ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Математика»

Учебно-методическое пособие

по дисциплине

«Линии и поверхности второго порядка»

Авторы
Волокитин Г. И.,
Глушкова В. Н.,
Типаева Э. Р.

Ростов-на-Дону, 2018

Аннотация

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов очной и заочной форм обучения технических направлений.

Авторы

к.ф.-м.н., доцент кафедры «Математика»
Волокитин Г.И.
к.ф.-м.н., доцент кафедры «Математика»
Глушкова В.Н.
ассистент кафедры «Математика»
Типаева Э.Р.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Из школьного курса математики известно, что некоторые поверхности (плоскость, сфера, круговой цилиндр) достаточно просто можно исследовать средствами элементарной геометрии. В то же время для изучения других поверхностей и всевозможных кривых необходимо привлекать методы линейной алгебры и математического анализа. В основе этих методов заложено описание линий и поверхностей при помощи уравнений. Такой способ стал возможным благодаря изобретению Р.Декарта – координатных осей. Пусть x, y, z - переменные величины. Соотношение $F(x,y,z)=0$, выполняемое не для любых троек чисел x, y, z, а лишь для некоторых, является уравнением. Пусть дана некоторая поверхность и некоторая система координат. *Уравнением рассматриваемой поверхности* называется такое уравнение $F(x,y,z)=0$, которому удовлетворяют координаты *каждой* точки поверхности и не удовлетворяют координаты *любой* точки, не лежащей на поверхности. Обратно, поверхность, заданная этим уравнением есть геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению. В дальнейшем переменную точку $M(x,y,z)$ поверхности назовем «текущей» точкой, ее координаты x, y, z будем называть текущими координатами поверхности (линии). Вывод уравнения поверхности (линии) начинают с рассмотрения текущей точки.

Для более глубокого изучения материала авторы рекомендуют отечественную литературу, посвященную данной теме [1 - 7].

1. Линии второго порядка: канонические уравнения

Общий вид уравнения линий второго порядка содержит вторые степени переменных x, y и их произведение:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{1.1}$$

Здесь x, y - прямоугольные декартовы координаты точек кривой. В зависимости от коэффициентов A, B, ..., F уравнение может выражать эллипс, окружность, гиперболу, параболу, пару прямых или точку. Вышеперечисленные кривые обладают осями симметрии. И если оси координат выбраны специальным образом (совпадают с осями симметрии), то соотношение (1.1) упрощается. Получаются так называемые канонические уравнения линий второго порядка. Ниже будем рассматривать канонические уравнения кривых.

1.1 Эллипс

Определение. Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная. Предполагается, что эта постоянная больше расстояния между фокусами.

Обозначим постоянную $2a$, фокусы F_1, F_2; величина $|\mathbf{F_1F_2}| = 2c$ - расстояние между фокусами. Фокусы поместим на оси Ox симметрично начала координат. В выбранной системе координат Oxy фокусы – следующие точки: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.

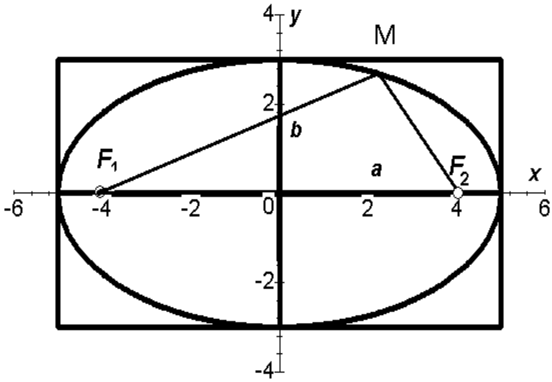

Рис. 1.1

Пусть $M(x,y)$ - текущая точка. Отрезки $r_1 \equiv |\mathbf{F_1M}|$ и $r_2 \equiv |\mathbf{F_2M}|$ называют фокальными радиусами. По определению $r_1 + r_2 = 2a$. Или, учитывая формулу длины вектора,

$$\sqrt{(x+c)^2 + (x-c)^2} = 2a.$$

Уединяем радикал и затем обе части равенства возводим в квадрат, раскрываем скобки:

$$\cancel{x^2} + 2xc + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} - 2xc + \cancel{c^2} + \cancel{y^2}$$

Или

$$4xc - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Сокращаем на 4 и еще раз возводим обе части в квадрат, получаем

$$x^2c^2 - 2ca^2x + a^4 = a^2\left(x^2 - 2cx + c^2 + y^2\right)$$

Отсюда имеем равенство

$$\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right).$$

Введем обозначение

$$b^2 \equiv a^2 - c^2 .$$

Это обозначение корректно, так как $a > c$. В результате получим соотношение

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 ,$$

или, окончательно

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad (1.2)$$

Соотношение (1.2) – каноническое уравнение эллипса. Это уравнение содержит только четные степени x и y, что означает, координатные оси являются осями симметрии. В самом деле, точки (x, y) и $(-x, y)$ расположены симметрично относительно оси Oy. Если координаты x, y удовлетворяют уравнению (1.2), то и координаты $-x, y$ удовлетворяют этому уравнению. Оси симметрии $A'OA$ и $B'OB$ называют *осями эллипса*. Точки $A'(-a, 0)$, $A(a, 0)$, $B'(0, -b)$, $B(0, b)$ - *вершины* эллипса. Величина $OA = a$ - *большая полуось*, $OB = b$ - *меньшая* полуось. Форму эллипса характеризует параметр, называемый *эксцентриситетом*:

$$\varepsilon \equiv \frac{c}{a} .$$

Ясно, что для эллипса этот параметр меньше 1. С увеличением ε эллипс становится более вытянутым, так как меньшая полуось $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ уменьшается. И, наоборот, если ε уменьшается, то эллипс становится более похожим на окружность $(b \to a)$.

Первоначальное уравнение эллипса содержит радикалы. После первого уединения корня и возведения в квадрат получено соотношение:

$$4xc - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} ,$$

которое можно переписать в виде

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{c}{a}x.$$

Отсюда, учитывая понятия фокального радиуса и эксцентриситета, имеем рациональное выражение фокального радиуса, соответствующего F_2:

$$r_2=a-\varepsilon x.$$

Аналогично получается формула другого фокального радиуса:

$$r_1=a+\varepsilon x.$$

Вертикальные прямые

$$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$$

называются *директрисами* эллипса. Отметим важное свойство этих прямых: отношение расстояния r от произвольной точки эллипса до фокуса к расстоянию d от этой точки до односторонней с фокусом директрисой есть величина постоянная, равная эксцентриситету:

$$\frac{r}{d}=\varepsilon.$$

В самом деле, для точек эллипса выполнено равенство $r_2=a-\varepsilon x$.

С другой стороны, расстояние от точки до директрисы равно

$$d=\frac{\left|x-\frac{a}{\varepsilon}\right|}{\sqrt{1^2+0^2}}=\frac{a}{\varepsilon}-x=\frac{a-\varepsilon x}{\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$\frac{r_2}{d}=\frac{a-\varepsilon x}{\frac{a-\varepsilon x}{\varepsilon}}=\varepsilon.$$

Замечание. Если в уравнении типа (1.2) параметр $b>a$, то это означает, что фокусы эллипса расположены на оси Oy.

ПИД контроллер состоит из аналоговых вычислительных схем (взаимосвязанных операционных усилителей) с потенциометрами и тумблерами для конфигурации и установки параметров. Поскольку управляющие элементы для P, I и D компонент могут включаться и выключаться в отдельности, то возможны любые комбинации P/I/D.

