ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Математика»

Учебно-методическое пособие

«Теория вероятностей и математическая статистика»

(часть 2)

Авторы:
Смирнова И.Ю.
Коровина К.С.

Ростов-на-Дону, 2018

Аннотация

Методическое пособие предназначено для преподавателей, аспирантов, студентов всех специальностей и форм обучения. Основная задача пособия состоит в демонстрации практического применения методов теории вероятностей и математической статистики, методики типовых задач.

Авторы

Ст.преп. Смирнова И.Ю.

Ст.преп. Коровина К.С.

Оглавление

ГЛАВА 1. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1.1 Определение дискретной случайной величины и закон распределения дискретной случайной величины

Величина, которая в результате испытания может принять то или иное значение, заранее неизвестно какое именно, называется *случайной*.

Будем обозначать случайные величины заглавными буквами латинского алфавита $X, Y, Z, \dots$, а их возможные значения – соответствующими малыми буквами $x_i, y_i, z_i \dots$.

Случайными величинами, например, являются: число выпавших очков при однократном бросании игральной кости; число появлений герба при 5 бросках монеты; число выстрелов до первого попадания в цель число вызовов на телефонной станции за некоторый промежуток времени.

Случайная величина называется *дискретной*, если она принимает конечное или бесконечное (счетное) число значений с определенными вероятностями.

Для задания дискретной случайной величины нужно знать ее возможные значения и вероятности, с которыми принимаются эти значения. Соответствие между ними называется *законом распределения случайной величины.* Он может иметь вид таблицы, формулы или графика.

Если обозначить возможные числовые значения случайной величины X через $x_1, x_2, \dots x_n$, а через $p_i=P(X=x_i)$ – вероятность появления значения x_i, то дискретная случайная величина полностью определяется талицей, которая называется *рядом распределения*:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Поскольку в одном испытании случайная величина принимает одно и только одно возможное значение, то события $X = x_1$, $X = x_2$, …, $X = x_n$ образуют полную группу; следовательно, сумма вероятностей этих событий т. е. сумма вероятностей второй строки таблицы, равна единице:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

Пример 1.

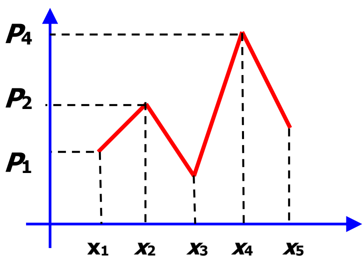
Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятности их попадания при одном выстреле равны соответственно 0,6 и 0,7. Составить ряд распределения случайной величины X – числа попаданий после двух выстрелов.

Решение.

Очевидно, что X может принимать три значения: 0, 1 и 2. Следовательно, ряд распределения имеет вид:

x_i	0	1	2
p_i	0,12	0,46	0,42

Графически закон распределения дискретной случайной величины можно представить в виде многоугольника (*полигона*) распределения – ломаной, соединяющей точки плоскости с координатами (x_i, p_i).



Полную характеристику случайной величины дает также функция распределения.

Функцией распределения $F(x)$ случайной величины X называется вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее x:

$$F(x) = P(X < x)$$

Значение $F(x)$ в каждой точке представляет собой сумму вероятностей тех ее возможных значений, которые меньше аргумента функции.

Свойства функции распределения:

1) $0 \le F(x) \le 1$.

Действительно, так как функция распределения представляет собой вероятность, она может принимать только те значения, которые принимает вероятность.

2) Функция распределения является неубывающей функцией, то есть $F(x_2) \ge F(x_1)$ при $x_2 > x_1$. Это следует из того, что

$$F(x_2) = p(X < x_2) = p(X < x_1) + p(x_1 \le X < x_2) \ge F(x_1).$$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0 \quad \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$. В частности, если все возможные значения X лежат на интервале $[a, b]$, то $F(x) = 0$ при $x \le a$ и $F(x) = 1$ при $x \ge b$. Действительно, $X < a$ – событие невозможное, а $X < b$ – достоверное.

4) Вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала $[a, b]$, равна разности значений функции распределения на концах интервала:

$$p\ (\ a < X < b\ ) = F(b) – F(a).$$

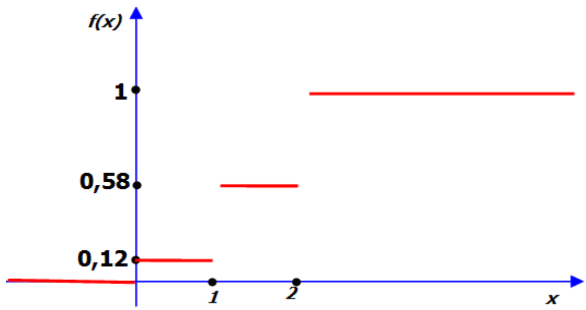
Справедливость этого утверждения следует из определения функции распределения (см. свойство 2).

Пример 2.

Найдем $F(x)$ для примера 1:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ \ x \le 0 \\ 0{,}12, \ \ 0 < x \le 1 \\ 0{,}12 + 0{,}46 = 0{,}58, \ \ 1 < x \le 2 \\ 0{,}58 + 042 = 1, \ \ x > 2 \end{cases}$$

Соответственно график функции распределения имеет ступенчатый вид:



1.2 Математические операции над дискретными случайными величинами

Две случайные величины называются *независимыми*, если закон распределения одной из них не меняется от того, какие возможные значения приняла другая величина. В противном случае случайные величины называются *зависимыми*.

Пример. Имеются билеты двух различных денежных лотерей, а случайные величины X и Y, выражают соответственно выигрыш по каждому билету. Эти величины будут независимыми, так как при любом выигрыше по билету одной лотереи (например, при $X=x_i$) закон распределения выигрыша по другому билету (Y) не изменится. Если же случайные величины X и Y выражают выигрыш по билетам одной денежной лотереи, то в этом случае X и Y являются зависимыми, ибо любой выигрыш по одному билету ($X=x_i$) приводит к изменению вероятности выигрыша по другому билету (Y), то есть к изменению закона распределения Y.

Определим математические операции над дискретными случайными величинами.

Произведением kX случайной величины X на постоянную величину k называется случайная величина, которая принимает значения kx_i с теми же вероятностями p_i ($i=1, 2, \ldots, n$):

kX	kx_1	kx_2	kx_3	…	kx_n
P	P_1	P_2	P_3	…	P_n

Квадратом случайной величины X, то есть X^2, называется случайная величина, которая принимает значение x_i^2 с теми же вероятностями p_i $(i=1, 2, \ldots, n)$:

X^2	x_1^2	x_2^2	x_3^2	…	x_n^2
P	P_1	P_2	P_3	…	P_n

m-й степенью случайной величины X называется случайная величина X^m, которая принимает значения x_i^m с теми же вероятно-

стями p_i, $i = 1,..,n$.

Суммой (разностью или произведением) случайных величин X и Y называется случайная величина, которая принимает все возможные значения вида x_i+y_j (x_i-y_j или $x_i \cdot y_j$), где $i=1, 2, \ldots, n$; $j=1, 2, \ldots, m$, с вероятностями p_{ij} того, что случайная величина X примет значение x_i, а Y – значение y_j: $p_{ij}=P[(X=x_i)\ (Y=y_j)]$. Если случайные величины X и Y независимы, то есть независимы любые события $X=x_i$, $Y=y_j$, то по теореме умножения вероятностей для независимых событий $p_{ij}=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j) = p_i \cdot p_j$.

Пример1 Найти математическое ожидание случайной величины $Z=2X-5Y+3$, если известно, что $M(X)=4$, $M(Y)=1$.

Используя свойства математического ожидания, находим $M(Z)=M(2X-5Y+3)=M(2X)-M(5Y)+M(3)=2M(X)-5M(Y)+3=2\cdot 4-5\cdot 1+3=6.$

Пример2 Найти дисперсию случайной величины

$Z=3X-2Y-4$, если известно, что $D(X)=2$, $D(Y)=1$

Используя свойства дисперсии, находим

$$D(Z)=D(2X-2Y-4)=D(3X)+D(-2Y)+D(-4)=3^2$$

$$D(X)+2^2(Y)+0=9\cdot 2+4\cdot 1=22.$$

1.3 Числовые характеристики дискретной случайной величины

Одной из важнейших числовых характеристик случайной величины является математическое ожидание.

По аналогии со средней арифметической

$$\overline{x_в} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{n}$$

строится теоретическая средняя арифметическая, которую называют математическим ожиданием и обозначают $M(X)$.

