ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Прикладная математика»

Учебное пособие

по дисциплине

«Математика»

«Неопределенный интеграл»

Автор

Барышникова Е.Г.

Ростов-на-Дону, 2017

Аннотация

Учебное пособие «Неопределенный интеграл» предназначено для студентов 1 и 2 курсов всех форм обучения. Цель данного пособия – помочь студентам освоить основные методы интегрирования различных типов функций с помощью замены и подстановки.

Авторы

старший преподаватель кафедры «ПМ»
Барышникова Е.Г.

Оглавление

ВСТУПЛЕНИЕ

Изучение курса интегрального исчисления является ключевым моментом в математическом анализе и вызывает у студентов гораздо больше трудностей, чем освоение дифференциального исчисления, поскольку для каждого типа подынтегральной функции существует свой метод интегрирования, причем эти методы недостаточно просто «знать», необходимо понимание, какой именно из них подходит в данном случае. Без понимания основных принципов нахождения неопределенного интеграла студенты не смогут успешно освоить и следующие разделы курса – Определенный интеграл и его приложения, Дифференциальные уравнения, Функциональные ряды, Операционное исчисление и другие.

Данное учебное пособие содержит не только необходимый теоретический материал по теме «Неопределенный интеграл», но и решение практических заданий по каждой теме с необходимыми пояснениями.

ПОНЯТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

В дифференциальном исчислении решается задача:

по данной функции $f(x)$ найти ее производную (или дифференциал).

Интегральное исчисление решает обратную задачу:

найти функцию $F(x)$, зная ее производную $F'(x) = f(x)$ (или дифференциал).

Искомую функцию $F(x)$ называют ***первообразной*** функции $f(x)$.

<u>Определение.</u>

Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если для любого $x \in (a;b)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$ (или $dF(x) = f(x)dx$).

Например, первообразной функции $y = x^2$, $x \in R$, является функция $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$, т. к.

$$F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2=f(x).$$

Очевидно, что первообразными будут также любые функции

$$F(x)=\frac{x^3}{3}+C,$$

где С – постоянная, поскольку

$$F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}+C\right)'=x^2=f(x).$$

Теорема.

Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на $(a;b)$, то множество всех первообразных для $f(x)$ задается формулой $F(x)+C$, где С – постоянное число.

Функция $F(x)+C$ является первообразной $f(x)$. Действительно,

$$(F(x)+C)'=F'(x)=f(x).$$

Пусть $\Phi(x)$ - некоторая другая, отличная от $F(x)$, первообразная функции $f(x)$, т. е. $\Phi'(x)=f(x)$.

Тогда для любого $x\in(a;b)$ имеем

$$(\Phi(x)-F(x))'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

А это означает, что

$$\Phi(x)-F(x)=C,$$

где С – постоянное число.

Следовательно $\Phi(x)=F(x)+C$.

Определение.

Множество всех первообразных функции $F(x)+C$ для $f(x)$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом

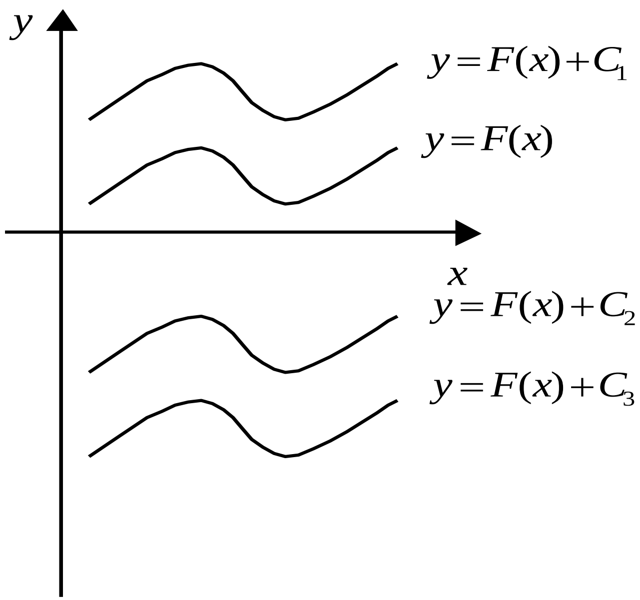
$$\int f(x)dx.$$

Таким образом, по определению $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Здесь $f(x)$ называется подынтегральной функцией,
$f(x)dx$ - подынтегральным выражением,
x – переменной интегрирования,
$\int$ - знаком неопределенного интеграла.

Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется интегрированием этой функции.

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство "параллельных" кривых $y = F(x) + C$ (каждому числовому значению C соответствует определенная кривая семейства). График каждой первообразной (кривой) называется интегральной кривой.



Для всякой ли функции существует интеграл?

Имеет место теорема, утверждающая, что ”всякая непрерывная на $(a;b)$ функция имеет на этом промежутке первообразную”, а следовательно, и неопределенный интеграл.

ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ НЕПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Пользуясь тем, что интегрирование есть действие, обратное дифференцированию, можно получить таблицу основных интегралов путем обращения соответствующих формул дифференциального исчисления (таблица дифференциалов) и использования свойств неопределенного интеграла.

Например, т. к.

$$d(\sin x) = \cos x \cdot dx,$$

то

$$\int \cos x\, dx = \int d(\sin x) = \sin x + C.$$

Вывод ряда формул таблицы будет дан при рассмотрении основных методов интегрирования.

Интегралы в приводимой ниже таблице называются табличными.

Их следует знать наизусть. В интегральном исчислении нет простых и универсальных правил отыскания первообразных от элементарных функций, как в дифференциальном исчислении. Методы нахождения первообразных (т. е. интегрирования функции) сводятся к указанию приемов, приводящих данный (искомый) интеграл к табличному. Следовательно, необходимо знать табличные интегралы и уметь их узнавать.

Отметим, что в таблице основных интегралов переменная интегрирования x может обозначать как независимую переменную, так и функцию от независимой переменной (согласно свойству инвариантности формулы интегрирования).

В справедливости приведенных ниже формул можно убедиться, взяв дифференциал правой части, который будет равен подынтегральному выражению в левой части формулы.

