ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Математика»

Учебно-методическое пособие

«Производные функции одной переменной»

по дисциплине

«Математика»

Авторы
Ворович Е. И.,
Тукодова О. М.,
Рудова И. Ш.

Ростов-на-Дону, 2020

Аннотация

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов всех форм обучения по всем техническим и экономическим направлениям.

Авторы

к.ф.-м.н., доцент кафедры «Математика» Ворович Е.И.,
к.ф.-м.н., доцент кафедры «Математика» Тукодова О.М.,
ассистент кафедры «Математика» Рудова И.Ш.

Оглавление

ИНСТРУКЦИЯ

Пособие является самоучителем, предназначенным для освоения и совершенствования техники дифференцирования. Оно состоит из пяти разделов.

Раздел 1 содержит таблицу производных (таблица 1.1). В нем также изложены прием логарифмического дифференцирования (1.2) и методы дифференцирования функций: показательно-степенных (1.3); заданных неявно (1.5) и параметрически (1.4).

Раздел 2- задачи для самостоятельного решения.

Раздел 3- ответы к задачам из раздела 2.

Раздел 4 – указания к решению задач.

Раздел 5- решение задач из раздела 2.

Работать с пособием нужно следующим образом.

ШАГ 1: решить задачу из раздела 2

ШАГ 2: сверить ответ. Если задача решена правильно, перейти к решению следующей задачи. Если верный ответ не получен, то

ШАГ 3: смотреть соответствующее указание и снова пытаться вычислить производную. Если не получилось, то

ШАГ4: смотреть решение задачи

1. ПРАВИЛА, ФОРМУЛЫ И ПРИЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

1.1 Таблица производных

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ - дифференцируемые функции; c, a и n - постоянные, не зависящие от x.

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

2) $(u \cdot v)' = u'v \pm v'u$;

3) $(c \cdot u)' = c \cdot u'$;

4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$;

5) $c' = 0$;

6) $\left(u^n\right)' = nu^{n-1}\,u'$;

7) $\left(a^u\right)' = a^u \ln a\; u'$; 7′) $\left(e^u\right)' = e^u\; u'$;

8) $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{u'}{u\ln a}$; 8′) $\left(\ln u\right)' = \dfrac{u'}{u}$;

9) $\left(\sin u\right)' = \cos u\; u'$;

10) $\left(\cos u\right)' = -\sin u\; u'$;

11) $\left(tgu\right)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$;

12) $\left(ctgu\right)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$;

13) $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

14) $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

15) $\left(arctgu\right)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$;

16) $\left(arcctgu\right)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

1.2 Логарифмическое дифференцирование

В некоторых случаях вычисление производной y' функции $y = f(x)$ можно существенно упростить, если функцию предварительно прологарифмировать и затем воспользоваться известными свойствами логарифма:

$$\ln u^v = v\ln u,$$

$$\ln(uv) = \ln u + \ln v,$$

$$\ln\frac{u}{v}=\ln u-\ln v\,.$$

Описанный здесь способ вычисления производной называется приемом логарифмического дифференцирования.

Пример: $$y=\sqrt[5]{\frac{(x+1)^2(x-4)}{x^6}}\;;$$

$$\ln y=\ln\left[\frac{(x+1)^2(x-4)}{x^6}\right]^{1/5}=\frac{1}{5}\left[\ln(x+1)^2+\ln(x-4)-\ln x^6\right]=$$
$$\frac{1}{5}\left[2\ln(x+1)+\ln(x-4)-6\ln x\right].$$

Продифференцируем обе части полученного равенства

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{5}\left[\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x-4}-\frac{6}{x}\right]=\frac{1}{5}\frac{-3x^2+11x+24}{x(x+1)(x-4)}\rightarrow$$

$$y'=\frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{(x+1)^2(x-4)}{x^6}}\cdot\frac{-3x^2+11x+24}{x(x+1)(x-4)}=\frac{-3x^2+11x+24}{5x^2\cdot\sqrt[5]{x(x+1)^3(x-4)^4}}\,.$$

Замечание: Для сравнения вычислите y', не применяя логарифмического дифференцирования.

1.3 Дифференцирование показательно-степенной функции

Функции вида $u(x)^{v(x)}$ называются показательно-степенными функциями. Для их дифференцирования нельзя использовать ни одну из формул, приведенных в таблице (Объясните, почему не подходят формулы 6 и 7). Проблема решается с помощью приема логарифмического дифференцирования, описанного в 1.2. Схема такова:

$$y(x)=u(x)^{v(x)}\;,\;\; y'\text{-?}$$

Записываем

$\ln y(x) = \ln u(x)^{v(x)} = v(x)\ln u(x)$. Дифференцируем обе части полученного равенства

$$\frac{y'}{y} = (v\ln u)' = v'\ln u + v\frac{u'}{u} \rightarrow y' = y\left(v'\ln u + v\frac{u'}{u}\right) = u^v\left(v'\ln u + v\frac{u'}{u}\right).$$

1.4 Дифференцирование функции, заданной параметрически

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$. Тогда ее первая и вторая производные вычисляются по формулам:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \qquad y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

Здесь использованы обозначения

$$y'_x = \frac{dy}{dx},\ y'_t = \frac{dy}{dt},\ x'_t = \frac{dx}{dt},\ y''_{xx} = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Замечание. Для вычисления y'' можно также воспользоваться формулой:

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt}x'_t - x''_{tt}y'_t}{(x'_t)^3}.$$

1.5 Дифференцирование функций, заданных неявно.

