 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} c_1 - c_3 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} (-1) & 0 & 1 & 7 & 7 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 5 & -3 & 1 & -8 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ c_2 + 3c_1 \\ c_3 + 5c_1 \end{array} \sim$

$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & -2 & 4 & 18 & 28 \\ 0 & -3 & 6 & 27 & 36 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-1)\cdot c_1 \\ \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot c_2 \\ \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot c_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -7 & -7 \\ 0 & (1) & -2 & -9 & -14 \\ 0 & 1 & -2 & -9 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ c_3 - c_2 \end{array} \sim$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -7 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & -9 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right), r(A)=2\neq r(A|B)=3,$$ система несовместна.

Пример 5.8. Решить систему $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+2x_4=1 \\ 2x_1+4x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+5x_3+2x_4=1 \end{cases}$ методом Гаусса и методом Жордана-Гаусса.

Решение.

<u>1способ (Метод Гаусса):</u>

<u>Прямой ход</u>-приводим расширенную матрицу к ступенчатой форме:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 2 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{c}\sim \\ c_2-2c_1 \\ c_3-c_1\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right)\underset{c_3\cdot\frac{1}{6}}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\underset{c_3\leftrightarrow c_2}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -2 \end{array}\right)\underset{c_3-3c_2}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -2 \end{array}\right)\underset{c_3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right), r(A)=r(A|B)=3<n=4,$$ система совместна и неопределенна.

<u>Обратный ход</u>- выписываем систему соответствующую приведенной матрице $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+2x_4=1 \\ x_3=0 \\ x_4=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ и выражаем главные неизвестные x_1, x_3, x_4 через свободный x_2: $\begin{cases} x_1+2x_2-0+2\cdot\dfrac{1}{2}=1 \\ x_3=0 \\ x_4=\dfrac{1}{2} \end{cases}$, $\begin{cases} x_1=-2x_2 \\ x_3=0 \\ x_4=0{,}5 \end{cases}$,пусть $x_2=c$,тогда $\begin{cases} x_1=-2c \\ x_2=c \\ x_3=0 \\ x_4=0{,}5 \end{cases}$ -общее решение или в матричной форме $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2c \\ c \\ 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$.

Положим $x_2=0$,тогда $x_1=0, x_3=0, x_4=0{,}5$.Следовательно,

$X=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$- частное решение исходной системы.

<u>Проверка:</u>

Для проверки подставим полученный вектор частного решения в заданную систему: $\begin{cases} 0+2\cdot0-0+2\cdot(-0{,}5)=1 \\ 2\cdot0+4\cdot0+0=0 \\ 0+2\cdot0+5\cdot0+2\cdot0{,}5=1 \end{cases}$,верно.

2 способ (Метод Жордана-Гаусса):

Делаем расширенную матрицу системы (при помощи элементарных преобразований) приведенной ступенчатой формы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ c_2-2c_1 \\ c_3-c_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right)_{c_3\cdot\frac{1}{6}} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)_{c_3\leftrightarrow c_2} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} c_1+c_2 \\ \sim \\ c_3-3c_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -2 \end{array}\right)_{c_3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{array}{c} c_1-2c_3 \\ \sim \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}5 \end{array}\right), r(A)=r(A|B)=3<n=4,$$ система совместна и неопределенна.

Записываем систему, соответствующую приведенной матрице и получаем выражение главных переменных

x_1, x_3, x_4 через свободный x_2: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0{,}5 \end{cases}$,

$\begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0{,}5 \end{cases}$,пусть $x_2 = c$, $\begin{cases} x_1 = -2c \\ x_2 = c \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0{,}5 \end{cases}$,тогда $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c \\ c \\ 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ - общее решение в матричной форме.

5.4. Однородные системы уравнений. Фундаментальная система решений.

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) называется **однородной**, если все свободные члены этой системы равны нулю. Таким образом, однородная система m уравнений с n неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = 0 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = 0. \end{cases} \quad (5.6)$$

Используя понятие произведения матриц, систему (5.6) можно записать в компактной матричной форме

$$A \cdot X = 0 \quad (5.7)$$

Однородная система линейных уравнений всегда совместна, так как имеет решение, состоящее из нулей $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, которое называется **тривиальным.** Действительно, добавление столбца из нулей в расширенную матрицу системы не может повысить ее ранг, то есть $r(A)=r(A|B)$.

Поэтому в дальнейшем в ОСУ положим $r(A)=r(A|B)=r$.

Например, система уравнений $\begin{cases} x_1-2x_2-3x_3=0 \\ -2x_1+4x_2+6x_3=0 \end{cases}$ является однородной, так как все свободные члены этой системы (то есть числа, стоящие в правых частях равенств) состоят из нулей. Система является совместной, так как, например набор $x_1=-1, x_2=1, x_3=-1$ является решением системы.

Действительно, подставив $x_1=-1, x_2=1, x_3=-1$ в исходную систему убеждаемся в этом: $\begin{cases} -1-2\cdot1-3\cdot(-1)=0 \\ -2\cdot(-1)+4\cdot1+6\cdot(-1)=0 \end{cases}$,

но система имеет также нулевое решение $x_1=0, x_2=0, x_3=0$, $\begin{cases} 0-2\cdot0-3\cdot0=0 \\ -2\cdot0+4\cdot0+6\cdot0=0 \end{cases}$,следовательно эта система является совместной и неопределенной (имеет бесконечное множество решений).

Таким образом, существует только два варианта решения однородных систем:1) она может быть совместной и определенной- иметь единственное (нулевое) решение; 2) может быть совместной и неопределенной система – иметь бесконечно много решений. Условия, при которых однородная система является определенной или неопределенной, дает следующая теорема.

Теорема 5.4: Для того чтобы ОС n линейных уравнений с n неизвестными имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы A был меньше числа неизвестных, то есть $r<n$.

Доказательство.

Так как ранг не может превосходить размера матрицы, то, очевидно, $r \le n$.

Пусть $r = n$,тогда один из миноров размера $n \times n$ отличен от нуля, то есть $\Delta = |A| \ne 0$.Поэтому по формулам Крамера система имеет единственное нулевое решение (при подстановке в Δ нулевого столбца свободных членов, вспомогательные определители $\Delta_i = 0$) ,то есть

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = 0,\ i = 1, 2, \ldots, \mathrm{n},\ ,\Delta = |A| \ne 0$$.Следовательно, других, кроме тривиальных (нулевых), решений нет.

Пусть $r < n$, то однородная система является совместной и неопределенной (по теореме Кронекера-Капелли $r(A) = r(A|B) = r < n$), следовательно она имеет бесчисленное множество решений, в том числе и нетривиальных.

Следствие. Система n линейных однородных уравнений с n неизвестными, тогда и только тогда имеет ненулевое решения, когда определитель этой системы равен нулю $|A| = 0$.

Доказательство.

Если система имеет ненулевые решения, то $|A| = 0$,так как при $|A| \ne 0$ система имеет только единственное, нулевое решение. Если же $|A| = 0$,то $r < n$ и следовательно система имеет бесконечное множество решений.

Теорема 5.5: Если $X_1, X_2, \ldots, X_k$ — решения однородной системы n линейных уравнений с n неизвестными, то всякая линейная комбинация

$$X = c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2 + \ldots + c_k \cdot X_k \text{ (5.8)},$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — произвольные числа, также будет решением этой системы.

Доказательство.

Согласно следствию теоремы5.4., $AX_1 = 0, AX_2 = 0, \ldots, AX_n = 0$, с учетом свойств операций над матрицами имеем $A \cdot X = A \cdot (c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2 + \ldots + c_n \cdot X_n) = c_1 AX_1 + c_2 AX_2 + \ldots$

$\ldots + c_n AX_n = 0$, что и требовалось доказать.

Замечание: По сути, однородные системы линейных алгебраических уравнений – это всего лишь частный случай неоднородной системы линейных уравнений, поэтому вся терминология (главные, свободные переменные и так далее) остаётся в силе.

На практике однородную систему решаем аналогично неоднородной, необходимо записать матрицу системы и с помощью элементарных преобразований привести её к ступенчатому виду, при этом записывать вертикальную черту и нулевой столбец свободных членов нет необходимости, так как какие бы мы операции с нулевыми элементами мы не совершали, они так и останутся нулями. При этом, если $r = n$-однородная система имеет только нулевое решение, если $r < n$- система имеет ненулевое решение.

Пример 5.9. Показать, что однородная система линейных уравнений имеет только нулевое решение

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Решение.

Покажем, что однородная система линейных уравнений имеет нулевое решение, сделаем это двумя способами.

1 способ: (метод Гаусса)

Для того чтобы однородная система имела только нулевое решение необходимо, чтобы $r = n$,покажем это:

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ c_2 - 3c_1 \\ c_3 - 4c_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & \underline{-1} & 4 \\ 0 & -5 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \sim \\ c_3 - 5c_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & -1 \\ 0 & \underline{-1} & 4 \\ 0 & 0 & \underline{1} \end{pmatrix}, r = n = 3$$

, система имеет только нулевое решение.

В этом легко убедиться применяя обратный ход метода Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 4 \cdot 0 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0. \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Итак, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2 способ:(основан на следствии теоремы 5.4.)

Из следствия теоремы 5.4, известно, что однородная система имеет ненулевое решения, когда определитель основной матрицы этой системы равен нулю $|A| = 0$,иначе , то есть если $|A| \neq 0$ она имеет нулевые решения, покажем это:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ c_2 - 3c_1 \\ c_3 - 4c_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 9 \end{vmatrix} = -9 + 20 = 11 \neq 0$$

, главный определитель системы отличен от нуля. Таким образом, однородная система линейных уравнений имеет только тривиальное решение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Пример 5.10. Найти решения однородной системы линейных уравнений $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ методом Гаусса.