1.2 Окружность

Определение. Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от фиксированной точки плоскости, называемой *центром*.

Окружность – частный случай эллипса, для которого полуоси равны: $a = b$. Из (1.2) следует каноническое уравнение окружности:

$$\boxed{x^2 + y^2 = a^2} \qquad (1.3)$$

Центр этой окружности в начале координат. Параметр a - радиус окружности.

Кривая – окружность изображена на рис. 1.2.

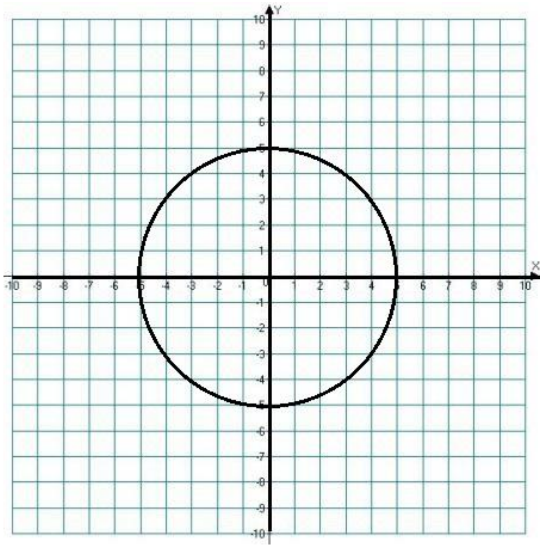

Рис. 1.2

1.3 Гипербола

Определение. Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых *фоку-*

сами, есть величина постоянная. Предполагается, что эта постоянная меньше расстояния между фокусами.

Как и для эллипса точки F_1, F_2 - фокусы. Обозначим постоянную $2a$, $\left|\mathbf{F_1F_2}\right| = 2c$. Разместим фокусы на оси абсцисс симметрично начала координат. Тогда $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$. По определению $2a < 2c$.

Пусть $M(x;y)$ - текущая точка кривой. Величины $r_1 \equiv \left|\mathbf{F_1M}\right|$ и $r_2 \equiv \left|\mathbf{F_2M}\right|$ - фокальные радиусы. Согласно определения гиперболы имеем

$\left|r_1 - r_2\right| = 2a$, или

$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a$. «Снимая» модуль, получим

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Отсюда, уединяя корень, после возведения в квадрат обеих частей равенства имеем

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Еще раз возводим обе части равенства в квадрат, получаем

$$\left(c^2 - a^2\right)x^2 - a^2y^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right).$$

Обозначим

$$b^2 \equiv c^2 - a^2.$$

В результате имеем каноническое уравнение гиперболы

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad (1.4)$$

Здесь координатные оси также являются осями симметрии кривой (переменные x и y присутствуют в уравнении в четной степени). Начало координат $O(0;0)$ - центр симметрии кривой. Гипербола имеет две ветви, которые пересекают ось Ox в вершинах $A'(-a,0)$ и $A(a,0)$.

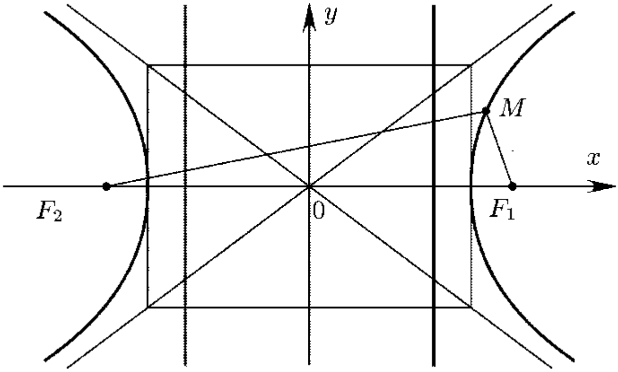

Рис. 1.3

Прямоугольник со сторонами $2a$, $2b$, расположенный симметрично осей гиперболы и касающийся ее в вершинах, называется *основным прямоугольником*.

Этот прямоугольник позволяет упростить построение гиперболы: диагонали прямоугольника являются асимптотами ветвей. Если из (1.4) выразить переменную y, то получим

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Из этого выражения можно показать наличие двух двусторонних наклонных асимптот:

$$y = \frac{b}{a}x, \qquad y = -\frac{b}{a}x..$$

Как и для эллипса, параметр $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом*. Этот параметр характеризует форму ветвей гиперболы. Отметим, для гиперболы в отличие от эллипса

$$\varepsilon > 1.$$

Замечание1 . Уравнение (1.4) получено двукратным освобождением от радикалов. Поэтому это соотношение является лишь следствием первоначального уравнения гиперболы. Однако, преобразуя (1.4) в обратном порядке, можно показать, что при любом выборе точек $M(x; y)$ имеем уравнение в радикалах. Это означает эквивалентность (1.4) и первоначального уравнения в радикалах.

Замечание 2. В результате первого уединения радикала получается соотношение

$$(x+c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

.

Отсюда находим

$$cx-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Пусть, например, $x>0$ (точка M лежит на правой ветви гиперболы (1.4)). Тогда корень определяется равенством

$$cx-a^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}, \qquad \text{или}$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\varepsilon x-a.$$

Окончательно, учитывая определение фокального радиуса, имеем формулу:

$$r_{2,n}=\varepsilon x-a.$$

Аналогично можно получить рациональные выражения другого фокального радиуса $r_{1,n}$, а также фокальных радиусов точек левой ветви гиперболы:

$$r_{1,n}=\varepsilon x+a, \qquad r_{2,л}=-\varepsilon x+a, \qquad r_{1,л}=-\varepsilon x-a.$$

Прямые, задаваемые уравнениями

$$x=\pm\frac{a}{\varepsilon},$$

Называются *директрисами* гиперболы. Отметим свойство этих прямых: для любой точки гиперболы отношение фокального радиуса к расстоянию до односторонней с данным фокусом директрисой есть величина постоянная, равная эксцентриситету.

$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{r_2}{d_2}=\varepsilon.$$

Здесь d_1 - расстояние точки до левой директрисы, d_2 - до правой $x=\frac{a}{\varepsilon}$.

1.4 Парабола

Определение. Параболой называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых расстояние до фиксированной точки плоскости, называемой *фокусом*, равно расстоянию до фиксированной прямой, называемой *директрисой.*

Координатную ось Ox проведем через фокус F перпендикулярно директрисе. Причем начало координат $O(0;0)$ равноудалено от директрисы и фокуса. Расстояние от фокуса F обозначим p. Величина p называется параметром параболы. В выбранной системе координат уравнение директрисы имеет вид:

$$x = -\frac{p}{2}.$$

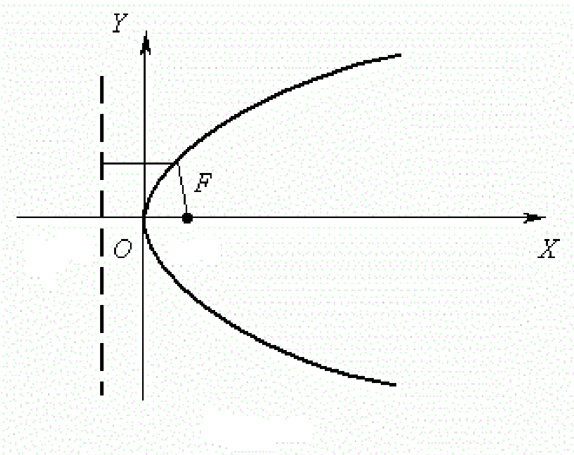

Рис. 1.4

Фокус – это точка $F\left(\frac{p}{2};0\right)$. По-прежнему величину $|\mathbf{FM}|$ назовем фокальным радиусом:

$$|\mathbf{FM}| \equiv r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Пусть точка Q - проекция текущей точки $M(x;y)$ на директрису: $Q\left(-\dfrac{p}{2};y\right)$. Расстояние от точки $M(x;y)$ до директрисы равно

$$|\mathbf{QM}|=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

По определению параболы имеем

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

Возводим обе части равенства в квадрат, получаем

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}.$$

Или, окончательно

$$\boxed{y^2=2px} \qquad (1.5)$$

Соотношение (1.5) называется каноническим уравнением параболы. Переменная y присутствует в четной степени, поэтому кривая симметрична относительно оси Ox. Ось симметрии называется осью параболы. Ось параболы пересекает кривую в начале координат. Параметр p характеризует форму параболы: с уменьшением значения параметра p верхняя и нижняя ветви параболы сближаются.