Пусть уравнение $F(x,y)=0$ определяет y как неявную функцию от x. Требуется найти y'_x. Продифференцируем обе части уравнения по x, учитывая, что x - независимая переменная, а y есть функция от x. Получим уравнение первой степени относительно y'_x, откуда и определим y'_x.

Пример: $x^2+y^2=8$. Найти y'_x.

Дифференцируем обе части уравнения по x:

$$2x+2yy'=0 \to y'=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}.$$

2. ЗАДАЧИ

Вычислить производные функций

1) $y=x^7$ 2) $y=x^{4.2}$ 3) $y=\sqrt{x^3}$ 4) $y=\frac{1}{x^5}$ 5) $y=\frac{1}{x^{2.3}}$ 6) $y=\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$

7) $y=2x^8-\sin x-5$ 8) $y=3x^3+\cos x+1$ 9) $y=3x^5-4\sqrt{x}+\ln 3$

10) $\left(x^2+1\right)^8$ 11) $y=\ln^5 x$ 12) $y=\frac{3}{\sqrt{tg^3x}}$

13) $y=5^{3x}$ 14) $y=5^{tgx}$ 15) $y=5^{\frac{1}{\cos x}}$

16) $y=e^{8x}$ 17) $y=e^{x^3+x^2+8}$ 18) $y=e^{-\sin^2 x}$

19) $y=\ln 5x$ 20) $y=\ln(\sin 3x)$ 21) $y=\ln\left(\sin^2 x+\sqrt{x}\right)$

22) $y=\cos 3x$ 23) $y=\cos\left(x^2+1\right)$ 24) $y=\sin\left(\ln^2 x+3\right)$

25) $y=tg10x$ 26) $y=ctg\left(3x^5+4\right)$ 27) $y=tg\ln\left(x^3+2\right)$

28) $y=\arccos 2x$ 29) $y=\arcsin e^{3x}$ 30) $y=arctg\sqrt{x^3+1}$

31) $y=e^x\cos x$ 32) $y=\left(x^8+1\right)\cdot ctg5x$ 33) $y=e^{3x}\left(x^3+\sin 2x\right)$

34) $y=e^{2x}\arcsin 3x$ 35) $y=5^x\cdot\sin x$ 36) $y=\left(x^3+2x+1\right)\sqrt{x^2+1}$

37) $y=\frac{\ln x}{x}$ 38) $y=\frac{e^x}{x}$ 39) $y=\frac{2x+3}{x^2-5x+5}$

40) $y=\frac{a+bx}{c+dx}$, где a,b,c,d - константы 41) $y=\frac{x^2}{\ln x}$

42) $y=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ 43) $y=\ln 8\cdot\sin x$ 44) $y=\frac{\arcsin x}{\cos\frac{\pi}{7}}$

45) $y=\frac{e^x+\ln 5\cdot\sin x}{8+\ln^2 5}$ 46) $y=x^5+2x^4-3x^3+8x+1,\ y^{(6)}-?$

47) $y=2^x,\ y^{(n)}-?$ 48) $y=\ln x,\ y^{(n)}-?$

49) $y=x^x$ 50) $y=(\cos x)^{\sin x}$ 51) $y=(arctgx)^x$

52) $y=x^{\sin x}$ 53) $y=(tgx)^{arctgx}$ 54) $y=(\sin x)^{3x}$

55) $\begin{cases} x=t^2 & y'-? \\ y=t^3 & y''-? \end{cases}$ 56) $\begin{cases} x=a(\varphi-\sin\varphi), \\ y=a(1-\cos\varphi) & y'-? \end{cases}$ где a =const

57) $\begin{cases} x=a\cos^3\varphi & y'-? \\ y=b\sin^3\varphi & y''-? \end{cases}$ где

a =const

58) $x^3+y^3-3xy=0$ 59) $x^y-y^x=0$ 60) $x^3+\ln y-x^2e^y=0$

61) $y=\ln\frac{x^2+3}{x^3+1}$ 62) $y=\ln\sqrt{\frac{\sin x}{x}}$ 63) $y=\ln\sqrt[3]{\frac{x-5}{x+1}}$

64) $y=\sqrt[5]{\frac{1+x}{1-x}}$ 65) $y=\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$ 66) $y=\sqrt[3]{\frac{(x+2)(x-1)^2}{x^5}}$

67) $y=\arcsin\frac{2x^2}{1+x^4}$ 68) $y=e^x arctge^x-\ln\sqrt{1+e^{2x}}$

69) $y=\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\ln\frac{1+\sin x}{\cos x}$

3. ОТВЕТЫ

1) $7x^6$ 2) $4.2x^{3.2}$ 3) $\dfrac{3\sqrt{x}}{2}$ 4) $-\dfrac{5}{x^6}$ 5) $-2.3x^{-3.3}$ 6) $-\dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^8}}$ 7) $16x^7-\cos x$