Решение.

<u>Прямой ход:</u>

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \overset{c_1 \leftrightarrow c_3}{\sim} \begin{pmatrix} \underline{1} & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ c_2 + c_1 \\ c_3 - 4c_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$\sim \begin{pmatrix} \underline{1} & -2 & 2 \\ 0 & \underline{11} & -4 \end{pmatrix}$, $r = 2 < n = 3$ система имеет ненулевые решения.

<u>Обратный ход</u>-найдем решение системы выражая главные неизвестные x_1, x_2 через свободный x_3:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 11x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_1 - 2 \cdot \frac{4}{11} x_3 + 2x_3 = 0 \\ x_2 = \frac{4}{11} x_3 \end{cases}, \begin{cases} x_1 = -\frac{14}{11} x_3 \\ x_2 = \frac{4}{11} x_3 \end{cases}$$,пусть

$x_3 = c$, $\begin{cases} x_1 = -\frac{14}{11} c \\ x_2 = \frac{4}{11} c \\ x_3 = c \end{cases}$, ,тогда $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{14}{11} c \\ \frac{4}{11} c \\ c \end{pmatrix}$ - общего решение (матричная форма).

Найдём какое-нибудь частное решении для этого придадим x_3 любое числовое значение, за исключением нуля (однородная система всегда имеет нулевое решение), пусть $x_3=11$, тогда $x_1=-14$, $x_2=4$, $x_3=11$. Следовательно, $X=\begin{pmatrix}-14\\4\\11\end{pmatrix}$ - частное решение исходной системы.

Проверка: Подставляя частное решение в левую часть каждого уравнения исходной системы получим $\begin{cases}4\cdot(-14)+3\cdot4+4\cdot11=0\\-(-14)+2\cdot4-2\cdot11=0\\-14-2\cdot4+2\cdot11=0.\end{cases}$ верное тождество при всех подстановках.

Замечание: для однородных системы так же, как и для исследования неоднородных систем можно использовать метод полного исключения неизвестных-метод Жордана-Гаусса, применение данного метода чаще всего оправдано, поскольку обратный ход метода Гаусса обычно требует трудоёмких и неприятных вычислений.

Пример 5.11. Найти общее решение системы $\begin{cases}-x_1+4x_2+x_3-5x_4=0\\x_1+5x_2+5x_3-4x_4=0\\3x_2+2x_3-3x_4=0\\2x_1+x_2+4x_3+x_4=0\end{cases}$ методом Гаусса и методом Жордана-Гаусса.

Решение.

1 способ (Метод Гаусса):

Прямой ход-приводим матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{matrix}\underline{-1} & 4 & 1 & -5\\ 1 & 5 & 5 & -4\\ 0 & 3 & 2 & -3\\ 2 & 1 & 4 & 1\end{matrix}\right)\begin{matrix} \\ c_2+c_1\\ \sim\\ c_4+2c_1\end{matrix}\left(\begin{matrix}-1 & 4 & 1 & -5\\ 0 & 9 & 6 & -9\\ 0 & 3 & 2 & -3\\ 0 & 9 & 6 & -9\end{matrix}\right)\begin{matrix} \\ \frac{1}{3}\cdot c_1\\ \sim\\ \frac{1}{3}\cdot c_4\end{matrix}\left(\begin{matrix}-1 & 4 & 1 & -5\\ 0 & \underline{3} & 2 & -3\\ 0 & 3 & 2 & -3\\ 0 & 3 & 2 & -3\end{matrix}\right)\begin{matrix} \\ \sim\\ c_3-c_2\\ c_4-c_2\end{matrix}$$

$$\sim\left(\begin{matrix}-1 & 4 & 1 & -5\\ 0 & 3 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{matrix}\right)\sim\left(\begin{matrix}\underline{-1} & 4 & 1 & -5\\ 0 & \underline{3} & 2 & -3\end{matrix}\right),$$

$r = 2 < n = 4$, система имеет ненулевое решение, найдем его применяя обратный ход метода Гаусса.

Обратный ход- выписываем систему, соответствующую ступенчатой матрице $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + x_3 - 5x_4 = 0\\ 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0\end{cases}$ и выражая главные неизвестные x_1, x_2 через свободные x_3, x_4 получим общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = 4x_2 + x_3 - 5x_4\\ x_2 = -\frac{2}{3}x_3 + x_4\end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = 4\cdot\left(-\frac{2}{3}x_3 + x_4\right) + x_3 - 5x_4\\ x_2 = -\frac{2}{3}x_3 + x_4\end{cases},$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{5}{3}x_3 - x_4 \\ x_2 = -\frac{2}{3}x_3 + x_4 \end{cases}$$,полагая $x_3 = c_1, x_4 = c_2$ имеем

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{5}{3}c_1 - c_2 \\ x_2 = -\frac{2}{3}c_1 + c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$ -общее решение;

2 способ (Жордана-Гаусса):

Выписываем матрицу системы и при помощи элементарных преобразований строк приводим её к каноническому виду:

$$\begin{pmatrix} (-1) & 4 & 1 & -5 \\ 1 & 5 & 5 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ c_2 + c_1 \\ \sim \\ c_4 + 2c_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 & -5 \\ 0 & (9) & 6 & -9 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 9 & 6 & -9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \frac{1}{3}\cdot c_1 \\ \sim \\ \frac{1}{3}\cdot c_4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 & -5 \\ 0 & (3) & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3c_1 - 4c_2 \\ \sim \\ c_3 - c_2 \\ c_4 - c_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \frac{c_1}{(-3)} \\ \frac{c_2}{3} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{3} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix},$$

$r = 2 < n = 4$ -система совместна и неопределенна, выписываем систему, соответствующую приведенной матрицы и выражая главные неизвестные x_1, x_2 (соответствующие ведущим элементам) через свободные x_3, x_4 находим общее решение:

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{5}{3}x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + \dfrac{2}{3}x_3 - x_4 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_1 = -\dfrac{5}{3}x_3 - x_4 \\ x_2 = -\dfrac{2}{3}x_3 + x_4 \end{cases}$$,пусть $x_3 = c_1, x_4 = c_2$,

тогда $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{5}{3}c_1 - c_2 \\ x_2 = -\dfrac{2}{3}c_1 + c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$ -общее решение

или в матричной форме $X = \begin{pmatrix} -\dfrac{5}{3}c_1 - c_2 \\ -\dfrac{2}{3}c_1 + c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

Замечание: сравнивая два метода заметим ,что метод Жордана-Гаусса позволяет избежать неприятных вычислений возникающих при применении обратного хода метода Гаусса (выражение главных неизвестных через свободные), поэтому в дальнейшем для исследования систем будем использовать именно его.

Пример 5.12. Найти общее решение системы уравнений $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$ применяя метод Жордана-Гаусса.

Решение.

Применяя метод Жордана-Гаусса, найдем общее решение данной системы:

$$\begin{pmatrix} (1) & -3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ c_2 - 2c_1 \\ c_3 - c_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & (1) \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_1 - c_2 \\ \sim \\ c_3 - c_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -8 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & (1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -8 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{l_2 \leftrightarrow l_4}{\sim} \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \end{array},$$

$r = 2 < n = 4$, система имеет ненулевое решение, найдем его выражая x_1, x_4 -главные неизвестные через $x_2 = c_1, x_3 = c_2$ -свободные переменные:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - 8x_2 = 0 \\ x_4 + 5x_2 = 0 \end{cases},$$

$\begin{cases} x_1 = x_3 + 8x_2 \\ x_4 = -5x_2 \end{cases}$, $x_2 = c_1, x_3 = c_2$, тогда $\begin{cases} x_1 = c_2 + 8c_1 \\ x_4 = -5c_1 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_2 \end{cases}$ -общее решение или в матричном форме $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8c_1 + c_2 \\ c_1 \\ c_2 \\ -5c_1 \end{pmatrix}$.

5.5.Фундаментальная система решений.

Пусть общее решение системы
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

записано в виде $X = \begin{pmatrix} x_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}) \\ \vdots \\ x_r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}) \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-r} \end{pmatrix}$

где $x_1, x_2, \ldots, x_r$ -главные неизвестные, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}$ - значение свободных перемен-
ных $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$.Выберем $n-r$ решений систе-

мы (5.6),полученных из общего решения следующим образом: одно из значений свободных неизвестных переменных полагается равным 1,а остальные равными нулю, то есть $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{n-r} = 0; \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = \ldots = \alpha_{n-r} = 0;$ $\ldots\ldots; \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-r-1} = 0, \alpha_{n-r} = 1.$ Таким образом, решения системы выглядят так:

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1(1,0,\ldots,0) \\ \vdots \\ x_r(1,0,\ldots,0) \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} x_1(0,1,\ldots,0) \\ \vdots \\ x_r(0,1,\ldots,0) \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, X_{n-r} = \begin{pmatrix} x_1(0,0,\ldots,1) \\ \vdots \\ x_r(0,0,\ldots,1) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Эти решения образуют **нормальную фундаментальную систему решений** однородной системы (5.6).

Если общее решение однородной системы (5.6) представимо в виде линейной комбинации $X = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_{n-r}X_{n-r}$,то говорят, что набор из $n - r$ решений системы $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ образует **фундаментальную систему решений (ФСР),**

Фундаментальную систему решений обозначают: $X_1, X_2, \ldots, X_k$, $k = n - r$ -количество векторов в фундаментальной системе решений, n - количества неизвестных , r - ранг основной матрицы системы.

