ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЦЕНТР ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Математика»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

и варианты заданий для выполнения контрольной работы по дисциплине

«Уравнения математической физики»

Авторы
Ворович Е. И., Золотых С. А., Тукодова О. М., Фролова Н. В.

Ростов-на-Дону, 2015

Аннотация

Методические указания предназначены для бакалавров по направлению 230400 заочной формы обучения.

Авторы

Доцент, к.т.н.

Ворович Е. И.

Старший преподаватель

Золотых С. А.

Доцент, к.т.н.

Тукодова О. М.

Старший преподаватель

Фролова Н. В.

Оглавление

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1
«УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

Экзаменационная программа

Основные уравнения математической физики: уравнение колебаний струны, формулировка краевой задачи уравнения теплопроводности, уравнение Лапласа.

Классификация линейных дифференциальных уравнений второго порядка, приведение их к каноническому виду.

Краевые условия. Задача Дирихле, задача Неймана, задача Коши.

Решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности на отрезке методом разделения переменных.

Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах. Решение задачи Дирихле для круга методом разделения переменных.

Варианты заданий

Задача 1. Определить тип дифференциального уравнения

1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

2) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

3) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

4) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+9\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

5) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+9\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

6) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3\frac{\partial u}{\partial x}-3\frac{\partial u}{\partial y}=0$

7) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}-6\frac{\partial u}{\partial y}=0$

8) $9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-9\frac{\partial u}{\partial x}-3\frac{\partial u}{\partial y}=0$

9) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+8\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+16\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}-4\frac{\partial u}{\partial y}=0$

10) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+4\frac{\partial u}{\partial x}-4\frac{\partial u}{\partial y}=0$

Задача 2. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду

1) $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+8\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

2) $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

3) $16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+16\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

4) $25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+20\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

5) $12\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+8\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

6) $64\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+32\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

7) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+27\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

8) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+28\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+96\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

9) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+32\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+60\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

10) $3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+28\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+49\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

Задача 3. Найти решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности на отрезке методом разделения переменных Фурье

1) $u_t=16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\qquad 0<x<3, t>0$

$$u(0,t)=u(3,t)=0 \qquad u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}, & 0\le x\le \dfrac{3}{2}\\ 3-x, & \dfrac{3}{2}<x\le 3\end{cases}$$

2) $u_t=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\qquad 0<x<2, t>0$

$$u(0,t)=u(2,t)=0 \qquad u(x,0)=\begin{cases}x^2, & 0\le x\le 1\\ 2-x, & 1<x\le 2\end{cases}$$

3) $u_t = 25\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\quad 0 < x < 5, t > 0$

$$u(0,t) = u(5,t) = 0 \qquad u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{5}, & 0 \le x \le \dfrac{5}{2} \\ 5 - x, & \dfrac{5}{2} < x \le 5 \end{cases}$$

4) $u_t = 16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\quad 0 < x < 4, t > 0$

$$u(0,t) = u(4,t) = 0 \qquad u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}, & 0 \le x \le 2 \\ 4 - x, & 2 < x \le 4 \end{cases}$$

5) $u_t = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\quad 0 < x < 5, t > 0$

$$u(0,t) = u(5,t) = 0 \qquad u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{2}, & 0 \le x \le \dfrac{5}{2} \\ 5 - x, & \dfrac{5}{2} < x \le 5 \end{cases}$$

6) $u_t = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\quad 0 < x < 3, t > 0$

$$u(0,t) = u(3,t) = 0 \qquad u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{3}, & 0 \le x \le \dfrac{3}{2} \\ 3 - x, & \dfrac{3}{2} < x \le 3 \end{cases}$$

7) $u_t = 25\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\quad 0 < x < 8, t > 0$

$$u(0,t) = u(8,t) = 0 \qquad u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4}, & 0 \le x \le 4 \\ 8 - x, & 4 < x \le 8 \end{cases}$$

8) $u_t = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\quad 0 < x < 2, t > 0$

$$u(0,t) = u(2,t) = 0 \qquad u(x,0) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

9) $u_t = 16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\quad 0 < x < 1, t > 0$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad u(x,0) = \begin{cases} 2x^2, & 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ 1 - x, & \dfrac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

10) $u_t = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\quad 0 < x < 4, t > 0$

$$u(0,t) = u(4,t) = 0 \qquad u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}, & 0 \le x \le 2 \\ 4 - x, & 2 < x \le 4 \end{cases}$$