8) $9x^2-\sin x$ 9) $15x^4-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ 10) $16x\left(x^2+1\right)^7$ 11) $\dfrac{5\ln^4 x}{x}$

12) $\dfrac{-9}{2\sin^2 x\sqrt{tgx}}$ 13) $3\ln 5\cdot 5^{3x}$ 14) $\dfrac{\ln 5}{\cos^2 x}\cdot 5^{tgx}$ 15) $\ln 5\cdot 5^{\frac{1}{\cos x}}\cdot\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

16) $8e^{8x}$ 17) $x(3x+2)\cdot e^{x^3+x^2+8}$ 18) $-\sin 2x\cdot e^{-\sin^2 x}$ 19) $\dfrac{1}{x}$

20) $3ctg3x$ 21) $\dfrac{2\sqrt{x}\sin 2x+1}{2\sqrt{x}\left(\sin^2 x+\sqrt{x}\right)}$ 22) $-3\sin 3x$ 23) $-2x\sin\left(x^2+1\right)$

24) $\dfrac{2\ln x}{x}\cos\left(\ln^2 x+3\right)$ 25) $\dfrac{10}{\cos^2 10x}$ 26) $-\dfrac{15x^4}{\sin^2\left(3x^5+4\right)}$

27) $\dfrac{3x^2}{\left(x^3+2\right)\cos^2\ln\left(x^3+2\right)}$ 28) $\dfrac{-2}{\sqrt{1-4x^2}}$ 29) $\dfrac{3e^{3x}}{\sqrt{1-e^{6x}}}$

30) $\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}\left(2+x^3\right)}$ 31) $e^x(\cos x-\sin x)$ 32) $8x^7ctg5x-\dfrac{5\left(x^8+1\right)}{\sin^2 5x}$

33) $e^{3x}\left(3x^3+3\sin 2x+3x^2+2\cos 2x\right)$ 34) $e^{2x}\left(2\arcsin 3x+\dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}\right)$

35) $5^x(\ln 5\sin x+\cos x)$ 36) $\dfrac{4x^4+7x^2+x+2}{\sqrt{x^2+1}}$ 37) $\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

38) $\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$ 39) $\dfrac{25-2x^2-6x}{\left(x^2-5x+5\right)^2}$ 40) $\dfrac{bc-ad}{(c+dx)^2}$ 41) $\dfrac{x(2\ln x-1)}{\ln^2 x}$

42) $\dfrac{2}{\sin 2x-1}$ 43) $\ln 8\cdot\cos x$ 44) $\left(\sqrt{1-x^2}\cos\dfrac{\pi}{7}\right)^{-1}$ 45) $\dfrac{e^x+\ln 5\cdot\cos x}{8+\ln^2 5}$

46) $y^{(6)}=0$ 47) $y^{(n)}=2^x(\ln 2)^n$ 48) $y^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$ 49) $x^x(\ln x+1)$

50) $(\cos x)^{\sin x-1}\left[\cos^2 x\ln\cos x-\sin^2 x\right]$ 51) $(arctgx)^{x-1}\left[arctgx\ln arctgx+\dfrac{x}{1+x^2}\right]$

52) $x^{\sin x-1}\left[x\cos x\ln x+\sin x\right]$ 53) $(tgx)^{arctgx}\left[\dfrac{\ln(tgx)}{1+x^2}+2\dfrac{arctgx}{\sin 2x}\right]$

54) $3(\sin x)^{3x}[\ln\sin x + xctgx]$

55) $y' = \dfrac{3t}{2},\ y'' = \dfrac{3}{4t}$

56) $ctg\dfrac{\varphi}{2}$

57) $y' = -\dfrac{b}{a}tg\varphi,\ y'' = \dfrac{b}{3a^2\cos^4\varphi\sin\varphi}$

58) $y' = \dfrac{y-x^2}{y^2-x}$

59) $y' = \dfrac{y(x\ln y - y)}{x(y\ln x - x)}$

60) $y' = \dfrac{y(2xe^y - 3x^2)}{1-x^2ye^y}$

61) $\dfrac{2x-9x^2-x^4}{(x^2+3)(x^3+1)}$

62) $\dfrac{1}{2}\left(ctgx - \dfrac{1}{x}\right)$

63) $\dfrac{2}{(x-5)(x+1)}$

64) $\dfrac{2}{5(1+x)^{4/5}(1-x)^{6/5}}$

65) $\dfrac{(x^2-32x-73)(3-x)^3}{2\sqrt{x+2}\,(x+1)^6}$

66) $-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{x^2+x-5}{x^2\cdot\sqrt[3]{x^2(x+2)^2(x-1)}}$