Общее решение однородной системы обозначают: $X = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_kX_k$.

Например, если вернуться, к примеру 5.12 и представить его общее решение в виде линейной комбинации $X=\begin{pmatrix}8c_1+c_2\\ c_1\\ c_2\\ -5c_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8c_1\\ c_1\\ 0\\ -5c_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_2\\ 0\\ c_2\\ 0\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}8\\ 1\\ 0\\ -5\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$, заметим, что ФСР составляют два частных решения $X_1=\begin{pmatrix}8\\ 1\\ 0\\ -5\end{pmatrix}, X_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$.

Алгоритм нахождения ФСР (фундаментальной системы решений):

1) Записываем основную матрицу системы A и делаем ее приведенной формы (ступенчатой формы) применяя метод Жордана-Гаусса (Гаусса): $A\overset{э.п.}{\sim}A'$;

2) Находим размерность пространства решений системы:

а) Если $\mathrm{r}=\mathrm{n}$,то система имеет единственное решение-нулевое (фундаментальных решений нет);

б) Если $\mathrm{r}<\mathrm{n}$,то фундаментальная система решений состоит из $\mathrm{k}=\mathrm{n}-\mathrm{r}$ линейно-независимых решений (количества свободных неизвестных);

3) Записываем систему с приведенной матрицей и r базисных переменных выражаем через $\mathrm{k}=\mathrm{n}-\mathrm{r}$ свободных переменных. Поочередно придаем $\mathrm{k}=\mathrm{n}-\mathrm{r}$ свободным неизвестным значения единицы, остальные нули, для каждого набора решаем систему уравнений и находим соответствующие значения главных (базисных) неизвестных, объединяя значения для свободных и базисных переменных, получаем ФСР. Записываем ФСР $X_1, X_2, \dots, X_k$ и общее решение системы $X = c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2 + \dots + c_k \cdot X_k$.

Пример 5.13. Найти ФСР и общее решение системы:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$; **б)** $\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_5 - x_6 = 0 \end{cases}$.

Решение.

а) Выписываем матрицу системы и применяя метод Жордана-Гаусса делаем ее приведенной формы:

$$\begin{pmatrix} (1) & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ c_2 + c_1 \\ c_3 - c_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & (1) \end{pmatrix} \begin{matrix} c_1 - c_3 \\ c_2 + 2c_3 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$r = 2 < n = 3$-система имеет ненулевое решение, ФСР состоит из одного вектора, так как $k = n - r = 3 - 2 = 1$;

Записываем систему, соответствующую приведенной матрице и главные неизвестные x_1, x_3 выражаем через свободный x_2: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ -общее решение.

Для нахождения ФСР составляем таблицу, количество столбцов которой соответствует количеству неизвестных (для рассматриваемого примера их 3), а количество строк равно количеству решений ФСР (количеству свободных неизвестных), заполняем таблицу придавая свободным неизвестным поочередно значения единицы, остальные нули, так как свободный неизвестный единственный, то получим один вариант $x_2 = 1$,подставляя значение свободного неизвестного в общее решение находим значение главных переменных $x_1 = -2$, $x_3 = 0$. Вычисления занесем в таблицу:

X	x_1	x_2	x_3
X_1	-2	1	0

Итак, фундаментальную систему составляет одно частное решения: $X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Как известно (см. теорему 5.5), общее решение является линейной комбинацией частных решений. Таким образом, пространство решений однородной системы уравнений имеет вид: $X = c_1 \cdot X_1 = c_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

б) Выписываем матрицу системы и применяя метод Жордана-Гаусса:

$$\begin{pmatrix} (1) & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ \\ c_3 - c_1 \\ c_4 - 2c_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & (1) & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ \\ c_3 + c_2 \\ c_4 + c_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$r = 2 < n = 6$-система имеет ненулевое решение, ФСР состоит из $\mathrm{k} = \mathrm{n} - \mathrm{r} = 6 - 2 = 4$ векторов;

Записываем систему, соответствующую канонической матрице:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_6 = 0 \end{cases};$$

После чего главные неизвестные x_1, x_2 выражаем через свободные x_3, x_4, x_5, x_6 : $\begin{cases} x_1 = -x_3 - x_5 \\ x_2 = -x_3 - x_6 \end{cases}$ -общее решение.

Для нахождения ФСР составляем таблицу, количество столбцов которой соответствует количеству неизвестных (для рассматриваемого примера их шесть), а количество строк равно количеству решений ФСР(количеству свободных неизвестных –их четыре), заполняем таблицу придавая свободным неизвестным $x_{3,4,5,6} = c_{1,2,3,4}$ поочередно значения единицы, остальные нули, получим следующие варианты $(x_3; x_4; x_5; x_6)$-$(1;0;0;0), (0;1;0;0), (0;0;1;0), (0;0;0;1)$,подставляя данные значения свободных неизвестных в общее решение находим значение базисных переменных:

X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
X_1	-1	-1	1	0	0	0
X_2	0	0	0	1	0	0
X_3	-1	0	0	0	1	0
X_4	0	-1	0	0	0	1

Итак, фундаментальную систему составляют четыре частных решения:

$$X_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ X_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ X_4=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Общее решение является линейной комбинацией частных решений. Таким образом, пространство решений однородной системы имеет вид:

$$X=c_1\cdot X_1+c_2\cdot X_2+c_3\cdot X_3+c_4\cdot X_4=c_1\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+$$

$$+c_3\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+c_4\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-c_1-c_3\\-c_1-c_4\\c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{pmatrix}.$$

5.6.Взаимосвязь решений неоднородной и соответствующей однородной системы уравнений.

Пусть дана некоторая неоднородная система линейных уравнений $A\cdot X=B$ и соответствующая ей однородная система $A\cdot X=0$. Нетрудно предположить, что если системы отличаются лишь столбцом свободных членов, то между их решениями должна существовать тесная связь, разберемся какая. Для этого рассмотрим следующую теорему.

Теорема 5.7: если $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ -ФСР однородной системы, а $X_{ч.н.}$ -некоторое частное решение неоднородной системы (5.1), то общее решение неоднородной системы имеет вид

$$X = X_{ч.н.} + X_0 = X_{ч.н.} + c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2 + \ldots + c_{n-r} \cdot X_{n-r} \quad (5.9)$$

Доказательство.

Пусть $X_0 = c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2 + \ldots + c_{n-r} \cdot X_{n-r}$ является общим решением однородной системы $AX_0 = 0$ (1). Обозначим символическим через $X_{ч.н.}$ -частное решение неоднородной системы $AX_{ч.н.} = B$ (2). Складывая тождества (1) и (2), получаем тождество $AX_0 + AX_{ч.н.} = B$, $A(X_0 + X_{ч.н.}) = B$, справедливое при любых значениях свободных параметров, входящих в общее решение X_0. Следовательно, матрица $X = X_0 + X_{ч.н.}$ является общим решением неоднородной системы уравнений.

Пример 5.14. Найти общее решение неоднородной системы уравнений $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1 \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = 1 \end{cases}$, используя ФСР, соответствующей однородной.

Решение.

Применяем метод Жордана-Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -10 & 5 & -5 & 7 & 1 \\ 2 & -14 & 7 & -7 & 11 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} c_1 \leftrightarrow c_2 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} (1) & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -10 & 5 & -5 & 7 & 1 \\ 2 & -14 & 7 & -7 & 11 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ c_2 - 2c_1 \\ c_3 - 4c_1 \\ c_4 - 2c_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & -18 & 9 & -9 & 15 & -3 \\ 0 & -18 & 9 & -9 & 15 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \frac{1}{3} \cdot c_3 \\ \frac{1}{3} \cdot c_4 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & (-6) & 3 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & -6 & 3 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & -6 & 3 & -3 & 5 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} 6c_1 + 2c_2 \\ \sim \\ c_3 - c_2 \\ c_4 - c_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & -6 & 3 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \frac{c_1}{6} \\ \frac{c_2}{(-6)} \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right),$$

$r(A) = r(A|B) = 2 < n = 5$ -система имеет ненулевое решение. Находим общее решение неоднородной системы уравнений: $\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_5 \\ x_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{5}{6}x_5 \end{cases}$, найдем ее какое-нибудь частное решение ,например, пусть $x_{3,4,5}=0$, $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=\frac{1}{6}$.Таким образом,

$$X_{ч.н.}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ -частное решение неоднородной системы .

Найдем ФСР соответствующей однородной системы, для этого в приведенной матрице системы столбец свободных членов заменяем нулевым вектором:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}, \begin{cases} x_1=\frac{1}{3}x_5 \\ x_2=\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4+\frac{5}{6}x_5 \end{cases}$$ -общее решение однородной системы, система имеет три свободных неизвестных $x_{3,4,5}=c_{1,2,3}$,следовательно ФСР состоит из трех векторов $k=n-r=5-2=3$, полагая ($x_3;x_4;x_5$) равными $(1;0;0),(0;1;0),(0;0;1)$ имеем:

X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
X_1	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0
X_2	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0

X_3	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$	0	0	1

Пространство решений однородной системы имеет вид:

$$X = c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2 + c_3 \cdot X_3 = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ c_3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}c_3 \\ \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{2}c_2 + \frac{5}{6}c_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Общее решение неоднородной системы уравнений имеет вид:

$$X = X_{ч.н.} + c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2 + c_3 \cdot X_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}c_3 \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{2}c_2 + \frac{5}{6}c_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

5.7. Матричные уравнения и методы их решения .