1.5 Упрощение общего уравнения линии второго порядка

За счет переноса начала координат и поворота осей уравнение (1.1) может принимать более простой вид.

При надлежащем параллельном переносе координатных осей получается уравнение, в котором отсутствуют линейные члены. Пусть X, Y - прямоугольные декартовы координаты точки в «новых» осях, а x, y - «старые» координаты этой же точки. Тогда

$$\begin{cases} x=X+x_0, \\ y=Y+y_0 \end{cases} \qquad (1.6)$$

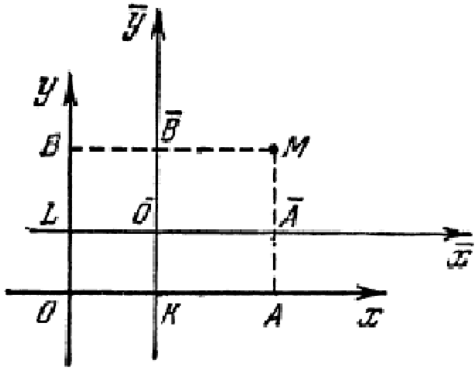

Рис. 1.5

Здесь x_0, y_0 - координаты искомого нового начала координат O_1. Подберем x_0, y_0 таким образом, чтобы в результате подстановки (1.6) в (1.1) коэффициенты при X и при Y обратились в 0. Имеем

$$A(X+x_0)^2+2B(X+x_0)(Y+y_0)+C(Y+y_0)^2+2D(X+x_0)+2E(Y+y_0)+F=0$$

Или

$$AX^2+2BXY+CY^2+2(Ax_0+By_0+D)X+2(Bx_0+Cy_0+E)Y+F_1=0$$

где $$F_1\equiv F+Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2+2Dx_0+2Ey_0.$$

Отсюда, обнуляя коэффициенты при X и Y, получим

$$\begin{cases} Ax_0+By_0+D=0 \\ Bx_0+Cy_0+E=0 \end{cases} \qquad (1.7)$$

Линии, для которых система (1.7) имеет единственное решение, относятся к *центральным кривым.* Единственность решения имеет место, если определитель системы отличен от нуля. То есть условие

$$\delta\equiv AC-B^2\neq 0$$

определяет центральную линию второго порядка. Решение системы (1.7) дает координаты *центра кривой*. Эллипс и гипербола относятся к центральным линиям. Центр кривой- центр симметрии этой линии.

Итак, если уравнение (1.1) определяет центральную линию

($\delta \neq 0$), то выбирая начало координат в точке (x_0, y_0), где x_0, y_0 - решение (1.7), получим уравнение, не содержащее линейных членов. Дальнейшее упрощение уравнения кривой достигается путем поворота координатных осей: в «повернутых» осях уравнение принимает канонический вид.

Параметр δ является инвариантом рассматриваемой кривой: его значение не изменяется при параллельных переносах и поворотах координатных осей. Отметим, также, если для линии (1.1) выполнено условие $\delta = 0$, то уравнение (1.1) параболического типа. В этом случае кривая либо не имеет центра, либо имеет бесконечно много центров. В отличие от центральных линий упрощение параболических уравнений целесообразно начинать с поворота координатных осей.

Пусть в «старых» осях OXY кривая задана уравнением

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 + F = 0 \tag{1.8}$$

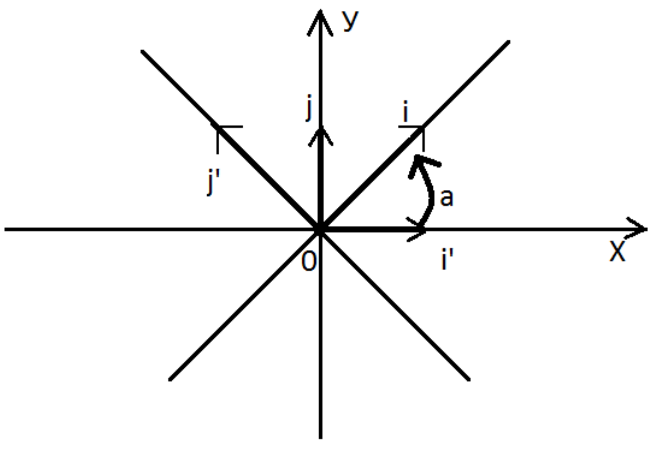

Рис. 1.6

Обозначим $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ - ортонормированный базис, связанный с координатной системой OXY; $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ - ортонормированный базис, соответствующий повернутой на угол α координатной системой $O\xi\eta$. Радиус-вектор точки M в «старых» и «новых» осях задается равенствами

$$\mathbf{OM} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} = \xi\mathbf{i}' + \eta\mathbf{j}'$$

Формулы разложения ортов нового базиса по старому базису имеют вид

$$\mathbf{i}' = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\sin\alpha,$$

$$\mathbf{j}' = -\mathbf{i}\sin\alpha + \mathbf{j}\cos\alpha$$

Следовательно,

$$X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} = \xi(\mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\sin\alpha) + \eta(-\mathbf{i}\sin\alpha + \mathbf{j}\cos\alpha).$$

Приравнивая коэффициенты при базисных векторах в левой и правой части, получим

$$\begin{cases} X = \xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha, \\ Y = \xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha \end{cases} \qquad (1.9)$$

Подставляя (1.9) в (1.8), получим уравнение кривой в повернутых осях:

$$A(\xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha)^2 + 2B(\xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha)(\xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha) +$$

$$+C(\xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha)^2 + F = 0$$

Отсюда находим коэффициент при произведении переменных:

$$2B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + (2C - 2A)\sin\alpha\cos\alpha$$

Потребуем обращения в 0 этого коэффициента, получим уравнение для определения угла α, на который следует повернуть координатные оси

$$B\cos 2\alpha + \frac{C-A}{2}\sin\alpha\cos\alpha = 0.$$

$\delta > 0$ Кривая эллиптического типа	$\Delta \neq 0$	$s\Delta < 0$. Эллипс
		$s\Delta > 0$. «Мнимый эллипс»
	$\Delta = 0$	Точка(Пара пересекающихя в этой точке «мнимых прямых»)

$\delta < 0$ Кривая гиперболического типа	$\Delta \neq 0$	Гипербола
	$\Delta = 0$	Пара пересекающихся прямых
	$\Delta \neq 0$	Парабола
	$\Delta = 0$	Пара параллельных прямых (различных, совпадающих или «мнимых»).