67) $\dfrac{4x}{1+x^4}$

68) $e^x arctge^x$

69) $\dfrac{2}{\cos^3 x}$

4. УКАЗАНИЯ

№ задачи	№ формулы таблицы 1.1	Указание
1.	6	
2.	6	
3.	6	Представить в виде $y = x^{\frac{3}{2}}$
4.	6	Представить в виде $y = x^{-5}$
5.	6	Представить в виде $y = x^{-2.3}$
6.	6	Представить в виде $y = x^{-\frac{3}{5}}$
7-9	1,3,5	
10.	6	$u = x^2+1,\ n=8$
11.	6	$u = \ln x,\ n=5$
12.	6	$u = tgx,\ n = -\dfrac{3}{2}$
13.	7	$a=5,\ u=3x$
14.	7	$a=5,\ u=tgx$
15.	7	$a=5,\ u=\dfrac{1}{\cos x}=(\cos x)^{-1}$, u' вычисляется по формуле 6 таблицы 1.1.
16.	$7'$	$u=8x$
17.	$7'$	$u=x^3+x^2+8$
18.	$7'$	$u=-\sin^2 x$, u' вычисляется по формуле 6 таблицы 1.1.
19.	$8'$	$u=5x$
20.	$8'$	$u=\sin 3x$
21.	$8'$	$u=\sin^2 x+\sqrt{x}$, для вычисления $(\sin^2 x)'$ и $(\sqrt{x})'$ использовать формулу 6 таблицы 1.1
22.	10	$u=3x$
23.	10	$u=x^2+1$

24.	9	$u=\ln^2 x+3$, для вычисления $\left(\ln^2 x\right)'$ использовать формулу 6 таблицы 1.1
25.	11	$u=10x$
26.	12	$u=3x^5+4$
27.	11	$u=\ln\left(x^3+2\right)$, для вычисления u' использовать формулу $8'$ таблицы
28.	14	$u=2x$
29.	13	$u=e^{3x}$
30.	15	$u=\sqrt{x^3+1}=\left(x^3+1\right)^{\frac{1}{2}}$
31.-36.	2	Внимание! В задачах 31.-36. Функция $y=f(x)$ является произведением двух функций. Производная произведения вычисляется по правилу, описанному формулой 2 таблицы 1.1
37.-42.	4	Внимание! В задачах 37.-42. функция $y=f(x)$ является частным двух функций. Производная частного вычисляется по правилу, описанному формулой 4 таблицы 1.1.
43.-45.	3	Внимание! Обратите внимание на то, что $\ln 8, \ln 5, \cos\frac{\pi}{7}$ - постоянные величины не зависящие от x.
46.-48.		Нужно вычислить y', затем $y''=\left(y'\right)'$, $y'''=\left(y''\right)'$,..., $y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'$.
49.-54.		В задачах 49.-54. требуется продифференцировать показательно- степенную функцию вида: $y=u(x)^{v(x)}$. Метод дифференцирования таких функций изложен в 1.2 и 1.3
55.-57.		В задачах 55.-57. требуется продифференцировать функции, заданные параметрически. Метод дифференцирования таких функций изложен в 1.4
58.-60.		В задачах 58.-60. функция $y=f(x)$ задана неявно. Метод дифференцирования таких функций изложен в 1.5
61.-63.		Привести функции к виду, удобному для дифференцирования, используя свойства логарифма. Смотри 1.2
64.-66.		В задачах 64.-66. вычисление y' существенно упростится, если применить метод логарифмического дифференцирования. Смотреть 1.2
67.	13 и 4	
68.		Ввести обозначения: $y_1=e^x arctge^x$, $y_2=\ln\sqrt{1+e^{2x}}=\ln\left(1+e^{2x}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2x}\right)$. Для вычисления y_1' - формула 2 таблицы 1.1; y_2' - формула $8'$.
69.		Ввести обозначения: $y_1=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$, $y_2=\ln\frac{1+\sin x}{\cos x}=\ln\left(1+\sin x\right)-\ln\cos x$. Для вычисления y_1' - формула 4 таблицы; y_2' - формула 8.

5. РЕШЕНИЯ

1. $y'=7x^6$
2. $y'=4.2x^{4.2-1}=4.2x^{3.2}$.

3. $y' = \left(x^{3/2}\right)' = {3/2}\, x^{3/2-1} = 1.5\sqrt{x}$

4. $y' = \left(x^{-5}\right)' = -5x^{-5-1} = -5x^{-6} = \dfrac{-5}{x^6}$

5. $y' = \left(x^{-2.3}\right)' = -2.3x^{-2.3-1} = -2.3x^{-3.3}$

6. $y' = \left(x^{-\frac{3}{5}}\right)' = -\dfrac{3}{5}x^{-\frac{3}{5}-1} = -\dfrac{3}{5}x^{-\frac{8}{5}} = -\dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^8}}$

7. $y' = 2\left(x^8\right)' - (\sin x)' - (5)' = 16x^7 - \cos x$

8. $y' = 3\left(x^3\right)' + (\cos x)' + (1)' = 9x^2 - \sin x$, $(1)' = 0$

9. $y' = 3\left(x^5\right)' - 4\left(\sqrt{x}\right)' + (\ln 3)' = 15x^4 - \dfrac{4}{2\sqrt{x}} = 15x^4 - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

$(\ln 3)' = 0$, т.к. $\ln 3 = const$

10. $y' = \left(\left(x^2+1\right)^8\right)' = 8\left(x^2+1\right)^7 \cdot \left(x^2+1\right)' = 8\left(x^2+1\right)^7 \cdot 2x = 16x\left(x^2+1\right)^7$