Математическим ожиданием $M(X)$ дискретной случайной величины X называется сумма парных произведений всех возможных значений случайной величины на соответствующие им вероятности, т.е.

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Если число возможных значений случайной величины бесконечно, то $M(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ если полученный ряд сходится абсолютно.

Замечание 1. Математическое ожидание называют иногда *взвешенным средним*, так как оно приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины при большом числе опытов.

Замечание 2. Из определения математического ожидания следует, что его значение не меньше наименьшего возможного значения случайной величины и не больше наибольшего.

Замечание 3. Математическое ожидание дискретной случайной величины есть *неслучайная* (постоянная) величина.

Свойства математического ожидания.

1°. Математическое ожидание постоянной C равно этой постоянной.

Доказательство. Постоянную C можно рассматривать как случайную величину X, которая может принимать только одно значение C с вероятностью равной единице. Поэтому $M(X)=C\cdot 1=C$.

2°. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, т.е. $M(kX)=k\,M(X)$.

Доказательство. Используя определение математического ожидания, получим

$$M(kX) = \sum_{i=1}^{n} k\, x_i\, p_i = k \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i = k\, M(X)$$

3°. Математическое ожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин:

$$M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)$$

4°. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин:

$$M(X_1 \cdot X_2) = M(X_1) \cdot M(X_2)$$

Во многих практически важных случаях существенным является вопрос о том, насколько велики отклонения $X - M(X)$ случайной величины от ее математического ожидания.

Пример. Пусть две случайные величины X_1 и X_2 заданы следующими рядами распределения

Значения X_1	***-0,2***	***-0,1***	***0,1***	***0,2***
Вероятности $P(X_1)$	***0,25***	***0,25***	***0,25***	***0,25***
Значения X_2	***-50***	***-40***	***40***	***50***
Вероятности $P(X_2)$	***0,25***	***0,25***	***0,25***	***0,25***

Математические ожидания этих величин одинаковы и равны нулю:

$$M(X_1) = (-0{,}2) \cdot 0{,}25 + (-0{,}1) \cdot 0{,}25 + 0{,}1 \cdot 0{,}25 + 0{,}2 \cdot 0{,}25 = 0$$

$$M(X_2)=(-50)\cdot 0{,}25+(-40)\cdot 0{,}25+40\cdot 0{,}25+50\cdot 0{,}25=0$$

но разброс значений этих величин относительно их математического ожидания неодинаков. В первом случае значения, принимаемые случайной величиной X_1, близки к ее математическому ожиданию, а во втором случае далеки от него. Для оценки разброса (рассеяния) значений случайной величины около ее математического ожидания вводится новая числовая характеристика - дисперсия.

Дисперсией $D(X)$ случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X)=M[X-M(X)]^2$$

Казалось бы, естественным рассматривать не квадрат отклонения, а просто отклонение $X-M(X)$ случайной величины от ее математического ожидания. Однако математическое ожидание этого отклонения равно нулю, так как

$$M[X-M(X)]=M(X)-M[M(X)]=M(X)-M(X)=0$$

При решении задач дисперсию удобно вычислять по формуле

$$D(X)=M\left(X^2\right)-[M(X)]^2$$

Свойства дисперсии.

1) Дисперсия постоянной величины C равна нулю:

$$D(C) = 0.$$

Доказательство.

$$D(C) = M((C - M(C))^2) = M((C - C)^2) = M(0) = 0.$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2D(X).$$

Доказательство.

$$D(CX) = M((CX - M(CX))^2) = M((CX - CM(X))^2) =$$
$$= M(C^2(X - M(X))^2) = C^2D(X).$$

3) Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

Доказательство.

$$D(X + Y) = M(X^2 + 2XY + Y^2) - (M(X) + M(Y))^2 =$$
$$= M(X^2) + 2M(X)M(Y) + M(Y^2) - M^2(X) - 2M(X)M(Y) - M^2(Y) =$$
$$= (M(X^2) - M^2(X)) + (M(Y^2) - M^2(Y)) = D(X) + D(Y).$$

Следствие 1. Дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме их дисперсий.
Следствие 2. Дисперсия суммы постоянной и случайной величин равна дисперсии случайной величины.

4) Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

Доказательство.

$$D(X - Y) = D(X) + D(-Y) = D(X) + (-1)^2D(Y) = D(X) + D(X).$$

Дисперсия дает среднее значение квадрата отклонения случайной величины от среднего; для оценки самого отклонения служит величина, называемая средним квадратическим отклонением.

Средним квадратическим отклонением $\sigma(X)$ случайной величины X называется корень квадратный из ее дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ имеет ту же размерность, что и случайная величина X.

Пример. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, зная закон ее распределения:

X	*3*	*5*	*2*
P	*0.1*	*0.6*	*0.3*

Решение: Математическое ожидание равно сумме произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности: $M(X)=3\cdot0.1+5\cdot0.6+2\cdot0.3=3.9$.

Для нахождения дисперсии будем пользоваться формулой $D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$. Для этого составим ряд распределения дискретной случайной величины X^2:

X^2	9	25	4
P	0.1	0.6	0.3

и найдем математическое ожидание $M(X^2)$:

$$M(X^2)=9\cdot0.1+25\cdot0.6+4\cdot0.3=17.1$$

Отсюда имеем, дисперсия $D(X)=17.1-(3.9)^2=1.89$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)=\sqrt{1.89}$.

1.4 Биномиальный закон распределения. Распределение Пуассона.

Биномиальный закон распределения.

Рассмотрим схему повторных испытаний Бернулли и найдем закон распределения случайной величины X – числа появлений события A в серии из n испытаний. Возможные значения A: 0, 1, …, n. Соответствующие им вероятности можно вычислить по формуле Бернулли:

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$$

(p – вероятность появления A в каждом испытании).

Такой закон распределения называют *биномиальным*, поскольку правую часть равенства можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона:

$$(p+q)^n=C_n^n p^n+C_n^{n-1}p^{n-1}q+\ldots+C_n^k p^k q^{n-k}+\ldots+C_n^0 q^n$$

Числовые характеристики. Для случайной величины, распределенной по биномиальному закону, математическое ожидание $M(X)$ можно найти, используя его свойства . Пусть X_1 – число появлений события A в первом испытании, X_2 – во втором и т.д. При этом каждая из случайных величин X_i задается рядом распределения вида

X_i	0	1
p_i	q	p

Следовательно, $M(X_i) = p$. Тогда

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} M(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np$$

Аналогичным образом вычислим дисперсию:

$$D(X_i) = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p - p^2 = p - p^2 = p(1-p),$$

откуда по свойству 4 дисперсии

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = np(1-p) = npq$$

Пример 1.

Составить ряд распределения случайной величины X – числа попаданий при 5 выстрелах, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,8. Найти математическое ожидание и дисперсию.

Решение: $p(X=0) = 1 \cdot (0,2)^5 = 0,00032;$

$p(X=1) = 5 \cdot 0,8 \cdot (0,2)^4 = 0,0064;$

$p(X=2) = 10 \cdot (0,8)^2 \cdot (0,2)^3 = 0,0512;$

$p(X=3) = 10 \cdot (0,8)^3 \cdot (0,2)^2 = 0,2048;$

$p(X=4) = 5 \cdot (0,8)^4 \cdot 0,2 = 0,4096;$

$p(X=5) = 1 \cdot (0,8)^5 = 0,32768.$

Таким образом, ряд распределения имеет вид:

x	0	1	2	3	4	5
p	0,0032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32728

M(X)=5·0,8=4, D(X)=5·0,8·0,2=0,8

Распределение Пуассона.

Рассмотрим дискретную случайную величину X, принимающую только целые неотрицательные значения ($0, 1, 2, \ldots, m, \ldots$n), последовательность которых не ограничена. Такая случайная величина называется распределенной *по закону Пуассона*, если вероятность того, что она примет значение m, выражается формулой:

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

где $\lambda = np$ – некоторая положительная величина, называемая *параметром* закона Пуассона.

Замечание. Формула Пуассона выражает биномиальное распределение при большом числе опытов и малой вероятности события. Поэтому закон Пуассона часто называют *законом редких явлений*.

Числовые характеристики.
Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, совпадают и равны параметру λ, который определяет этот закон, т.е.

$$M(X)=D(X)=\lambda.$$

Пример 2.
На завод прибыла партия деталей в количестве 1000 шт. Вероятность того, что деталь окажется бракованной, равна 0,001. Какова вероятность того, что среди прибывших деталей будет 5 бракованных?

