ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Название кафедры»

Практикум

«Дифференциальные уравнения второго порядка»

по дисциплине

«Математика»

Авторы

Ворович Е. И.,

Коровина К.С.,

Тукодова О. М.

Ростов-на-Дону, 2019

Аннотация

Электронное учебное пособие «Дифференциальные уравнения второго порядка. Практикум» подготовлено для студентов технических и экономических направлений бакалавриата всех форм обучения. Цель работы – научить студентов методам решения дифференциальных уравнений второго порядка.

Пособие предназначено для самостоятельной работы студентов, подготовки к контрольным мероприятиям, в том числе проводимых в форме тестирования. Разработано в соответствии с учебной программой по математике для технических и экономических направлений ДГТУ и его филиалов.

Авторы

к.ф.-м. н., доцент кафедры «Математика» Ворович Е.И.,
ст. преп. кафедры «Математика» Коровина К.С.,
к.ф.-м. н., доцент кафедры «Математика»
Тукодова О.М.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ, ФОРМУЛЫ, АЛГОРИТМЫ, ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ.

Уравнение вида

$$y''+py'+qy=f(x) \qquad (1),$$

где p и q – постоянные величины, называется линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Если $f(x)\neq 0$, уравнение называется неоднородным, если $f(x)\equiv 0$– однородным.

Однородное уравнение, соответствующее уравнению (1), имеет вид

$$y''+py'+qy=0 \qquad (2).$$

Введем обозначения: $y_н$ – общее решение уравнения (1), $y_о$ – общее решение уравнения (2), $\overline{y}$ – какое-либо, любое частное решение уравнения (1).

Можно доказать, что $y_н$ можно получить следующим образом:

$$y_н=y_о+\overline{y} \qquad (3)$$

Таким образом, поиск $y_н$ разбился на две части:

1) определение $y_о$;

2) определение $\overline{y}$.

<u>Общее решение линейного однородного уравнения</u>.

Уравнение

$$k^2+pk+q=0 \qquad (4)$$

называется характеристическим уравнением уравнения (2).
(4) – квадратное уравнение и, следовательно, имеет 2 корня, обозначим их k_1 и k_2. Дискриминант уравнения (4) обозначим D.

$$D=p^2-4q$$

Здесь возможны три случая:
1) k_1 и k_2 – действительные и $k_1\neq k_2$ (при этом $D>0$)
2) k_1 и k_2 – действительные и $k_1=k_2$ (при этом $D=0$)
3) k_1 и k_2 – комплексно-сопряженные, то есть $k=\alpha\pm i\beta$ (при этом $D<0$)

Для каждого случая выведена формула для определения общего решения линейного однородного уравнения $y_о$.

1) $k_1\neq k_2$ $\quad y_о=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$ (5)
2) $k_1=k_2=k$ $\quad y_о=e^{kx}(C_1x+C_2)$ (6)
3) $k=\alpha\pm i\beta$ $\quad y_о=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$ (7)

Примеры. Найти общее решение линейного однородного уравнения

1) $y''-7y'+12y=0$
Шаг 1: составляем характеристическое уравнение:

$$k^2-7k+12=0$$

Шаг 2: находим корни характеристического уравнения:

k_1=3, k_2=4. Здесь $k_1 \neq k_2$, случай 1,

Шаг 3: выписываем решение, формула (5).

$$y_o=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}$$

2) $y''+10y'+25y=0$

$k^2+10k+25=0$ $\qquad k=\dfrac{-10\pm\sqrt{100-100}}{2}=-5$

Здесь $D=0$, $k_1=k_2$= -5, случай 2, $\qquad y_o$ находим по формуле (6)

$y_o=e^{-5x}(C_1x+C_2)$

3) $y''-3y'+3y=0$

$k^2-3k+3=0$ $\qquad k=\dfrac{3\pm\sqrt{9-12}}{2}=\dfrac{3\pm\sqrt{-3}}{2}=\dfrac{3\pm i\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Здесь случай 3, $\alpha=\dfrac{3}{2}$, $\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, для y_o выбираем формулу (7)

$y_o=e^{\frac{3}{2}x}(C_1\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x)$

4) $y''-4y'=0$

$k^2-4k=0$ $\qquad k(k-4)=0$

k_1=0, k_2=4, $k_1 \neq k_2$, случай 1), формула (5).

$y_o=C_1e^0+C_2e^{4x}=C_1+C_2e^{4x}$

5) $y''-4y=0$

$k^2-4=0$

k_1=2, k_2= -2, $k_1 \neq k_2$, случай 1), формула (5).

$y_o=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$

6) $y''+4y=0$

$k^2+4=0$ $\qquad k^2=-4$, $k=\pm\sqrt{-4}=\pm 2i$

Здесь случай 3, $\alpha=0$, $\beta=2$, формула (7)

$y_o=e^0(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$

<u>Определение $\bar{y}$. Метод неопределенных коэффициентов.</u>

Отметим, что $\bar{y}$ – любое частное решение уравнения (1). Это означает, что в качестве $\bar{y}$ можно взять любую функцию $y(x)$, такую, что при подстановке ее и ее производных в уравнение (1) последнее превращается в тождество.

Метод неопределенных коэффициентов – метод подбора $\bar{y}$. Он разработан для тех уравнений вида (1), у которых правая часть имеет специальный вид.

Введем обозначения

$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ – многочлен степени n.

Например: $3x^4 - 2x^2 + 1$ обозначим $P_4(x)$,

$1 - x^2$ – $P_2(x)$,

$3x + 1$ – $P_1(x)$,

Постоянные будем обозначать $P_0(x)$, считая их многочленами нулевой степени. Например, числа 3 или -2 обозначим $P_0(x)$.

Рассмотрим 3 типа правых частей уравнения (1), для которых выведены формулы подбора $\bar{y}$.

Сводная таблица вида частного решения для различных типов правых частей.

Таблица 1.

$f(x)$	Вид частного решения уравнения (1) $\bar{y}$
1) $f(x) = e^{\mu x}P_n(x)$	$\bar{y} = x^l e^{\mu x} Q_n(x)$ (8) $l = \begin{cases} 0, \textit{если } \mu \neq k_1 \textit{ и } \mu \neq k_2, \textit{то есть } \mu - \textit{не корень уравнения } (4) \\ 1, \quad \textit{если } \mu = k_1 \textit{ или } \mu = k_2, k_1 \neq k_2 \\ 2, \quad \textit{если } \mu = k_1 = k_2 \end{cases}$ $Q_n(x)$– многочлен той же степени, что и $P_n(x)$, но с неопределенными коэффициентами.

Замечание 1. $f(x) = P_n(x)$ – частный случай $f(x)$ первого типа при $\mu = 0$.

$f(x) = Ae^{\mu x}$ (A – постоянная величина) – частный случай $f(x)$ первого типа, здесь $P_n(x)$ =A – многочлен нулевой степени.

Замечание 2. Как записывается $Q_n(x)$.