Таблица основных интегралов

1. $$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

2. $$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

3. $$\int a^{x}\,du = \frac{a^{x}}{\ln a} + C;$$

4. $$\int e^{x}\,dx = e^{x} + C;$$

5. $$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

6. $$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

7. $$\int tgx\,dx = -\ln|\cos x| + C;$$

8. $$\int ctgx\,dx = \ln|\sin x| + C;$$

9. $$\int \frac{dx}{\cos^{2}x} = tgx + C;$$

10. $$\int \frac{dx}{\sin^{2}x} = -ctg\,x + C;$$

11. $$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right| + C;$$

12. $$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$$

13. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}} = \arcsin\frac{x}{2} + C;$$

14. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C;$$

15. $$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\, arctg\, \frac{x}{a} + C;$$

16. $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right| + C;$$

17. $$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

18. $$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\left|u + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

Свойства неопределенного интеграла

Отметим ряд свойств неопределенного интеграла, вытекающих из его определения.

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральной функции:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx, \quad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Действительно,

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x) + C) = dF(x) + d(C) = F'(x)dx = f(x)dx$$

и

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x).$$

Благодаря этому свойству правильность интегрирования проверяется дифференцированием.

Например, равенство

$$\int (3x^2 + 4)dx = x^3 + 4x + C$$

верно, т. к.

$$(x^3+4x+C)'=3x^2+4.$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x)=F(x)+C.$$

Действительно,

$$\int dF(x)=\int F'(x)dx=\int f(x)dx=F(x)+C.$$

Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int af(x)dx=a\int f(x)dx,$$

$a\neq 0$ - постоянная.

Действительно,

$$\int af(x)dx=\int aF'(x)dx=\int (aF(x))'dx=\int d(aF(x))=aF(x)+C_1=$$

$$=a\left(F(x)+\frac{C_1}{a}\right)=a(F(x)+C)=a\int f(x)dx$$

(положим $\frac{C_1}{a}=C$).

Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций:

$$\int (f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx.$$

Пусть $F'(x)=f(x)$ и $G'(x)=g(x)$.
Тогда

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int (F'(x) \pm G'(x))dx =$$

$$\int \left(F(x) \pm G(x)\right)dx = \int d\left(F(x) \pm G(x)\right) = F(x) + G(x) + C$$
$$= (F(x) + C_1) \pm (G(x) + C_2)$$
$$= \int f(x)dx \pm \int g(x)dx,$$

где $C_1 \pm C_2 = C$.

3. Инвариантность (неизменность) формулы интегрирования

Если

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

то и

$$\int f(u)du = F(u) + C,$$

где $u = \varphi(x)$ - произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

Пусть x – независимая переменная, $f(x)$ - непрерывная функция и $F(x)$ - ее первообразная.

Тогда $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Положим теперь $u = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ - непрерывно – дифференцируемая функция.

Рассмотрим сложную функцию $F(u) = F(\varphi(x))$.

В силу инвариантности формы первого дифференциала функции имеем

$$dF(u) = F'(u)du = f(u)du.$$

Отсюда

$$\int f(u)du = \int d(F(u)) = F(u) + C.$$

Таким образом, формула для неопределенного интеграла остается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой функцией от нее, имеющей непрерывную производную.

Так, из формулы

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

путем замены x на u $(u = \varphi(x))$ получаем

$$\int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C.$$

В частности,

$$\int \sin^2 x dx(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C,$$

$$\int \ln^2 x dx(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + C,$$

$$\int tg^2 x dx(tgx) = \frac{tg^3 x}{3} + C.$$

Пример.

Найти интеграл

$$\int (2x^4 - 3x^2 + x - 5)dx.$$

Решение:

$$\int (2x^4 - 3x^2 + x - 5)dx = 2\int x^4 dx - 3\int x^2 dx + \int x dx - 5\int dx = 2\frac{x^5}{5} + C_1 - 3\frac{x^3}{3} + C_2 + \frac{x^2}{2} +$$

$$+ C_3 - 5x + C_4 = \frac{2}{5}x^5 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + C,$$

где $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$.

Пример.

Найти интеграл

$$\int \frac{x+1}{x}dx.$$

Решение:

$$\int \frac{x+1}{x}dx = \int \left(1+\frac{1}{x}\right)dx = x + \ln|x| + C.$$

МЕТОД ПОДВЕДЕНИЯ ПОД ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется ***непосредственным интегрированием.***

При сведении данного интеграла к табличному часто используются следующие преобразования дифференциала (операция «подведения под знак дифференциала»):

$$du = d(u+a),$$ *a* – число;

$$du = \frac{1}{a}d(au),\quad a \neq 0$$ - число;

$$udu = \frac{1}{2}d(u)^2,$$

$$\cos udu = d(\sin u),$$

$$\sin udu = -d(\cos u),$$

$$\frac{1}{u}du = d(\ln u),$$

$$\frac{1}{\cos^2 u} = d(tgu).$$

Вообще,

$$f'(u)du = d(f(u)).$$

Эта формула очень часто используется при вычислении интегралов.

Примеры:

1. $$\int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C$$

(формула 2 таблицы интегралов);

2.

$$\int (3x-1)^{24}dx = \frac{1}{3}\int (3x-1)^{24}d(3x-1) = \frac{1}{3}\frac{(3x-1)^{25}}{25} + C$$

(формула 1);

3.

$$\int ctg^2 x dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}dx - \int dx = -ctgx - x + C$$

(формулы 10 и 1);

4.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(\sqrt{3}x)}{\sqrt{(2)^2-(\sqrt{3}x)^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{\sqrt{3}x}{2} + C$$

(формула 13);

5.

$$\int \sin^2 6x dx = \frac{1}{2}\int (1-12x)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 12x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \cos 12x d(12x) * \frac{1}{12} =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{24}\sin 12x + C$$

(формулы 1 и 6);

6.