Простейшими матричными уравнениями называются соотношения вида: $A\cdot X=B$ -правостороннее матричное уравнение; $X\cdot A=B$- левостороннее матричное уравнение; $A\cdot X\cdot B=C$, где A, B, C - известные матрицы, X – столбец-неизвестных.
Такие уравнения сводятся к нескольким системам линейных уравнений (число систем равно числу столбцов матрицы B) с одинаковой основной матрицей. Удобно решать все системы одновременно, с помощью метода Жордана – Гаусса (это значительно упрощает решение). Если по крайней мере одна система оказывается несовместной, то матричное уравнение не имеет решения. Если все системы совместны и по крайней мере одна из них неопределенная, то матричное уравнение имеет бесконечно много решений. Если все системы определенные, то матричное уравнение имеет единственное решение.

Матричные уравнения вида AX=B.

Если дано уравнение вида

$$A\cdot X=B \quad (5.10)$$

, где A,B— квадратные матрицы порядка n,то решение выглядит так

$$X=A^{-1}\cdot B \quad (5.11)$$

Действительно умножив обе части уравнения (5.10) слева на матрицу A^{-1} и используя свойства действий над матрицами, получим:

$$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B,\ E\cdot X=A^{-1}\cdot B\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B.$$

Предположим теперь, что нам требуется решить сразу две системы вида (5.10) с одной основной матрицей A:

$A\cdot X_1 = B_1, A\cdot X_2 = B_2,$ где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots. & \ldots. \ldots \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \ldots \\ b_{n1} \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \ldots \\ b_{n2} \end{pmatrix}, X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \ldots \\ x_{n1} \end{pmatrix}$$

, $X_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}$.Понятно, что решение каждой из них можно найти по формуле $X = A^{-1}\cdot B$, однако две системы $A\cdot X_1 = B_1$, $A\cdot X_2 = B_2$ удобно записать одним матричным уравнением вида $A\cdot X = B$(чтобы упростить решение), если ввести двухстолбцовые матрицы: $X = X_1 X_2 = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ \ldots & \ldots \\ x_{n1} & x_{n2} \end{pmatrix}$,

$B = B_1 B_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} \end{pmatrix}$. В этом случае оба решения X_1, X_2 найдутся сразу по формуле $X = A^{-1}\cdot B$, где матрицы X и B будут определяться соответствующими двухстолбцовыми матрицами.

Замечание: если вместо двух систем $A\cdot X_1 = B_1$, $A\cdot X_2 = B_2$, рассматривается m систем $A\cdot X_1 = B_1, A\cdot X_2 = B_2, \ldots, A\cdot X_m = B_m$ с одной матрицей A, поступаем аналогично, то есть объединяем матричным уравнением $A\cdot X = B$,решение которого также будет определяться равенством $X = A^{-1}\cdot B$.

Пример 5.15. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot X + 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 5\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и сделать проверку.

Решение.

В соответствии с определением операций над матрицами приведем данное уравнение к виду $A\cdot X = B$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot X = \begin{pmatrix} 15 & -5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot X = \begin{pmatrix} 13 & -3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$, получили уравнение вида

$A_{2\times 2}\cdot X = B_{2\times 2}$,где $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 13 & -3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$- известные

матрицы.

Матрицу неизвестных X в соответствии с определением

операции произведения матриц будем искать в ви-

де $X_{2\times 2} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$,отсюда

$$A\cdot X=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11}-2x_{21} & x_{12}-2x_{22}\\ x_{11}+2x_{21} & x_{12}+2x_{22}\end{pmatrix}=B=\begin{pmatrix}13 & -3\\ 3 & 8\end{pmatrix},$$

используя понятие равенства матриц получим две системы $\begin{cases}x_{11}-2x_{21}=13\\ x_{11}+2x_{21}=3\end{cases}$, $\begin{cases}x_{12}-2x_{22}=-3\\ x_{12}+2x_{22}=8\end{cases}$, с расширенными матрицами соответственно $\left(\begin{array}{cc|c}1 & -2 & 13\\ 1 & 2 & 3\end{array}\right)$ и $\left(\begin{array}{cc|c}1 & -2 & -3\\ 1 & 2 & 8\end{array}\right)$,поскольку основные матрицы систем совпадают рациональнее объединять их решение , таким образом получим расширенную матрицу $(A|B)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -2 & 13 & -3\\ 1 & 2 & 3 & 8\end{array}\right)$ исходной системы , так как $|A|=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2+2=4\neq 0,$ следовательно существует единственное решение, по формуле $X=A^{-1}\cdot B$, где $A^{-1}:(A|E)\sim(E|A^{-1})$.

Чтобы воспользоваться формулой найдём A^{-1} :

$$(A|E)=\left(\begin{array}{cc|cc}(1) & -2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{matrix}\sim\\ c_2-c_1\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 4 & -1 & 1\end{array}\right)\frac{c_2}{4}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & (1) & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{array}\right)\begin{matrix}c_1+2c_2\\ \sim\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{array}\right)=(E|A^{-1}),$$

то есть $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Вычисляем искомую матрицу X умножая обратную матрицу A^{-1} на матрицу свободных членов B:

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 13 & -3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{13}{2}+\frac{3}{2} & -\frac{3}{2}+4 \\ -\frac{13}{4}+\frac{3}{4} & \frac{3}{4}+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & \frac{5}{2} \\ -\frac{10}{4} & \frac{11}{4} \end{pmatrix}$$

Замечание: формула $X=A^{-1}\cdot B$ применим только в случае единственности решения, то есть, когда $|A|\neq 0$.

Рассмотрим метод Жордана-Гаусса- универсальный способ решения матричных уравнений $A\cdot X=B$,который работает в любом случае, даже если определитель основной матрицы равен нулю $|A|=0$ (матрица системы A вырожденная) или если матрица A не квадратная (известно, что обратная матрица существует только для квадратных матриц).

Метод Жордана-Гаусса решения матричных уравнений $A\cdot X=B$ заключается в следующем- выписываем расширенную матрицу системы и применяя метод Жордана-Гаусса приводим матрицу A к приведенному виду (к единичному виду в случае единственности решения), при этом справа получим искомую матрицу X, кратко данный алгоритм можно записать так $X: \left(A|B\right) \overset{\text{э.п.}}{\sim} \left(E|X\right)$.

Решим данным способом преобразованное матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 13 & -3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$, из примера 5.15:

$$(A|B) = \left(\begin{matrix} (1) & -2 \\ 1 & 2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 13 & -3 \\ 3 & 8 \end{matrix}\right) \underset{c_2 - c_1}{\sim} \left(\begin{matrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 13 & -3 \\ -10 & 11 \end{matrix}\right) \underset{\frac{c_2}{4}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{matrix} 1 & -2 \\ 0 & (1) \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 13 & -3 \\ -\frac{5}{2} & \frac{11}{4} \end{matrix}\right) \underset{\sim}{c_1 + 2c_2} \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 8 & \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{11}{4} \end{matrix}\right) = (E|X),$$

следовательно,

$$X = \begin{pmatrix} 8 & \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{11}{4} \end{pmatrix};$$

<u>Проверка</u>: подставим полученное решение в исходное уравнение

$$A\cdot X=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8 & \frac{5}{2}\\ -\frac{5}{2} & \frac{11}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8+5 & \frac{5}{2}-\frac{11}{2}\\ 8-5 & \frac{5}{2}+\frac{11}{2}\end{pmatrix}=$$

$=\begin{pmatrix}13 & -3\\ 3 & 8\end{pmatrix}=B$, следовательно, матрица X найдена верно.

Пример 5.16. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 8\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 6 & 5\end{pmatrix}$.

Решение.

Так как определитель основной матрицы $|A|=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 8\end{vmatrix}=8-8=0,$ решение не единственно(матрицы A^{-1} -не существует), поэтому для ее решения применяем метод Жордана-Гаусса, то есть её решение $X=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}$ находим по формуле $(A|B)\overset{\text{э.п.}}{\sim}(E|X)$.

Из исходного уравнения $A\cdot X=B$,

$\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 6 & 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_{11}+4x_{21} & x_{12}+4x_{22}\\ 2x_{11}+8x_{21} & 2x_{12}+8x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 6 & 5\end{pmatrix}$, получим две системы уравнения: $\begin{cases}x_{11}+4x_{21}=3\\ 2x_{11}+8x_{21}=6\end{cases}$, $\begin{cases}x_{12}+4x_{22}=2\\ 2x_{12}+8x_{22}=5\end{cases}$

и их расширенные матрицы $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 5 \end{array}\right)$, объединения матрицы получим матрицу $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 6 & 5 \end{array}\right)$ делаем ее приведенной ступенчатой формы (при помощи элементарных преобразований) и выписываем решение исходного матричного уравнения:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} (1) & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 6 & 5 \end{array}\right)_{c_2 - 2c_1} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), r(A) = 1 \neq r(A|B) = 2,$$

система несовместна-не имеет решения.

Действительно, решая каждую систему по отдельности имеем:

$$\begin{cases} x_{11} + 4x_{21} = 3 \\ 2x_{11} + 8x_{21} = 6 \end{cases}, \quad \left(\begin{array}{cc|c} (1) & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \end{array}\right)_{c_2 - 2c_1} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right), r(A) = r(A|B) = 1 < n = 2,$$

система имеет бесконечное множество решений, главный неизвестный x_{11} через свободный $x_{21} = c_1$, получим общее решение:

$$\begin{cases} x_{11} = 3 - 4x_{21} \\ x_{21} = c_1 \end{cases}, \begin{cases} x_{11} = 3 - 4c_1 \\ x_{21} = c_1 \end{cases}$$ -общее решение;

$$\begin{cases} x_{12} + 4x_{22} = 2 \\ 2x_{12} + 8x_{22} = 5 \end{cases}, \left(\begin{array}{cc|c} (1) & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 5 \end{array}\right)_{c_2 - 2c_1} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad r(A) \neq r(A|B)$$

система несовместна (не имеет решения).