Обозначим неопределенные коэффициенты A, B, C, … Тогда $Q_0(x) = A$, $Q_1(x) = Ax + B$,

$Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C$, $Q_3(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$,…

2) $f(x) = e^{\mu x}(M\cos\gamma x + N\sin\gamma x)$, где M и N – постоянные.	$\bar{y} = x^l e^{\mu x}(A\cos\gamma x + B\sin\gamma x)$ (9) $l = \begin{cases} 0, \quad \textit{если } \mu + i\gamma \ - \textit{не является корнем} \\ \textit{характеристического уравнения } (4) \\ 1, \quad \textit{если } \mu + i\gamma \ - \ \textit{корень} \\ \textit{характеристического уравнения } (4) \end{cases}$ A и B –неопределенные коэффициенты.
3) $f(x) = e^{\mu x}(P_n(x)\cos\gamma x + R_m(x)\sin\gamma x)$ Здесь $R_m(x)$– многочлен степени m,	$\bar{y} = x^l e^{\mu x}(Q_k(x)\cos\gamma x + L_k(x)\sin\gamma x)$ (10)

	$l=\begin{cases}0, & \text{если } \mu+i\gamma \text{ – не является корнем} \\ & \text{характеристического уравнения (4)} \\ 1, & \text{если } \mu+i\gamma \text{ – корень} \\ & \text{характеристического уравнения (4)}\end{cases}$ $Q_k(x)$ и $L_k(x)$ – многочлены степени k с неопределенными коэффициентами $k=\max(n,m)$

Конкретные значения неопределенных коэффициентов A,B,C, … находятся из того условия, что $\overline{y}$ должно удовлетворять уравнению (1).

Для их определения подставляем $\overline{y}$, $\overline{y}'$, $\overline{y}''$ в исходное уравнение (1) и подбираем A,B,C,… так, чтобы уравнение превратилось в равенство.

Алгоритм определения $\overline{y}$ – частного решения неоднородного уравнения (1).

1) Находим корни k_1 и k_2 характеристического уравнения (4).

2) Анализируем правую часть $f(x)$, определяем ее тип и выписываем $\overline{y}$ с неопределенными коэффициентами по соответствующей формуле (таблица 1).

3) Подставляем $\overline{y}$ и ее производные в исходное уравнение и составляем систему уравнений для определения неопределенных коэффициентов. Решаем систему, находим конкретные значения коэффициентов.

4) Подставляем найденные значения коэффициентов в формулу для $\overline{y}$.

<u>Алгоритм определения $y_н$ – общего решения неоднородного уравнения (1).</u>

1) Находим y_o – общее решения соответствующего однородного уравнения (1) (формулы (5)-(7)).

2) Находим $\overline{y}$ (таблица 1, формулы (8)-(10)).

3) Составляем $y_н = y_o + \overline{y}$.

<u>Замечание</u>. Принцип суперпозиции. Пусть правая часть уравнения (1) $f(x)$ представляет из себя сумму нескольких функций

$$f(x) = f_1(x) + \ldots + f_k(x).$$

Тогда частное решение уравнения (1) можно искать в виде

$$\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \ldots + \bar{y}_k \quad (11),$$

где $\bar{y}_i$ – частное решение уравнения (1), соответствующее правой части $f_i(x)$.

<u>Примеры</u>

7) а) Найти общее решение уравнения $y''-2y'=e^x(x^2-x-3)$

1.Находим общее решение соответствующего однородного уравнения $y''-2y'=0.$

$k^2-2k=0$ $\quad k(k-2)=0$ $\quad k_1=0$ $\; k_2=2$ $\quad y_0=C_1e^0+C_2e^{2x}=C_1+C_2e^{2x}$

2. Анализируем правую часть уравнения и выписываем $\overline{y}$ с неопределенными коэффициентами в соответствии с формулами (8)

$f(x)=e^x(x^2-x-3)$, $\mu=1\neq k_1\neq k_2 \to l=0$. $x^2-x-3=P_2(x)\to Q(x)=Ax^2+Bx+C$

$\bar{y}=x^0e^xQ_2(x)=e^x(Ax^2+Bx+C)$.

$\bar{y}' = e^x(Ax^2 + Bx + C) + e^x(2Ax + B) = e^x(Ax^2 + Bx + C + 2Ax + B)$

$\bar{y}'' = e^x(Ax^2 + Bx + C + 2Ax + B) + e^x(2Ax + B + 2A) = e^x(Ax^2 + Bx + C + 4Ax + 2B + 2A)$

Подставляем $\bar{y}'$ и $\bar{y}''$ в левую часть исходного уравнения, общий множитель e^x выносим за скобки

$e^x(Ax^2 + Bx + C + 4Ax + 2B + 2A - 2Ax^2 - 2Bx - 2C - 4Ax - 2B) = e^x(x^2 - x - 3)$

Многочлен в левой части распишем по степеням ***x***

$x^2(A-2A)+x(B+4A-2B-4A)+C+2B+2A-2C-2B=x^2-x-3$

Два многочлена могут быть равны тогда и только тогда, когда у них равны коэффициенты при одинаковых степенях *x.* Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x* в правой и левой части, получаем систему линейных уравнений для определения A, B и C

$$\begin{cases} -A = 1 \rightarrow A = -1 \\ -B = -1 \rightarrow B = 1 \\ 2A - C = -3 \quad C = 2A + 3 = 1 \end{cases}$$

Итак, $\bar{y} = e^x(-x^2 + x + 1)$

$y_н = y_0 + \bar{y} = C_1 + C_2 e^{2x} + e^x(-x^2 + x + 1)$.

б)Найти частное решение исходного уравнения $y_{частн}$, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

$y(0)=2 \rightarrow C_1 + C_2 + 1 = 2 \rightarrow C_1 + C_2 = 1$

$y_н' = 2C_2 e^{2x} + e^x(-x^2 + x + 1) + e^x(-2x + 1)$

$y'(0) = 2 \rightarrow 2C_2 + 1 + 1 = 2 \rightarrow 2C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0 \quad C_1 = 1;$

$y_{частн} = = 1 + e^x(-x^2 + x + 1)$

8)Найти общее решение уравнения $y''- 4y'+4y=3e^{2x}$

1.Находим общее решение соответствующего однородного уравнения $y''-4y'+4y=0.$

$k^2-4k+4=0 \quad k_1 = k_2 = 2 \quad y_0 = (C_1 x + C_2)\, e^{2x}$

2. Анализируем правую часть уравнения и выписываем $\bar{y}$ с неопределенными коэффициентами в соответствии с формулами (8)

$f(x)=3e^{2x}, \ \mu = 2 = k_1 = k_2 \rightarrow l=2 \quad 3=P_0(x) \rightarrow Q_0(x)=A$

$\bar{y} = Ax^2 e^{2x} \quad \bar{y}' = 2e^{2x} Ax^2 + 2Ax\, e^{2x} = e^{2x}(2Ax^2 + 2Ax)$

$\bar{y}'' = 2e^{2x}(2Ax^2 + 2Ax) + e^{2x}(4Ax + 2A) = e^{2x}(4Ax^2 + 8Ax + 2A)$

Подставляем $\bar{y}'$ и $\bar{y}''$ в левую часть исходного уравнения, общий множитель e^{2x} выносим за скобки

$e^{2x}(4Ax^2 + 8Ax + 2A - 8Ax^2 - 8Ax + 4Ax^2) = 3e^{2x}$

Многочлен в левой части распишем по степеням *x*

$x^2(4A-8A+4A)+x(8A-8A)+2A=3 \rightarrow 2A=3, A=1.5$

Итак, $\bar{y}$ =1.5x^2e^{2x};

$y_н = y_0 + \bar{y}$ =(C_1x+C_2) e^{2x} +1,5x^2e^{2x}

9)Найти общее решение уравнения $y''- 4y'+8y=\sin 2x$

1.Находим общее решение соответствующего однородного уравнения $y''-4y'+8y=0$.