Решение: Здесь $\lambda = np = 1000 \cdot 0{,}001 = 1$. По формуле вероятности, находим

$$P_{1000}(5) = \frac{1^5 \cdot e^{-1}}{5!} \approx 0{,}003$$

1.5 Решение типовых задач.

Задача 1. Найти числовые характеристики дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	–5	2	3	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

Решение. Математическое ожидание:

$$M(X) = -5\cdot 0{,}4 + 2\cdot 0{,}3 + 3\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}2 = -0{,}3$$

Запишем закон распределения X^2:

X^2	25	4	9	16
p	0,4	0,3	0,1	0,2

Математическое ожидание:

$$M(X^2) = 25\cdot 0{,}4 + 4\cdot 0{,}3 + 9\cdot 0{,}1 + 16\cdot 0{,}2 = 15{,}3$$

Находим дисперсию:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 15{,}3 - (-0{,}3)^2 = 15{,}21$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{15{,}21} \approx 3{,}9$$

Пример 2. В лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывался один выигрыш в 50 тыс. руб. и десять выигрышей по 10 тыс. руб. Найти закон распределения величины X – стоимости возможного выигрыша.

Решение. Возможные значения величины X: x_1 = 0; x_2 = 10 и x_3 = 50. Так как из 100 билетов без выигрыша окажутся 89, то p_1 = 0,89, вероятность выигрыша 10 тыс. руб. (10 билетов) p_2 = 0,10 и для выигрыша 50 тыс. руб. (1 билет) p_3 = 0,01. Таким образом:

X	*0*	*10*	*50*
P	*0,89*	*0,10*	*0,01*

Легко проконтролировать:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}89 + 0{,}10 + 0{,}01 = 1$$

Пример 3. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X – числа шаров, извлеченных без возвращения из урны, содержащей 3 белых и 4 черных шара, до появления белого шара.

Решение. Составим ряд распределения X. Если $X = k$, то из урны вынуты подряд $k-1$ черных шаров, а затем – белый шар.

$$p(1)=\frac{3}{7};\ \ p(2)=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=\frac{2}{7};\ \ p(3)=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{6}{35};$$
$$p(4)=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{35};\ p(5)=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{35}.$$

x_i	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{1}{35}$

$$M(X)=1\cdot\frac{3}{7}+2\cdot\frac{2}{7}+3\cdot\frac{6}{35}+4\cdot\frac{3}{35}+5\cdot\frac{1}{35}=2$$
$$M(X^2)=1\cdot\frac{3}{7}+4\cdot\frac{2}{7}+9\cdot\frac{6}{35}+16\cdot\frac{3}{35}+25\cdot\frac{1}{35}=\frac{26}{5}$$
$$D(X)=\frac{26}{5}-2^2=\frac{6}{5}=1{,}2$$

Пример 4. Стрелок делает 6 выстрелов по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. Для случайной величины X – числа попаданий – найти вероятность того, что $X < 3$.

Решение. Случайная величина X распределена по биномиальному закону. Число попаданий X может быть равно 0, 1 и 2, поэтому

$$p(X=k)=C_6^k\cdot 0{,}7^k\cdot 0{,}3^{6-k}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow p(0)=0{,}3^6=0{,}000729$$
$$p(1)=6\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3^5=0{,}010206$$
$$p(2)=C_6^2\cdot 0{,}49\cdot 0{,}3^4=0{,}059535$$
$$p(X<3)=p(0)+p(1)+p(2)=0{,}07047$$

Пример 5. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины.

Решение. Дискретная случайная величина X (число отказавших элементов в одном опыте) имеет следующие возможные значения: $x_1=0$ (ни один из элементов устройства не отказал), $x_2=1$ (отказал один элемент), $x_3=2$ (отказало два элемента) и $x_4=3$ (отказали три элемента). Отказы элементов независимы друг от друга, вероятности отказа каждого элемента равны между собой, поэтому применима формула Бернулли. Учитывая, что, по условию, $n=3$, $p=0,1$, $q=1-p=0,9$, определим вероятности значений:

$P_3(0) = C_3^0 p^0 q^{3-0} = q^3 = 0,9^3 = 0,729;$

$P_3(1) = C_3^1 p^1 q^{3-1} = 3\cdot 0,1\cdot 0,9^2 = 0,243;$

$P_3(2) = C_3^2 p^2 q^{3-2} = 3\cdot 0,1^2\cdot 0,9 = 0,027;$

$P_3(3) = C_3^3 p^3 q^{3-3} = p^3=0,1^3 = 0,001;$

Проверка: $\sum p_i = 0,729+0,243+0,027+0,001=1.$

Таким образом, искомый биномиальный закон распределения X имеет вид:

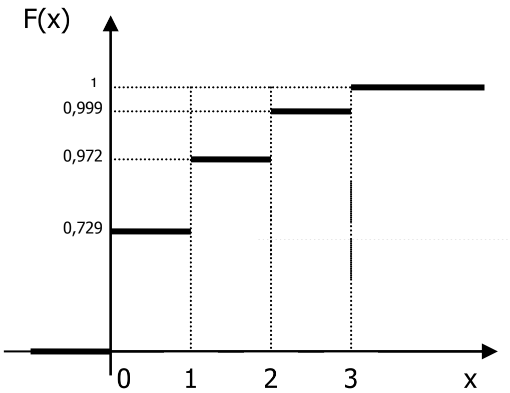
x_i	0	1	2	3
p_i	0,729	0,243	0,027	0,001

Найдем функцию распределения $F(x) = P(X<x)$:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при\ x\le 0,\\ 0,729 & при\ \ 0<x\le 1,\\ 0,972 & при\ \ 1<x\le 2,\\ 0,999 & при\ \ 2<x\le 3,\\ 1 & при\ \ x>3 \end{cases}$$

Для $x\le 0$ имеем $F(x) = P(X<0) = 0$;

для $0< x \le 1$ имеем $F(x) = P(X<1) = P(X = 0) = 0,729$;
для $1< x \le 2$ $F(x) = P(X<2) = P(X=0) + P(X=1) = 0,729+ 0,243 = 0,972;$
для $2 < x \le 3$ $F(x) = P(X<3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$
$=0,972+0,027 = 0,999;$
для $x > 3$ будет $F(x) = 1$, т.к. событие достоверно.



- график функции $F(x)$

Для биномиального распределения X:
- математическое ожидание $M(X) = np = 3 \cdot 0,1 = 0,3$;
- дисперсия $D(X) = npq = 3 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 0,27$;
- среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,27} \approx 0,52$

Пример 6 Вероятность повреждения изделия при перевозке составляет 2%. Случайная величина X – число изделий из партии в 100 штук, поврежденных при перевозке. Найти вероятность того, что $X \le 2$ (ответ округлить до третьего знака после запятой).

Решение. Можно считать, что X распределена по закону Пуассона, т.к. $n=100$ (число изделий) велико, $p=0,02$ (вероятность повреждения одного изделия) мало. Будем иметь:

$$p(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad \lambda = np \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = 2, \quad p(X = k) = \frac{2^k e^{-2}}{k!}.$$

$$p(X = 0) = e^{-2}, \quad p(X = 1) = 2e^{-2}, \quad p(X = 2) = 2e^{-2},$$

$$p(X \le 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = 5e^{-2} \approx 0{,}677$$

1.6 Задачи к главе 1

1. Производится три независимых опыта, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью 0,4. Случайная величина X – число появлений события A в трех опытах. Построить ряд и функцию распределения случайной величины X. Найти: математическое ожидание $m(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ случайной величины X.

2. В урне имеются четыре шара с номерами от 1 до 4. Вынули два шара. Случайная величина X – сумма номеров шаров. Построить ряд распределения величины X.

3. В билете три задачи. Вероятность правильного решения первой задачи равна 0,9, второй – 0,8, третьей – 0,7. Составить закон распределения числа правильно решенных задач в билете и вычислить математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

4. В партии, содержащей 20 изделий, имеется четыре изделия с дефектами. Наудачу отобрали три изделия для проверки их качества. Составить закон (ряд) распределения случайной величины X – числа дефектных изделий, содержащихся в указанной выборке. Найти математическое ожидание, дисперсию, моду случайной величины X.

5. 30% изделий, выпускаемых данным предприятием, нуждается в дополнительной регулировке. Наудачу отобрано 200 изделий. Найти среднее значение и дисперсию случайной величины X – числа изделий в выборке, нуждающихся в регулировке.

6. Среди семян ржи имеется 0,4 % семян сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 5000 семян обнаружить 5 семян сорняков?