Итак, первая система имеет множество решений, а вторая система несовместна, следовательно, исходная система не имеет решения. Действительно, интерпретируя неизвестную матрицу X как единый объект, пришли к тому, что матричное уравнение решения не имеет, так как оно не определяет второй столбец матрицы X.

Пример 5.17. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

Поскольку $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 0$ (первый и второй столбцы пропорциональны), следовательно решение не единственно, находим его по формуле $(A|B) \overset{\text{э.п.}}{\sim} (E|X)$.

Так как, матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$-размера 3×3, матрица $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$- размера 3×2, то матрицу неизвестных будем искать в виде $X_{3\times 2} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}$. Исходное уравнение принимает вид:

$$A\cdot X=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\1&-2&-2\\2&-3&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\\x_{31}&x_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11}-x_{21}-2x_{31}&x_{12}-x_{22}-2x_{32}\\x_{11}-2x_{21}-2x_{31}&x_{12}-2x_{22}-2x_{32}\\2x_{11}-3x_{21}-4x_{31}&2x_{12}-3x_{22}-4x_{32}\end{pmatrix}=$$

$$=B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\\-1&0\end{pmatrix}.$$

Найдём решение исходного матричного уравнения методом Жордана-Гаусса:

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|cc}(1)&-1&-2&0&1\\1&-2&-2&-1&-1\\2&-3&-4&-1&0\end{array}\right)\begin{array}{l}c_2-c_1\\c_3-2c_2\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&-2&0&1\\0&-1&0&-1&-2\\0&-1&0&-1&-2\end{array}\right)\begin{array}{l}(-1)\cdot c_2\\(-1)\cdot c_3\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&-2&0&1\\0&(1)&0&1&2\\0&1&0&1&2\end{array}\right)\begin{array}{l}c_1+c_2\\ \sim\\c_3-c_2\end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&-2&1&3\\0&1&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&-2&1&3\\0&1&0&1&2\end{array}\right),$$

$r(A)=r(A|B)=2<n=3$, система совместна и неопределенна.

Записывая системы, соответствующие первому и второму столбцу приведённой матрицы, получим:

$$\begin{cases} x_{11} - 2x_{31} = 1 \\ x_{21} = 1 \\ x_{31} = \text{св. н.} \end{cases}, \begin{cases} x_{12} - 2x_{32} = 3 \\ x_{22} = 2 \\ x_{32} = \text{св. н.} \end{cases};$$

Выражая главные неизвестные через свободные неизвестные $x_{31} = c_1, x_{32} = c_2$ имеем:

$$\begin{cases} x_{11} = 1 + 2c_1 \\ x_{21} = 1 \\ x_{31} = c_1 \end{cases}, \begin{cases} x_{12} = 3 + 2c_2 \\ x_{22} = 2 \\ x_{32} = c_2 \end{cases};$$

Объединяя решения двух систем, получим решения исходного матричного уравнения:

$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2c_1 & 3+2c_2 \\ 1 & 2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$.Найдем какое-нибудь частное решение, положим $c_1, c_2 = 0$,получим $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$- частное решение.

<u>Проверка</u>: для проверки подставим полученное частное решение $X=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ в исходное уравнение $A\cdot X=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 1 & -2 & -2\\ 2 & -3 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=B$, получим верное равенство, следовательно решение найдено верно.

Пример 5.18. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix}-2 & 4 & -4 & 2\\ -1 & 2 & -2 & 1\end{pmatrix}\cdot X-2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -4\\ -3 & -2\end{pmatrix}$$

Решение.

Приведём уравнение к виду $A\cdot X=B$:

$$\begin{pmatrix}-2 & 4 & -4 & 2\\ -1 & 2 & -2 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-4 & -4\\ -3 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}-2 & 4 & -4 & 2\\ -1 & 2 & -2 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ -1 & -2\end{pmatrix};$$

Учитывая, что $A_{2\times4}\cdot X=B_{2\times2}$матрицу неизвестных X будем

искать в виде:

$$X_{4\times 2}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\\ x_{31} & x_{32}\\ x_{41} & x_{42}\end{pmatrix};$$

Поскольку матрица A исходного матричного уравнения не является квадратной, для его решения применяем метод Жордана-Гаусса $(A|B)\overset{\text{э.п.}}{\sim}(E|X)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} -2 & 4 & -4 & 2 & -2 & -4\\ -1 & 2 & -2 & 1 & -1 & -2\end{array}\right)\underset{\sim}{\frac{c_1}{-2}}\left(\begin{array}{cccc|cc} (1) & -2 & 2 & -1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & -2 & 1 & -1 & -2\end{array}\right)\underset{c_2+c_1}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 & 2\end{array}\right),$$

$r(A)=r(A|B)<n$,система имеет бесконечное множество решений.

Записываем системы, соответствующие первому и второму столбцу свободных членов приведённой матрицы:

$$\begin{cases} x_{11}-2x_{21}+2x_{31}-x_{41}=1\\ x_{21},x_{31},x_{41}-\text{св. н.}\end{cases},$$

$$\begin{cases} x_{12}-2x_{22}+2x_{32}-x_{42}=2\\ x_{22},x_{32},x_{42}-\text{св. н.}\end{cases};$$

Выражая главные неизвестные через свободные неизвестные $x_{21} = c_1, x_{31} = c_2, x_{41} = c_3,$

$x_{22} = c_4, x_{32} = c_5, x_{42} = c_6$ имеем:

$$\begin{cases} x_{11} = 1 + 2c_1 - 2c_2 + c_3 \\ x_{21} = c_1 \\ x_{31} = c_2 \\ x_{41} = c_3 \end{cases}; \begin{cases} x_{12} = 2 + 2c_4 - 2c_5 + c_6 \\ x_{22} = c_4 \\ x_{32} = c_5 \\ x_{42} = c_6 \end{cases}.$$

Объединяя решения двух систем, получим общее решение исходного матричного уравнения:

$$X = \begin{pmatrix} 1 + 2c_1 - 2c_2 + c_3 & 2 + 2c_4 - 2c_5 + c_6 \\ c_1 & c_4 \\ c_2 & c_5 \\ c_3 & c_6 \end{pmatrix}.$$

Проверку сделайте самостоятельно.

Матричные уравнения вида $X \cdot A = B$.

Для уравнения вида

$$X \cdot A = B \quad (5.12)$$

, где A, B — квадратные матрицы порядка n ,то решение ищем в виде

$$X = B \cdot A^{-1} \quad (5.13)$$

Действительно, умножив обе части уравнения (5.12) справа на матрицу A^{-1} ,имеем: $X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$,

$$X \cdot E = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}.$$

Замечание: формула $X = B \cdot A^{-1}$ применим только в случае единственности решения, то есть, когда $|A| \neq 0$.

Рассмотрим универсальный способ решения матричных уравнения вида (5.12)-метод Жордана-Гаусса.

Алгоритм решения уравнения вида $X \cdot A = B$ методом Жордана-Гаусса:

1)Транспонируем обе части уравнения $X \cdot A = B$:

$(X \cdot A)^T = B^T$, $A^T \cdot X^T = B^T$;

2)Из уравнения $A^T \cdot X^T = B^T$ находим X^T: $\left(A^T \middle| B^T\right) \sim \left(E \middle| X^T\right)$;

3) Находим X: $X = \left(X^T\right)^T$.

Пример 5.19. Решить матричные уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,решение будем искать в виде $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = -16 + 15 = -1 \neq 0$, решение единственно, найдем его двумя способами.

1 способ: по формуле $X = B \cdot A^{-1}$,где

A^{-1} : $\left(A \middle| E\right) \sim \left(E \middle| A^{-1}\right)$.

Находим обратную матрицу A^{-1} к основной матрице системы A:

$$A^{-1}:(A|E)=\left(\begin{array}{cc|cc}4&3&1&0\\-5&-4&0&1\end{array}\right)c_2+c_1\sim\left(\begin{array}{cc|cc}4&3&1&0\\-1&-1&1&1\end{array}\right)c_1+3c_2\sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}(1)&0&4&3\\-1&-1&1&1\end{array}\right)\begin{array}{c}\sim\\c_2+c_1\end{array}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&4&3\\0&-1&5&4\end{array}\right)(-1)\cdot c_2\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&4&3\\0&1&-5&-4\end{array}\right)=\left(E|A^{-1}\right),$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}4&3\\-5&-4\end{pmatrix}.$$

Заметим, поскольку $A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E$, то

есть $\left(A^{-1}|E\right)=(A|E)$, можно было обойтись без вычислений

при нахождении матрицы A^{-1}, очевидно,

что $A=A^{-1}=\begin{pmatrix}4&3\\-5&-4\end{pmatrix}$.