$k^2 -4k+8=0$ $\quad k=\frac{4\pm\sqrt{16-32}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{4\pm 4i}{2}=2\pm 2i$, $\alpha =2$, $\beta = 2$,

$k_1 = 2+2i$, $k_2 = 2-2i$

y_0 =($C_1\cos 2x$+ $C_2\sin 2x$) e^{2x}

2. Анализируем правую часть уравнения и выписываем $\bar{y}$ с неопределенными коэффициентами в соответствии с формулами (9)

$f(x)=\sin 2x$, $\mu =0$ $\quad \nu =2$, $\mu +i\nu =2i\neq k_1 \neq k_2 \to l=0$

$\bar{y} = x^0(A\cos 2x+B\sin 2x)= A\cos 2x+B\sin 2x$,

$\bar{y}' = -2A\sin 2x+2B\cos 2x$, $\bar{y}'' = -4A\cos 2x-4B\sin 2x$,

Подставляем $\bar{y}'$ и $\bar{y}''$ в левую часть исходного уравнения

$-4A\cos 2x-4B\sin 2x+8A\sin 2x-8B\cos 2x+8A\cos 2x+8B\sin 2x=\sin 2x$

$\cos 2x(4A-8B)+\sin 2x(8A+4B)=\sin 2x$

Равенства вида $M\cos\alpha x+N\sin\alpha x= P\cos\alpha x+Q\sin\alpha x$ имеют место тогда и только тогда, когда коэффициенты при $\cos\alpha x$ и $\sin\alpha x$ слева и справа соответственно равны, то есть

$$\begin{cases} M = P \\ N = Q \end{cases}$$

Таким образом, коэффициенты A и B – решения системы уравнений

$$\begin{cases} 4A-8B=0 \\ 8A+4B=1 \end{cases}$$

$A=0,1$, $B=0,05$

$y_н = y_0 + \bar{y}$ =(C_1 $\cos 2x$ +C_2 $\sin 2x$) e^{2x}+0,1$\cos 2x$+0,05$\sin 2x$

10) Найти общее решение уравнения

$y''+3y'+2y = x\sin x$

Характеристическое уравнение имеет вид $k^2+3k+2=0$, его корни k_1= -1, k_2= -2. Здесь $k_1 \neq k_2$, случай 1, решение однородного уравнения выписывается по формуле (5): $y_o = C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$

$f(x) = x\sin x$ – правая часть третьего типа, $\bar{y}$ определяется формулой (10).

Здесь $\mu = 0$ и $\gamma = 1$, $\mu + i\gamma = i$ не является корнем характеристического уравнения $\to$ $l = 0$.

$R_m(x) = x$ – многочлен первой степени (m=1).

$P_n(x) = 0$ – многочлен нулевой степени (n=1).

В формуле (10) $k = \max(0,1) = 1 \to$ $Q_k(x) = Q_1(x) = A_1x + A_2$ $\quad L_k(x) = L_1(x) = B_1x + B_2$

$$\bar{y} = (A_1x + A_2)\cos x + (B_1x + B_2)\sin x,$$

$$\bar{y}'=(A_1+B_2+B_1x)\cos x+(B_1-A_2-A_1x)\sin x,$$
$$\bar{y}''=(2B_1x-A_2-A_1x)\cos x-(2A_1+B_2+B_1x)\sin x.$$

Подставляя эти выражения в исходное уравнение, будем иметь

$$(2B_1-A_2-A_1x)\cos x-(2A_1+B_2+B_1x)\sin x+3(A_1+B_2+B_1x)\cos x+3(B_1-A_2-A_1x)\sin x+$$
$$+2(A_1x+A_2)\cos x+(B_1x+B_2)\sin x=x\sin x$$
$$[(A_1+3B_1)x+3A_1+A_2+2B_1+3B_2]\cos x+[(-3A_1+B_1)x-2A_1-3A_2+3B_1+B_2]\sin x=x\sin x$$

Отсюда получаем систему линейных уравнений относительно A_1, A_2, B_1, B_2

$$\begin{cases} A_1+3B_1=0 \\ 3A_1+A_2+2B_1+3B_2=0 \\ -3A_1+B_1=1 \\ 2A_1-3A_2+3B_1+B_2=0 \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $A_1=-\frac{3}{10}$, $A_2=\frac{17}{50}$, $B_1=\frac{1}{10}$, $B_2=\frac{3}{25}$ и частное решение $\bar{y}$ запишется так:

$$\bar{y}=\left(-\frac{3}{10}x+\frac{17}{50}\right)\cos x+\left(\frac{1}{10}x+\frac{13}{25}\right)\sin x.$$

Общее решение данного уравнения

$$y_н(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+\left(-\frac{3}{10}x+\frac{17}{50}\right)\cos x+\left(\frac{1}{10}x+\frac{13}{25}\right)\sin x.$$

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ЗАДАНИЯ.

А) Выписать вид $\bar{y}$ с неопределенными коэффициентами (используя формулы (8)-(10)) для уравнения $y''+y'-2y=f(x)$ для различных правых частей $f(x)$. Если правильный ответ не получен, смотрите пояснения в таблице 2.

1. $f(x)=-5$
2. $f(x)=6x-5$
3. $f(x)=x^2-3x$
4. $f(x)=4x^3+2x^2+5$
5. $f(x)=4e^{3x}$
6. $f(x)=(6x-7)e^{-x}$
7. $f(x)=\frac{x}{2}e^{-2x}$
8. $f(x)=4e^{x}$
9. $f(x)=\sin x$
10. $f(x)=-5\cos 2x$
11. $f(x)=7\cos 3x-4\sin 3x$
12. $f(x)=-x\sin 5x$
13. $f(x)=(x-1)\cos\frac{x}{2}$
14. $f(x)=x\cos x+2\sin x$

15. $f(x)=9e^{x}\sin 2x$
16. $f(x)=\frac{1}{3}e^{-3x}\sin x$
17. $f(x)=e^{-2x}(5\sin 4x-\cos 4x)$

B) Выписать вид $\bar{y}$ с неопределенными коэффициентами (используя формулы (8)-(10)) для уравнения $y''+3y'=f(x)$ для различных правых частей $f(x)$. Если правильный ответ не получен, смотрите пояснения в таблице 3.

18. $f(x)=-5$
19. $f(x)=-3x$
20. $f(x)=x^{2}-6$
21. $f(x)=x^{3}$
22. $f(x)=(4x^{2}+x)e^{3x}$
23. $f(x)=(5-x)e^{-3x}$

C) Выписать вид $\bar{y}$ с неопределенными коэффициентами (используя формулы (8)-(10)) для уравнения $y''-4y'+4y=f(x)$ для различных правых частей $f(x)$. Если правильный ответ не получен, смотрите пояснения в таблице 4.