ГЛАВА 2. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1 Определение непрерывной случайной величины. Функция и плотность распределения непрерывной случайной величины

Непрерывной случайной величиной X называется случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

В общем случае случайная величина X задается *функцией распределения* $F(x)$, представляющей собой вероятность того, что X примет значение, меньшее чем x:

$$F(x) = P(X < x);\ x \in R$$

Функция распределения обладает свойствами:

1) $0 \le F(x) \le 1$;

2) Функция распределения является неубывающей функцией, т.е. из $x_2 > x_1$ следует $F(x_2) \ge F(x_1)$.

Следствие1. Вероятность того, что случайная величина X примет значение в интервале (a, b), равна приращению ее функции распределения на этом интервале: $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$

Следствие 2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет одно определенное значение, равна нулю. Используя последнее следствие, легко убедиться в справедливости следующих равенств:

$$P(a \le X < b) = P(a < X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$$

3)Если возможные значения непрерывной случайной величины принадлежат интервалу (a,b), то
$F(x)=0$,если $x \le a$;
$F(x)=1$, если $x \ge b$.

Следствие. Если возможные значения непрерывной случайной величины расположены на всей числовой оси, то справедливы следующие предельные соотношения:

$\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$.

Для непрерывных случайных величин, существует еще один удобный способ задания закона распределения – через плотность вероятности. Пусть функция распределения $F(x)$ данной непрерывной X непрерывна и дифференцируема всюду, кроме, может быть, отдельных точек. Тогда производная $f(x)$ ее функции распределения называется *плотностью распределения* непрерывной случайной величины X или плотностью вероятности:

$$f(x)=F'(x)$$

Плотность распределения обладает свойствами:

1. $f(x)\geq 0$ (свойство неотрицательности);

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ (свойство нормированности);

3. Вероятность того, что случайная величина попадет на промежуток (a ,b) вычисляется по формуле $P(a\leq X\leq b)=\int\limits_a^b f(x)dx$

4. Функция распределения выражается формулой:

$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$;

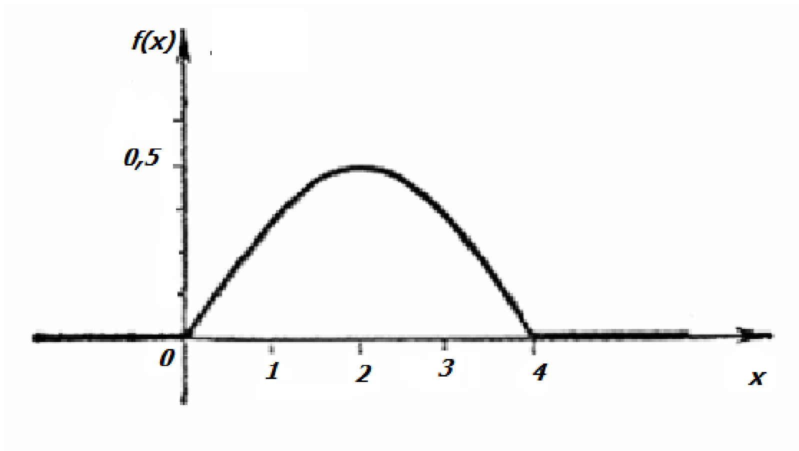
5. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$

График плотности распределения $f(x)$ называется *кривой распределения.*

Пример. Плотность распределения непрерывной случайной величины задана следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<0 \\ \frac{3}{32}\cdot(4x-x^2), & \text{если} \quad 0\le x\le 4 \\ 0, & \text{если} \quad x>4 \end{cases}$$

График функции $f(x)$ представлен на рисунке.



Определить: 1) вероятность того, что случайная величина X примет значение, удовлетворяющее неравенствам $-2\le X\le 3$.

2) Найти функцию распределения заданной случайной величины.

Решение: Используя свойство 3 плотности распределения, имеем:

$$P(-2\le X\le 3)=\int_{-2}^{3}\varphi(x)dx=\int_{-2}^{0}\varphi(x)dx+\int_{0}^{3}\varphi(x)dx=$$

$$=\int_{-2}^{0}0\,dx+\int_{0}^{3}\frac{3}{32}(4x-x^2)\,dx=\frac{27}{32}$$

Используя свойство 4 плотности распределения, находим функцию распределения $F(x)$ для заданной случайной величины.

Если $-\infty<x\le 0$, то $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt=\int_{-\infty}^{0}0\cdot dt=0$.

Если $0<x\le 4$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt=\int_{-\infty}^{0}\varphi(t)\cdot dt+\int_{0}^{x}\varphi(t)\cdot dt=\int_{-\infty}^{0}0\cdot dt+\int_{0}^{x}\frac{3}{32}\left(4t-t^2\right)\cdot dt=\frac{6x^2-x^3}{32}$$

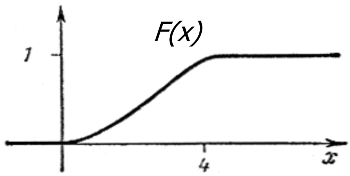
Если $x>4$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt=\int_{-\infty}^{0}\varphi(t)\cdot dt+\int_{0}^{4}\varphi(t)\cdot dt+\int_{4}^{x}\varphi(t)\cdot dt=\int_{-\infty}^{0}0\cdot dt+\int_{0}^{4}\frac{3}{32}\left(4t-t^2\right)\cdot dt+\int_{4}^{x}0\cdot dt=1$$

Итак,

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0\\ \dfrac{6x^2-x^3}{32}, & \text{если} \quad 0\le x\le 4\\ 1, & \text{если} \quad x>4\end{cases}$$

График функции $F(x)$ имеет вид



2.2 Числовые характеристики непрерывной случайной величины.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a,\ b]$ и имеющую плотность вероятности f(x), находится по формуле

$$M(X)=\int_{a}^{b}xf(x)dx\,.$$

Если возможные значения принадлежат всей числовой оси, то

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$$

(предполагается, что несобственный интеграл, стоящий в правой части равенства, существует).

Дисперсией непрерывной случайной величины называют математическое ожидание квадрата ее отклонения. Если возможные непрерывной случайной величины X принадлежат отрезку $[a, b]$, то

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 f(x)dx .$$

Если возможные значения принадлежат всей числовой оси, то

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx$$

(предполагается, что несобственный интеграл, стоящий в правой части равенства, существует).

Средним квадратическим отклонением непрерывной случайной величины называют, как и для величины дискретной, квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} .$$

Среднее квадратическое отклонение есть мера рассеяния значений случайной величины около ее математического ожидания.

Пример. Дифференциальная функция распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 2x^2, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины X.

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx \right)^2 = \int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0dx + \int_0^1 x^2 \cdot 2x^2 dx + \int_1^{-\infty} x^2 \cdot 0dx -$$

$$-\left(\int_{-\infty}^{0} x^2\cdot 0dx+\int_{0}^{1} x^2\cdot 2x^2dx+\int_{1}^{-\infty} x^2\cdot 0dx\right)^2 = 2\int_0^1 x^4dx-\left(2\int_0^1 x^3dx\right)^2 =$$

$$=2\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^1-\left(2\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^1\right)=\frac{2}{5}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{2}{5}-\frac{1}{4}=\frac{3}{20}=0{,}15;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{0{,}15}\approx 0{,}3873$$

Ответ. $D(X)=0{,}15;\quad \sigma(X)=0{,}3873$

2.3 Равномерное, нормальное, показательное распределение непрерывных случайных величин.

Непрерывная случайная величина X имеет *равномерный закон распределения* на отрезке $[a, b]$, если ее плотность вероятности $f(x)$ постоянна на этом отрезке и равна нулю вне его:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & при \quad a\le x\le b,\\ 0 & при \quad x<a,\ \ x>b.\end{cases}$$

Функция распределения $F(x)$ для равномерно распределенной случайной величины X, имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le a,\\ ,\dfrac{x-a}{b-a} & при \quad a<x\le b,\\ 1 & при \quad x>b.\end{cases}$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, имеющей равномерное распределение, находятся по формулам:

$$M(X)=\frac{a+b}{2};\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Вероятность попадания равномерно распределенной случайной величины X на интервал $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ вычисляется по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}.$$

Пример . Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ждать пассажиру придется не больше полминуты? Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины X – времени ожидания поезда.