11. $y' = \left(\ln^5 x\right)' = 5(\ln x)^4 \cdot (\ln x)' = \dfrac{5\ln^4 x}{x}$

12. $y' = \left(\dfrac{3}{\sqrt{tg^3 x}}\right)' = 3\left[(tgx)^{-\frac{3}{2}}\right]' = 3\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)(tgx)^{-\frac{5}{2}} \cdot (tgx)' = -\dfrac{9}{2\sqrt{tg^5 x}}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x} = -\dfrac{9}{2tg^2 x\sqrt{tgx}\cdot\cos^2 x} =$

$= -\dfrac{9}{2\sin^2 x\sqrt{tgx}}$

13. $y' = \left(5^{3x}\right)' = 5^{3x}\cdot\ln 5\cdot(3x)' = 3\ln 5\cdot 5^{3x}$

14. $y' = \left(5^{tgx}\right)' = 5^{tgx}\cdot\ln 5\cdot(tgx)' = \dfrac{\ln 5}{\cos^2 x}\cdot 5^{tgx}$

15. $y' = \left(5^{\frac{1}{\cos x}}\right)' = 5^{\frac{1}{\cos x}}\cdot\ln 5\cdot\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)' = 5^{\frac{1}{\cos x}}\cdot\ln 5\cdot\left(\cos^{-1} x\right)' = 5^{\frac{1}{\cos x}}\cdot\ln 5\cdot(-1)\cos^{-2} x(\cos x)' =$

$= \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}\cdot 5^{\frac{1}{\cos x}}\cdot\ln 5$

16. $y' = \left(e^{8x}\right)' = e^{8x}\cdot(8x)' = 8\cdot e^{8x}$

17. $y' = \left(e^{x^3+x^2+8}\right)' = e^{x^3+x^2+8}\cdot\left(x^3+x^2+8\right)' = \left(3x^2+2x\right)\cdot e^{x^3+x^2+8}$

18. $y' = \left(e^{-\sin^2 x}\right)' = e^{-\sin^2 x} \cdot \left(-\sin^2 x\right)' = -\sin 2x e^{-\sin^2 x}$

$\left(-\sin^2 x\right)' = -2\sin x \cdot (\sin x)' = -2\sin x \cos x = -\sin 2x$

19. $y' = (\ln 5x)' = \dfrac{(5x)'}{5x} = \dfrac{5}{5x} = \dfrac{1}{x}$

20. $y' = (\ln \sin 3x)' = \dfrac{(\sin 3x)'}{\sin 3x} = \dfrac{3\cos 3x}{\sin 3x} = 3ctg3x$

21. $y' = \left(\ln\left(\sin^2 x + \sqrt{x}\right)\right)' = \dfrac{\left(\sin^2 x + \sqrt{x}\right)'}{\sin^2 x + \sqrt{x}} = \dfrac{2\sin x \cos x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\sin^2 x + \sqrt{x}} = \dfrac{2\sqrt{x}\sin 2x + 1}{2\sqrt{x}\left(\sin^2 x + \sqrt{x}\right)}$

22. $y' = (\cos 3x)' = -\sin 3x \cdot (3x)' = -3 \cdot \sin 3x$

23. $y' = \left(\cos\left(x^2+1\right)\right)' = -\sin\left(x^2+1\right) \cdot \left(x^2+1\right)' = -2x \cdot \sin\left(x^2+1\right)$

24. $y' = \left(\sin\left(\ln^2 x + 3\right)\right)' = \cos\left(\ln^2 x + 3\right) \cdot \left(\ln^2 x + 3\right)' = \cos\left(\ln^2 x + 3\right) \cdot \dfrac{2\ln x}{x}$

25. $y' = (tg10x)' = \dfrac{(10x)'}{\cos^2(10x)} = \dfrac{10}{\cos^2(10x)}$

26. $y' = \left(ctg\left(3x^5+4\right)\right)' = -\dfrac{\left(3x^5+4\right)'}{\sin^2\left(3x^5+4\right)} = -\dfrac{15x^4}{\sin^2\left(3x^5+4\right)}$

27. $y' = \left(tg\left(\ln\left(x^3+2\right)\right)\right)' = \dfrac{\left(\ln\left(x^3+2\right)\right)'}{\cos^2\left(\ln\left(x^3+2\right)\right)} = \dfrac{3x^2}{\left(x^3+2\right)\cos^2\left(\ln\left(x^3+2\right)\right)}$

$\left(\ln\left(x^3+2\right)\right)' = \dfrac{\left(x^3+2\right)'}{x^3+2} = \dfrac{3x^2}{x^3+2}$

28. $y' = (\arccos 2x)' = -\dfrac{(2x)'}{\sqrt{1-(2x)^2}} = -\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

29. $y' = \left(\arcsin e^{3x}\right)' = \dfrac{\left(e^{3x}\right)'}{\sqrt{1-\left(e^{3x}\right)^2}} = \dfrac{3e^{3x}}{\sqrt{1-e^{6x}}}$