24. $f(x)=5e^{x}$
25. $f(x)=3e^{2x}$
26. $f(x)=(5x-1)e^{2x}$

D) Выписать вид $\bar{y}$ с неопределенными коэффициентами (используя формулы (8)-(10)) для уравнения $y''+6y'+10y=f(x)$ для различных правых частей $f(x)$. Если правильный ответ не получен, смотрите пояснения в таблице 5.

27. $f(x)=2e^{-3x}\sin 2x$
28. $f(x)=2e^{-3x}\cos x$
29. $f(x)=e^{x}(5\cos x-3\sin x)$
30. $f(x)=e^{-3x}(-\cos x+2\sin x)$

E) Выписать вид $\bar{y}$ с неопределенными коэффициентами (используя формулы (8)-(10)) для уравнения $y''+4y=f(x)$ для различных правых частей $f(x)$. Если правильный ответ не получен, смотрите пояснения в таблице 6.

31. $f(x)=\sin x$
32. $f(x)=-3\sin 2x$
33. $f(x)=2\cos 3x-2\sin 3x$
34. $f(x)=2x\cos 2x-\sin 2x$
35. $f(x)=-3x\cos 4x$

F) Определить вид частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения, если известны корни его характеристического уравнения и правая часть $f(x)$.

36. $k_1=1 \quad k_2=2 \quad f(x)=ax^2+bx+c$
37. $k_1=0 \quad k_2=1 \quad f(x)=ax^2+bx+c$
38. $k_1=k_2=0 \quad f(x)=ax^2+bx+c$
39. $k_1=1 \quad k_2=2 \quad f(x)=e^{-x}(ax+b)$
40. $k_1=-1 \quad k_2=1 \quad f(x)=e^{-x}(ax+b)$
41. $k_1=k_2=-1 \quad f(x)=e^{-x}(ax+b)$
42. $k_1=0 \quad k_2=1 \quad f(x)=\sin x+\cos x$
43. $k_1=-i \quad k_2=i \quad f(x)=\sin x+\cos x$
44. $k_1=-2i \quad k_2=2i \quad f(x)=a\sin 2x+b\cos 2x$
45. $k_1=-mi \quad k_2=mi \quad f(x)=a\sin mx+b\cos mx$
46. $k_1=k_2=1 \quad f(x)=e^{-x}(a\sin x+b\cos x)$
47. $k_1=-1-i \quad k_2=-1+i \quad f(x)=e^{-x}(a\sin x+b\cos x)$
48. $k_1=0 \quad k_2=1 \quad f(x)=(ax^2+bx+c)e^{mx},\ m\neq 0,\ m\neq 1$
49. $k_1=m \quad k_2=1 \quad f(x)=(ax^2+bx+c)e^{mx}$
50. $k_1=k_2=m \quad f(x)=(ax^2+bx+c)e^{mx}$
51. $k_1=0 \quad k_2=1 \quad f(x)=a\sin x+b\cos x$
52. $k_1=3+i \quad k_2=3-i \quad f(x)=a\sin x+b\cos x$
53. $k_1=i \quad k_2=-i \quad f(x)=a\sin x+b\cos x$

K) Составить линейные однородные дифференциальные уравнения, зная их характеристические уравнения.

54. $7\lambda^2-4\lambda+1=0$
55. $\lambda^2+6\lambda+2=0$
56. $\lambda^2-7\lambda=0$
57. $\lambda^2-7=0$
58. $\lambda^2=4$
59. $\lambda^2=0$

L) Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, если известны корни характеристического уравнения k_1 и k_2. Выписать общее решение.

Указание 1: для составления характеристического уравнения воспользоваться теоремой Виета.

Теорема Виета: если x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $x^2+bx+c=0$, то $x_1x_2=c$, $x_1+x_2=-b$.

Указание 2: общее решение линейного однородного уравнения составляется в соответствии с формулами (5)-(7).

Пример: $k_{1,2}=2\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$k_1 \cdot k_2 = \left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 4-\frac{3}{4}i^2 = 4+\frac{3}{4} = \frac{19}{4}$$

$k_1 + k_2 = 2+\frac{\sqrt{3}}{2}i+2-\frac{\sqrt{3}}{2}i = 4$ $\rightarrow$ характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 4k + \frac{19}{4} = 0$ или $4k^2 - 16k + 19 = 0$.

$4y''-16y'+19y=0$ – вид соответствующего однородного уравнения, его решение получаем по формуле (7), причем $\alpha = 2$, $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y_o = e^{2x}(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$.

60. $k_1 = -1 \quad k_2 = 3$
61. $k_1 = k_2 = 4$
62. $k_1 = 0 \quad k_2 = 6$
63. $k_{1,2} = -5 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$
64. $k_{1,2} = \pm 3i$
65. $k_{1,2} = \pm i$

М) Решить неоднородные уравнения. В таблице 7 вы найдете правильные ответы, пояснения и промежуточные результаты.

66. $y''+10y'+25y = 4e^{-5x}$
67. $y''-6y'+9y = 25e^{x}\sin x$
68. $y''+2y'+5y = e^{-x}\cos 2x$
69. $y''+y' = 4x^2e^{x}$
70. $y''-5y'+4y = 4x^2e^{2x}$
71. $y''-y' = 2(1-x)$
72. $y''+y = 4\cos x$

ОТВЕТЫ И ПОЯСНЕНИЯ К ТРЕНИРОВОЧНЫМ ЗАДАНИЯМ

Таблица 2 Пояснения к тренировочным заданиям 1-17
Рассмотрим неоднородное уравнение $y''+y'-2y = f(x)$ Для соответствующего однородного уравнения $y''+y'-2y=0$ составим характеристическое уравнение $k^2+k-2=0$ и найдем его корни: $k_1=-2$, $k_2=1$ Итак, получены различные действительные корни. В задачах 1-8 правая часть первого типа $f(x)=e^{\mu x}P_n(x)$, решение ищем по формуле (8). В задачах 1-4 $\mu = 0, \mu \neq k_1 \neq k_2 \rightarrow l = 0$. В задачах 1,5,8 в правой части многочлен нулевой степени $P_0(x)$, поэтому $\bar{y}$ тоже содержит многочлен нулевой степени $Q_0(x)=A$. В задачах 9-11 и 15-17 правая часть второго типа $f(x)=e^{\mu x}(M\cos\gamma x + N\sin\gamma x)$, решение ищем по формуле (9).

В задачах 12-14 правая часть третьего типа $f(x) = e^{\mu x}(P_n(x)\cos\gamma x + R_m(x)\sin\gamma x)$, решение ищем по формуле (10).
В задачах 9-17 в формулах (9) и (10) $l = 0$, т.к. $\mu + i\gamma$ – комплексное число, а корни характеристического уравнения – действительные числа.