Решение. Случайная величина X – время ожидания поезда – на временном отрезке [0, 2] имеет равномерный закон распределения $f(x) = \frac{1}{2}$. Тогда вероятность того, что пассажиру придется ждать не более полминуты

$$P(X \le 0{,}5) = \int_0^{0{,}5} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} x \Big|_0^{0{,}5} = \frac{1}{4}.$$

По формулам математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, имеющей равномерное распределение, найдем $M(X) = \frac{0+2}{2} = 1$ мин., $D(X) = \frac{(2-0)^2}{12} = \frac{1}{3}$.

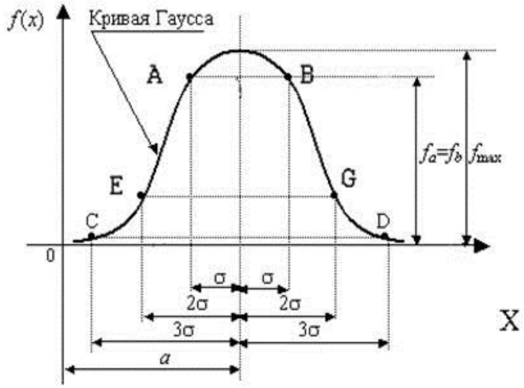
$$\sigma_X = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58 \text{ мин.}$$

Нормальный закон распределения (закон Гаусса) играет исключительную роль в теории вероятностей. Главная особенность закона Гаусса состоит в том, что он является *предельным законом*, к которому приближаются, при определенных условиях, другие законы распределения. Нормальный закон распределения наиболее часто встречается на практике.

Непрерывная случайная величина X имеет *нормальный закон распределения* с параметрами α и σ, если ее плотность вероятности имеет вид: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}}$.

Кривую нормального закона распределения называют нормальной кривой или кривой Гаусса.

Нормальная кривая $y = f(x)$ изображена на рис.



Математическое ожидание случайной величины X, распределенной по нормальному закону, равно параметру α этого закона, т. е. $M(X)=\alpha$, а дисперсия – параметру σ^2, т. е. $D(X)=\sigma^2$.

Нормальный закон распределения случайной величины с параметрами $\alpha=0$ и $\sigma=1$, называется *стандартным* или *нормированным.*

Плотность стандартной случайной величины X имеет вид

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

и называется *функцией Гаусса.*

Вероятность попадания в интервал (a, b) случайной величины X, подчиненной нормальному закону, определяется формулой

$$P(a<X<b)=\Phi_0\left(\frac{b-\alpha}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\frac{a-\alpha}{\sigma}\right),$$

где функция $\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ называется *функцией Лапласа (или интегралом вероятности).* Эту функцию называют также *функцией ошибок.*

Функция Лапласа обладает следующими свойствами:

1. $\Phi_0(-x)=-\Phi_0(x)$, т. е. функция $\Phi_0(x)$ - нечетная;
2. $\Phi_0(0)=0$;
3. $\Phi_0(+\infty)=0{,}5$.

Вероятность попадания случайной величины X в интервал

$(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$, симметричный относительно центра рассеяния α, находится по формуле

$$P(a-\varepsilon < X < \alpha+\varepsilon) = P(|X-\alpha| < \varepsilon) = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

В частности, $P(|X-\alpha| < 3\sigma) = 2\Phi_0(3) \approx 0{,}9973$, т. е. практически достоверно, что случайная величина X принимает свои значения в интервале $(\alpha-3\sigma, \alpha+3\sigma)$. Это утверждение называется «*правилом трех сигм*».

Пример. Пусть X – случайная величина, подчиненная нормальному закону с математическим ожиданием $\alpha = 1{,}6$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 1$. Какова вероятность того, что при четырех испытаниях эта случайная величина попадет хотя бы один раз в интервал $(1{,}2)$?

Решение. Найдем вероятность попадания случайной величины X в интервал (1,2) при одном испытании.

$$P(1 < X < 2) =$$

$$= \Phi_0\left(\frac{2-1{,}6}{1}\right) - \Phi_0\left(\frac{1-1{,}6}{1}\right) = \Phi_0(0{,}4) + \Phi_0(0{,}6) = 0{,}1554 + 0{,}2257 = 0{,}3811.$$

Тогда вероятность того, что случайная величина не попадет в интервал (1,2) при одном испытании равна 1-0,3811=0,6189, а при четырех испытаниях $0{,}6189^4 \approx 0{,}1467$. Значит, искомая вероятность $P_1 = 1 - 0{,}1467 = 0{,}8533$.

Непрерывная случайная величина X имеет *показательный (экспоненциальный) закон распределения*, если ее плотность вероятности $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & при \quad x \ge 0, \\ 0 & при \quad x < 0, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$ - параметр данного распределения.

Функция распределения F(x) случайной величины X, распределенной по показательному закону, находится по формуле

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & при \quad x \ge 0, \\ 0 & при \quad x < 0. \end{cases}$$

Важнейшие числовые характеристики показательного распределения определяются равенствами:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2},\quad \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

Для показательного закона распределения вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), определяется формулой

$$P(a<X<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}.$$

Часто длительность безотказной работы элемента имеет показательное распределение, то есть

$$F(t)=1-e^{-\lambda t}$$

Следовательно, функция надежности в этом случае имеет вид:

$$R(t)=1-F(t)=1-(1-e^{-\lambda t}).$$

Пример. Непрерывная случайная величина X задана своей функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1+Ae^{-x}, & x\geq 0\end{cases}$$

1) определить коэффициент A;
2) найти плотность распределения вероятностей $f(x)$;
3) найти математическое ожидание и дисперсию *X*.

Решение. 1) Сравним данную функцию $F(X)$ с функцией распределения в общем виде, получим A=-1, при этом и только этом значении предложенная функция задаёт закон распределения непрерывной случайной величины:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-x}, & x\geq 0\end{cases}$$

Найдём функцию плотности распределения:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ e^{-x}, & x\geq 0\end{cases}$$

3) Математическое ожидание: $M(X)=\frac{1}{\lambda}=1$

Дисперсию вычислим по формуле: $D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$, $D(X)=1$.

2.4 Решение типовых задач.

Задача 1. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad при\ x\le -1 \\ 0{,}75+0{,}75 \quad при\ -1<x\le\frac{1}{3} \\ 1 \quad при\ x>\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключенное в интервале $0<x<\frac{1}{3}$.

Решение. Вероятность того, что X примет значение из заданного интервала, равно приращению интегральной функции в этом интервале, т.е. $P(a<X<b)=F(b)-F(a)$.

В нашем случае $a=0$ и $b=\frac{1}{3}$, поэтому

$$P(0<X<\frac{1}{3})=F\left(\frac{1}{3}\right)-F(0)=\left(0{,}75\cdot\frac{1}{3}+0{,}75\right)=0{,}25.$$

Задача 2. Непрерывная случайная величина задана на интервале $0<x<1$ плотностью распределения $f(x)=2x$, а вне этого интервала $f(x)=0$. Найти ее числовые характеристики.

Решение. Математическое ожидание:

$$M(X)=\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}.$$

Дисперсия:

$$D(X)=\int_0^1 x^2 f(x)dx-\left(M(X)\right)^2=\int_0^1 2x^3dx-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\ldots=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}.$$

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{1}{18}}=0{,}24$.

Задача 3. Функция распределения непрерывной случайной величины X задана формулами:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ x^2-4x+4, & 2<x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$.

Используем определение плотности вероятности:

$$f(x)=F'(x).$$

Решение

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ 2x-4, & 2<x<3\\ 0, & x\ge 3\end{cases}$$

Задача 4. Найти числовые характеристики случайной величины X, равномерно распределенной на интервале $2<X<8$.

Решение. Для случайной величины, равномерно распределеной на интервале $a < x < b$, плотность распределения:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{8-2} = \frac{1}{6}$$

поэтому:

$$M(X) = \int_2^8 \frac{1}{6} x dx = \frac{1}{6} \frac{x^2}{2} \Big|_2^8 = 5;$$

$$D(X) = \int_2^8 \frac{1}{6} x^2 dx - 5^2 = \frac{1}{6} \frac{x^3}{3} \Big|_2^8 - 25 = 3;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{3} \approx 1{,}73.$$

Задача 5. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины $a = 10$, а среднее квадратическое отклонение - $\sigma = 2$. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение из интервала $12 < X < 14$ и записать закон распределения.

Решение. Запишем вначале закон распределения. Общая формула имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Подставляя $a = 10$ и $\sigma = 2$, получим:

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{8}}.$$

Вероятность того, что X примет значение из интервала $\alpha < X < \beta$ имеет вид:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция Лапласа.

Значения этой функции находятся с помощью таблицы.