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = -\frac{1}{3}\int \frac{(x-1)-(x+2)}{(x-1)(x+2)}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{x-1}{(x-1)(x+2)}dx + \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{(x-1)(x+2)}dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{d(x+2)}{x+2} + \frac{1}{3}\int \frac{d(x-1)}{x-1} = -\frac{1}{3}\ln|x+2| + \frac{1}{3}\ln|x-1| + C$$

7.
$$\int tgudu = \int \frac{\sin u du}{\cos u} = -\int \frac{d(\cos u)}{\cos u} = -\ln|\cos u| + C$$
(вывод формулы 7);

8.
$$\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{\cos^2 \frac{u}{2} + \sin^2 \frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}} du = \int \frac{\cos^2 \frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}} du + \int \frac{\sin^2 \frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}} du = \int ctg\frac{u}{2} d\left(\frac{u}{2}\right) +$$
$$+\int tg\frac{u}{2} d\left(\frac{u}{2}\right) = \ln|\sin\frac{u}{2}| - \ln|\cos\frac{u}{2}| + C = \ln\left|\frac{\sin\frac{u}{2}}{\cos\frac{u}{2}}\right| + C = \ln\left|tg + \frac{u}{2}\right| + C$$
(вывод формулы 11);

9.
$$\int \frac{dx}{ctg^5 x * \sin^2 x} = -\int (ctgx)^{-5} d(ctgx) = -\frac{ctg^{-4}}{-4} + C = \frac{1}{4ctg^4 x} + C$$
(формула 1);

10.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2+(x-1)^2}} = \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+(x-1)^2}} = \ln|x-1+\sqrt{3-2x+x^2}| + C$$
(формула 14);

11.
$$\int\left(4x^3 - \frac{5}{\cos^2 2x} + 3^{1-x}\right)dx = 4\int x^3 dx - \frac{5}{2}\int \frac{d(2x)}{\cos^2 2x} - \int 3^{1-x} d(1-x) = x^4 - \frac{5}{2} tg 2x - \frac{3^{1-x}}{\ln 3} + C$$
(формулы 1, 9, 3);

12.
$$\int x^3 * \sqrt[3]{1+x^2} dx = \int (1+x^2)^{\frac{1}{3}} * x(x^2+1-1)dx = \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{\frac{4}{3}} d(1+x^2) -$$
$$-\frac{1}{2}\int (1+x^2)^{\frac{1}{3}} * d(1+x^2) = \frac{3}{14}(1+x^2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}} + C$$
.

Как видно, вычисление интегралов иногда требует некоторой изобретательности, так сказать, «индивидуального подхода к каждой подынтегральной функции».

Соответствующие навыки приобретаются в результате значительного числа упражнений.

МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПОДСТАНОВКОЙ (ЗАМЕНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ)

Метод интегрирования подстановкой заключается во введении новой переменной интегрирования. При этом заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или к нему сводящимся (в случае «удачной» подстановки). Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку приобретается практикой.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$.

Сделаем подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - функция, имеющая непрерывную производную.

Тогда $dx = \varphi'(t)dt$ и на основании ***свойства инвариантности*** формулы интегрирования неопределенного интеграла получаем формулу интегрирования подстановкой:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

Данная формула также называется формулой замены переменных в неопределенном интеграле. После нахождения интеграла правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования t назад к переменной x.

Иногда целесообразно подбирать подстановку в виде $t = \varphi(x)$, тогда

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt,$$

где $t = \varphi(x)$. Другими словами, формулу замены переменных можно применять справа налево.

Если обозначить $\varphi(x) = u, \quad d\varphi(x) = du$, то таблица интегралов примет вид:

1. $\int u^{\alpha}du=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad (\alpha\neq-1)$ $\left(\int du=u+C\right)$;

2. $\int \frac{du}{u}=\ln|u|+C$;

3. $\int a^{u}du=\frac{a^{u}}{\ln a}+C$;

4. $\int e^{u}du=e^{u}+C$;

5. $\int \sin u du=-\cos u+C$ $\left(\int shudu=chu+C\right)$;

6. $\int \cos u du=\sin u+C$ $\left(\int chudu=shu+C\right)$;

7. $\int tgudu=-\ln|\cos u|+C$;

8. $\int ctgudu=\ln|\sin u|+C$;

9. $\int \frac{du}{\cos^{2}u}=tgu+C$;

10. $\int \frac{du}{\sin^{2}u}=-ctgu+C$;

11. $\int \frac{du}{\sin u}=\ln\left|tg\frac{u}{2}\right|+C$;

12. $\int \frac{du}{\cos u}=\ln\left|tg\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$;

13. $$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{2} + C$$;

14. $$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C$$;

15. $$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C$$;

16. $$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} * \ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$$;

17.

$$\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{u}{2} * \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C$$;

18.

$$\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$$

Пример 1.

Найти

$$\int e^{\frac{x}{4}}dx$$.

Решение:

Положим $x = 4t$, тогда $dx = 4dt$.

Следовательно,

$$\int e^{\frac{x}{4}}dx = 4\int e^t dt = 4e^t + C = 4e^{\frac{x}{4}} + C$$.

Пример 2.

Найти

$$\int x\sqrt{x-3}\,dx$$.

Решение:

Пусть $\sqrt{x-3} = t$, тогда $x = t^2 + 3$, $dx = 2tdt$.

Поэтому

$$\int x\sqrt{x-3}dx = \int (t^2+3)2tdt = 2\int (t^4+3t^2)dt = 2\int t^4dt + 6\int t^2dt = 2*\frac{t^5}{5} + 6*\frac{t^3}{3} + C =$$

$$= \frac{2}{5}(x-3)^{\frac{5}{2}} + 2(x-3)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Пример 3.

Получить формулу

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln|u+\sqrt{u^2+a^2}|+C.$$

Обозначим

$t = \sqrt{u^2+a^2} + u$ (подстановка Эйлера).

Тогда

$$dt = \frac{2u}{2\sqrt{u^2+a^2}}du + du,$$

т. е.

$$dt = \frac{\sqrt{u^2+a^2}+u}{2\sqrt{u^2+a^2}}du.$$

Отсюда

$$\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \frac{dt}{\sqrt{u^2+a^2}+u} = \frac{dt}{t}.$$

Стало быть,

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t|+C = \ln|u+\sqrt{u^2+a^2}|+C.$$

Пример 4.

Найти

$$\int x(x+2)^{100}dx.$$

Решение:

Пусть $x+2=t$. Тогда $x=t-2$, $dx=dt$. Имеем:

$$\int x(x+2)^{100}dx = \int (t-2)t^{100}dt = \int t^{101}dt - 2\int t^{100}dt = \frac{t^{102}}{102} - 2\frac{t^{101}}{101} + C = \frac{(x+2)^{102}}{102} - \frac{2(x+2)^{101}}{101} + C$$

Пример 5.