30. $y' = \left(arctg\sqrt{x^3+1}\right)' = \dfrac{\left(\sqrt{x^3+1}\right)'}{1+\left(x^3+1\right)} = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}\left(2+x^3\right)}$

$\left(\sqrt{x^3+1}\right)' = \dfrac{1}{2}\left(x^3+1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(x^3+1\right)' = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$

31. $y' = (e^x)' \cos x + e^x (\cos x)' = e^x \cdot \cos x - e^x \cdot \sin x = e^x (\cos x - \sin x).$

32. $y' = (x^8 + 1)' ctg5x + (x^8 + 1)(ctg5x)' = 8x^7 ctg5x - \dfrac{5(x^8 + 1)}{\sin^2 5x}$

33. $y' = (e^{3x})' (x^3 + \sin 2x) + e^{3x} (x^3 + \sin 2x)' = 3e^{3x} (x^3 + \sin 2x) + e^{3x} (3x^2 + 2\cos 2x) =$

$= e^{3x} (3x^3 + 3\sin 2x + 3x^2 + 2\cos 2x)$

34. $y' = (e^{2x})' \arcsin 3x + e^{2x} (\arcsin 3x)' = 2e^{2x} \arcsin 3x + \dfrac{3e^{2x}}{\sqrt{1 - 9x^2}} = e^{2x} \left(2\arcsin 3x + \dfrac{3}{\sqrt{1 - 9x^2}} \right)$

35. $y' = (5^x)' \sin x + 5^x (\sin x)' = 5^x \ln 5 \sin x + 5^x \cos x$

36. $y' = (x^3 + 2x + 1)' \sqrt{x^2 + 1} + (x^3 + 2x + 1)\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)' = (3x^2 + 2)\sqrt{x^2 + 1} + \dfrac{(x^3 + 2x + 1)x}{\sqrt{x^2 + 1}} =$

$= \dfrac{(3x^2 + 2)(x^2 + 1) + (x^4 + 2x^2 + x)}{\sqrt{x^2 + 1}} = \dfrac{4x^4 + 7x^2 + x + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$

$\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)' = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

37. $y' = \dfrac{(\ln x)' x - (x)' \ln x}{x^2} = \dfrac{\frac{x}{x} - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

38. $y' = \left(\dfrac{e^x}{x} \right)' = \dfrac{(e^x)' x - x' e^x}{x^2} = \dfrac{e^x x - e^x}{x^2} = \dfrac{e^x (x - 1)}{x^2}$

39. $y' = \dfrac{(2x + 3)' (x^2 - 5x + 5) - (x^2 - 5x + 5)' (2x + 3)}{(x^2 - 5x + 5)^2} = \dfrac{2(x^2 - 5x + 5) - (2x - 5)(2x + 3)}{(x^2 - 5x + 5)^2} = \dfrac{-2x^2 - 6x + 25}{(x^2 - 5x + 5)^2}$

40. $y' = \dfrac{(a + bx)' (c + dx) - (c + dx)' (a + bx)}{(c + dx)^2} = \dfrac{b(c + dx) - d(a + bx)}{(c + dx)^2} = \dfrac{bc - ad}{(c + dx)^2}$

41. $y' = \left(\dfrac{x^2}{\ln x} \right)' = \dfrac{(x^2)' \ln x - (\ln x)' x^2}{\ln^2 x} = \dfrac{2x \ln x - x}{\ln^2 x} = \dfrac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x}$

42. $y' = \dfrac{(\sin x + \cos x)' (\sin x - \cos x) - (\sin x - \cos x)' (\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2} =$

$\dfrac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\cos x + \sin x)^2}{(\sin x - \cos x)^2} = \dfrac{-\left[(\sin x - \cos x)^2 + (\cos x + \sin x)^2\right]}{(\sin x - \cos x)^2} = \dfrac{-2}{(\sin x - \cos x)^2} = \dfrac{2}{\sin 2x - 1}$

43. $y' = \ln 8 (\sin x)' = \ln 8 \cdot \cos x$

44. $y' = \dfrac{(\arcsin x)'}{\cos\frac{\pi}{7}} = \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{7}\sqrt{1-x^2}}$

45. $y' = \dfrac{(e^x + \ln 5 \sin x)'}{8+\ln^2 x} = \dfrac{e^x + \ln 5 (\sin x)'}{8+\ln^2 x} = \dfrac{e^x + \ln 5\cdot\cos x}{8+\ln^2 x}$

46. $y' = 5x^4 + 8x^3 - 9x^2 + 8$, $y'' = 20x^3 + 24x^2 - 18x$, $y''' = 60x^2 + 48x - 18$, $y^{(4)} = 120x + 48$, $y^{(5)} = 120$, $y^{(6)} = 0$.

47. $y' = 2^x \ln 2$, $y'' = 2^x \ln 2\cdot\ln 2 = 2^x \ln^2 2$, $y''' = 2^x \ln^3 2$, $y^{(n)} = 2^x(\ln 2)^n$.

48. $y' = \dfrac{1}{x}$; $y'' = -\dfrac{1}{x^2}$; $y''' = \dfrac{2}{x^3}$; $y^{(4)} = -2\cdot 3x^{-4}$; $y^{(5)} = 2\cdot 3\cdot 4x^{-5}$;
$y^{(6)} = -2\cdot 3\cdot 4\cdot 5x^{-6}$;...; $y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\dfrac{1}{x^n}$.