В нашем случае:

$$P(12 < X < 14) = \Phi\left(\frac{14-10}{2}\right) - \Phi\left(\frac{12-10}{2}\right) = \Phi(2).$$

По таблице находим: $\Phi(2) = 0{,}47725;$ $\Phi(1) = 0{,}34134$, следовательно:

$$P(12 < X < 14) = 0{,}47725 - 0{,}34134 = 0{,}13591.$$

Задачи к главе 2

Задача 1. Функция распределения непрерывной случайной величины X задана формулами:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3, \\ \frac{x}{3} - 1, & 3 < x < 6, \\ 1, & x \ge 6. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение из интервала (4; 5).

Задача 2. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X задана формулами:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ C(6x - 8 - x^2), & 2 < x < 4, \\ 0, & x \ge 4. \end{cases}$$

Найти значение C и функцию распределения $F(x)$.

Задача 3. Найти математическое ожидание суммы числа очков, выпавших при броске пяти игральных костей.

Задача 4. Плотность распределения случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} 0, \quad x<2, \\ -\frac{3}{4}(x^2-6x+8), \quad 2\le x\le 4, \\ 0, \quad x>4. \end{cases}$$

Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Задача 5. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид

$$f(x)=\begin{cases} 0, \quad x\le 0, \\ 4(x-x^3), \quad 0<x<1, \\ 0, \quad x\ge 1. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

Задача 6. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $a = 3$, $\sigma = 2$. Найти вероятность того, что она примет значение из интервала (4, 8).

Задача 7. Пусть время безотказной работы элемента распределено по показательному закону с плотностью распределения $f(t) = 0{,}1\ e^{-0{,}1t}$ при $t \ge 0$. Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно в течение 10 часов.

Задача 8. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего числа на шкале. Полагая, что ошибка измерения X распределена по равномерному закону, найти дисперсию $D(X)$.

Задача 9. Измерительный прибор имеет систематическую ошибку 5 м, а случайные ошибки распределены по нормальному закону со средним квадратическим отклонением 75 м. Найти вероятность того, что ошибка измерения не превысит по модулю 5 м.

Задача10. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^3}{8}, & 0\le x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$.

ГЛАВА 3. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ.

3.1. Понятие статистики. Случайная выборка.

Термин статистика происходит от лат. *status* —«состояние», «положение явлений» и возник с возникновением государства.

Статистика — наука, изучающая массовые явления, имеющая свой предмет, методологию и исследующая количественные закономерности общественного развития. Она применяется как метод познания закономерностей в любой области, где массовые явления имеют место.

Популяция (или генеральная совокупность) и – это вся группа объектов, которая нас интересует. Например, все студенты данного вуза. Или все потенциальные посетители кинотеатра. Мы будем использовать термин "популяция" в статистическом смысле – то есть, любое распределение вероятности, которое нас интересует, может быть названо "популяцией". Например, годовой доход банка или вероятность, с которой подброшенная канцелярская кнопка упадет "иголкой" вверх или "иголкой" вниз.

Выборка (или выборочная совокупность) – это часть популяции. Например – это те потенциальные посетители кинотеатра, которых вы опросили. Если популяция – это распределение вероятности, то выборкой является набор наблюдений из этого распределения. Если нас интересует результат подбрасывания канцелярской кнопки, то выборкой будут результаты подбрасывания – число наблюдений, при которых канцелярская кнопка упала "иголкой вверх" и "иголкой вниз".

Основной вопрос статистики – это как на основании выборки сделать выводы обо всей популяции? Если есть десять миллионов потенциальных клиентов, то для того, чтобы узнать, какой процент из них согласится на определенную услугу, нужно опросить если не десять миллионов клиентов, то очень много! А можно ли что-то узнать, опросив только две тысячи клиентов?

Ответ на это положительный, если мы имеем дело со *случайной выборкой*. Если удалось опросить n клиентов таким образом, что каждый объект из интересующей нас популяции (всех потенциальных клиентов) имел равный шанс попасть в нашу выборку, то на основании даже небольшоркиой выборки мы можем сделать очень точные оценки обо всей популяции.

Основной параметр популяции – это ее *среднее значение* μ. Например, это может быть среднее значение того, сколько все потенциальные клиенты готовы заплатить за новую услугу.

Если выборка состоит из n наблюдений $X_{1,..,}X_n$,то *выборочное среднее* равно среднему арифметическому значению признака выборочной совокупности.

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \mathrm{K} + X_n}{n}$$

Среднее по популяции μ является *параметром популяции*, то есть неизменной величиной. Выборочное среднее $\overline{X}$ – это случайная величина, которая меняется от выборке к выборке. Опросив n клиентов, получим первую выборку и подсчитаем значение $\overline{X}$. Опросив еще n клиентов, получим вторую выборку, ее значение $\overline{X}$ будет отличаться от значения $\overline{X}$ для первой выборки.

В большенстве случаях прикладное значение имеет именно распределение выборочного среднего, а не отдельных элементов выборки.

3.2. Распределение выборочного среднего.

Пусть имеется n независимых наблюдений $X_{1,..,}X_n$ из популяции со средним μ и стандартным отклонением σ. Форма распределения для каждого наблюдения X_i не известна, однако известно μ – математическое ожидание случайной величины X_i , равное среднему по популяции

$$M(\overline{X}) = M(\frac{X_1 + X_2 + K + X_n}{n}) = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \mu \cdot$$

Среднее наблюдение X_i будет удалено μ на стандартное отклонение σ. Но среднее по всем наблюдениям будет находиться на меньшем расстоянии от математического ожидания, поскольку “ошибки усредняются” – какие-то из наблюдений будут выше μ, какие-то ниже, и среднее по всем наблюдениям будет, как правило, ближе к μ, чем каждое наблюдение в отдельности. Из равенств

$$D(\overline{X}) = D(\frac{X_1 + X_2 + K + X_n}{n}) = \frac{1}{n^2} D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

получаем, что дисперсия среднего по n наблюдениям в n раз меньше, чем дисперсия каждого наблюдения в отдельности.

Стандартное отклонение выборочного среднего равно

$$\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

3.3. Центральная предельная теорема.

Мы знаем математическое ожидание и стандартное отклонение выборочного среднего. Каково распределение выборочного среднего? Если популяция описывается нормальным распределением, то выборочное среднее будет нормально распределено, для любого n. А что если популяция описывается каким-либо другим распределением? Оказываеся, что если размер выборки n достаточно велик, то неважно какой формы распределение в популяции. Независимо от этого, выборочное среднее будет распределено по нормальному закону. Этот результат носит название центральной предельной теоремы:

Для случайной выборки размера $n \geq 30$ из любой популяции со средним μ и стандартным отклонением σ выборочное среднее $\overline{X}$ распределено по нормальному закону со средним μ и стандартным отклонением $\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$:

$$\overline{X} \sim N(\frac{\sigma^2}{n})$$

Центральная предельная теорема имеет большое значение, как для теории, так и для практики. Многии случайные величины имеют нормальное распределение. Биномиальное распределение и распределение Пуассона хорошо преближаются нормальным, когда ожидаемое число успехов достаточно велико ($n \geq 30$). Все это частные случаи центральной предельной теоремы.

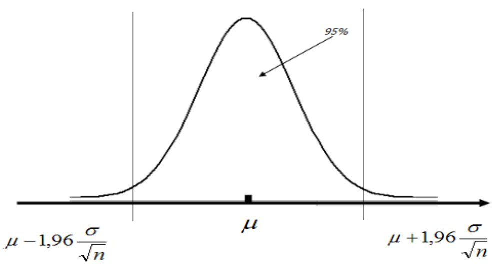
3.4. Доверительный интервал для μ, когда σ известно.

Как оценить среднее популяции μ, если известна только случайная выборка размером n, – то есть наблюдения $X_{1,\dots,}X_n$? Лучшей точечной оценкой для среднего по популяции (μ) является среднее выборочное ($\overline{X}$). Но необходимо знать, насколько точна эта оценка поскольку $\overline{X}$ всегда оказываеся на определенном расстоянии от μ.

