ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Информационные технологии»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий
по дисциплине

«Дискретная математика»

Авторы:
Остроух Е.Н.,
Паниотова В.Ю.,
Андрющенко С.А.,
Колесникова О.В.

Ростов-на-Дону, 2023

Аннотация

Методические указания предназначены для студентов направлений подготовки бакалавров 09.03.02 «Информационные системы и технологии» и 09.03.03 «Прикладная информатика» очной формы обучения.

Авторы

Остроух Е.Н., Паниотова В.Ю.,
Андрющенко С.А., Колесникова О.В.

Оглавление

1 ЗАНЯТИЕ №1

1.1 Алгебра логики. Высказывания и логические операции над ними. Формулы алгебры логики

Понятие высказывания является основным неопределяемым понятием математической логики. Под высказыванием понимают любое повествовательное предложение, о котором можно сказать истинно оно или ложно в данных условиях места и времени. Логическое значение высказывания «истина» («ложь») обозначается буквой ***и,*** (***л***) или цифрой 1, (**0**). Высказывания обычно обозначают латинскими буквами.

Отрицанием высказывания *a* называется высказывания $\bar{a}$, которое истинно, если ***a*** ложно, и ложно, если ***a*** истинно. Высказывание $\bar{a}$ читается так: «Не ***a***». Таблица истинности для $\bar{a}$ имеет вид:

a	ā
1	1
0	0

Конъюнкцией высказывания ***a,b*** называется высказывание $a \wedge b$ (***a&b),*** которое истинно, если ***a*** и ***b*** истинны и ложно, если хотя бы одно из них ложно. Высказывание $a \wedge b$ читается: «***a*** и ***b***».

Дизъюнкцией высказываний ***a,b*** называется высказыванием $a \vee b$, которое истинно, если хотя бы одно из высказываний ***a*** или ***b*** истинно, и ложно, если оба они ложны. Читается: «***a*** или ***b***».

Импликация высказываний ***a,b*** называется высказывание $a \rightarrow b$, которое ложно, если ***a*** истинно и ***b*** ложно, и истинно во всех остальных случаях. Читается: «Если ***a,*** то ***b***».

Эквивалентностью (или эквиваленцией) высказываний ***a,b*** называется высказывание $a \leftrightarrow b$, которое истинно, если оба высказывания ***a*** и ***b*** одновременно истинны или ложны, и ложно во всех остальных случаях.

Читается: «***a*** тогда и только тогда, когда ***b***».

Таблица истинности для этих логических операций такова:

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \rightarrow b$	$a \leftrightarrow b$

1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Все высказывания можно разделить на простые (или элементарные) и составные (или сложные).

Всякое сложное высказывание, которое может быть получено из элементарных высказываний посредством применения выше определённых пяти логических операций, называется *формулой алгебры логики.*

Формулы алгебры логики будем обозначать большими латинскими буквами. Логические значения формулы при различных комбинациях значений входящих в нее высказываний можно описать посредством таблицы, которая называется таблицей истинности формулы.

Формула *A,* всегда истинная, называется *тождественно истинной формулой* или *тавтологией* и запивается $A\equiv 1$. Формула *B,* всегда ложная, называется *тождественно ложной формулой* и записывается $B\equiv 0$.

Пример 1. Среди следующих предложений выделить высказывания, установить, истинны они или ложны:

река Волхов впадает в озеро Ильмень;
всякий человек имеет брата;
пейте томатный сок!;
существует человек, который моложе своего отца;
который час?;
ни один человек не весит более 1000 кг;
23<5;
Для всех действительных чисел *x* и *y* равенство *x+y=y+x;*
$x^2-7x+12=0$;
$x^2-7x+12=0$

Решение. Легко видеть, что высказывания 4), 6), 8) – истинные, а высказывания 1), 2), 7 - ложные. Предложения 3), 5), 9), 10) не являются высказываниями.

Пример 2. Пусть *a* – высказывание «Студент Иванов изучает английский язык», b - высказывание «Студент Иванов успевает по математической логике». Дать словесную формулировку высказываний:

1) $a \wedge \bar{b}$; 2) $a \to b$; 3) $\bar{b} \leftrightarrow \bar{a}$.