49. $\ln y = \ln x^x = x\ln x$; $\dfrac{y'}{y} = [x\ln x]' = \ln x + \dfrac{x}{x} = \ln x + 1$,

$y' = x^x(\ln x + 1)$

50. $\ln y = \ln(\cos x)^{\sin x} = \sin x\cdot\ln(\cos x)$,

$\dfrac{y'}{y} = [\sin x\cdot\ln(\cos x)]' = \cos x\ln\cos x - \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$,

$y' = (\cos x)^{\sin x}\left[\cos x\ln\cos x - \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}\right] = (\cos x)^{\sin x-1}\left[\cos^2 x\ln\cos x - \sin^2 x\right]$

51. $\ln y = \ln(arctgx)^x = x\cdot\ln(arctgx)$,

$\dfrac{y'}{y} = (x\cdot\ln(arctgx))' = \ln(arctgx) + \dfrac{x}{arctgx}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}$,

$y' = (arctgx)^x\left(\ln(arctgx) + \dfrac{x}{arctgx}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}\right) = (arctgx)^{x-1}\left(\ln(arctgx)\cdot arctgx + \dfrac{x}{1+x^2}\right)$.

52. $\ln y = \ln x^{\sin x} = \sin x\cdot\ln x$,

$\dfrac{y'}{y} = [\sin x\cdot\ln x]' = \cos x\ln x + \dfrac{\sin x}{x}$,

$y' = x^{\sin x}\left[\cos x\ln x + \dfrac{\sin x}{x}\right] = x^{\sin x-1}[x\cos x\ln x + \sin x]$

53. $\ln y = \ln(tgx)^{arctgx} = arctgx\ln(tgx)$,

$$\frac{y'}{y}=\left[arctgx\cdot\ln\left(tgx\right)\right]'=\frac{1}{1+x^2}\ln\left(tgx\right)+\frac{arctgx}{tgx\cdot\cos^2 x}=\frac{\ln\left(tgx\right)}{1+x^2}+\frac{arctgx}{\sin x\cdot\cos x};$$

$$y'=\left(tgx\right)^{arctgx}\left[\frac{\ln\left(tgx\right)}{1+x^2}+\frac{2arctgx}{\sin 2x}\right]$$

54. $\ln y=\ln\left(\sin x\right)^{3x}=3x\ln\left(\sin x\right),$

$$\frac{y'}{y}=3\left[x\ln\left(\sin x\right)\right]'=3\left[\ln\sin x+\frac{x\cos x}{\sin x}\right]=3\left[\ln\sin x+xctgx\right],$$

$$y'=3\left(\sin x\right)^{3x}\left[\ln\sin x+xctgx\right]$$

55. $x'_t=2t \qquad y'_t=3t^2$

$$y'_x=\frac{y'_\varphi}{x'_\varphi}=\frac{3}{2}t,\quad \left(y'_x\right)'_t=\frac{3}{2}$$

$$y''_{xx}=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}=\frac{\frac{3}{2}}{2t}=\frac{3}{4t}$$

56. $x'_\varphi=a\left(1-\cos\varphi\right) \qquad y'_\varphi=a\sin\varphi,$

$$y'_x=\frac{y'_\varphi}{x'_\varphi}=\frac{a\sin\varphi}{a\left(1-\cos\varphi\right)}=\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}=ctg\frac{\varphi}{2}$$

57. $x'_\varphi=3a\cos^2\varphi\left(-\sin\varphi\right) \qquad y'_\varphi=3b\sin^2\varphi\cos\varphi,$

$$y'_x=\frac{y'_\varphi}{x'_\varphi}=-\frac{b\sin\varphi}{a\cos\varphi}=-\frac{b}{a}tg\varphi,\quad \left(y'_x\right)'_\varphi=-\frac{b}{a}\left(tg\varphi\right)'_\varphi=-\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{\cos^2\varphi}$$

$$y''_{xx}=\frac{\left(y'_x\right)'_\varphi}{x'_\varphi}=-\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{\cos^2\varphi}:\left(-3a\cos^2\varphi\sin\varphi\right)=\frac{b}{3a^2\sin\varphi\cdot\cos^4\varphi}$$

58. $3x^2+3y^2\cdot y'-3\left(xy\right)'_x=0 \qquad 3x^2+3y^2\cdot y'-3\left(y+xy'\right)=0$

$$y'\left(y^2-x\right)=y-x^2,\qquad y'=\frac{y-x^2}{y^2-x}$$

59. $x^y-y^x=0$ (*); $\qquad \left(x^y-y^x\right)'_x=0;\qquad \left(x^y\right)'_x-\left(y^x\right)'_x=0$

Обозначим $u_1=x^y$, $u_2=y^x$. Тогда $u_1'-u_2'=0$. Внимание! u_1 и u_2 – показательно-степенные функции, так как *y* является функцией от *x*. Для их дифференцирования используется метод, изложенный в 1.3