Или, окончательно

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A-C} \tag{1.10}$$

Замечание. Помимо параметра $\delta \equiv \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$ инвариантами кривой (1.1) являются [5] сумма коэффициентов при квадратах переменных

$$s \equiv A + C$$

и определитель третьего порядка:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Вычисляя эти параметры, можно без упрощения уравнения (1.1) дать заключение о типе кривой, которую представляет данное уравнение:

Пример 1. Привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y + 13 = 0$.

Решение. Выясним, является ли кривая центральной линией. В этом примере

$$A = C = 3; \quad B = 5; \quad D = -1; \quad E = -7; \quad F = 13.$$

Т.к. $\delta = 3 \cdot 3 - 5^2 = -16 \neq 0$, то линия является центральной. Поскольку $\delta < 0$, то кривая гиперболического типа. Система (1.7) имеет вид

$$\begin{cases} 3x_0 + 5y_0 = 1 \\ 5x_0 + 3y_0 = 7 \end{cases}$$

Решение этой системы найдем по формулам Крамера:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-32}{-16} = 2; \qquad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{+16}{-16} = -1.$$

Полагая $x = X + 2, \quad y = Y - 1,$ уравнение кривой приводим к виду, не содержащему линейных членов

$$3(X+2)^2 + 10(X+2)(Y-1) + 3(Y-1)^2 - 2(X+2) - 14(Y-1) - 13 = 0$$

Или

$$3X^2 + 10XY + 3Y^2 + X(12 - 10 - 2) + Y(20 - 6 - 14) + 12 - 20 + 3 - 4 + 14 - 13 = 0$$

Т.е. имеем уравнение

$$3X^2 + 10XY + 3Y^2 - 8 = 0.$$

На втором этапе выясним, на какой угол α необходимо повернуть оси OX, OY, чтобы в полученном уравнении отсутствовало произведение координат. Уравнение (1.10) в данном случае принимает вид

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot 5}{3 - 3} = \infty, \quad \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2}. \quad \text{Т.е. } \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Формулы перехода к новым координатам ξ, η следующие

$$\begin{cases} X = \xi \cos\frac{\pi}{4} - \eta \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\xi - \eta), \\ Y = \xi \sin\frac{\pi}{4} + \eta \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\xi + \eta) \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в последнее уравнение линии, находим

$$3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\xi-\eta)\right)^2+10\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(\xi-\eta)(\xi+\eta)+3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\xi+\eta)\right)^2-8=0$$

Отсюда получим каноническое уравнение гиперболы:

$$\xi^2-\frac{\eta^2}{4}=1.$$

Упражнения к разделам 1.1-1.5

1. Составить каноническое уравнение эллипса, у которого
а) полуоси равны 4 и 2;
б) расстояние между фокусами 6, а большая полуось равна 5;
в) сумма полуосей равна 8 и расстояние между фокусами тоже равно 8;
г) большая полуось равна 10, а эксцентриситет 0,8;
д) малая полуось равна 8, а эксцентриситет $\frac{\sqrt{2}}{2}$;
е) расстояния одного из фокусов до концов большей оси равны 7 и 1;
ж) прямые $x=\pm 8$ служат директрисами, а малая ось равна 8.

2. Составить уравнение эллипса, который проходит через точки $M\left(\sqrt{3};-2\right)$ и $N\left(-2\sqrt{3};1\right)$, а его осями являются координатные оси.

3. Доказать, что для координат всякой точки $M_1\left(x_1;y_1\right)$, лежащей внутри эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, имеет место неравенство $\frac{x_1^{\ 2}}{a^2}+\frac{y_1^{\ 2}}{b^2}<1$. Для точки $M_2\left(x_2;y_2\right)$, лежащей вне эллипса, неравенство имеет противоположный смысл:

$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}>1$.

4. Найти точки пересечения эллипса $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1$ с прямой $y=2x-9$.

5. Через фокус $F_2(c;0)$ эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ проведена хорда, перпендикулярная к большей оси. Найти длину этой хорды.

6. Найти уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ точке $M_0(2;-3)$.

7. На эллипсе $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ найти точку, расстояние которой от правого фокуса в четыре раза больше расстояния от ее левого фокуса.

8. Исследовать кривую, приведя ее уравнение к простейшему виду:

$$x^2+4y^2+4x-16y-8=0.$$

9. Отрезок AB постоянной длины скользит своими концами по сторонам прямого угла. Выбрав на отрезке точку M ($AM=a$, $BM=b$), найти траекторию, которую она описывает при этом скольжении.

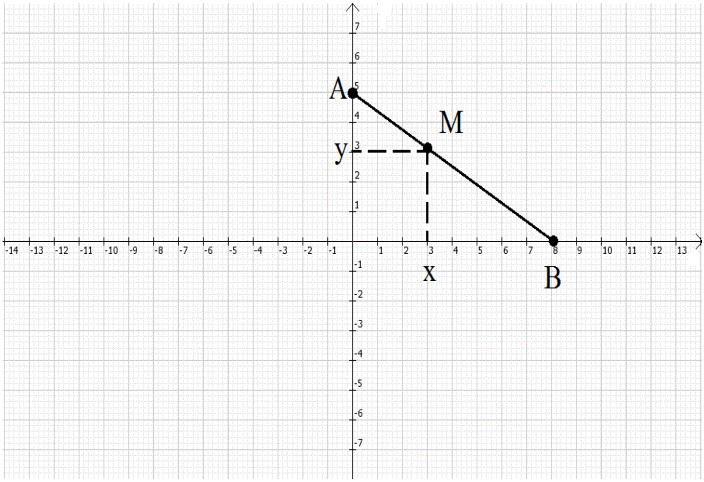

Рис. 1.7

10. На рисунке 1.8 изображен эллиптический циркуль, у которого с помощью винтов можно менять длину скользящей линейки AB и место крепления карандаша M. Как установить циркуль, чтобы начертить

а) эллипс $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$,

б) окружность $x^2+y^2=25$?

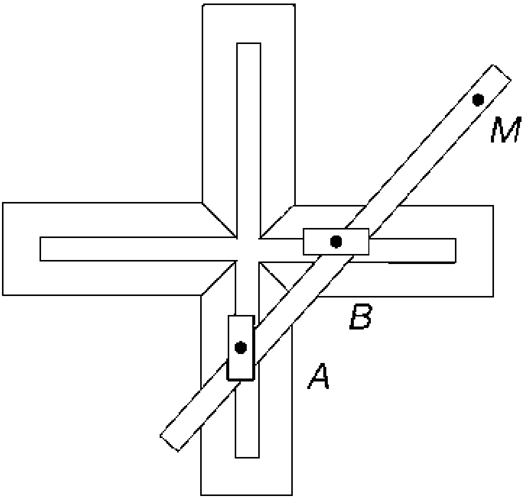

Рис. 1.8

11. Определить положения точек $A(3;1)$, $B(-2;0)$, $B(-2;0)$ относительно окружности $x^2+y^2=4$.

12. Как расположены на плоскости точки, координаты которых удовлетворяют условиям $16 \le (x-1)^2+(y+3)^2 \le 25$?

13. Составить уравнение окружности, касающейся оси Ox в точке $(6;0)$ и проходящей через точку $(9;9)$.

14. При каком условии уравнение $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ определяет окружность ?

15. составить уравнение окружности, вписанной в треугольник, стороны которого заданы уравнениями: $x+y-2=0$, $x-y+4=0$, $x-7y=0$.