Формально нужно построить доверительный интервал (или “интервальную оценку”) для μ. Например, 95% доверительный интервал-это такие числа a и b, что утверждение “среднее по популяции μ лежит между числами a и b с вероятностью 95% ” верно. Иначе говоря, для 95% доверительного интервала, мы хотим найти такие числа a и b, что $P(a<\mu<b)=0,95$

Из центральной предельной теоремы следует, что $\overline{X}$ имеет нормальное распределение со средним μ и стандартным отклонением $\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Таким образом,

$$P(\mu - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{X} < \mu + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 0{,}95$$



Иными словами, с вероятностью 95% расстояние между μ и $\overline{X}$ окажется меньше, чем $1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Это утверждение можно записать также как $P(\overline{X}-1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\overline{X}+1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}})=0{,}95$. Таким образом мы нашли такие числа a и b, что $P(a<\mu<b)=95\%$. Здесь а= $\overline{X}-1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, b= $\overline{X}+1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Пример. Необходимо узнать среднюю недельную зарплату сотрудников большой компании, если известно, что стандартное отклонение σ=5 т.р. Случайным образом выбрали 100 сотрудников, и средняя зарплата поэтой выборке оказалась 45,2 т.р. Постройте 95% доверительный интервал для средней недельной зарплаты по всей компании.

Решение. Используем формулу $\overline{X}\pm1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ с $\overline{X}$ =45,2 , σ=5 и n=100, получаем 95% доверительный интервал: $45{,}2\pm1{,}96\frac{5}{\sqrt{100}}=45{,}2\pm0{,}98\approx45{,}2\pm1$ или ($44{,}2$ т.р.; $46{,}2$ т.р.).

Замечание. Поскольку $n\geq$30, то не нужно знать форму распределения зарплат в компании. В частности, не нужно предполагать что оно нормальное.

Что, если нужно рассмотреть не 95% а 90% доверительный интервал? В общем случае говорят о (1-α) доверительном интервале, где α - вероятность того, что истенное значение μ не попало в доверительный интервал (вероятность ошибки), а (1-α) – уровень доверия. В случае 95% доверительного интервала α =0,05, в случае 90% доверительного интервала α =0,1 , в случае 99% доверительного интервала α =0,01, и т.п.

Логика вывода (1-α) доверительного интервала такая же, как и в случае 95% интервала, который был рассмотрен ранее. Из таблицы нормального распределения нужно найти такое значение z, что $P(Z<-z)=\frac{\alpha}{2}$. Это значение z обозначается $z_{\alpha/2}$. Таким образом, по определению $P(Z<-z_{\alpha/2})=\frac{\alpha}{2}$ (и в силу симметрии нормального распределения, $P(Z > z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$. В случае 95% доверительного интервала, рассмотренного выше, α =0,05, и использовалось значение $z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1{,}96$. Итак, для (1-$\alpha$) доверительного интервала значение $z_{\alpha/2}$ находится из таблицы стандартного нормального распределения, а сам доверительный интервал для μ имеет вид:

$$\overline{X} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

3.5. Доверительный интервал для μ, когда σ неизвестно .

В большенстве задач стандартное отклонение популяции σ не известно, и все что есть- это выборка $X_1,...,X_n$ из интересующей нас популяции. Как в этом случае построить доверительный интервал для среднего по популяции μ?

Идея состоит в том, что для заданного набора наблюдений $X_1,...,X_n$ можно посчитать не только выборочное среднее $\overline{X}$ (что является точечной оценкой μ), но и выборочное стандартное отклонение s, что является точечной оценкой σ, и при при построении доверительных интервалов использовать s вместо σ. Выборочное среднее считается по формуле:

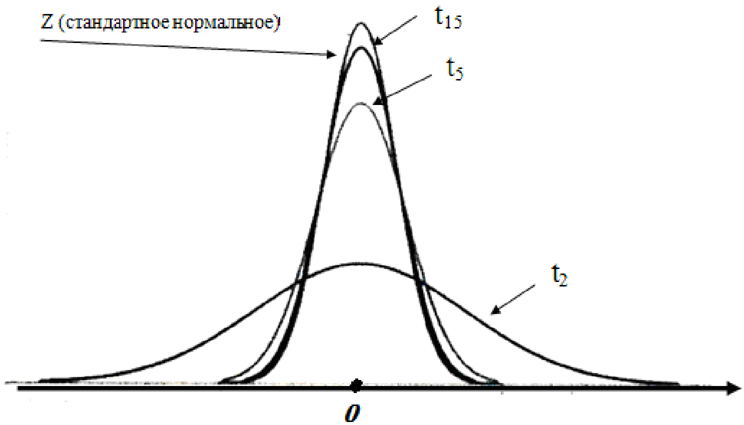
$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}}.$$

Заметим, что при $n=1$ невозможно оценить σ (поскольку происходит деление на ноль) и это также объяснимо тем, что имеется лишь одно наблюдение и нет смысла говорить о степени разброса (дисперсии) в популяции.

Когда σ не неизвестно, рассматриваеся распределение случайной

величины $\frac{\overline{X} - \mu}{s / \sqrt{n}}$, при условии, что среднее выборочное $\overline{X}$ имеет нормальное распределение.

Распределение $\dfrac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$, где t-распределение Стьюдента с n-1 степенями свободы. Оно имеет вид:



Как видно из рисунка, t – распределение симметрично относительно нуля, и в целом похоже на нормальное. Однако оно "шире" чем нормальное, и становится более узким с ростом степеней свободы. Так для 2 степеней свободы, различие между t – распределением и нормальным очень велико. Для 15 степеней свободы (соответствует выборке n=16) различие не очень существенно. Для 29 степеней свободы (соответствует выборке n=30) t -распределение практически неотличимо от нормального.

Работать с t-распределением также просто, как и с нормальным. Для построения (1-α) доверительного интервала для μ, из таблицы t-распределения с n-1 степенями свободы нужно найти такое значение $t_{\alpha/2,n-1}$, что $P(t_{n-1} > t_{\alpha/2,n-1}) = \dfrac{\alpha}{2}$.

Тогда $P(-t_{\alpha/2,n-1} < \dfrac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2,n-1}) = 1-\alpha$,

или $P(\overline{X} - t_{\alpha/2,n-1}\dfrac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_{\alpha/2,n-1}\dfrac{s}{\sqrt{n}}) = 1-\alpha$.

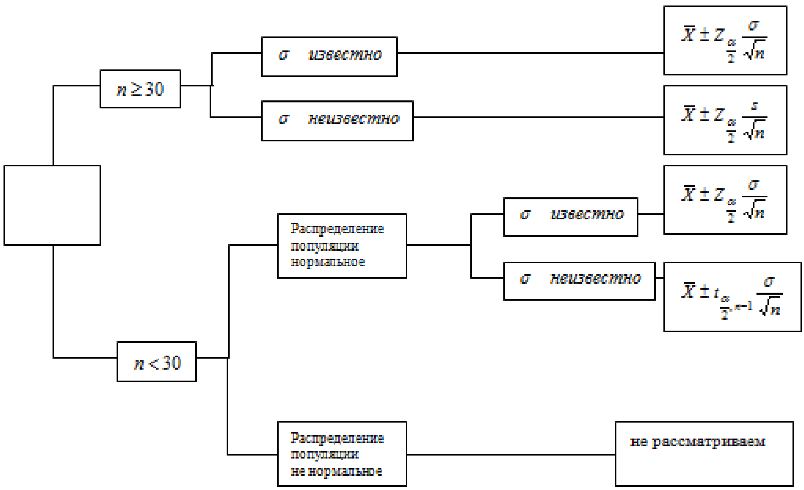
Получаем (1-α) доверительный интервал для μ:

$$\overline{X} \pm t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Обратим внимание, что $t_{\alpha/2,n-1}$ становится меньше с ростом n и всегда больше, чем $z_{\alpha/2}$, но различие между t-распределением и стандартным нормальным становятся несущественными для $n \geq 30$. Поэтому при $n \geq 30$ можно использовать формулу

$$\overline{X} \pm z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Важно подчеркнуть, что различие между случаями большой выборки($n \ \geq 30$) и малой выборки ($n < 30$) следущее: Во-первых, в случае малой выборки небходимо предполагать, что распределение популяции нормально. В случае большой выборки, форма распределения в популяции нас не интересует, поскольку выорочное среднее будет распределено нормально (центральная предельная теорема). Во-вторых, в случае большой выборки можно использовать нормальное распределение вместо t-распределения.



Пример. Необходимо узнать среднюю недельную зарплату сотрудников большой компании. Случайным образом выбрали 100 сотрудников, средняя зарплата *по этой выборке* оказалась 45,2 т.р. , а стандартное отклонение 5 т.р. Постройте 95% доверительный интервал для средней недельной зарплаты по всей компании.

Решение. Поскольку $n \geq 30$, то не нужно знать форму распределения зарплат в компании и не нужно использовать t-распределение.