Правая часть $f(x)$	**В каком виде нужно искать частное решение** $\bar{y}$ **неоднородного уравнения?**
1. $f(x) = -5$	$\bar{y} = A$
2. $f(x) = 6x - 5$	$\bar{y} = Ax + B$
3. $f(x) = x^2 - 3x$	$\bar{y} = Ax^2 + Bx + C$
4. $f(x) = 4x^3 + 2x^2 + 5$	$\bar{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

Примечание: обратите внимание, когда в правой части $f(x)$ находится неполный многочлен, то частное решение подбирается без пропуска степеней.
Пример 1: $f(x) = -5x$
Это многочлен первой степени, и в нем отсутствует константа. Однако при подборе частного решения константу пропускать нельзя, то есть частное решение необходимо искать в виде $\bar{y} = Ax + B$

5. $f(x) = 4e^{3x}$	$\mu = 3 \neq k_1$ и $\mu \neq k_2 \to l = 0$ $\bar{y} = Ae^{3x}$
6. $f(x) = (6x - 7)e^{-x}$	$\mu = -1 \neq k_1$ и $\mu \neq k_2 \to l = 0$ $\bar{y} = e^{-x}(Ax + B)$
7. $f(x) = \frac{x}{2}e^{-2x}$	$\mu = -2 = k_1$ и $\mu \neq k_2 \to l = 1$ $\bar{y} = x(Ax + B)e^{-2x} = e^{-2x}(Ax^2 + Bx)$
8. $f(x) = 4e^{x}$	$\mu = 1 = k_2 \neq k_1 \to l = 1$ $\bar{y} = Axe^{x}$

Примечание: обратите внимание, что опять же в случае неполных многочленов степени не теряются, например, если $f(x) = 7x^2e^{5x}$ (в многочлене отсутствует «икс» в первой степени и константа), то частное решение следует искать в виде $\bar{y} = (Ax^2 + Bx + C)e^{5x}$.
Если $f(x) = (1 - x^2)e^{-2x}$ (в многочлене отсутствует «икс» в первой степени), то частное решение следует искать в виде $\bar{y} = x(Ax^2 + Bx + C)e^{-2x} = (Ax^3 + Bx^2 + Cx)e^{-2x}$.

9. $f(x) = \sin x$	$\mu = 0, \gamma = 1, \mu + i\gamma = i \neq k_1$ и $\mu + i\gamma \neq k_2 \to l = 0$ $\bar{y} = A\cos x + B\sin x$
10. $f(x) = -5\cos 2x$	$\mu = 0, \gamma = 2, \mu + i\gamma = 2i \neq k_1$ и $\mu + i\gamma \neq k_2 \to l = 0$ $\bar{y} = A\cos 2x + B\sin 2x$
11. $f(x) = 7\cos 3x - 4\sin 3x$	$\mu = 0, \gamma = 3, \mu + i\gamma = 3i \neq k_1$ и $\mu + i\gamma \neq k_2 \to l = 0$ $\bar{y} = A\cos 3x + B\sin 3x$

Примечание: в подборе частного решения всегда должен присутствовать **и синус, и косинус** (даже если в правую часть $f(x)$ входит **только** синус или

только косинус). Обратите внимание на то, что если корни характеристического уравнения действительны, а правая часть имеет тип 2 или 3, то $l=0$ в любом случае.	
12. $f(x)=-x\sin 5x$	$P_n(x)=0$ – многочлен нулевой степени ($n=0$), $R_m(x)=-x$ – многочлен первой степени ($m=1$). В формуле (10) $k=\max(1{,}0)=1$, то есть $Q_k(x)$ и $L_k(x)$– многочлены первой степени. $\overline{y}=(Ax+B)\cos 5x+(Cx+D)\sin 5x$
13. $f(x)=(x-1)\cos\dfrac{x}{2}$	$P_n(x)=x-1$ – многочлен нулевой степени ($n=1$), $R_m(x)=0$ ($m=0$). В формуле (10) $k=\max(0{,}1)=1$, то есть $Q_k(x)$ и $L_k(x)$– многочлены первой степени. $\overline{y}=(Ax+B)\cos\dfrac{x}{2}+(Cx+D)\sin\dfrac{x}{2}$
14. $f(x)=x\cos x+2\sin x$	$P_n(x)=x$ – многочлен первой степени ($n=1$), $R_m(x)=2$ – многочлен нулевой степени ($m=0$). В формуле (10) $k=\max(1{,}0)=1$, то есть $Q_k(x)$ и $L_k(x)$– многочлены первой степени. $\overline{y}=(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x$
15. $f(x)=9e^x\sin 2x$	$\overline{y}=e^x(A\cos 2x+B\sin 2x)$
16. $f(x)=\dfrac{1}{3}e^{-3x}\sin x$	$\overline{y}=e^{-3x}(A\cos x+B\sin x)$
17. $f(x)=e^{-2x}(5\sin 4x-\cos 4x)$	$\overline{y}=e^{-2x}(A\cos 4x+B\sin 4x)$

Таблица 3 Пояснения к тренировочным заданиям 18-23	
Рассмотрим неоднородное уравнение $y''+3y'=f(x)$ Для соответствующего однородного уравнения $y''+3y'=0$ составим характеристическое уравнение $k^2+3k=0$ и найдем его корни: $k_1=-3$, $k_2=0$ Получены различные действительные корни, один из которых равен нулю. В задачах 18-26 правая часть первого типа $f(x)=e^{\mu x}P_n(x)$, решение ищем по формуле (8). В задачах 18-21 $\mu=0=k_2\to l=1$	
Правая часть $f(x)$	**В каком виде нужно искать частное решение** $\overline{y}$ **неоднородного уравнения?**
18. $f(x)=-5$	$\overline{y}=Ax$
19. $f(x)=-3x$	$\overline{y}=x(Ax+B)$, т.е. частное решение

	ищем в виде $\overline{y} = Ax^2 + Bx$
20. $f(x) = x^2 - 6$	$\overline{y} = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$
21. $f(x) = x^3$	$\overline{y} = x(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) =$ $= Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx$
22. $f(x) = (4x^2 + x)e^{3x}$	$\mu = 3 \neq k_1 \; u \; \mu \neq k_2 \to l = 0$ $\bar{y} = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}$
23. $f(x) = (5 - x)e^{-3x}$	$\mu = -3 = k_1 \to l = 1$ $\bar{y} = x(Ax + B)e^{-3x} = e^{-3x}(Ax^2 + Bx)$

Таблица 4 Пояснения к тренировочным заданиям 24-26	
Рассмотрим неоднородное уравнение $y''-4y'+4y = f(x)$ Для соответствующего однородного уравнения $y''-4y'+4y = 0$ составим характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 4 = 0$ и найдем его корни: $k_{1,2} = 2$. Получены кратные (совпавшие) действительные корни. В задачах 24-26 правая часть первого типа $f(x) = e^{\mu x}P_n(x)$, решение ищем по формуле (8). В задачах 24-25 $P_n(x)$ – многочлен нулевой степени $P_n(x) = A$.	
Правая часть $f(x)$	**В каком виде нужно искать частное решение** $\overline{y}$ **неоднородного уравнения?**
24. $f(x) = 5e^x$	$\mu = 1 \neq k_1 \; u \; \mu \neq k_2 \to l = 0$ $P_n(x) = 5$ – многочлен нулевой степени $\to$ в формуле (8) $Q_0(x) = A$ $\overline{y} = Ae^x$
25. $f(x) = 3e^{2x}$	$\mu = 2 = k_1 = k_2 \to l = 2$ $P_n(x) = 3$ – многочлен нулевой степени $\to$ в формуле (8) $Q_0(x) = A$ $\overline{y} = x^2Ae^{2x} = Ax^2e^{2x}$
26. $f(x) = (5x - 1)e^{2x}$	$\mu = 2 = k_1 = k_2 \to l = 2$ $\overline{y} = x^2(Ax + B)e^{2x} = (Ax^3 + Bx^2)e^{2x}$

Таблица 5. Пояснения к тренировочным заданиям 27-30
Рассмотрим неоднородное уравнение $y''+6y'+10y = f(x)$ Для соответствующего однородного уравнения $y''+6y'+10y = 0$ составим характеристическое уравнение $k^2 + 6k + 10 = 0$ и найдем его корни: $k_{1,2} = -3 \pm i$.