Решение. а) «Студент Иванов изучает английский язык и не успевает по математической логике»; в) «Студент Иванов не успевает по математической логике тогда и только тогда, когда он не изучает английский язык».

Пример 3. Составить таблицу истинности для высказывания $a \wedge \bar{b}$.

Решение. Таблица истинности для высказывания $a \wedge \bar{b}$ имеет вид:

a	b	$\bar{b}$	$a \wedge \bar{b}$
1	1	0	1
1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1

1.7. Обозначьте элементарные высказывания буквами и запишите следующие высказывания с помощью символов алгебры логики:

1) 45 кратно 3 и 42 кратно 3;
2) 45 кратно 3 и 12 не кратно;
5) если число 212 делится на 3 и 4, то оно делится на 12;

1.13. Найдите логическое значения x и y, при которых выполняется равенства:

1) $(1 \to x) \to y = 0$;

2) $x \vee y = \bar{x}.$

1.14.

1) Известно, что импликация $x \to y$ истинна, а эквивалентность $x \leftrightarrow y$ ложна. Что можно сказать о значении импликации $y \to x$?

2) Известно, что эквивалентность $x \leftrightarrow y$ истинна. Что можно сказать о значениях импликации $\overline{x} \wedge y \to z;$ $\overline{x} \to (y \vee z)$?

1.15. Пусть x=0, y=0, z=1. Определить логические значения нижеследующих сложных высказываний:

1) $x \wedge (y \wedge z)$;

2) $(x \wedge y) \wedge y;$

3) $x \to (y \to z)$;

4) $x \wedge y \to z;$

5) $(x \wedge y) \leftrightarrow (z \vee \overline{y})$;

6) $((x \vee y) \wedge z) \leftrightarrow ((x \wedge y) \wedge (y \wedge z))$.

1.16. Показать, что логические связки $\overline{b} \to \overline{a}$, $a \,\&\, \overline{b} \to \overline{a}$, $a \,\&\, \overline{b} \to \overline{b}$, $a \,\&\, \overline{b} \to л$, где л – фиксированное ложное высказывание, имеют ту же таблицу истинности, что и импликация $a \to b$.

1.18. Составить таблицы истинности для формул:

2) $(x \vee y) \to (x \wedge \overline{y} \vee \overline{x} \to \overline{y});$

4) $x \wedge \overline{y} \to (y \vee \overline{x} \to \overline{z});$

5) $(x_1 \to \overline{x_2}) \to (\overline{x_1 \vee x_2} \wedge \overline{z});$

6) $(\overline{x} \vee z) \wedge (y \to (u \to x));$

1.19. Установить, какие из следующих формул являются тождественно истинными, тождественно ложными:

$\overline{\overline{x \vee y} \to \overline{x \,\&\, y}}$;

$(x \to y) \to (\overline{y} \to \overline{x});$

$((p \to q) \,\&\, (q \to r)) \to (p \to r);$

$(p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_3));$

$\overline{(p_1 \to p_2) \to ((p_1 \wedge p) \to (p_2 \wedge p))}$.

Домашнее задание по первому уроку.:

1. Какие из следующих предложений являются высказываниями:

Москва – столица России;

Студент физико-математического факультета;

$\sqrt{3} + 2\sqrt{7} - 28$;

Луна есть спутник Марса;

a>0.

2. Известно, что $x \to y$ имеет значения 1. Что можно сказать о значениях $z \to (x \to y)$; $\overline{x \to y} \to y$; $(x \to y) \to z$?

3. Установить, какие из следующих формул являются тождественно истинными, тождественно ложными:

$$\overline{(x \to z) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z))};$$

$$(p_1 \to p_2) \to ((p_1 \vee p) \to (p_2 \vee p));$$

4. Пусть *p* и *q* обозначают высказывания:

p – «Я учусь в школе»,

q – «Я люблю математику».

Прочитайте следующие сложные высказывания:

1) $\overline{p}$; 2) $\overline{\overline{p}}$; 3) $p \& q$; 4) $p \& \overline{q}$; 5) $\overline{p} \& q$; 6) $\overline{p \& q}$.

2 ЗАНЯТИЕ №2.

2.1 Алгебра логики. Равносильные формулы алгебры логики

Определение. Две формулы алгебры логики *A* и *B* называется равносильными, если они принимают одинаковые логические значения на любом наборе значений входящих в них высказываний $(A \equiv B)$.