$\ln u_1 = \ln x^y = y\ln x$;

$$\frac{u_1'}{u_1} = (y\ln x)'_x = y'\ln x + \frac{y}{x} \to u_1' = x^y\,\frac{xy'\ln x + y}{x} = x^{y-1}(xy'\ln x + y)$$

$\ln u_2 = \ln y^x = x\ln y$;

$$\frac{u_2'}{u_2} = (x\ln y)' = \ln y + \frac{xy'}{y} \to u_2' = y^x\,\frac{y\ln y + xy'}{y} = y^{x-1}(y\ln y + xy')$$

$x^{y-1}(xy'\ln x + y) - y^{x-1}(y\ln y + xy') = 0$,

$y'(x^y\ln x - xy^{x-1}) + yx^{y-1} - y^x\ln y = 0$,

$$y' = \frac{y^x\ln y - yx^{y-1}}{x^y\ln x - xy^{x-1}}$$

Учитывая, что из (*) следует $x^y = y^x$, получим

$$y' = \frac{y(x\ln y - y)}{x(y\ln x - x)}$$

60. $3x^2 + \frac{y'}{y} - (x^2\cdot e^y)' = 0$; $\qquad 3x^2 + \frac{y'}{y} - 2xe^y - x^2e^yy' = 0$;

$y'\left(\frac{1}{y} - x^2e^y\right) = 2xe^y - 3x^2 \qquad y' = \frac{y(2xe^y - 3x^2)}{1 - x^2ye^y}$

61. $y' = \left(\ln\frac{x^2+3}{x^3+1}\right)' = \left(\ln(x^2+3) - \ln(x^3+1)\right)' = \frac{(x^2+3)'}{x^2+3} - \frac{(x^3+1)'}{x^3+1} = \frac{2x}{x^2+3} - \frac{3x^2}{x^3+1} =$

$= \frac{2x^4 + 2x - 3x^4 - 9x^2}{(x^2+3)(x^3+1)} = \frac{2x - 9x^2 - x^4}{(x^2+3)(x^3+1)}$

62. $y' = \left(\ln\sqrt{\frac{\sin x}{x}}\right)' = \left(\frac{1}{2}(\ln\sin x - \ln x)\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(ctgx - \frac{1}{x}\right)$

63. $y' = \left(\ln\sqrt[3]{\frac{x-5}{x+1}}\right)' = \left(\frac{1}{3}(\ln(x-5) - \ln(x+1))\right)' = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{3}\frac{x+1-x+5}{(x-5)(x+1)} =$

$= \frac{2}{(x-5)(x+1)}$

64. $\ln y = \ln\sqrt[5]{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{5}[\ln(1+x) - \ln(1-x)]$,

$\frac{y'}{y} = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right] = \frac{2}{5(1+x)(1-x)}$, $\qquad y' = \frac{2}{5(1+x)(1-x)}\cdot\sqrt[5]{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{2}{5(1+x)^{4/5}(1-x)^{6/5}}$

65. $\ln y = \ln \dfrac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5} = \dfrac{1}{2}\ln(x+2) + 4\ln(3-x) - 5\ln(x+1)$,

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+2} - \frac{4}{3-x} - \frac{5}{x+1} = \frac{x^2-32x-73}{2(x+2)(3-x)(x+1)},$$

$$y' = \frac{x^2-32x-73}{2(x+2)(3-x)(x+1)}\cdot\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5} = \frac{(x^2-32x-73)(3-x)^3}{2\sqrt{x+2}\cdot(x+1)^6}$$

66. $\ln y = \ln\left[\dfrac{(x+2)(x-1)^2}{x^5}\right]^{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3}[\ln(x+2) + 2\ln(x-1) - 5\ln x]$,

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x-1} - \frac{5}{x}\right] = \frac{1}{3}\cdot\frac{-2x^2-2x+10}{(x+2)(x-1)x} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2+x-5}{(x+2)(x-1)x},$$

$$y' = -\frac{2}{3}y\cdot\frac{x^2+x-5}{(x+2)(x-1)x} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2+x-5}{(x+2)(x-1)x}\sqrt[3]{\frac{(x+2)(x-1)^2}{x^5}} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{(x^2+x-5)}{x^2\sqrt[3]{x^2(x+2)^2(x-1)}}$$

67. $y' = \left(\dfrac{2x^2}{1+x^4}\right)'\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2x^2}{1+x^4}\right)^2}} = \dfrac{4x(1-x^4)}{(1+x^4)^2}\cdot\dfrac{1+x^4}{1-x^4} = \dfrac{4x}{1+x^4}$

68. $y = e^x arctge^x - \ln\sqrt{1+e^{2x}}$; $\quad y' = e^x arctge^x + e^x\dfrac{e^x}{1+e^{2x}} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2e^{2x}}{1+e^{2x}} = e^x arctge^x$

69. $y = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} + \ln(1+\sin x) - \ln\cos x$; $\; y' = \dfrac{1+\sin^2 x}{\cos^3 x} + \dfrac{\cos x}{1+\sin x} + \dfrac{\sin x}{\cos x}$,

Приведя дроби к общему знаменателю и преобразовав, получим: $y' = \dfrac{2}{\cos^3 x}$