Находим искомую матрицу $X=B\cdot A^{-1}$:

$$X=B\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&3\\-5&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&3\\-5&-4\end{pmatrix}.$$

<u>2 способ:</u> (методом Жордана-Гаусса)

1) Транспонируем обе части уравнения

$(X\cdot A)^T=B^T$, $A^T\cdot X^T=B^T$:

$$\left(X\cdot\begin{pmatrix}4&3\\-5&-4\end{pmatrix}\right)^T=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^T,\ \begin{pmatrix}4&3\\-5&-4\end{pmatrix}^T\cdot X^T=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^T,$$

$$\begin{pmatrix}4&-5\\3&-4\end{pmatrix}\cdot X^T=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\text{где } A^T=\begin{pmatrix}4&-5\\3&-4\end{pmatrix},\ B^T=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix};$$

2) Из уравнения $A^T\cdot X^T=B^T$,находим $X^T:\left(A^T\middle|B^T\right)\sim\left(E\middle|X^T\right)$;

$$X^T:\left(\begin{array}{cc|cc}4&-5&1&0\\3&-4&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}c_1-c_2\\ \ \end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&-1&1&-1\\3&-4&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}\sim\\c_2-3c_1\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|cc}1&-1&1&-1\\0&-1&-3&4\end{array}\right)\begin{matrix}\sim\\(-1)\cdot c_2\end{matrix}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&-1&1&-1\\0&1&3&-4\end{array}\right)\begin{matrix}c_1+c_2\\ \ \end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&4&-5\\0&1&3&-4\end{array}\right),\text{ тогда } X^T=\begin{pmatrix}4&-5\\3&-4\end{pmatrix};$$

3)Находим $X:X=\left(X^T\right)^T=\begin{pmatrix}4&-5\\3&-4\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}4&3\\-5&-4\end{pmatrix}.$

Проверку сделайте самостоятельно.

Пример 5.20. Решить матричное уравнение

$$X\cdot\begin{pmatrix}-1&1\\-1&-2\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-3\\2&1\\-2&2\end{pmatrix}.$$

Решение.

$X\cdot A_{3\times2}=B_{3\times2}$, по определению произведения матриц неизвестную матрицу X будем искать в виде

$X_{3\times3}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}$, методом Жордана-Гаусса, то есть

транспонируем исходное уравнение $(X\cdot A)^T=B^T$, $A^T\cdot X^T=B^T$ получим:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^T \cdot X^T = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^T \text{ или}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -x_{11} - x_{12} & -x_{21} - x_{22} & -x_{31} - x_{32} \\ x_{11} - 2x_{12} + 3x_{13} & x_{21} - 2x_{22} + 3x_{23} & x_{31} - 2x_{32} + 3x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Находим $X^T : \left(A^T \middle| B^T\right) \sim \left(E \middle| X^T\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-1) \cdot c_1 \\ \sim \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} (1) & 1 & 0 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \sim \\ c_2 - c_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -6 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \sim \\ \dfrac{c_2}{-3} \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & (1) & -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} c_1 - c_2 \\ \sim \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right),$$

$r(A) = r(A|B) = 2 < n = 3$, система имеет бесконечное множество решений;

Записываем системы, соответствующие первому, второму и третьему столбцу приведённой матрицы, находим общее решение каждой из них и выписываем общее решение исходного матричного уравнения:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{13} = 1 \\ x_{12} - x_{13} = 2 \end{cases}, \begin{cases} x_{11} = -x_{13} + 1 \\ x_{12} = x_{13} + 2 \end{cases}, x_{13} = c_1 \Rightarrow \begin{cases} x_{11} = 1 - c_1 \\ x_{12} = 2 + c_1 \\ x_{13} = c_1 \end{cases}$$ -общее решение;

$$\begin{cases} x_{21} + x_{23} = -1 \\ x_{22} - x_{23} = -1 \end{cases}, \begin{cases} x_{21} = -x_{23} - 1 \\ x_{22} = x_{23} - 1 \end{cases}, x_{23} = c_2 \Rightarrow \begin{cases} x_{21} = -1 - c_2 \\ x_{22} = -1 + c_2 \\ x_{23} = c_2 \end{cases}$$ -общее решение;

$$\begin{cases} x_{31} + x_{33} = 2 \\ x_{32} - x_{33} = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_{31} = 2 - x_{33} \\ x_{32} = x_{33} \end{cases}, x_{33} = c_3 \Rightarrow \begin{cases} x_{31} = 2 - c_3 \\ x_{32} = c_3 \\ x_{33} = c_3 \end{cases}$$ -общее решение системы.

Итак, $X^T=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-c_1 & -1-c_2 & 2-c_3 \\ 2+c_1 & -1+c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$,

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-c_1 & 2+c_1 & c_1 \\ -1-c_2 & -1+c_2 & c_2 \\ 2-c_3 & c_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Проверку сделайте самостоятельно.

Матричные уравнения вида $A\cdot X\cdot B=C$.

Наряду с правосторонними $A\cdot X=B$ и левосторонними $X\cdot A=B$ матричными уравнениями можно рассматривать уравнения вида

$$A\cdot X\cdot B=C \quad (5.13),$$

где A,B,C — квадратные матрицы порядка n ,решение ищем в виде $X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$ (5.14)

Действительно, умножив обе части уравнение слева на матрицу A^{-1} ,получим:

$A\cdot A^{-1}\cdot X\cdot B=A^{-1}\cdot C$, $E\cdot X\cdot B=A^{-1}\cdot C\Rightarrow X\cdot B=A^{-1}\cdot C$, умножим последнее уравнение справа на матрицу B^{-1} ,имеем $X\cdot B\cdot B^{-1}=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$, $X\cdot E=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$,

$\Rightarrow X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$.

Замечание: в том случае, когда матрицы A,B,C -не квадратные или вырожденные, то есть, когда решение не единственно, необходимо для решения матричного уравнения $A\cdot X\cdot B=C$ воспользоваться способом решения.

Алгоритм решения матричных уравнений вида $A\cdot X\cdot B=C$, если матрицы A, B, C вырожденные или не квадратные:

1) Делаем подстановку $Y=X\cdot B$ в исходное уравнение $A\cdot X\cdot B=C$, получим уравнение $A\cdot Y=C$, из которого находим Y;
2) Из уравнения $Y=X\cdot B$ с известными матрицами Y, B находим X, для этого транспонируем обе части уравнения $Y=X\cdot B$,

$$Y^T=(X\cdot B)^T,\ B^T\cdot X^T=Y^T,\ X=\left(X^T\right)^T.$$

Пример 5.21. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 16\\ 9 & 10\end{pmatrix}$.

Решение.

Здесь $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}14 & 16\\ 9 & 10\end{pmatrix}$. Так как

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\end{vmatrix}=-6-(-5)=-1\neq 0,\qquad |B|=\begin{vmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{vmatrix}=40-42=-2\neq 0$$

, следовательно A^{-1}, B^{-1} существуют, то есть решение единственно, ищем его в виде $X=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}$ по формуле $X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$.

Находим A^{-1}, B^{-1}:

$$A^{-1}:(A|E)=\left(\begin{array}{cc|cc}3&-1&1&0\\5&-2&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}2c_1-c_2\\ \end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cc|cc}(1)&0&2&-1\\5&-2&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}\sim\\c_2-5c_1\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&2&-1\\0&-2&-10&6\end{array}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot c_2$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&2&-1\\0&1&5&-3\end{array}\right)=(E|A^{-1}),\ A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\5&-3\end{pmatrix};$$

$$B^{-1}:(B|E)=\left(\begin{array}{cc|cc}(5)&6&1&0\\7&8&0&1\end{array}\right)_{5c_2-7c_1}\sim\left(\begin{array}{cc|cc}5&6&1&0\\0&-2&-7&5\end{array}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot c_2\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc}5&6&1&0\\0&(1)&\frac{7}{2}&-\frac{5}{2}\end{array}\right)\begin{matrix}c_1-6c_2\\ \end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cc|cc}5&0&-20&15\\0&1&\frac{7}{2}&-\frac{5}{2}\end{array}\right)\begin{matrix}\frac{1}{5}\cdot c_1\\ \end{matrix}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-4&3\\0&1&\frac{7}{2}&-\frac{5}{2}\end{array}\right)=(E|B^{-1}),\ B^{-1}=\begin{pmatrix}-4&3\\\frac{7}{2}&-\frac{5}{2}\end{pmatrix};$$

Находим X:

$$X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}=\left(\begin{pmatrix}2&-1\\5&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}14&16\\9&10\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}-4&3\\\frac{7}{2}&-\frac{5}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28-9&32-10\\70-27&80-30\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix}-4&3\\\frac{7}{2}&-\frac{5}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19&22\\43&50\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4&3\\\frac{7}{2}&-\frac{5}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-76+77&57-55\\-172+175&129-125\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}.$$

Итак, $X=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$.

Пример 5.22. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\3&0\end{pmatrix}$.

Решение.

Так как $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0,\ |B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$ то матрицы

A^{-1} , B^{-1} не существуют, то есть решение не единственно, формула (5.14) не применима.