Найти

$$\int \frac{dx}{e^x+1}.$$

Решение: Обозначим $e^x = t$. Тогда $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t}$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{\frac{dt}{t}}{t+1} = \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \frac{dt}{t^2+t} = \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = -\int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(t+\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2*\frac{1}{2}} \ln\left|\frac{\frac{1}{2}+t+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-t-\frac{1}{2}}\right| + C =$$

$$= -\ln\left|\frac{t+1}{-t}\right| = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right| = \ln\frac{e^x}{e^x+1} + C.$$

МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - это функции, имеющие непрерывные производные.

Тогда $d(uv) = udv + vdu$.

Интегрируя это равенство, получим

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu$$

или

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Полученная формула называется формулой ***интегрирования по частям.*** Она дает возможность свести вычисление интеграла $\int udv$ к вычислению интеграла $\int vdu$, который может оказаться существенно более простым, чем исходный.

Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение заданного интеграла представляется каким - либо образом в виде произведения двух сомножителей u и dv (это, как правило, можно осуществить несколькими способами); затем, после нахождения v и dv, используется формула интегрирования по частям.

Иногда эту формулу приходится использовать несколько раз.

Удобно вычислять методом интегрирования по частям интегралы от произведений некоторых функций на многочлен

1. Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)\sin kxdx$, $\int P(x)\cos kxdx$,

где $P(x)$ - многочлен, k - число.

Удобно положить $u = P(x)$, а за dv обозначить все остальные сомножители.

2. Интегралы вида $\int P(x)\arcsin xdx$, $\int P(x)\arccos xdx$, $\int P(x)\ln xdx$, $\int P(x)arctgxdx$, $\int P(x)arcctgxdx$.

Удобно положить $P(x)dx = dv$, а за u обозначить остальные сомножители.

3. Интегралы вида $\int e^{ax}\sin bxdx$, $\int e^{ax}\cos bxdx$, где a и b - числа.

За u можно принять функцию $u = e^{ax}$.

Пример.

Найти $\int (2x+1)e^{3x}dx$.

Решение: Пусть

$$\begin{bmatrix} u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx \\ dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \int e^{3x}dx = \dfrac{1}{3}e^{3x} \end{bmatrix}$$

(можно положить ($C = 0$). Следовательно, по формуле интегрирования по частям:

$$\int (2x+1)e^{3x}dx = (2x+1)\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \int\frac{1}{3}e^{3x}2dx = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C$$

Пример.
Найти

$$\int \ln x dx.$$

Решение:
Пусть

$$\left[\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}\right].$$

Поэтому

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx == x\ln x - x + C.$$

Пример.
Найти

$$\int x^2 e^x dx.$$

Решение:
Пусть

$$\left[\begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{array}\right].$$

Поэтому

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int e^x x dx.$$

Для вычисления интеграла $\int e^x x dx$ снова применим метод интегрирования по частям:

$$u = x, dv = e^x dx \Rightarrow du = dx, v = e^x.$$

Значит,

$$\int e^x x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Поэтому

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x + C).$$

Пример.
Найти

$$\int arctg\ x\ dx.$$

Решение:
Пусть

$$\left[\begin{array}{l} u = arctg\ x \Rightarrow du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}\right].$$

Поэтому

$$\int arctg\ x\ dx =$$

$$= arcctg\ x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x \cdot arctg\ x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x \cdot arcctg\ x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Пример.

Найти $\int x^2 \cos x\, dx.$

Решение:

Пусть $\left[\begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx, \\ dv = \cos x\ dx \Rightarrow v = \sin x. \end{array}\right]$

Поэтому $\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x - \int 2x \cdot \sin x\, dx.$

После однократного применения метода интегрирования по частям мы получили более простой интеграл. Тем не менее для его вычисления требуется применить этот метод ещё раз:

$$\left[\begin{array}{l} u = 2x \Rightarrow du = 2\,dx, \\ dv = \sin x\ dx \Rightarrow v = -\cos x. \end{array}\right]$$

Получим:

$$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x - \int 2x\cdot\sin x\,dx =$$

$$= -2x\cdot\cos x - \int -2\cos x\,dx = -2x\cdot\cos x + 2\sin x + C.$$

Пример.

Найти интеграл $\int e^x\cdot\cos x\,dx.$

Решение:

Используем метод интегрирования по частям. Пусть

$$\left[\begin{array}{l} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx, \\ dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \sin x \end{array}\right].$$

Тогда

$$\int e^x\cdot\cos x\,dx = e^x\sin x - \int e^x\sin x\,dx.$$

К полученному интегралу снова применим метод интегрирования по частям,

$$\left[\begin{array}{l} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx, \\ dv = \sin x\,dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array}\right].$$

Получим:

$$\int e^x\cdot\cos x\,dx = e^x\sin x - \int e^x\sin x\,dx = e^x\sin x - \left(-e^x\cos x - \int -e^x\cos x dx\right) =$$

$$= e^x\sin x + e^x\cos x - \int e^x\cos x dx.$$

В итоге получили исходный интеграл, может показаться, что решение зашло в тупик. Однако, перенеся этот интеграл в левую часть равенства, получим

$$\int e^x \cdot \cos x\,dx + \int e^x \cdot \cos x\,dx = e^x \sin x + e^x \cos x,$$

$$2\int e^x \cdot \cos x\,dx = e^x \sin x + e^x \cos x,$$

$$\int e^x \cdot \cos x\,dx = \frac{1}{2}\left(e^x \sin x + e^x \cos x\right).$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Многочлен (некоторые сведения справочного характера)

Функция вида

$$p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

где n - натуральное число, $a_i (i = 0,1,\ldots,n)$ - постоянные коэффициенты, называется многочленом (или целой рациональной функцией).

Число n называется ***степенью многочлена.***

Корнем многочлена называется такое значение x_0 (вообще говоря, комплексное) переменной x, при котором многочлен обращается в нуль,

т. е.

$$P_n(x_0) = 0.$$

Теорема 1.