16. Составить уравнение гиперболы, оси которой совпадают с осями координат, зная, что

а) расстояние между вершинами равно 8, а расстояние между фокусами равно 10;

б) вещественная полуось равна 5, а вершины делят расстояние между центром и фокусами пополам;

в) вещественная ось равна 6, а одна из ветвей проходит через точку $M_0(9;-4)$;

г) гипербола проходит через точки $P(-5;2)$ и $Q\left(2\sqrt{5};\sqrt{2}\right)$.

17. Дана гипербола $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$. Найти:

а) фокусы;
б) эксцентриситет;
в) уравнения асимптот;
г) уравнения директрис.

18. Доказать, что касательная к гиперболе $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ в точке $M_1(x_1;y_1)$ имеет уравнение $\dfrac{xx_1}{a^2}-\dfrac{yy_1}{b^2}=1$. *Указание.* Рассматривая секущие, проходящие через точку $M_1(x_1;y_1)$, показать, решая систему

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ \dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}=1 \\ y-y_1=k(x-x_1) \end{cases}$$

и требуя $x\to x_1$, что угловой коэффициент касательной определен формулой

$$k=\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}.$$

19. На гиперболе $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{24}=1$ выбрана точка

$M_0(10; y_0)$, где $y_0 > 0$. Найти фокальные радиусы этой точки и угол между ними.

20. Составить уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом

$\dfrac{x^2}{49} + \dfrac{y^2}{24} = 1$ при условии, что ее эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{5}{4}$.

21. Зеркало автомобильной фары имеет в разрезе форму параболы. Диаметр зеркала 20 см, глубина 10 см. Найти положение фокуса.

22. Составить уравнение параболы, зная, что

а) расстояние фокуса от вершины равно 3;

б) фокус имеет координаты $(5;0)$, а прямая $y = 0$ - ось симметрии;

в) парабола симметрична относительно оси Ox, проходит через точки $0(0;0)$ и $(1;-4)$;

г) парабола проходит через точки $0(0;0)$ и $(6;-2)$, а координатная ось Oy -ось симметрии параболы.

23. Найти точки пересечения параболы $y^2 = 12x$

а) с прямой $x - 2y + 3 = 0$;

б) с эллипсом $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

24. На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, фокальный радиус которой равен 20.

25. Доказать, что касательная к параболе $y^2 = 2px$ в точке $M_1(x_1; y_1)$ определена уравнением $yy_1 = p(x + x_1)$. *Указание.* Рассматривая секущие M_1M_2 и совокупность условий $y_1^{\ 2} = 2px_1$, $y_2^{\ 2} = 2px_2$, $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, показать, что угловой коэффициент касательной в точке $M_1(x_1; y_1)$, получаемый при

$x_2 \to x_1$, равен $\dfrac{p}{y_1}$.

26. Дана кривая $3x^2+5xy+y^2-8x-11y-7=0$. Показать, что кривая является центральной линией. Найти координаты центра.

27. Преобразовать уравнение линии путем переноса начала координат в центр кривой: $3x^2+6xy+2y^2-4x+2y+1=0$.

28. Получить путем параллельного переноса осей координат каноническое уравнение линии, заданной в прямоугольной декартовой системе координат Oxy соотношением $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$. Изобразить кривую, старые и новые оси.

29. Получить путем поворота осей координат каноническое уравнение линии, заданной в прямоугольной декартовой системе координат Oxy соотношением

$$32x^2+52xy-7y^2+180=0.$$

Изобразить кривую, старые и новые координатные оси.

30. Установить, что уравнение $9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0$ является параболическим. Привести это уравнение к простейшему виду. Изобразить оси первоначальной системы координат и оси других координатных систем, которые использовались по ходу решения. Построить геометрический образ, определяемый этим уравнением.

31. Необходимым и достаточным условием того, чтобы уравнение (1.1) представляло пару прямых заключается в равенстве нулю *дискриминанта кривой*: $\Delta=0$. Показать, что линия $x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0$ - это две действительные пересекающиеся прямые. Используя метод неопределенных коэффициентов, найти уравнения этих прямых.

32. Не преобразуя уравнение к каноническому виду, определить тип кривой:

а) $3x^2-2xy+3y^2-2x-4y+1=0$;

б) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + 2 = 0$;

в) $x^2 + y^2 + 2x + 1 = 0$;

г) $x^2 + 2xy - y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$;

д) $x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 5y - 3 = 0$;

е) $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 6y + 1 = 0$;

ж) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$;

з) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$;

и) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 4y + 2 = 0$.

Замечание. Упрощение уравнения линии (1.8) можно проводить иначе, используя методы линейной алгебры: квадратичную форму, содержащуюся в уравнении, следует привести к главным осям [3, 5].

2. Поверхности второго порядка: канонические уравнения

Поверхности второго порядка – это поверхности, которые в прямоугольной декартовой система координат Oxy заданы уравнением, в котором присутствуют вторые степени переменных. Общий вид уравнений:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0 \quad (2.1)$$

В зависимости от значений коэффициентов соотношение (2.1) может задавать сферу, эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды, конусы и цилиндры второго порядка. Если координатная система подобрана специальным образом (координатные плоскости являются плоскостями симметрии), то (2.1) упрощается. Получается *каноническое* уравнение поверхности. Упрощение достигается за счет приведения квадратичной формы трех переменных, содержащейся в уравнении, к главным осям [5].. В некотором ортонормированном базисе квадратичная форма приводится к сумме квадратов:

$$\lambda_1X^2 + \lambda_2Y^2 + \lambda_3Z^2,$$

Где X, Y, Z - новые координаты, λ_1, λ_2, λ_3 - собственные числа матрицы квадратичной формы.

Ниже будем рассматривать поверхности второго порядка, задаваемые только каноническими уравнениями.

2.1 Эллипсоиды. Сфера

Определение. Эллипсоидом называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2.2)$$

Для того, чтобы уяснить форму поверхности, применяют метод параллельных сечений. Рассматривают пересечение поверхности плоскостями, параллельными плоскости Oxy:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ z=h \end{cases}$$

Видим, при $|h|<c$ система имеет решение, а плоскость $z=h$ пересекает поверхность по линии, которая проектируется на плоскости Oxy в кривую

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}, \quad \text{или}$$

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}=1.$$

Линия пересечения - эллипс с полуосями

$$a_*=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}} \quad \text{и} \quad b_*=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}.$$

Ясно, наибольший эллипс наблюдается при $h=0$, т.е. в координатной плоскости Oxy. При $h=c$ эллипс вырождается в точку. Если $h>c$, то плоскость не встречается с эллипсоидом. Изменяя $|h|$ от 0 до c, получим семейство эллипсов, заполняющих поверхность. Каждый из них расположен параллельно плоскости Oxy симметрично координатных плоскостей Oxz, Oyz. Аналогично рассуждая, видим, что эллипсоид можно представить как поверхность, заполненную эллипсами, параллельными координатной плоскости Oxz (либо координатной плоскости Oyz).

При $y=0$ получим эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$. Плоскость Oyz пересекает эллипсоид по линии $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \quad x=0$. Таким образом, эллипсоид (2.2) – замкнутая овальная поверхность, обладающая тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии, которыми в данном случае будут координатные плоскости.

Величины a, b, c называются *полуосями* эллипсоида. Если числа a, b, c - различные, то эллипсоид называется *трехосным*. Если два параметра равны между собой, то поверхность называется *эллипсоидом вращения*. Например, при $a=b$ плоскость $z=h$ ($|h|<c$) пересекает эллипсоид по окружности $x^2+y^2=a^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)$.