Решение будем искать в виде $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ универсальным способом:

1) находим Y ,сделав подстановку $Y = X \cdot B = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

в исходном уравнении $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$

,получим уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$,где

$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$. Расписав равенство, получим $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} y_{11} + y_{21} & y_{12} + y_{22} \\ y_{11} + y_{21} & y_{12} + y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, две системы $\begin{cases} y_{11} + y_{21} = 3 \\ y_{11} + y_{21} = 3 \end{cases}, \begin{cases} y_{12} + y_{22} = 0 \\ y_{12} + y_{22} = 0 \end{cases}.$

Решая их совместно находим Y :

$$\begin{pmatrix} (1) & 1 & | & 3 & 0 \\ 1 & 1 & | & 3 & 0 \end{pmatrix} c_2 \overset{\sim}{-} c_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 3 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$\sim (1 \quad 1|3 \quad 0), r(A) = r(A|B) < n,$система имеет бесконечное множество решений, найдём его:

$$\begin{cases} y_{11} + y_{21} = 3 \\ y_{21} - \text{св. н.} \end{cases}, \begin{cases} y_{12} + y_{22} = 0 \\ y_{22} - \text{св. н.} \end{cases};$$

$$\begin{cases} y_{11} = 3 - c_1 \\ y_{21} = c_1 \end{cases}, \begin{cases} y_{12} = -c_2 \\ y_{22} = c_2 \end{cases};$$

Таким образом, $Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - c_1 & -c_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$;

Транспонируем обе части уравнения $X \cdot B = Y$, $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - c_1 & -c_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$ и находим X^T:

$$\left(X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 3 - c_1 & -c_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot X^T = \begin{pmatrix} 3 - c_1 & -c_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}^T,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - c_1 & c_1 \\ -c_2 & c_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - c_1 & c_1 \\ -c_2 & c_2 \end{pmatrix},$$

выпишем расширенную матрицу $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 3 - c_1 & c_1 \\ 0 & 0 & -c_2 & c_2 \end{array} \right)$ положим $c_2 = 0$ (если $c_2 \neq 0$,то решений нет $r(A) \neq r(A|B)$) , расширенная матрица принимает вид $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 3-c_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, $r(A) = r(A|B)$система имеет бесконечное множество решений, найдем их:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-c_1 & c_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_{11} = 3-c_1 \\ x_{12} = c_3 \end{cases}, \begin{cases} x_{21} = c_1 \\ x_{22} = c_4 \end{cases}.$$

Итак, $X = \left(X^T\right)^T = \begin{pmatrix} 3-c_1 & c_1 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3-c_1 & c_3 \\ c_1 & c_4 \end{pmatrix}$.

5.Задания для самостоятельного решения.

1. Решить систему матричным методом:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$; **б)** $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$; **в)** $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9 \\ 2x + 5y - 3z = 4 \\ 5x + 6y - 2z = 18 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ -x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$; **д)** $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$; **е)** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -7 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 13 \end{cases}$;

ё) $\begin{cases} x + 3y + z = -5 \\ 3x - 4y + 3z = 11 \\ 2x + 4y - z = -9 \end{cases}$.

2.Решить систему методом Крамера:

а) $\begin{cases} y+x=3 \\ 2x+2y=0 \end{cases}$; **б)** $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=-5 \\ x_1+9x_2-4x_3=-1 \\ -2x_1+6x_2-3x_3=6 \end{cases}$; **в)** $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=6 \\ 2x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1+x_2+2x_3=5 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=-1 \\ x_1-x_2+2x_3=0 \\ 4x_1-x_2+4x_3=-1. \end{cases}$; **д)** $\begin{cases} 3x+2y+z=-8 \\ 2x+3y+z=-3 \\ 2x+y+3z=-1 \end{cases}$; **е)** $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=-5 \\ 2x_1-2x_2+3x_3=-8 \\ 3x_1+4x_2-4x_3=5 \end{cases}$;

ё) $\begin{cases} x+5y+z=3 \\ 2x-3y+3z=8. \\ 2x+4y-z=0 \end{cases}$

3. Решить систему матричным методом и по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 3y-4x=1 \\ 3x+4y=18 \end{cases}$; **б)** $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=4 \\ 2x_1-x_2+x_3=2 \\ 3x_1+x_2+2x_3=6 \end{cases}$; **в)** $\begin{cases} 2x-y-z=4 \\ 3x+4y-2z=11 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} x_1+5x_2-4x_3=-5 \\ 2x_1-3x_2+x_3=2 \\ 4x_1+x_2-3x_3=-4 \end{cases}$; **д)** $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+3z=16 \\ 5y-z=10 \end{cases}$; **е)** $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5 \\ 2x_1-x_2+x_3=6 \\ x_1+5x_2=-3 \end{cases}$;

ё) $\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 3x+2y+3z=6. \\ 2x-2y-z=7 \end{cases}$

4. Исследовать по теореме Кронекера-Капелли и решить систему, если решение существует, по методу Гаусса:

а) $\begin{cases} x+2y-4z=1 \\ 2x+y-5z=-1 \\ x-y-z=-2 \end{cases}$; **б)** $\begin{cases} 4x_1-7x_2+2x_3=-11 \\ 6x_1-2x_2+x_3=-1 \\ x_1-x_2+5x_3=22 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x_1-2x_2=1 \\ -2x_1+4x_2=-2 \end{cases}$; **г)** $\begin{cases} 5x_1-x_2+2x_3+x_4=7 \\ 2x_1+x_2+4x_3-2x_4=1 \\ x_1-3x_2-6x_3+5x_4=0 \end{cases}$;

д) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4=4 \\ 2x_1-3x_2+4x_3+x_4=2 \\ x_1-3x_2-x_3-4x_4=10 \end{cases}$; **е)** $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-3x_4=2 \\ 4x_1+x_3-7x_4=3 \\ 2x_2-3x_3+x_4=1 \\ 2x_1+3x_2-4x_3-2x_4=3 \end{cases}$;

ё) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3+x_4=-1 \\ -2x_1+3x_2+x_3+2x_4=9 \\ 5x_1-6x_2+2x_3+3x_4=-17 \\ 2x_1-4x_2+4x_3+3x_4=-7 \end{cases}$ **;ж)** $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=-1 \\ x_1-x_2+2x_3=0 \\ 4x_1-x_2+4x_3=-1 \end{cases}$;

з) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-5x_4=1 \\ x_1-x_2-5x_3=2 \\ 3x_1-2x_2-2x_3-5x_4=3 \\ 7x_1-5x_2-9x_3-10x_4=8 \end{cases}$.

5. Исследовать по теореме Кронекера-Капелли и решить систему (если решение существует) по методу Жордана-Гаусса:

а) $\begin{cases} 5x_1+x_2+2x_3+x_4=20 \\ 4x_1-x_2-x_3+2x_4=15 \\ 3x_1-3x_2-4x_3+3x_4=10 \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=5 \end{cases}$; **б)** $\begin{cases} x+y-z=-4 \\ x+2y-3z=0 \\ -2x-2z=16 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 4x_1+x_2-2x_3+x_4=3 \\ x_1-2x_2-x_3+2x_4=2 \\ 2x_1+5x_2-x_4=-1 \\ 3x_1+3x_2-x_3-3x_4=1 \end{cases}$; **г)** $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5 \\ 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4=6; \\ 3x_1+4x_2+5x_3+6x_4=7 \end{cases}$

д) $\begin{cases} x+2y+3z=-4 \\ 2x+3y+4z=1 \\ 3x+4y+5z=6 \end{cases}$; **е)** $\begin{cases} 2x_1-4x_2+x_3-5x_4=2 \\ 4x_1-7x_2-x_3-8x_4=-5 \\ 10x_1-18x_2+2x_3-23x_4=3 \\ 2x_1-3x_2+x_3-x_4=0 \end{cases}$;

ё) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+5x_4=1 \\ x_1+3x_2-13x_3+22x_4=-1 \\ 3x_1+5x_2+x_3-2x_4=5 \\ 2x_1+3x_2+4x_3-7x_4=4 \end{cases}$; **ж)** $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5=1 \\ 2x_1-x_2+7x_3-3x_4+5x_5=2 \\ x_1+3x_2-2x_3+5x_4-7x_5=3 \\ 3x_1-2x_2+7x_3-5x_4+8x_5=3 \end{cases}$.

6. Определить при каких значениях a и b система уравнений $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3=b \\ 5x_1-8x_2+9x_3=3 \\ 2x_1+x_2+ax_3=-1. \end{cases}$ имеет: **а)** единственное решение; **б)** не имеет решений; **в)** имеет бесконечное множество решений.

7. Найти общее решение однородной системы уравнений:

а) $\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ -x_1-x_2=0 \end{cases}$; **б)** $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 3x-5y+3z=0 \\ 2x+7y-z=0 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3=0 \end{cases}$; **г)** $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0 \\ 4x_1-5x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0 \end{cases}$;

д) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=0 \\ 4x_1-x_2+7x_3=0 \\ 2x_1+x_2+3x_3=0 \end{cases}$; **е)** $\begin{cases} x_1-3x_2+3x_4=0 \\ x_1+x_2-x_3+4x_4=0 \\ 2x_1-x_2+x_3+3x_4=0 \end{cases}$;

ё) $\begin{cases} -4x_2+x_3+7x_4=0 \\ -2x_1-7x_2+2x_3+10x_4=0 \\ -x_1-x_2+x_3-5x_4=0 \\ -5x_1-22x_2+5x_3+43x_4=0 \end{cases}$; **ж)** $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3x_5=0 \\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4+4x_5=0 \\ 4x_1+5x_2+2x_3+x_4+5x_5=0 \\ 7x_1+10x_2+x_3+6x_4+5x_5=0 \end{cases}$.

8. Найти общее решение и ФСР однородной системы уравнений:

а) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+4x_3=0 \\ x_1+3x_2+5x_3=0 \end{cases}$; **б)** $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ 3x-2y+2z=0 \end{cases}$; **в)** $\begin{cases} x_1-2x_2-3x_3=0 \\ -2x_1+4x_2+6x_3=0 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+3x_4=0 \\ 6x_1-3x_2-3x_3-x_4=0 \\ -7x_1+x_2+x_3-2x_4=0 \\ -3x_1+9x_2+9x_3+10x_4=0 \end{cases}$; **д)** $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ x_1-2x_2+x_3+x_4-x_5=0 \end{cases}$;

е) $\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3=0 \\ x_1-x_2+3x_3=0 \\ 3x_1-x_2-x_3=0 \\ x_1-x_2+x_3=0 \end{cases}$; **ё)** $\begin{cases} 3x_1+4x_2+3x_3+2x_4=0 \\ 5x_1+7x_2+4x_3+3x_4=0 \\ 4x_1+5x_2+5x_3+3x_4=0 \\ 5x_1+6x_2+7x_3+4x_4=0 \end{cases}$;

ж) $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3x_5=0 \\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4+4x_5=0 \\ 4x_1+5x_2+2x_3+x_4+5x_5=0 \\ 7x_1+10x_2+x_3+6x_4+5x_5=0 \end{cases}$.