Если x_1 есть корень многочлена $P_n(x)$, то многочлен делится без остатка на $x - x_1$, т. е.

$$P_n(x) = (x - x_1) * P_{n-1}(x),$$

где $P_{n-1}(x)$ - многочлен степени $(n-1)$.

Возникает вопрос: всякий ли многочлен имеет корень? Положительный ответ на этот вопрос дает теорема 2.

Теорема 2 (основная теорема алгебры).

Всякий многочлен n - й степени $(n > 0)$ имеет по крайней мере один корень, действительный или комплексный.

Всякий многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n),$$

где $x_1, x_2, ..., x_n$ - корни многочлена, a_0 - коэффициент многочлена при x^n.

Множители $(x - x_n)$ в равенстве называются ***линейными множителями***.

Пример.

Разложить многочлен

$$P_3(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

на множители.

Решение:

Многочлен

$$P_3(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

обращается в нуль при $x = -1, x = 1, x = 2$

(корни найдены методом подбора).

Следовательно,

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x + 1)(x - 1)(x - 2).$$

Пример.

Представить выражение

$$x^3 - 2x^2 + 4x - 4$$

в виде произведения линейных множителей.

Решение:

Легко проверить, что

$$x^3 - 2x^2 + 4x - 4 = (x - 1)(x - 2i)(x + 2i).$$

Если в разложении многочлена

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$$

какой - либо корень ***встретился k раз, то он называется корнем кратности k.***

В случае $k=1$ (т. е. корень встретился один раз) корень называется ***простым.***

Разложение многочлена

$$P_n(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

можно записать в виде

$$P_n(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_r)^{k_r},$$

если корень x_1 имеет кратность k_1, корень x_2 - кратность k_2 и так далее. При этом $k_1+k_2+\ldots+k_r=n$, а r - число различных корней.

Например, разложение

$$P_8(x)=(x-3)(x+1)(x-4)(x-3)(x-3)x(x-4)(x-3)$$

можно записать так:

$$P_8(x)=(x-3)^4(x+1)(x-4)^2(x-4)^2x.$$

Пользуясь последней из выше указанных теорем, можно доказать следующие утверждения.

Теорема 3.

Если многочлен

$$p_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

тождественно равен нулю, то все его коэффициенты равны нулю.

Теорема 4.

Если два многочлена тождественно равны друг другу, то коэффициенты одного многочлена равны соответствующим коэффициентам другого.

Например, если

$$ax^3+bx^2+cx\equiv x^3-3x^2+1,$$

то

$$a=1, b=-3, c=0, d=1.$$

Теорема 5.

Если многочлен $P_n(x)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $a+ib$, то он имеет и сопряженный корень $a-ib$.

В разложении многочлена

$$P_n(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$$

комплексные корни входят сопряженными парами. Перемножив линейные множители $(x-(a+ib))(x-(a-ib))$ получим трехчлен второй степени с действительными коэффициентами x^2+px+q. В самом деле,

$$\begin{aligned}\big(x-(a+ib)\big)\big(x-(a-ib)\big)\\ &=\big((x-a)+ib\big)\big((x-a)+ib\big)\\ &=(x-a)^2+b^2=x^2-2ax+a^2+b^2\\ &=x^2+px+q,\end{aligned}$$

где $p=-2a, q=a^2+b^2$.

Таким образом, произведение линейных множителей, соответствующих сопряженным корням, можно заменить квадратным трехчленом с действительными коэффициентами.

С учетом вышеизложенного справедлива следующая теорема.

Теорема 6.

Всякий многочлен с действительными коэффициентами разлагается на линейные и квадратные множители с действительными коэффициентами, т. е. многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}P_n(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}\dots(x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x\\ +q_1)^{s_1}\dots.(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}.\end{aligned}$$

При этом $k_1+k_2+...+k_r+2(s_1+s_2+...+s_m)=n$, все квадратные трехчлены не имеют вещественных корней.

Примеры разложений:

1. $x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$;

2. $x^3-16x=x(x^2-16)=x(x-4)(x+4)$;
3.

$$x^5-6x^4+9x^3-x^2+6x-9=x^3(x^2-6x+9)-(x^2-6x+9)=(x^2-6x+9)(x^3-1)=$$
$$=(x-3)^2(x-1)(x^2+x+1).$$

Дробно - рациональная функция

Дробно - рациональной функцией (или рациональной дробью) называется функция, равная отношению двух многочленов, т. е.

$$f(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

где $P_m(x)$ - многочлен степени m, а $Q_n(x)$ - многочлен степени n.

Рациональная дробь называется ***правильной***, если степень числителя меньше степени знаменателя, т. е. $m<n$; в противном случае (если $m\geq n$) рациональная дробь называется ***неправильной***.

Всякую ***неправильную*** рациональную дробь

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

можно, путем деления числителя на знаменатель, представить в виде суммы многочлена $L(x)$ и правильной рациональной дроби $\frac{R(x)}{Q(x)}$, т. е.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=L(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Например,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^4-5x+9}{x-2}$$

- неправильная рациональная дробь.

Разделим числитель на знаменатель в столбик:

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 \qquad\qquad -5x+9 & x-2 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^4-2x^3} \qquad\qquad\quad & x^3+2x^2+4x+3 \\
2x^3 \qquad -5x+9 & \\
-\underline{2x^3-4x^2} \qquad\quad & \\
4x^2-5x+9 & \\
-\underline{4x^2-8x} \quad & \\
3x+9 & \\
-\underline{3x-6} & \\
15 &
\end{array}
$$

Получим частное

$$L(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 3$$

и остаток $R(x) = 15$.

Следовательно,

$$\frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2} = x^3 + 2x^2 + 4x + 3 + \frac{15}{x - 2}$$

Правильные простейшие рациональные дроби вида

Рассматривается четыре вида правильных рациональных дробей:

1. $\dfrac{A}{x-a}$;
2. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ $\qquad (k \geq 2, k \in N)$;
3. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$

(корни знаменателя комплексные, т. е. $p^2 - 3q < 0$);

4. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+rx+q)^k}$ ($k \geq 2$,корни знаменателя комплексные),

где A, a, M, N, p, q - действительные числа, называются простейшими рациональными дробями 1, 2, 3 и 4 типов.