Здесь $\alpha=-3$, $\beta=1$ (при обозначении $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$). Получены сопряженные комплексные корни с ненулевой действительной частью α. В задачах 27-30 правая часть второго типа $f(x)=e^{\mu x}(M\cos\gamma x+N\sin\gamma x)$, решение ищем по формуле (9)	
Правая часть $f(x)$	**В каком виде нужно искать частное решение** $\bar{y}$ **неоднородного уравнения?**
27. $f(x)=2e^{-3x}\sin 2x$	$\mu=-3,\gamma=2,\mu+i\gamma=-3+2i$ не является корнем характеристического уравнения $\to l=0$ $M=0,\quad N=2$ $\bar{y}=e^{-3x}(A\cos 2x+B\sin 2x)$
28. $f(x)=2e^{-3x}\cos x$	$\mu=-3,\gamma=1,\mu+i\gamma=-3+i=k_1$ – корень характеристического уравнения $\to l=1$ $M=2,\quad N=0$ $\bar{y}=xe^{-3x}(A\cos x+B\sin x)=e^{-3x}(Ax\cos x+Bx\sin x)$
29. $f(x)=e^{x}(5\cos x-3\sin x)$	$\mu=1,\gamma=1,\mu+i\gamma=1+i$ не является корнем характеристического уравнения $\to l=0$ $M=5,\quad N=-3$ $\bar{y}=e^{x}(A\cos x+B\sin x)$
30. $f(x)=e^{-3x}(-\cos x+2\sin x)$	$\mu=-3,\gamma=1,\mu+i\gamma=-3+i=k_1$ – корень характеристического уравнения $\to l=1$ $M=-1,\quad N=2$ $\bar{y}=xe^{-3x}(A\cos x+B\sin x)=e^{-3x}(Ax\cos x+Bx\sin x)$

Таблица 6. Пояснения к тренировочным заданиям 31-35	
Рассмотрим неоднородное уравнение $y''+4y=f(x)$ Для соответствующего однородного уравнения $y''+4y=0$ составим характеристическое уравнение $k^2+4=0$ и найдем его корни: $k_{1,2}=\pm 2i$. Получены <u>чисто мнимые</u> сопряженные комплексные корни. Здесь $\alpha=0$, $\beta=2$ (при обозначении $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$). В задачах 31-33 правая часть второго типа $f(x)=e^{\mu x}(M\cos\gamma x+N\sin\gamma x)$, $\mu=0$. Решение ищем по формуле (9). В задачах 34-35 правая часть третьего типа $f(x)=e^{\mu x}(P_n(x)\cos\gamma x+R_m(x)\sin\gamma x)$, $\mu=0$. Решение ищем по формуле (10).	
Правая часть $f(x)$	**В каком виде нужно искать частное решение** $\bar{y}$ **неоднородного уравнения?**
31. $f(x)=\sin x$	$\mu=0,\gamma=1,\mu+i\gamma=i$ не является корнем характеристического уравнения $\to l=0$

	$M=0, \quad N=1$ $\overline{y}=A\cos x+B\sin x$
32. $f(x)=-3\sin 2x$	$\mu=0, \gamma=2, \mu+i\gamma=2i=k_1 \quad \to l=1$ $\overline{y}=x(A\cos 2x+B\sin 2x)$
33. $f(x)=2\cos 3x-2\sin 3x$	$\mu=0, \gamma=3, \mu+i\gamma=3i$ не является корнем характеристического уравнения $\to l=0$ $M=0, \quad N=1$ $\overline{y}=A\cos 3x+B\sin 3x$
34. $f(x)=2x\cos 2x-\sin 2x$	$\mu=0, \gamma=2, \mu+i\gamma=2i=k_1 \quad \to l=1$ $P_n(x)=2x$ – многочлен первой степени $(n=1)$ $R_m(x)=1$ – многочлен нулевой степени $(m=1)$ В формуле (10) $k=\max(1,0)=1$, то есть $Q_k(x)$ и $L_k(x)$ – многочлены первой степени. $\overline{y}=x((Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x)=$ $=(Ax^2+Bx)\cos 2x+(Cx^2+Dx)\sin 2x$
35. $f(x)=-3x\cos 4x$	$\mu=0, \gamma=4, \mu+i\gamma=4i$ не является корнем характеристического уравнения $\to l=0$ $P_n(x)=3x$ – многочлен первой степени $(n=1)$ $R_m(x)=0$ – многочлен нулевой степени $(m=1)$ В формуле (10) $k=\max(1,0)=1$, то есть $Q_k(x)$ и $L_k(x)$ – многочлены первой степени. $\overline{y}=(Ax+B)\cos 4x+(Cx+D)\sin 4x$

Таблица 7. Пояснения к тренировочным заданиям 66-72

Уравнения	Характеристические уравнения и их корни	y_0	Вид $\bar{y}$ с неопределенными коэффициентами	Системы уравнений для определения неопределенных коэффициентов, их значения	Ответ
66. $y''+10y'+25y=4e^{-5x}$	$k^2+10k+25=0$ $k_1=k_2=-5$	$y_0=(C_1+C_2x)e^{-5x}$	$\bar{y}=Ax^2e^{-5x}$	$A=2$	$y_н=(C_1+C_2x)e^{-5x}+2x^2e^{-5x}$
67. $y''-6y'+9y=25e^x\sin x$	$k^2-6k+9=0$ $k_1=k_2=3$	$y_0=(C_1+C_2x)e^{3x}$	$\bar{y}=e^x(A\cos x+B\sin x)$	$\begin{cases}3A-4B=0\\4A+3B=25\end{cases}$ $A=4,\quad B=3$	$y_н=(C_1+C_2x)e^{3x}+$ $+e^x(4\cos x+3\sin x)$
68. $y''+2y'+5y=e^{-x}\cos 2x$	$k^2+2k+5=0$ $k_{1,2}=-1\pm 2i$	$y_0=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$	$\bar{y}=e^{-x}\cdot x(A\cos 2x+$ $+B\sin 2x)$	$\begin{cases}-4A=0\\4B=1\end{cases}$ $A=0,\quad B=\frac{1}{4}$	$y_н=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)e^{-x}+$ $+\frac{1}{4}xe^{-x}\sin 2x$
69. $y''+y'=4x^2e^x$	$k^2+k=0$ $k_1=0\quad k_2=-1$	$y_0=C_1+C_2e^{-x}$	$\bar{y}=(Ax^2+Bx+C)e^x$	$\begin{cases}2A=4\\6A+2B=0\\2A+3B+2C=0\end{cases}$ $A=2,\quad B=-6,$ $C=7$	$y_н=C_1+C_2e^{-x}+$ $+(2x^2-6x+7)e^x$