Если $a=b=c$, то эллипсоид превращается в сферу:

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \tag{2.3}$$

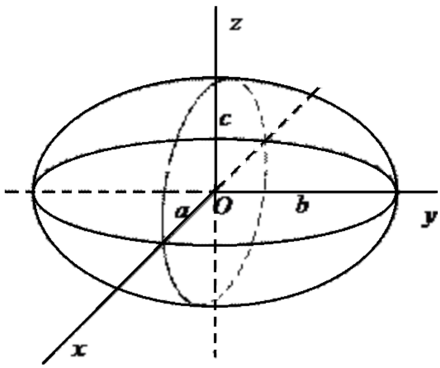

Рис. 2.1

2.2 Гиперболоиды

Различают да вида гиперболоидов: *однополостные* и *двуполостные*.

Определение. Однополостным гиперболоидом называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат задана уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{2.4}$$

Двуполостным гиперболоидом называется поверхность

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (2.5)$$

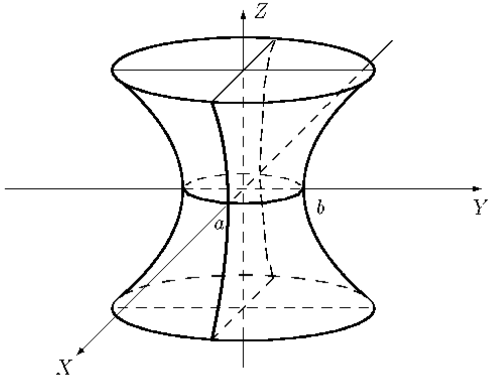

Рис. 2.2

Соотношения (2.4), (2.5) – это канонические уравнения гиперболоидов.

Рассмотрим пересечение однополостного гиперболоида (2.4) координатными плоскостями:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ z=0 \end{cases}$$

Этот эллипс, расположенный в плоскости Oxy с полуосями a, b. Оси эллипса - координатные оси Ox, Oy. Далее

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0 \end{cases}$$

Это гипербола в плоскости Oxz с центром в начале координат. Кривая симметрична относительно осей Ox, Oz. Вершины гиперболы в точках $(-a;0;0)$ и $(a;0;0)$.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0 \end{cases}$$

Эта гипербола расположена в плоскости Oyz. Центр симметрии расположен в начале координат. Вершины в точках $(0;-b;0)$, $(0;b;0)$.

Если рассмотреть пересечение гиперболоида плоскостями $z=h$ и $z=-h$, то получим эллипсы с полуосями $a_*=a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$, $b_*=b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$. Ясно, из всех эллипсов наименьшие полуоси имеет «горловой» эллипс, расположенный в координатной плоскости Oxy. С увеличением h (удалении от плоскости Oxy) размеры эллипсов возрастают. Сопоставляя изложенное, заключаем, что однополостный гиперболоид представляет собой бесконечную трубу, расширяющуюся в обе стороны. Поверхность имеет три плоскости симметрии – координатные плоскости. Величины a, b, c называются *полуосями* однополостного гиперболоида. При $a=b$ имеем однополостный гиперболоид вращения (эллипсы в сечениях $z=h$ превращаются в окружности).

Рассмотрим далее двуполостный гиперболоид (2.5). Изучим пересечение поверхности плоскостями, параллельными плоскости Oxy:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1, \\ z=h \end{cases}$$

При $|h|<c$ система решений не имеет, т.е. плоскость не имеет общих точек с поверхностью. Если $|h|>c$, получим эллипсы с полуосями $a\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2}-1}$, $b\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2}-1}$. Ясно, с увеличением h растут полуоси. Если $z = h = \pm c$, получим две вершины поверхности: $(0;0;-c)$ и $(0;0;c)$.

Рассматривая пересечение поверхности координатными плоскостями $y = 0$ и $z = 0$, получаем гиперболы: $\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$. Первая кривая расположена в плоскости Oyz, она симметрична относительно осей Oy, Oz. Другая кривая расположена в плоскости Oxz. Оси симметрии этой гиперболы – оси Ox, Oz.

Сопоставляя вышеизложенное, заключаем, что двуполостный гиперболоид представляет собой две бесконечные «чаши», симметрично расположенные относительно координатных плоскостей. Величины a, b, c по-прежнему называются полуосями гиперболоида. Если $a = b$, то в сечениях $z = h$ эллипсы превращаются в окружности: имеем двуполостный гиперболоид вращения.

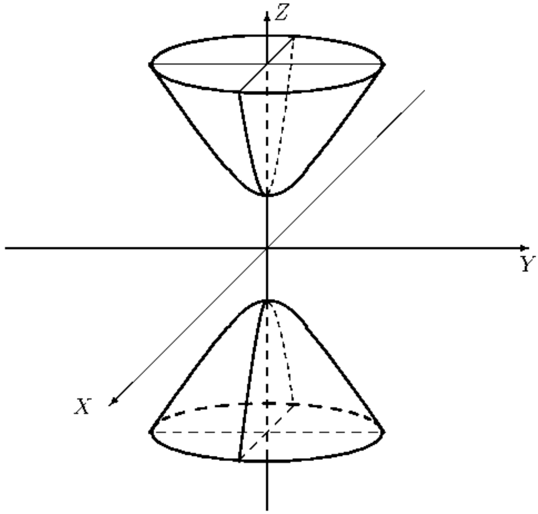

Рис. 2.3

2.3 Параболоиды

Существуют две поверхности, которые являются пространственными аналогами парабол на плоскости. Их называют параболоидами. Различают *эллиптический и гиперболический параболоиды*.

Определение. Эллиптическим параболоидом называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задана уравнением

$$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}\ , \tag{2.6}$$

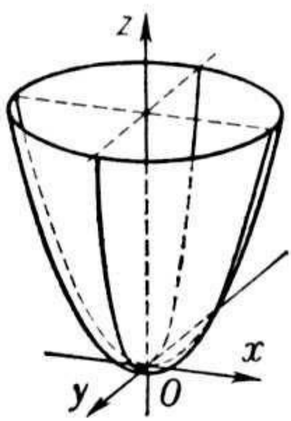

Рис. 2.4

где $p > 0,\quad q > 0$. Соотношение (2.6) – каноническое уравнение эллиптического параболоида. Исследуем эту поверхность методом параллельных сечений: линии пересечения эллиптического параболоида с плоскостями, параллельными координатной плоскости Oxy - эллипсы

$$\begin{cases} 2z = \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q}, \\ z = h, \quad h > 0 \end{cases}$$

Полуоси этих эллипсов $p\sqrt{2h}$, $q\sqrt{2h}$. Эллипсы расположены симметрично относительно координатных плоскостей Oxz, Oyz.

С координатной плоскостью Oyz поверхность пересекается по параболе

$$\begin{cases} 2z = \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q}, \\ x = 0 \end{cases}$$

Эта парабола симметрична относительно оси Oz. q - параметр параболы. Вершина в начале координат.

С координатной плоскостью Oxz параболоид пересекается по параболе с параметром p:

$$\begin{cases} 2z = \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q}, \\ y = 0 \end{cases}$$

Вершина этой параболы также находится в начале координат.

Сопоставляя изложенное, видим, что эллиптический параболоид представляет собой бесконечную чашу, расположенную в верхнем полупространстве $z > 0$. Поверхность обладает двумя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии: плоскость Oxz и плоскость Oyz.