Теорема.

Всякую правильную рациональную дробь $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой разложен на множители

$$Q(x)=(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}...(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}...(x^2+p_mx+q_m)^{S_m},$$

можно представить (и притом единственным образом) в виде следующей суммы простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+...+\frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}+\frac{B_1}{x-x_2}+\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+...+\frac{B_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}}+...$$
$$...+\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+...+\frac{C_{s_1}x+D_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}}+...+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_mx+q_m}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_mx+q_m)^2}+...$$
$$...+\frac{M_{s_m}x+N_{s_m}}{(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}},$$

где $A_1, A_2,..., B_1, B_2,..., C_1, D_1,..., M_1, N_1,...$ - некоторые действительные коэффициенты.

Поясним формулу на следующих примерах:

1. $$\frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^3}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}+\frac{D}{(x-3)^3}$$

Корень знаменателя x=3 имеет кратность 3 (скобка (x-3) имеет степень 3), поэтому он дает три дроби, степени знаменателей правильных дробей которых, начинаются с 1 и заканчиваются 3.

Корень знаменателя x=2 имеет кратность 1 (скобка (x-2) имеет степень 1), поэтому он дает одну дробь.

2. $$\frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Корень x=0 имеет кратность 2 , поэтому он дает две дроби.

Второй сомножитель знаменателя x^2+1 не имеет действительных корней, даёт дробь третьего типа.

3. $\dfrac{7x^2}{(x-1)(x-2)(x^2+x+1)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+x+1}+\dfrac{Mx+N}{(x^2+x+1)^2}$.

Корень x=1 и x=2 имеют кратность 1, поэтому каждый из них даёт одну дробь.

Третий сомножитель знаменателя $(x^2+x+1)^2$ не имеет действительных корней, даёт дроби третьего и четвёртого типов.

Пусть мы разложили рациональную дробь на простейшие

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}+\frac{B_1}{x-x_2}+\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+\ldots+\frac{B_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\ldots+\frac{C_{s_1}x+D_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}}+\ldots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_mx+q_m}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_mx+q_m)^2}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{M_{s_m}x+N_{s_m}}{(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}},$$

Для нахождения коэффициентов $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ в равенстве сумм простейших дробей можно применить метод неопределённых коэффициентов.

1. Правую часть равенства приведем к общему знаменателю $Q(x)$;

в результате получим тождество

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{S(x)}{Q(x)},$$

где $S(x)$ - многочлен с неопределенными коэффициентами.

2. Так как в полученном равенстве знаменатели равны, то тождественно равны и числители, т. е. $P(x)=S(x)$.

3. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества $P(x)=S(x)$, получим систему

линейных уравнений, из которой и определим искомые коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, B_1, \ldots$

Пример.

Представить дробь

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}$$

в виде суммы простейших дробей.

Решение:

Согласно последней теореме имеем:

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} =$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+5},$$

т. е.

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} = \frac{A(x^2-2x+5)+(x-1)(Bx+C)}{(x-1)(x^2-2x+5)}.$$

Отсюда следует

$$2x^2-3x-3 \equiv Ax^2-2Ax+5A+Bx^2-Bx+Cx-C,$$

т. е.

$$2x^2-3x-3 \equiv (A+B)x^2+(-2A-B+C)x+(5A+C).$$

Приравнивая коэффициенты при x^2, x^1, x^0, получаем

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 2 = A+B, \\ x^1 & -3 = -2A-B+C, \\ x^0 & -3 = 5A-C. \end{array}$$

Решая систему, находим, что

$$A=-1, B=3, C=-2.$$

Следовательно,

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}=\frac{-1}{x-1}+\frac{3x-2}{x^2-2x+5}.$$

Если знаменатель правильной рациональной дроби имеет ***действительные*** корни, то для нахождения неопределенных коэффициентов применяют также ***метод отдельных значений аргумента:***

после получения тождества $P(x)=S(x)$ аргументу x придают конкретные значения столько раз, сколько неопределенных коэффициентов (обычно полагают вместо x значения действительных корней многочлена $Q(x)$).

Пример.

Представить дробь

$$\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)}$$

в виде суммы простейших дробей.

Решение:

Имеем:

$$\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}.$$

Отсюда следует

$$3x-4\equiv A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2).$$

Положим $x=0$, тогда $-4=-2A$, т. е. $A=2$;

положим $x=2$, тогда $2=6B$, т. е. $B=\frac{1}{3}$;

положим $x=-1$, тогда $-7=3C$, т. е. $C=-\frac{7}{3}$.

Следовательно,

$$\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)}=\frac{2}{x}+\frac{\frac{1}{3}}{x-2}+\frac{-\frac{7}{3}}{x+1}.$$

Интегрирование дробно - рациональных функций

Интегрирование простейших рациональных дробей

Найдем интегралы от простейших рациональных дробей.

1. $$\int\frac{A}{x-a}dx=\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C;$$

2. $$\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=A\int(x-a)^{-k}d(x-a)=A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C;$$

3. Рассмотрим интеграл

$$J=\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx.$$

Сначала в знаменателе выделяют полный квадрат, подставив полученное выражение в знаменатель, имеем:

$$J=\int\frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}dx$$, причем $q-\frac{p^2}{4}>0$.

Сделаем подстановку $x+\frac{p}{2}=t$. Тогда $x=t-\frac{p}{2}$, $dx=dt$.

Положим $q-\frac{p^2}{4}=a^2$.

Следовательно, получаем

$$J=\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int\frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}dt=$$

$$=M\int\frac{tdt}{t^2+a^2}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln(t^2+a^2)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}arctg\,\frac{t}{a}+C,$$

т. е., возвращаясь к переменной x,

$$J=\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\cdot arctg\,\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C$$

Если при выделении полного квадрата в знаменателе получается выражение t^2-a^2, то интеграл

$$J=\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\cdot\frac{1}{2a}\cdot\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right|+C$$

Такие большие формулы, естественно, запоминать не надо.

Надо помнить, что

1) в числителе выделяется производная знаменателя, данная дробь раскладывается на две дроби, в числителе первой дроби стоит выделенная производная.