9. Найти общее решение неоднородной системы уравнений, используя ФСР, соответствующей однородной:

а) $\begin{cases} x_1+x_2-5x_3-7x_4=1 \\ 2x_1+x_2-4x_3+x_4=1 \\ 3x_1+2x_2-x_3-6x_4=2 \end{cases}$; **б)** $\begin{cases} x_2+2x_3-3x_4+4x_5=5 \\ 2x_1-x_2+3x_3+4x_5=5 \\ 2x_1+5x_3-2x_4+4x_5=4 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} -x_1+4x_2+x_3-5x_4=-4 \\ x_1+5x_2+5x_3-4x_4=-2 \\ 3x_2+2x_3-3x_4=-2 \\ 2x_1+x_2+4x_3+x_4=2 \end{cases}$.

10. Определить, при каком значении a система однородных уравнений $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3=0 \\ ax_1-14x_2+15x_3=0 \\ x_1+2x_2-3x_3=0 \end{cases}$, имеет нулевое решение.

11. Решить матричные уравнения, выполнить проверку:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - 2\cdot X = 3\cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}\cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -2 & 8 & 7 \\ 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; **е)** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

ё) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$; **ж)** $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

з) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; **и)** $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$;

й) $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$; **к)** $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$;

л) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$; **м)** $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

н) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ -1 & 12 \\ 12 & 27 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$.

Ответы:

5.1.а) $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$; **б)** $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$; **в)** $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 5 \end{cases}$; **г)** $\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = 4 \end{cases}$;

д) $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$; **е)** $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$; **ё)** $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ z = 1 \end{cases}$.

5.2. а) несовместна; **б)** $\begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 4 \end{cases}$; **в)** $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 3. \end{cases}$; **г)** $\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3} \\ x_2 = -\frac{1}{3} \\ x_3 = 0. \end{cases}$;

д) $\begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$; **е)** $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -2 \end{cases}$; **ё)** $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$.

5.3. а) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$; **б)** $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$; **в)** $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$; **г)** $\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = 10 \end{cases}$; **д)** $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 5 \end{cases}$;

е) $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$; **ё)** $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$.

5.4.а) $X=\begin{pmatrix}-1+2c\\1+c\\c\end{pmatrix}$; **б)** $X=\begin{pmatrix}0\\3\\5\end{pmatrix}$; **в)** $X=\begin{pmatrix}1+2c\\c\end{pmatrix}$; **г)** система несовместна;

д) $X=\begin{pmatrix}-8-4c_1-5c_2\\-6-2c_1-3c_2\\c_1\\c_2\end{pmatrix}$; **е)** $X=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}-\frac{1}{4}c_1+\frac{7}{4}c_2\\\frac{1}{2}+\frac{3}{2}c_1-\frac{1}{2}c_2\\c_1\\c_2\end{pmatrix}$;

ё) $X=\begin{pmatrix}0\\3\\2\\-1\end{pmatrix}$; **ж)** $X=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}c\\-\frac{1}{3}+\frac{5}{3}c\\c\end{pmatrix}$; **з)** $X=\begin{pmatrix}-1-8c_1-c_2\\-2-5c_1+c_2\\c_1\\c_2\end{pmatrix}$.

5.5.а) $X=\begin{pmatrix}\frac{35}{9}-\frac{1}{9}c_1-\frac{1}{3}c_2\\\frac{5}{9}-\frac{13}{9}c_1+\frac{2}{3}c_2\\c_1\\c_2\end{pmatrix}$; **б)** $X=\begin{pmatrix}-8-c\\4+2c\\c\end{pmatrix}$;

в) $X=\begin{pmatrix}\frac{8}{9}+\frac{5}{9}c\\-\frac{5}{9}-\frac{2}{9}c\\c\end{pmatrix}$; **г)** $X=\begin{pmatrix}-3+c_1+2c_2\\4-2c_1-3c_2\\c_1\\c_2\end{pmatrix}$;

д) $X=\begin{pmatrix}14+c\\-9-2c\\c\end{pmatrix}$; **е)** $X=\begin{pmatrix}-\frac{19}{12}\\0\\\frac{8}{3}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ **; ё)** $X=\begin{pmatrix}5-17c_1+29c_2\\-2+10c_1-17c_2\\c_1\\c_2\end{pmatrix}$;

ж) система несовместна.**5.6.а)** $a\neq -3$;**б)** $a=-3, b\neq\frac{1}{3}$;**в)** $a=-3, b=\frac{1}{3}$.

5.7. а) $X=\begin{pmatrix}-c\\c\end{pmatrix}$; **б)** $X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$;

в) $X=\begin{pmatrix}7c\\-5c\\c\end{pmatrix}$; **г)** $X=\begin{pmatrix}8c_1-7c_2\\5c_2-6c_1\\c_1\\c_2\end{pmatrix}$**; д)** $X=\begin{pmatrix}-\frac{5}{3}c\\\frac{1}{3}c\\c\end{pmatrix}$;

е) $X=\begin{pmatrix} -\frac{7}{3}c \\ \frac{2}{9}c \\ \frac{17}{9}c \\ c \end{pmatrix}$**; ё)** $X=\begin{pmatrix} 0 \\ 4c \\ 9c \\ c \end{pmatrix}$ **ж)** $X=\begin{pmatrix} -3c_1-5c_2 \\ 2c_1+3c_2 \\ c_1 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$**. 5.8.а)** $X=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

б) $X=\begin{pmatrix} 4c \\ c \\ -5c \end{pmatrix}$ $-$ *общее решение*, $X_1=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}-ФСР$;

в) $X=\begin{pmatrix} 2c_1+3c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ $-$ *общее решение*, $X_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}-ФСР$;

г) $X=\begin{pmatrix} -\frac{7}{15}c_1 \\ -c_1-\frac{19}{15}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ $-$ *общее решение*, $X_1=\begin{pmatrix} -\frac{7}{15} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2=\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{19}{15} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}-ФСР$;

д) $X=\begin{pmatrix} -c_1-c_2 \\ -\frac{1}{2}c_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ $-$ *общее решение*, $X_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_3=\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}-ФСР$;

е) $X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ **;ё)** $X=\begin{pmatrix}-5c_1-2c_2\\3c_1+c_2\\c_1\\c_2\end{pmatrix}$ $-$ *общее решение,* $X_1=\begin{pmatrix}-5\\3\\1\\0\end{pmatrix},X_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ $-$ *ФСР.*

5.9.

а) $X=X_{ч.н.}+c_1\cdot X_1+c_2\cdot X_2,\ X_{ч.н.}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},X_1=\begin{pmatrix}-9\\14\\1\\0\end{pmatrix},X_2=\begin{pmatrix}-8\\15\\0\\1\end{pmatrix};$

б) $X=X_{ч.н.}+c_1\cdot X_1+c_2\cdot X_2+c_3\cdot X_3$**,** $X_{ч.н.}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix},X_1=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},X_2=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\3\\0\\1\\0\end{pmatrix},X_3=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix};$

в) $X=X_{ч.н.}+c_1\cdot X_1+c_2\cdot X_2,\ X_{ч.н.}=\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\-\frac{2}{3}\\0\\0\end{pmatrix},X_1=\begin{pmatrix}-\frac{5}{3}\\-\frac{2}{3}\\1\\0\end{pmatrix},X_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}.$

5.10. $a=5.$

5.11.а) $X=\begin{pmatrix}-2&-\frac{5}{2}\\-\frac{1}{2}&4\\0&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$**.5.11. б)** $X=\begin{pmatrix}-1&5\\1&-1\end{pmatrix}$**.5.11. в)** $X=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$**.**

5.11.г) $X=\begin{pmatrix} \frac{5}{13} & 3 \\ \frac{5}{13} & -1 \\ \frac{30}{13} & 4 \end{pmatrix}$. **5.11.д)** $X=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5.11.е) $X=\begin{pmatrix} \frac{(1-3c_1)}{2} & \frac{(2-3c_2)}{2} \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$.

5.11.ё) $X=\begin{pmatrix} 1+2c_1-2c_2+c_3 & 2+2c_4-2c_5+c_6 \\ c_1 & c_4 \\ c_2 & c_5 \\ c_3 & c_6 \end{pmatrix}$

5.11.ж) $X=\begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{14}{4} & -\frac{11}{4} \end{pmatrix}$. **5.11. з)** $X=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5.11.и). $X=\begin{pmatrix} -2+c_1-c_2+2c_3 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 3+c_4-c_5+2c_6 & c_4 & c_5 & c_6 \end{pmatrix}$.

5.11.й) $X=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. **5.11.к)** $X=\begin{pmatrix} -3-2c_1 & c_3 \\ -2c_2 & c_4 \end{pmatrix}$.

5.11.л) $X=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. **5.11.м)** $X=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. **5.11.н)** $X=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б. В. Соболь, Н. Т. Мишняков, В. М. Поркшеян. Практикум по высшей математике. 3-е изд. Ростов н \ Д :Феникс, 2010.

2. Д. Т. Письменный. Конспект лекций по высшей математике (полный курс). 2-е изд. Москва: «Айрис-пресс», 2014.

3. Данко П. Е., Попов, А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах (1 том). — М. : Высш. шк., 2002.

4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. Главная редакция физико-математической литературы, изд-во «Наука», М.,1974 г.

5. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. Главная редакция физико-математической литературы. Издательство «Наука». М., 1972 г.