Если $p = q$, то поверхность (2.6) называется *параболоидом вращения*.

Определение. Гиперболическим параболоидом называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задана уравнением

$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} \tag{2.7}$$

где $p > 0, \quad q > 0$.

Для исследования формы поверхности снова применим метод параллельных сечений:

$$\begin{cases} 2z = \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q}, \\ x = h \end{cases}$$

При пересечении плоскостями, параллельными координатной плоскости Oyz получаем семейство «*восходящих*» парабол. Вершины этих парабол $(x;0;z)$ расположены в точках параболы $x^2 = 2pz$. Ветви парабол направлены вниз. Плоскость Oxz - плоскость симметрии каждой из парабол этого семейства. Все параболы семейства имеют один и тот же параметр q.

Рассмотрим пересечение параболоида плоскостями, параллельными координатной плоскости Oxz:

$$\begin{cases} 2z = \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q}, \\ y = h \end{cases}$$

Получим в результате семейство «*нисходящих*» парабол. Каждая из них имеет один и тот же параметр p. Ветви этих парабол направлены вверх, вершины $(0;y;z)$ скользят по параболе $y^2 = -2qz$. При увеличении значений $|y|$ парабола $x^2 = 2pz$ опускается вниз.

Рассмотрим, наконец, семейство линий, получаемых при пересечении поверхности плоскостями, параллельными координатной плоскости Oxy:

$$\begin{cases} 2z = \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q}, \\ z = h, \quad h \neq 0 \end{cases}$$

Если $h > 0$, то получим семейство гипербол, симметричных относительно координатных плоскостей Oxz, Oyz, причем каждая из гипербол пересекает плоскость Oxz. Если $h<0$, то имеем семейство гипербол, симметричных относительно тех же плоскостей Oxz, Oyz, но каждая из гипербол пересекает плоскость Oyz.

Сопоставляя изложенное, заключаем, что гиперболический параболоид - поверхность, которая имеет форму седла. При этом координатные плоскости Oxz, Oyz - плоскости симметрии для гиперболического параболоида (2.7). Седловая точка в этом случае совпадает с началом координат.

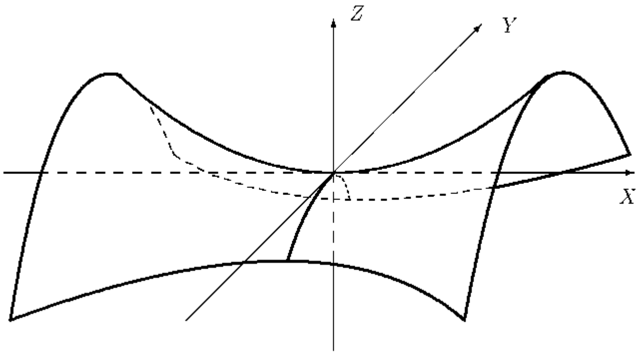

Рис. 2.5

2.4 Конусы второго порядка

Определение. Конусом второго порядка называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \tag{2.8}$$

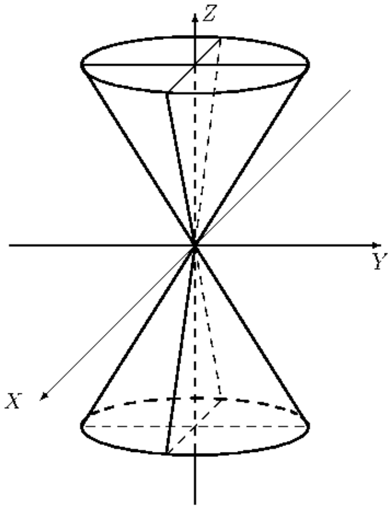

Рис. 2.6

Соотношение (2.8) – каноническое уравнение конуса. Обратим внимание, что уравнение (2.8) – однородное. Следовательно, начало координат $O(0;0;0)$ лежит на поверхности. Пусть $M_0(l;m;n)$ - другая точка, принадлежащая поверхности (2.8). Очевидно, канонические уравнения прямой OM_0 имеют вид:

$$\frac{x-0}{l-0}=\frac{y-0}{m-0}=\frac{z-0}{n-0}.$$

Т.е. параметрические уравнения этой прямой следующие

$$x=lt,\quad y=mt,\quad z=nt.$$

Т.к. точка $M_0(l;m;n)$ лежит на поверхности, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению (2.8):

$$\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\frac{n^2}{c^2}=0.$$

Но, очевидно, при любом значении параметра t точка $M(lt;mt;nt)$ также принадлежит поверхности:

$$\frac{(lt)^2}{a^2}+\frac{(mt)^2}{b^2}-\frac{(nt)^2}{c^2}=t^2\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\frac{n^2}{c^2}\right)\equiv 0.$$

Это означает, что вся прямая OM_0 целиком лежит на поверхности. При различных вариантах параметров l, m, n получаем всевозможные прямые на поверхности. Они называются *образующими* конуса. Коническая поверхность получается, если подвижная прямая – образующая, соединяющая неподвижную точку (*вершину конуса*) и точки некоторой кривой (*направляющей*) принимает всевозможные положения в пространстве.

Рассмотрим далее пересечение конуса (2.8) плоскостями, параллельными координатной плоскости Oxy:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0,\\ z=h, \quad h\in R\end{cases}$$

Если $h\neq 0$, то в сечении наблюдаем эллипсы с полуосями $a_*=\dfrac{a|h|}{c}$, $b_*=\dfrac{b|h|}{c}$. При $h=0$ эллипс «стягивается» в точку $O(0;0;0)$. В частном случае $a=b$ поверхность называется *круговым конусом* (эллипсы в сечениях плоскостями $z=h$ переходят в окружности). Эллипсы симметричны относительно координатных плоскостей Oxz, Oyz.

Таким образом, учитывая вышеизложенное, заключаем, что конус второго порядка (2.8) – это поверхность, имеющая вершину $O(0;0;0)$ и обладающая симметрией относительно координатных плоскостей Oxz, Oyz.

2.5 Цилиндры второго порядка

Отсутствие какой-либо текущей координаты в уравнении поверхности $F(x,y,z)=0$ означает, что эта поверхность *цилиндрическая*: поверхность параллельная той оси, координата которой не присутствует в уравнении. Поясним это утверждение на примере поверхности $F(x,y)=0$. В трехмерном пространстве уравнение $F(x,y)=0$ показывает, что при любом значении h плоскость $z=h$ и поверхность пересекаются по одной и той же линии. Одна из таких кривых может быть получена из другой параллельным переносом в направлении оси Oz. Отметим, для любой точки $M(x;y;z)$ поверхности $F(x,y)=0$ вектор нормали имеет вид $\mathbf{n}=\left(\frac{\partial F}{\partial x};\frac{\partial F}{\partial y};0\right)$. Этот вектор ортогонален направляющему вектору оси Oz $\mathbf{k}=(0;0;1)$, т.к. скалярное произведение равно нулю. Следовательно, ось Oz параллельна поверхности $F(x,y)=0$.

Далее рассмотрим поверхности *второго порядка*, при пересечении которых координатной плоскостью получается линия второго порядка.

Цилиндрическая поверхность второго порядка получается из уравнения (2.1), в котором «выпадает одна из координат». Например, при $a_{13}=0$, $a_{23}=0$, $a_{33}=0$, $a_3=0$ получаем соотношение по виду совпадающее с общим уравнением линии второго порядка:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+a_1x+a_2y+a_4=0 \qquad (2.9)$$

Соотношение (2.9) – общее уравнение цилиндра второго порядка, параллельного оси Oz. Рассматривая пересечение этой поверхности плоскостями, параллельными плоскости Oxy, имеем одну и ту же кривую второго порядка. Тип этой кривой определяет название поверхности. Различают эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры.