Первая дробь при интегрировании даёт логарифм модуля знаменателя.

2) в знаменателе второй дроби выделяется полный квадрат;

3) вторая дробь при интегрировании сводится к табличным интегралам 15 или 16 (арктангенсу или логарифму модуля дроби)

Пример.

Найти

$$\int\frac{3x+1}{x^2+2x+10}dx.$$

Решение:

Выделим полный квадрат в знаменателе:

$$x^2+2x+10=(x+1)^2+9.$$

Сделаем подстановку $x+1=t$. Тогда $x=t-1$, $dx=dt$ и

$$\int\frac{3x+1}{x^2+2x+10}dx=\int\frac{3(t-1)+1}{t^2+9}dt=3\int\frac{tdt}{t^2+9}-2\int\frac{dt}{t^2+9}=\frac{3}{2}\ln(t^2+9)-\frac{2}{3}arctg\frac{t}{3}+C=$$

$$=\frac{3}{2}\ln(x^2+2x+10)-\frac{2}{3}arctg\frac{x+1}{3}+C.$$

План интегрирование рациональных дробей

Рассмотренный в предыдущих пунктах материал позволяет сформулировать общее правило интегрирования рациональных дробей:

1. Если рациональная дробь неправильная, то ее следует представить в виде суммы многочлена и правильной дроби (см. пункт Интегрирование простейших рациональных дробей);

2. Разложив знаменатель правильной рациональной дроби на множители, представить дробь в виде суммы простейших рациональных дробей;

4. Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.
5.

<u>Пример.</u>

Найти интеграл

$$\int\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx.$$

Решение:

Под знаком интеграла неправильная дробь; выделим ее целую часть путем деления числителя на знаменатель:

$$
\begin{array}{r|l}
\underline{-\begin{array}{l} x^5 \qquad + 2x^3 \qquad\qquad + 4x + 4 \\ x^5 + 2x^4 + 2x^3 \end{array}} & \underline{x^4 + 2x^3 + 2x^2} \\
\underline{-\begin{array}{l} -2x^4 \\ -2x^4 - 4x^3 - 4x^2 \end{array}} & x - 2 \\
4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 \quad (\text{остаток}) &
\end{array}
$$

Получаем:

$$\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx = x-2+\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}.$$

Разложим правильную рациональную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^2(x^2+2x+2x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2x}$$

$$4x^3+4x^2+4x+4 \equiv Ax(x^2+2x+2)+B(x^2+2x+2)+(Cx+D)x^2$$

т. е.

$$4x^3+4x^2+4x+4 \equiv$$

$$\equiv (A+C)x^3+(2A+B+D)x^2+(2A+2B)x+2B.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях многочленов в левой и правой частях тождества, получим систему уравнений:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 & A+C=4 \\
x^2 & 2A+B+D=4 \\
x^1 & 2A+2B=4 \\
x^0 & 2B=4
\end{array}.
$$

Решая систему, находим:

$$B=2, A=0, C=4, D=2.$$

Стало быть,

$$\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{x^2+2x+2}$$

и

$$\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=x-2+\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{x^2+2x+2}.$$

Интегрируем полученное равенство:

$$\int\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx=$$

$$=\int\left(x-2+\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{x^2+2x+2}\right)=\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+\int\frac{4x+2}{(x+1)^2+1}dx$$

Обозначим

$x+1=t$, тогда $x=t-1$ и $dx=dt$.

Таким образом,

$$\int\frac{4x+2}{(x+1)^2+1}dx=$$

$$=\int\frac{4t-4+2}{t^2+1}dt=4\int\frac{tdt}{t^2+1}-2\int\frac{dt}{t^2+1}=4*\frac{1}{2}\ln(t^2+1)-2arctgt+C=$$

$$=2\ln(x^2+2x+2)-arctg(x+1)+C.$$

Отметим, что любая рациональная функция интегрируется в элементарных функциях.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим интегралы типа

$$\int\sin^m x\cdot\cos^n x\,dx.$$

Для нахождения этих интегралов используются следующие приёмы:

Если m и n чётные, то интеграл находиться с помощью тригонометрических формул (формулы понижения порядка)

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x),$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

Пример.
Найти интеграл

$$I = \int \sin^4 x \cdot \cos^2 x\, dx.$$

Решение:

Применим формулы понижения порядка, так как синус и косинус имеют чётные неотрицательные степени

$$I = \int (\sin x \cos x)^2 \sin^2 x\, dx = \int \frac{1}{4}\cdot \sin^2 2x \cdot \frac{1}{2}\cdot(1-\cos 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\, dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}(1-\cos 4x)\, dx - \frac{1}{16}\int \sin^2 2x\, d(\sin 2x) =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$$

Ответ: $I = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$.

Если хотя бы одно из чисел m и n нечётное, то от нечётной степени отделяется множитель первой степени и вводится новая переменная:

$\sin x = t$, если n – целое положительное нечётное число;
$\cos x = t$, если m - целое положительное нечётное число;

Пример 1.
Найти интеграл

$$I = \int \sin^4 x \cdot \cos^5 x\, dx.$$

Решение:

Применим подстановку $\sin x = t$. Тогда $x = \arcsin t$,

$$dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot dt.$$

Применяя основное тригонометрическое тождество имеем:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \text{тогда} \quad 1 - t^2 = \cos^2 x,$$

$$\cos x = \sqrt{1-t^2}.$$

Получим

$$I = \int t^4 \cdot \left(\sqrt{1-t^2}\right)^5 \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \int t^4 \cdot \left(1-t^2\right)^2 \, dt = \int \left(t^4 - 2t^6 + t^8\right) dt =$$

$$= \frac{t^5}{5} - 2\frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + C$$

Ответ: $I = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + C$.

Подстановка $tg\, x = t$, если m+n – есть чётное отрицательное целое число.

Пример 2.

Найти интеграл

$$I = \int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x}$$

Решение:

Преобразуем выражение

$$I = \int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x} = \int \cos^{-1} x \cdot \sin^{-3} x \, dx$$

Здесь $m+n$ =-1-3 = -4 чётное отрицательное число.

Обозначим $tg\, x = t$.