Задача 4. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в полярной системе координат методом разделения переменных

1) $\Delta u = 0, \qquad 0 \le x < 1, \qquad u\big|_{r=1} = \varphi^2 + \varphi + 1$

2) $\Delta u = 0, \qquad 0 \le x < 2, \qquad u\big|_{r=2} = \varphi^2 - \varphi$

3) $\Delta u = 0, \qquad 0 \le x < 1, \qquad u\big|_{r=1} = 2\varphi^2 + 3\varphi + 5$

4) $\Delta u = 0, \qquad 0 \le x < 2, \qquad u\big|_{r=2} = \varphi^2 + 5\varphi + 7$

5) $\Delta u = 0, \qquad 0 \le x < 3, \qquad u\big|_{r=3} = \varphi^2$

6) $\Delta u = 0, \qquad 0 \le x < 1, \qquad u\big|_{r=1} = 3\varphi^2 + \varphi + 2$

7) $\Delta u = 0, \qquad 0 \le x < 4, \qquad u\big|_{r=4} = 5\varphi^2 + 2\varphi + 2$

8) $\Delta u = 0, \qquad 0 \le x < 2, \qquad u\big|_{r=2} = 4\varphi^2 + 3\varphi + 1$

9) $\Delta u = 0, \qquad 0 \le x < 1, \qquad u\big|_{r=1} = \varphi^2$

10) $\Delta u = 0, \qquad 0 \le x < 2, \qquad u\big|_{r=2} = 3\varphi^2 - \varphi - 1$

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Дифференциальные уравнения в частных производных (ДУЧП) второго порядка с двумя неизвестными, линейные относительно старших производных. Определение типа уравнения. Приведение уравнения к каноническому виду.

Общий вид уравнения

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \quad (1)$$

Здесь $u(x,y)$ - неизвестная функция двух независимых переменных.

<u>Тип уравнения</u> определяется величиной $\Delta = B^2 - AC$.

Если 1) $\Delta > 0$ – уравнение гиперболического типа

2) $\Delta = 0$ – уравнение параболического типа

3) $\Delta < 0$ – уравнение эллиптического типа

Приведение уравнения (1) к каноническому виду:

1) Выписывается уравнение характеристик уравнения (1)

$$A(dy)^2 - 2Bdxdy + C(dx)^2 = 0$$

и находится его общее решение.

2) Вводятся новые независимые переменные ξ и η, при подстановке их в уравнение (1) последнее приобретает канониче-

ский вид.

Уравнение гиперболического типа

Уравнение характеристик в этом случае имеет два общих интеграла $\varphi(x,y)=C_1$ и $\psi(x,y)=C_2$. Независимые переменные вводятся по формулам:

$$\xi=\varphi(x,y),\ \eta=\psi(x,y).$$

Уравнение (1) приобретает вид: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=F\left(\xi,\eta,u,\dfrac{\partial u}{\partial\xi},\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right)$ - канонический вид уравнения гиперболического типа.

Уравнение параболического типа

Общие интегралы уравнения характеристик в этом случае совпадают, обозначим их $\varphi(x,y)=C$.

Переменные ξ и η вводятся по формулам: $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=x$ (или $\eta=y$).

Уравнение (1) при этом приобретает вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=F\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)$$

- канонический вид уравнения параболического типа.

Уравнение эллиптического типа

Общие интегралы уравнения характеристик имеют вид $\varphi(x,y)\pm i\psi(x,y)=C$.

Независимые переменные ξ и η вводятся по формулам $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$.

Уравнение (1) приобретает вид $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=F\left(\xi,\eta,u,\dfrac{\partial u}{\partial\xi},\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right)$ - канонический вид уравнения эллиптического типа.

Уравнение теплопроводности стержня (смешанная задача). Метод разделения переменных Фурье.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};0\le x\le l,0\le t\le\infty$$

Граничные условия: $u(0,t)=u(l,t)=0$

Начальные условия: $u(x,0)=\varphi(x)$

Решение имеет вид: $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t}\sin\left(\dfrac{\pi nx}{l}\right)$,

где $b_n=\dfrac{2}{l}\int\limits_0^l\varphi(x)\sin\left(\dfrac{\pi nx}{l}\right)dx$

Задача Дирихле для уравнения Лапласа для круга

Уравнение Лапласа: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$,

(2)

с использованием оператора Лапласа записывается $\Delta u=0$.