Эллиптический цилиндр – это поверхность, которая при надлежащем выборе координатных осей определена уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (2.10)$$

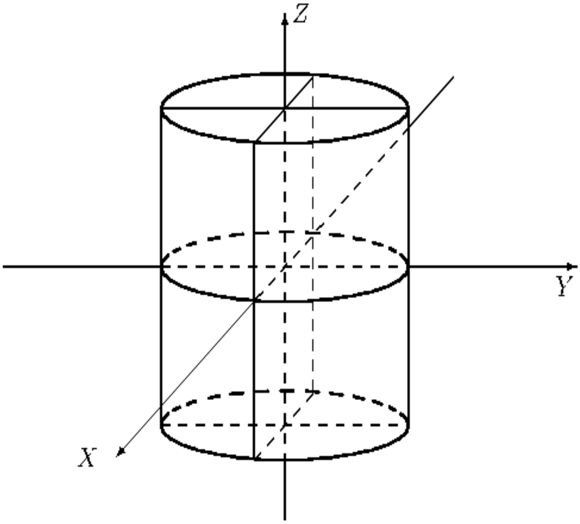

Рис. 2.7

Гиперболическим цилиндром называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задана уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2.11)$$

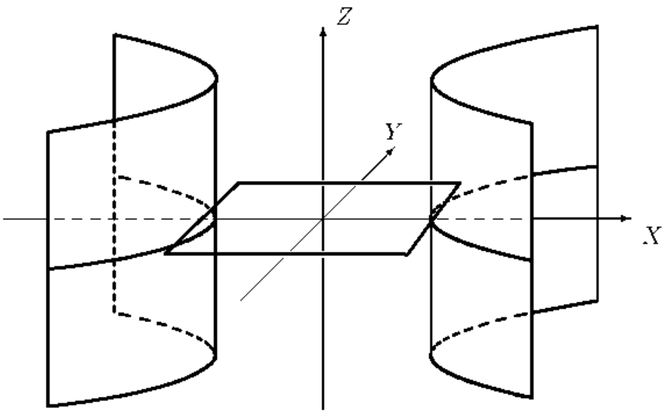

Рис. 2.8

Параболическим цилиндром называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задана уравнением

$$y^2 = 2px \tag{2.12}$$

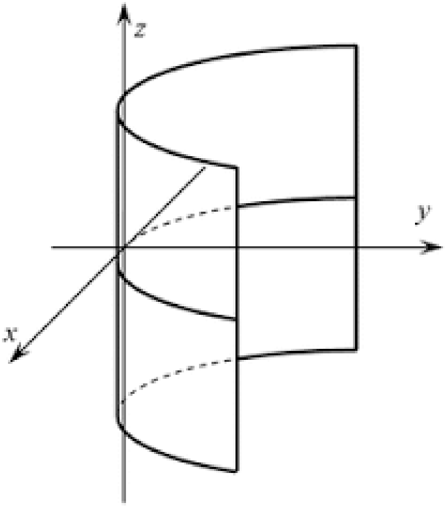

Рис. 2.9

Упражнения к разделам 2.1 – 2.5

1. Определить координаты центра и радиус сферы $x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z=0$.
2. Определить координаты центра и радиус окружности
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z+24=0, \\ 2x+2y+z+1=0 \end{cases}$$
3. Определить расположение точек $A(3;0;4)$, $B(3;5;0)$ и $C(3;4;4)$ относительно сферы
$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=49.$$
4. Составить уравнение касательной плоскости к сфере $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=49$ в точке $M_0(7;-1;5)$.
5. Найти главные сечения эллипсоида

$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$. Определить его вершины и длину осей.

6. Найти точки пересечения поверхности

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$ с прямой $\frac{x-4}{2}=\frac{y+6}{-3}=\frac{z+2}{-2}$.

7. Найти отношение двух осей параллельных сечений эллипсоида $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$, а именно сечения плоскостью Oxz и плоскостью, отстоящей от нее на расстоянии двух единиц.

8. Составить уравнение эллипсоида, оси которого совпадают с осями координат, если он проходит через эллипс

$$\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1,\\ z=0\end{cases}$$ и через точку $M_0\left(1;2;\sqrt{23}\right)$.

9. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к эллипсоиду $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{75}=1$ в точке $M_0\left(3;2;5\right)$.

10. Составить уравнение поверхности, образованной вращением эллипса $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$ вокруг оси Ox.

11. Доказать, что необходимым и достаточным условием того, что плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ касается эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, является равенство

$a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2=D^2$.

12. Составить уравнение эллипсоида, пересекающего плоско-

сти Oxz и Oyz по линиям $\begin{cases} \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{z^2}{16}=1, \\ y=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} \dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=1, \\ x=0 \end{cases}$,

если его оси совпадают с координатными осями.

13.Установить, какая линия является сечением эллипсоида $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{3}=1$ плоскостью $2x-3y+4z-11=0$, и найти ее центр.

14. Установить, что плоскость $z+1=0$ пересекает однополостный гиперболоид $\dfrac{x^2}{32}-\dfrac{y^2}{18}+\dfrac{z^2}{2}=1$ по гиперболе; найти ее полуоси и вершины.

15. Доказать, что двуполостный гиперболоид $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{25}=-1$ имеет одну общую точку с плоскостью $5x+2z+5=0$, и найти ее координаты.

16. Найти точки пересечения поверхности $\dfrac{x^2}{4}+y^2-\dfrac{z^2}{9}=-1$ с прямой $x-3=y-1=\dfrac{z-6}{3}$.

17. Найти точки пересечения однополостного гиперболоида $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}-z^2=1$ с прямой $\dfrac{x-4}{4}=\dfrac{y+3}{0}=\dfrac{z-1}{1}$.

18. Найти точки пересечения гиперболического параболоида $4z=x^2-4y^2$ с прямой $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-5}{-2}$.

19. Доказать, что уравнение $z=xy$ определяет гиперболический параболоид.

20. Найти касательные плоскости параболоида $z=\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}$, которые были бы параллельны плоскости $x-y-2z=0$.

21. Составить уравнение конуса, вершина которого находится в начале координат, а направляющая дана уравнениями:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-5)^2 = 9, \\ z = 4 \end{cases}$$

22. Найти плоскость, касающуюся конуса

$\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} - z^2 = 0$ в точке $M_0(4;-6;4)$.

23. Составить уравнение цилиндра, зная, что он проходит через кривую $\begin{cases} (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 25, \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$, а его образующая параллельна оси Ox.

24. Составить уравнение цилиндра, образующие которого параллельны вектору $\mathbf{l} = \{2;-3;4\}$, а направляющая дана уравнениями $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = 1 \end{cases}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии.- М.: Наука, 1967.
2. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1967.
3. Волокитин Г.И., Ларченко В.В., Азаров Д.А., Редько Ю.С. Начала линейной алгебры: учебное пособие. – Ростов-на-Дону. Издательский центр ДГТУ, 2012, 63 с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика упражнениях и задачах. Ч. 1 – М.: Высшая школа, 1986.
5. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – М.: Наука, 1975.
6. Цубербиллер О.И. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. - М.: Физматгиз, 1962.
7. Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1964