70. $y''-5y'+4y=4x^2e^{2x}$	$k^2-5k+4=0$ $k_1=1 \quad k_2=4$	$y_0=C_1e^x+C_2e^{4x}$	$\overline{y}=(Ax^2+Bx+C)e^{2x}$	$\begin{cases} -2A=4 \\ -2A-2B=0 \\ 2A-B-2C=0 \end{cases}$ $A=-2, \quad B=2,$ $C=-3$	$y_н=C_1e^x+C_2e^{4x}+$ $+e^{2x}(-2x^2+2x-3)$
71. $y''-y'=2(1-x)$	$k^2-k=0$ $k_1=0 \quad k_2=1$	$y_0=C_1+C_2e^x$	$\overline{y}=x(Ax+B)$	$\begin{cases} -2A=-2 \\ 2A-B=2 \end{cases}$ $A=1, \quad B=0$	$y_н=C_1+C_2e^x+x^2$
72. $y''+y=4\cos x$	$k^2+1=0$ $k_{1,2}=\pm i$	$y_0=C_1\cos x+C_2\sin x$	$\bar{y}=x(A\cos x+B\sin x)$	$\begin{cases} 2B=4 \\ -2A=0 \end{cases}$ $A=0, \quad B=2$	$y_н=C_1\cos x+C_2\sin x+$ $+2x\sin x$

ОТВЕТЫ К ТРЕНИРОВОЧНЫМ ЗАДАНИЯМ

1.	$\bar{y} = A$
2.	$\bar{y} = Ax + B$
3.	$\bar{y} = Ax^2 + Bx + C$
4.	$\bar{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$
5.	$\bar{y} = Ae^{3x}$
6.	$\bar{y} = e^{-x}(Ax + B)$
7.	$\bar{y} = e^{-2x}(Ax^2 + Bx)$
8.	$\bar{y} = Axe^{x}$
9.	$\bar{y} = A\cos x + B\sin x$
10.	$\bar{y} = A\cos 2x + B\sin 2x$
11.	$y = A\cos 3x + B\sin 3x$
12.	$\bar{y} = (Ax + B)\cos 5x + (Cx + D)\sin 5x$
13.	$\bar{y} = (Ax + B)\cos\frac{x}{2} + (Cx + D)\sin\frac{x}{2}$
14.	$\bar{y} = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x$
15.	$\bar{y} = e^{x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$
16.	$\bar{y} = e^{-3x}(A\cos x + B\sin x)$
17.	$\bar{y} = e^{-2x}(A\cos 4x + B\sin 4x)$
18.	$\bar{y} = Ax$
19.	$\bar{y} = Ax^2 + Bx$
20.	$\bar{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx$
21.	$\bar{y} = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx$
22.	$\bar{y} = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}$
23.	$\bar{y} = x(Ax + B)e^{-3x} = e^{-3x}(Ax^2 + Bx)$
24.	$\bar{y} = Ae^{x}$
25.	$\bar{y} = x^2Ae^{2x} = Ax^2e^{2x}$
26.	$\bar{y} = x^2(Ax + B)e^{2x} = (Ax^3 + Bx^2)e^{2x}$
27.	$\bar{y} = e^{-3x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$
28.	$\bar{y} = xe^{-3x}(A\cos x + B\sin x) = e^{-3x}(Ax\cos x + Bx\sin x)$
29.	$\bar{y} = e^{x}(A\cos x + B\sin x)$
30.	$\bar{y} = xe^{-3x}(A\cos x + B\sin x) = e^{-3x}(Ax\cos x + Bx\sin x)$
31.	$\bar{y} = A\cos x + B\sin x$
32.	$\bar{y} = x(A\cos x + B\sin x)$

33.	$\overline{y} = A\cos 3x + B\sin 3x$
34.	$\overline{y} = (Ax^2 + Bx)\cos 2x + (Cx^2 + Dx)\sin 2x$
35.	$\overline{y} = (Ax + B)\cos 4x + (Cx + D)\sin 4x$
36.	$\overline{y} = Ax^2 + Bx + C$
37.	$\overline{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx$
38.	$\overline{y} = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$
39.	$\bar{y} = e^{-x}(Ax + B)$
40.	$\bar{y} = e^{-x}(Ax^2 + Bx)$
41.	$\bar{y} = e^{-x}(Ax^3 + Bx^2)$
42.	$\overline{y} = (A\cos x + B\sin x)$
43.	$\overline{y} = x(A\cos x + B\sin x)$
44.	$\overline{y} = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$
45.	$\overline{y} = x(A\cos mx + B\sin mx)$
46.	$\overline{y} = e^{-x}(A\cos x + B\sin x)$
47.	$\overline{y} = e^{-x}x(A\cos x + B\sin x)$
48.	$\overline{y} = e^{mx}(Ax^2 + Bx + C)$
49.	$\overline{y} = e^{mx}(Ax^3 + Bx^2 + Cx)$
50.	$\overline{y} = e^{mx}(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2)$
51.	$\overline{y} = A\cos x + B\sin x$
52.	$\overline{y} = A\cos x + B\sin x$
53.	$\overline{y} = x(A\cos x + B\sin x)$
54.	$7y''-4y'+y=0$
55.	$y''+6y'+2y=0$
56.	$y''-7y'=0$
57.	$y''-7y=0$
58.	$y''-4y=0$
59.	$y''=0$
60.	$y''-2y'-3y=0,\ y_0=C_1e^{-x}+C_2\,e^{3x}$
61.	$y''-8y'+16y=0,\ y_0=e^{4x}\,(C_1\,x+C_2)$
62.	$y''-6y'=0,\ y_0=C_1+C_2\,e^{6x}$
63.	$4y''+40y'+103y=0,$ $y_0=e^{-5x}(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$
64.	$y''+9y=0,\ \ y_0=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$
65.	$y''+y=0,\ \ y_0=C_1\cos x+C_2\sin x$

ТЕСТЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

	ВОПРОСЫ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1)	Общее решение дифференциального уравнения $y''-12y'+35y=0$ имеет вид	1) $y=C_1e^{5x}+C_2e^{7x}$ 2) $y=C_1xe^{5x}+C_2e^{7x}$ 3) $y=e^{5x}+e^{7x}$ 4) $y=e^{5x}(C_1\cos7x+C_2\sin7x)$
2)	Общее решение дифференциального уравнения $y''-3y'=0$ имеет вид	1) $y=C_1\cos3x+C_2\cos3x$, 2) $y=C_1+C_2e^{3x}$ 3) $y=Ce^{3x}$,3) $y=e^{3x}$
3)	Общее решение дифференциального уравнения $y''-7y'+12y=0$ имеет вид	1) $y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}$ 2) $y=C_1xe^{3x}+C_2e^{4x}$ 3) $y=e^{3x}-e^{4x}$ 4) $y=e^{3x}(C_1\cos4x+C_2\sin4x)$
4)	Общее решение дифференциального уравнения $y''-9y=0$ имеет вид	1) $y=C_1xe^{3x}+C_2e^{-3x}$ 2) $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$ 3) $y=e^{3x}-e^{-3x}$ 4) $y=C_1\cos3x+C_2\sin3x$
5)	Общее решение дифференциального уравнения $y''+9y=0$ имеет вид	1) $y=C_1\cos3x+C_2\sin3x$ 2) $y=\cos3x$ 3) $y=C\sin3x$ 4) $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$