Тогда $x = arctg\ x, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

Зная, что $\sin\ x = \frac{tg\ x}{\sqrt{1+tg^2\ x}}, \quad a \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\ x}}$,

имеем $\sin\ x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad a \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

Подставим полученные выражения в интеграл

$$I = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{t^3}{\left(\sqrt{1+t^2}\right)^3}} = \int \frac{1+t^2}{t^3}\,dt = \int t^{-3}\,dt + \int \frac{dt}{t} =$$

$$= -\frac{1}{2t^2} + \ln|t| + C = -\frac{1}{2} \cdot ctg^2\ x + \ln|tg\ x| + C$$

Ответ:

$$I == -\frac{1}{2t^2} + \ln|t| + C = -\frac{1}{2} \cdot ctg^2\ x + \ln|tg\ x| + C.$$

Пример 3.

Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sin x \sin 2x}.$$

Решение:

Преобразуем интегральную функцию

$$\frac{1}{\sin x \sin 2x} = \frac{1}{\sin x \cdot 2\sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{\sin^2 x \cdot 2 \cdot \cos x}.$$

В этом выражении m+n=-2-1=-3 отрицательное нечётное число, поэтому подстановка $tg\ x = t$ не подходит.

Так как косинус имеет нечётную степень, сделаем подстановку $\sin\ x = t$, тогда $x = \arcsin t$,

$$dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot dt, \quad \cos x = \sqrt{1-t^2}$$.

Подставим полученные выражения в интеграл

$$\int \frac{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{2 \cdot t^2 \cdot \sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{t^2 \cdot (1-t^2)} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{(1-t^2+t^2)}{t^2 \cdot (1-t^2)} \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dt}{1-t^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{t} - \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) + C = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sin x} + \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| \right) + C$$

Ответ: $I = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sin x} + \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| \right) + C$

Использование тригонометрических преобразований

Интегралы типа

$$\int \sin ax \cos bx dx, \int \cos ax \cos bx dx, \int \sin ax \sin bx dx$$

вычисляются с помощью известных формул тригонометрии:

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$$,

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$$,

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$.

<u>Пример 1.</u>

Найти интеграл

$$I = \int \sin 8x \cos 2x dx$$.

Решение:

$$I=\int\sin 8x\cos 2xdx=\frac{1}{2}\int(\sin 10x+\sin 6x)dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{10}\cos 10x-\frac{1}{6}\cos 6x\right)+C$$

Интегралы вида

$$\int tg^{n}\ x\,dx \quad и \quad \int ctg^{n}\ x\,dx$$

вычисляются с помощью формул

$$tg^{2}\ x=\frac{1}{\cos^{2}\ x}-1,$$

$$ctg^{2}\ x=\frac{1}{\sin^{2}\ x}-1,$$

позволяющих понизить степень тангенса и котангенса.

Пример 2.

Найти интегралы

$$\int tg^{n}\ x\,dx,$$

где n изменяется от 1 до 5.

Решение:

Если n=1, то

$$\int tg\ x\,dx=\int\frac{\sin\ x}{\cos x}\,dx=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=\ln\,(\cos x)+C.$$

Если n=2, то

$$\int tg^{2}\ x\,dx=\int\left(\frac{1}{\cos^{2}\ x}-1\right)dx=\int\frac{1}{\cos^{2}\ x}\,dx-\int 1\cdot dx=$$

$$=tg\ x-x+C.$$

Если n=3, то

$$\int tg^{3}\ x\,dx=\int tg\ x\cdot tg^{2}\ x\,dx=\int tg\ x\cdot\left(\frac{1}{\cos^{2}\ x}-1\right)dx=$$

$$=\int\frac{tg\ x}{\cos^{2}\ x}\,dx-\int tg\ x\,dx=\int tg\ x\,d(tg\ x)-\ln\,(\cos x)=\frac{tg^{2}\ x}{2}-\ln\,(\cos x)+C$$

Если n=4, то

$$\int tg^4 x\,dx = \int tg^2 x \cdot tg^2 x\,dx = \int tg^2 x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx =$$

$$= \int \frac{tg^2 x}{\cos^2 x} \cdot dx - \int tg^2 x\,dx = \int tg^2 x\, d\,(tg\, x) - \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx =$$

$$= \frac{tg^3 x}{3} - tg\, x - x + C$$

.

Если n=5, то

$$\int tg^5 x\,dx = \int tg^3 x \cdot tg^2 x \cdot dx = \int tg^3 x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx =$$

$$= \int \frac{tg^3 x}{\cos^2 x} dx - \int tg^3 x\,dx = \int tg^3 x\, d\,(tg^3 x) - \frac{tg^2 x}{2} - \ln(\cos x) =$$

$$= \frac{tg^4 x}{4} - \frac{tg^2 x}{2} - \ln(\cos x) + C$$

Универсальная тригонометрическая подстановка

Рассмотрим некоторые случаи нахождения интеграла от тригонометрических функций.

Функцию с переменными $\sin x$ и $\cos x$, над которыми выполняются рациональные действия (сложения, вычитание, умножение и деление) принято обозначать $R(\sin x; \cos x)$, где R - знак рациональной функции.

Вычисление неопределенных интегралов типа

$$\int R(\sin x; \cos x) dx$$

сводится к вычислению интегралов от рациональной функции подстановкой $tg\frac{x}{2} = t$, которая называется универсальной.

Действительно,

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2arctgt, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

.

Поэтому

$$\int R(\sin x;\cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2};\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)*\frac{2}{1+t^2}dt = \int R_1(t)dt,$$

где $R_1(t)$ - рациональная функция от t. Обычно этот способ весьма громоздкий, зато он всегда приводит к результату.

Пример.

Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}.$$

Решение:

Сделаем универсальную подстановку

$$t = tg\frac{x}{2}.$$

Тогда

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{t^2+t+2} =$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / – 9-е изд. - М.: Айрис-Пресс, 2009. – 608 с.: ил. – (Высшее образование)

2. Лунгу К.Н., Письменный Д. Т., Федин С. Н., Шевченко Ю. А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – 7-е изд. - М.: Айрис-Пресс, 2008. – 576 с.: ил. - (Высшее образование)

3. Лунгу К.Н., Макаров Е.В. Высшая математика. Руководство к решению задач. Ч. 2. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 384 с.