Используя формулу $\overline{X} \pm z_{\alpha/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}}$ с $\overline{X}$ =45,2 , s=5 и n=100, $z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1{,}96$, получаем 95% доверительный интервал: $45{,}2 \pm 1{,}96\dfrac{5}{\sqrt{100}} = 45{,}2 \pm 0{,}98 \approx 45{,}2 \pm 1$ или (44,2 т.р.; 46,2 т.р.).

3.6. Доверительный интервал для пропорции p.

Во многих ситуациях интересен специальный случай среднего по популяции, а именно пропорция. Например, процент клиентов, готовых купить данный товар, или процент избирателей, которые проголосуют за определенного кандидата. В таких случаях, каждое наблюдение может быть либо “успех”, либо “неудача” – или же 1 или 0. Среднее по популяции в этом случае обозначим p.

Рассмотрим случайную выборку из популяции, имеющей вероятность успеха p. Наблюдения $X_1,\ldots,X_n$ будут представлять представлять собой набор 0 и 1, и полное число успехов $X = X_1+\ldots+X_n$ будет иметь биномиальное распределение с вероятностью успеха p и числом попыток n. Точечной оценкой неизвестной пропорции p в популяции будет пропорция (число успехов) в выборке $\hat{p} = X/n \sim (p, \dfrac{p(1-p)}{n})$. Как и в случае выборочного среднего, математическое ожидание пропорции в выборке равно значению в популяции p, и с ростом n стандартное отклонение $\hat{p}$ становится меньше.

Таким образом, с вероятностью (1-α), расстояние между $\hat{p}$ и p не превышает $z_{\alpha/2}\sqrt{p(1-p)/n}$, а доверительный интервал для p равен $\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{p(1-p)/n}$. Поскольку значение p не известно, то используется его оценка $\hat{p}$ (аналогично использовалось s вместо σ при построении доверительного интервала для μ).

Итак, доверительный интервал для p:

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}\,.$$

Поскольку здесь использовалось нормальное приближение для биномиального распределения, то необходимо выполнение условия $np \geq 5,\ n(1\text{-}p)\ \geq 5$. Поскольку p не известно, то условия примут вид $n\hat{p} \geq 5, n(1-\hat{p}) \geq 5$. Иначе говоря, в выборке должно быть не менее 5 успехов и 5 неудач.

Чтобы определить размер выборки, которой будет достаточно для рассмотрения, необходимо задать точность или насколько узким должен быть доверительный интервал. В случае оценки среднего μ, ширина интервала зависит от σ и, поэтому, нужно иметь какие-то предварительные оценки стандартного отклонения в популяции. В случае оценки пропорции p, существует другой подход, не требующий никаких предварительных оценок: Для (1-α) доверительного интервала для p с заданной погрешностью E, нужно собрать $n = \dfrac{z_{\alpha/2}^2}{4E^2}$ наблюдений.

Пример. Необходимо оценить долю клиентов, которые могут согласиться на новую услугу. Допустимая погрешность для 95% доверительного интервала равна 0,02. Сколько клиентов (выбранных случайным образом) нужно опросить?

Решение. Используя формулу $n = \dfrac{z_{\alpha/2}^2}{4E^2}$ с $z_{\alpha/2} = z_{0{,}025} = 1{,}96$ и E=0,02 , получаем $n = \dfrac{1{,}96^2}{4(0{,}02)^2} = 2401 \approx 2400$, т.е. надо опросить 2400 человек.

3.7 Решение типовых задач

Задача 1.

Среди абитуриентов некоторого вуза средний балл по ЕГЭ составляет μ=260, а стандартное отклонение σ=45.

а) Если взять данные по n=36 абитуриентам, какова вероятность того, что средний балл окажется меньше 250?

б) Какова вероятность, что средний балл по 36 абитуриентам отличается от среднего по всем абитуриентам вуза не более чем на 15?

Решение.

а)

$$P(\overline{X}<250)=P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<\frac{250-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)=P\left(Z<\frac{250-260}{45/\sqrt{36}}\right)=P\left(Z<-\frac{20}{15}\right)=0{,}091$$

б)

$$P(\mu-15<\overline{X}<\mu+15)=P\left(-\frac{15}{\sigma/\sqrt{n}}<\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<\frac{15}{\sigma/\sqrt{n}}\right)=$$

$$=P\left(-\frac{15}{45/\sqrt{36}}<Z<\frac{15}{45/\sqrt{36}}\right)=P(-2<Z<2)=$$

$$=P(Z<2)-P(Z<-2)=0{,}954$$

Задача 2.

Среди 36 абитуриентов некоторого вуза средний балл по ЕГЭ составляет $\overline{X}$ =244, а стандартное отклонение s=45.

а) Если считать, что данные по n=36 абитуриентам являются случайной выборкой из всех абитуриентов ВУЗа, постройте 95% доверительный интервал для среднего балла по всем абитуриентам.

б) нужно ли делать какие-либо дополнительные предположения?

Решение.

а) Доверительный интервал

$$\overline{X}\pm z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}=244\pm 1{,}96\frac{45}{\sqrt{36}}=244\pm 14{,}7$$

б) Поскольку n=36 больше 30, не нужно знать распределение баллов пов популяции.

Задача 3.

Рассматриваются баллы всех абитуриентов некоторого ВУЗа. Проверив 16 абитуриентов, подсчитали что средний балл составляет $\overline{X}$ =244, а стандартное отклонение s=45.

а) Если считать, что данные по n=16 абитуриентам являются случайной выборкой из всех абитуриентов ВУЗа, постройте 95% доверительный интервал для среднего балла по всем абитуриентам.

Решение.

а) $$\overline{X}\pm t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}=244\pm 2{,}13\frac{45}{\sqrt{16}}=244\pm 24{,}0$$

б) Поскольку n<30, нужно предположить нормальность популяции распределения, чтобы пользоваться t-распределением.

Задача 4.

При аудиторской проверке счетов некоторой компании обнаруживаются случайные ошибки. Проверка всех счетов практически не возможна, и аудитор решает провести выборочную проверку, чтобы оценить процент ошибочных счетов по всей компании.

а) Сколько счетов нужно проверить, чтобы построить 95% интервал для доли ошибочных счетов с погрешностью не более 0,05?

b) Аудитор проверил 500 счетов, и среди них оказалось 13 ошибочных. Постройте 99% доверительный интервал для p-пропорции счетов по всей компании.

Решение.

а) Для погрешности E=0,05 получим

$$n = \frac{z^2_{\alpha/2}}{4E^2} = \left(\frac{1{,}96}{0{,}1}\right)^2 = 384 .$$

б) $\hat{p} = \dfrac{X}{n} = \dfrac{13}{500} = 0{,}026$.

Доверительный интервал:

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n} = 0{,}026 \pm 2{,}58\sqrt{\frac{0{,}026(1-0{,}026)}{500}} = 0{,}026 \pm 0{,}018$$

3.8 Задачи к главе 3

Задача 1. Аудитор проверяет данные по задолжности клиентов. Проверив данные по n=100 клиентам, аудитор проверил, что средняя задолженность составила 120000. Постройте 95% и 99% доверительные интервалы для истинного среднего, считая, что стандартное отклонение в популяции равно 10000.

Задача 2.

Маркетинговая фирма оценивает среднее недельное использование домохозяйками определенного моющео средства. Собирают случайную выборку из 250 домохозяек и получают выборочное среднее использование моющего средства 4,2 литра и стандартное отклонение 1,6 литра. Постройте 95% доверительный интервал для истенного среднего значения использования моющего средства. Необходимо ли сделать какие-либо предположения?

Задача 3.

Автомобильная корпорация представила новую модель машины. Выборка из 10 автомобилей была исследована на расход топлива и получены результаты:

20 28 27 29 30 32 25 24 30 35

Оцените средний расход топлива и постройте 95% доверительный интервал для среднего расхода. Сформулируйте все предположения, которые можно сделать о популяции.

Задача 4.

Магазин хочет оценить среднюю задолженность в популяции из 300000 счетов. Из этой популяции собирается случайная выборка из n счетов. Получены результаты: средняя задолженость 25, стандартное отклонение 2. Рассматриваемая популяция считается нормально распределенной.

Постройте 95% доверительный интервал для средней задолженности в популяции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика. Основы моделирования и первичная обработка данных.-М.:Финансы и статистика, 1983.

2.Вентцель Е.С. Теория вероятностей.-М.:Наука, 1964.

3.Гмурман В.Е. Введение в теорию вероятностей и математическую статистику.-М.:Наука,1970.

4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.-М.:Высшая школа,1998.

5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.-М.:Высшая школа,1979.

6.Павловский З.В. Введение в математическую статистику.-М.:Статистика,1967.