6	Задано линейное дифференциальное уравнение второго порядка. $y''-3y'+2y=e^x(x^2+1)$. Его частное решение имеет вид	1) $y=xe^x(Ax^2+Bx+C)$ 2) $y=e^x(Ax^2+Bx+C)$ 3) $y=Ax^2+Bx+C$ 4) $y=Axe^x$
7	Задано линейное дифференциальное уравнение второго порядка $y''-3y'+2y=5e^{3x}$ Его частное решение имеет вид	1) $y=e^{3x}(Ax+B)$ 2) $y=5xe^{3x}$ 3) $y=Ae^{3x}$ 4) $y=Ae^x$
8	Задано линейное дифференциальное уравнение второго порядка $y''-3y'+2y=6e^{-x}$. Его частное решение имеет вид	1) $y=Axe^{-x}$ 2) $y=Ae^{-x}$ 3) $y=A\sin x+Be^{-x}$ 4) $y=e^{-x}(Ax+B)$
9	Задано линейное дифференциальное уравнение второго порядка $y''-3y'+2y=x^2$. Его частное решение имеет вид	1) $y=Ax^2+Bx+C$ 2) $y=Ax^2$ 3) $y=Ax^3+Bx^2+Cx+D$ 4) $y=Ax^2e^x$
10	Задано линейное дифференциальное уравнение второго порядка $y''-3y'+2y=3x+1$. Его частное решение имеет вид	1) $y=x(Ax+B)$ 2) $y=Ax^2$ 3) $y=A\sin x$ 4) $y=Ax+B$
11	Задано линейное дифференциальное уравнение второго порядка $y''-3y'+2y=e^{2x}x$. Его частное решение имеет вид	1) $y=e^{2x}(Ax+B)$ 2) $y=e^{2x}x(Ax+B)$ 3) $y=Ae^{2x}$

		4) $y=Ax^2e^{2x}$
12	Задано линейное дифференциальное уравнение второго порядка $y''-3y'+2y=\sin x$. Его частное решение имеет вид	1) $y=A\sin x+B\cos x$ 2) $y=A\sin x$ 3) $y=A\cos x$ 4) $y=x(A\sin x+B\cos x)$
13	Задано линейное дифференциальное уравнение второго порядка $y''-3y'+2y=e^{3x}(x^3-5)$. Его частное решение имеет вид	1) $y=xe^{3x}(Ax^3+Bx^2+Cx+D)$ 2) $y=e^{3x}(Ax^3+Bx^2+Cx+D)$ 3) $y=Ae^{3x}$ 4) $y=Ax^3+Bx^2+Cx+D$
14	Задано линейное дифференциальное уравнение второго порядка $y''+y=e^x$. Его частное решение имеет вид	1) $y=Ae^x$ 2) $y=Axe^x$ 3) $y=e^x(Ax+B)$ 4) $y=A\sin x+B\cos x$
15	Задано линейное дифференциальное уравнение второго порядка $y''+y=\sin x$. Его частное решение имеет вид	1) $y=Ax\sin x$ 2) $y=x(A\sin x+B\cos x)$ 3) $y=A\sin x+B\cos x$ 4) $y=Ax$
16	Задано линейное дифференциальное уравнение второго порядка $y''+y=3x^2$. Его частное решение имеет вид	1) $y=x(Ax^2+Bx+C)$ 2) $y=Ax^2+Bx+C$ 3) $y=Ax^2\sin x$ 4) $y=Ax^2\cos x$
17	Задано линейное дифференциальное уравнение второго порядка $y''+y'=xe^{-x}$. Его частное решение имеет вид	1) $y=e^{-x}x(Ax+B)$ 2) $y=Axe^{-x}$ 3) $y=Ax^2e^{-x}$ 4) $y=x(Ax+B)$
18	Задано линейное дифференциальное уравнение второго порядка $y''+y=3x^2+1$. Его частное решение имеет вид	1) $y=Ax^2+Bx+C$ 2) $y=x(Ax^2+Bx+C)$ 3) $y=Ax^2+B$ 4) $y=(Ax^2+B)\sin x$
19	Задано линейное дифференциальное уравнение второго порядка $y''+y'=\cos x$. Его частное решение имеет вид	1) $y=A\cos x$ 2) $y=Bx\cos x$ 3) $y=A\sin x+B\cos x$ 4) $y=x(A\sin x+B\cos x)$
20	Задано линейное дифференциальное уравнение второго порядка	1) $y=Ax\sin 4x$

	$y''-4y'=\sin 4x$. Его частное решение имеет вид	2) $y=x(A\sin 4x+B\cos 4x)$ 3) $y=A\sin 4x$ 4) $y=A\sin 4x+B\cos 4x$
21	Задано линейное дифференциальное уравнение второго порядка $y''+4y'=3\sin 2x+\cos 2x$. Его частное решение имеет вид	1) $y=x(A\sin 2x+B\cos 2x)$ 2) $y=Ax\sin 2x$ 3) $y=A\sin 2x+B\cos 2x$ 4) $y=A\sin x+B\cos x$
22	Задано линейное дифференциальное уравнение второго порядка $y''-5y'+7y=\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$. Его частное решение имеет вид	1) $y=x(A\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+B\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x)$ 2) $y=A\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+B\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$ 3) $y=A\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$ 4) $y=Ax\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$
23	Задано линейное дифференциальное уравнение второго порядка $y''-5y'+7y=4e^{2,5x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$. Его частное решение имеет вид	1) $y=xe^{2,5x}(A\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+B\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x)$ 2) $y=e^{2,5x}(A\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+B\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x)$ 3) $y=A\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+B\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$ 4) $y=Ae^{2,5x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$
24	Задано линейное дифференциальное уравнение второго порядка $y''-8y'+16y=3e^{4x}$. Его частное решение имеет вид	1) $y=Ae^{4x}$ 2) $y=Axe^{4x}$ 3) $y=3xe^{4x}$ 4) $y=Ax^2e^{4x}$
25	Задано линейное дифференциальное уравнение второго порядка $y''-8y'+16y=5\sin 4x+2\cos 4x$. Его частное решение имеет вид	1) $y=A\sin 4x+B\cos 4x$ 2) $y=x(A\sin 4x+B\cos 4x)$ 3) $y=A\sin 4x$ 4) $y=Bx\cos 4x$

ОТВЕТЫ К ТЕСТАМ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

1	2	1	2	1	1	3	2	1	4	2	1	2	1	2

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
2	1	1	3	4	3	2	1	4	1