Граничные условия: $u(r,\varphi)=f(\varphi), 0\le r\le R, 0\le\varphi\le 2\pi$.

Уравнение Лапласа в полярной системе координат имеет вид

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0,$$

Решение которого:

$$u(r,\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{r=1}^{\infty}r^n\left(a_n\cos(n\varphi)+b_n\sin(n\varphi)\right).$$

Коэффициенты a_0, a_n и b_n определяются по формулам

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)d\varphi, \qquad a_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\cos(n\varphi)d\varphi,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi.$$

Образец решения задач

Задача 1. Определить типа уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+36\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

$A=1, B=6, C=36$, тогда $\Delta=36-36=0$ - данное уравнение - уравнение параболического типа.

Задача 2. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+8\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+12\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$A=1, B=4, C=12, \Delta=16-12=4>0$ - данное уравнение -уравнение гиперболического типа.

Уравнение характеристик: $(dy)^2-8dxdy+12(dx)^2=0$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-8\frac{dy}{dx}+12=0$$

Обозначим: $\dfrac{dy}{dx}=k$, $\quad k^2-8k+12=0 \quad \Rightarrow \quad k_1=2$, $k_2=6$

$$\frac{dy}{dx}=2\to y=2x+C_1\to C_1=y-2x$$

$$\frac{dy}{dx}=6\to y=6x+C_2\to C_2=y-6x$$

Новые независимые переменные вводим по формулам

$$\xi=y-2x$$

$$\eta=y-6x$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=-2, \qquad \frac{\partial\xi}{\partial y}=1, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial x}=-6, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial y}=1$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=-2\frac{\partial u}{\partial\xi}-6\frac{\partial u}{\partial\eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)'_x - 6\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)'_x = -2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right] -$$

$$6\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right] = -2\left[-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right] - 6\left[-2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right] =$$

$$= 4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 24\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 36\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) - 6\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) =$$

$$= -2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 8\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

Подставим полученные частные производные в исходное уравнение

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 24\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 36\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 16\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 64\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - 48\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} +$$

$$+12\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 24\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$$

После приведения подобных получаем каноническое уравнение гиперболического типа

$$-16\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$$

Его общее решение имеет вид

$$u=\varphi(\xi)+\psi(\eta)$$

$$u=\varphi(y-2x)+\psi(y-6x).$$

Задача 3. Найти решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности на отрезке методом разделения переменных

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};0\le x\le 2,t>0$$

$$u(x,0)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1\\ 2-x, & 1<x\le 2\end{cases}$$

$$u(0,t)=u(2,t)=0$$

$$a=1;$$

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2\varphi(x)\sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right)dx=\int_0^1 x\sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right)dx+\int_1^2(2-x)\sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right)dx=$$
$$=J_1+J_2$$

Обозначим интегралы J_1 и J_2 соответственно. Оба интеграла вычисляются методом интегрирования по частям, причем в первом случае за u берется x, а во втором $u=2-x$.

$$J_1=-\frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

$$J_2 = \frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

$$b_n = \frac{8}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

Решение имеет вид

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)e^{-\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 t}\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)$$

Задача 4. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа (2) в полярной системе координат методом разделения переменных

$$\Delta u = 0 \qquad 0 \le r \le 1 \qquad u(1,\varphi) = \sin(\varphi)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(\varphi)d\varphi = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(\varphi)\cos(n\varphi)d\varphi = 0$$

Интегралы равны 0 , т.к. являются интегралами от нечетной функции по симметричному промежутку.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(\varphi(n+1)) - \cos(\varphi(1-n))\right]d\varphi$$

Использовали формулу

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right].$$

При всех $n \neq 1$

$$b_n = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{n+1}\sin(\varphi(n+1))\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{1-n}\sin(\varphi(1-n))\Big|_{-\pi}^{\pi}\right] = 0$$

При

$$n = 1\ b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos(2\varphi))d\varphi = 1$$

Решение: $u(r,\varphi) = r\sin(\varphi)$.

Литература

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Интеграл-Пресс, 2001.

2. Мартинсон Л.К. Дифференциальные уравнения математической физики. – М.: МГТУ, 2002.

3. Братищев А.В. Введение в теорию уравнений математической физики. – Ростов-на-Дону: Издательский центр ДГТУ, 2001.