Важнейшие равносильности можно разбить на три группы:

I. Основные равносильности.

$$\left.\begin{array}{l} 1. x \& (x \& x \& \ldots \& x \equiv x) \\ 2. x \vee (x \vee x \vee \ldots \vee x) \equiv x \end{array}\right\} \text{- законы идемпотентности.}$$

3. $x \& 1 \equiv x$.
4. $x \vee 1 \equiv 1$.
5. $x \& 0 \equiv 0$.
6. $x \vee 0 \equiv x$.
7. $x \& \overline{x} \equiv 0$ - закон противоречия.
8. $x \vee \overline{x} \equiv 1$ - закон исключительного третьего.
9. $\overline{\overline{x}} \equiv x$ - закон снятия двойного отрицания.

$$\left.\begin{array}{l} 10. x \& (y \vee x) \equiv x \\ 11. x \vee (y \& x) \equiv x \end{array}\right\} \text{- законы поглащения .}$$

II. Равносильности, выражающие одни логические операции через другие.

1. $x \leftrightarrow y \equiv (x \to y) \& (y \to x)$;
2. $x \to y \equiv \overline{x} \vee y$.

$$\left.\begin{array}{l} 3.. \overline{x \& y} \equiv \overline{x} \vee \overline{y} \\ 4.. \overline{x \vee y} \equiv \overline{x} \& \overline{y} \end{array}\right\} \text{- законы де Моргана.}$$

5. $x \& y \equiv \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$.
6. $x \vee y \equiv \overline{\overline{x} \& \overline{y}}$.

III. Равносильности, выражающие основные законы алгебры логики.

1. $x \& y \equiv y \& x$.
2. $x \vee y \equiv y \vee x$.
3. $x \& (y \& z) \equiv (x \& y) \& z$.

4. $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$.
5. $x \,\&\, (y \vee z) \equiv (x \,\&\, y) \vee (x \,\&\, z)$.
6. $x \vee (y \,\&\, z) \equiv (x \vee y) \,\&\, (x \vee z)$.

Используя равносильности групп I, II, III, можно часть формулы алгебры логики или всю формулу заменить равносильной ей формулой.

Такие преобразования формул применяются для доказательства равносильностей, для приведения формул к заданному виду, для упрощения формул.

Пример 1. Доказать равносильность $\overline{x \to y} \equiv x \,\&\, \bar{y}$.

Решение. Для доказательства равносильности подвергнём её левую часть равносильными преобразованиями:

$$\overline{x \to y} \equiv \overline{\bar{x} \vee y} \equiv \bar{\bar{x}} \,\&\, \bar{y} \equiv x \,\&\, \bar{y}.$$

Пример 2. Упростить формулу $A \equiv \left(\overline{x \vee y} \to \bar{x} \vee y\right) \& \, y$.

Решение. Подвергнём формулу *A* равносильным преобразованиям:

$$A \equiv \left(\overline{x \vee y} \to \bar{x} \vee y\right) \& \, y \equiv \left(\overline{\overline{x \vee y}} \vee \bar{x} \vee y\right) \& \, y \equiv$$
$$\equiv \left(x \vee y \vee \bar{x} \vee y\right) \& \, y \equiv \left((x \vee \bar{x}) \vee (y \vee y)\right) \& \, y \equiv$$
$$\equiv (1 \vee y) \,\&\, y \equiv 1 \,\&\, y \equiv y.$$

Пример 3. Доказать, что формула $A \equiv x \to (y \to x)$ тождественно истинная.

Решение. Подвергнём формулу *A* равносильным преобразованиям

$$A \equiv x \to (y \to x) \equiv \bar{x} \vee (\bar{y} \vee x) \equiv \bar{x} \vee (x \vee \bar{y}) \equiv$$
$$\equiv (\bar{x} \vee x) \vee \bar{y} \equiv 1 \vee \overline{y \equiv 1}.$$

Упражнение 1. Доказать равносильность:

1) $(x \vee y) \,\&\, (x \vee \bar{y}) \equiv x$;
2) $x \vee (\bar{x} \,\&\, y) \equiv x \vee y$;
3) $xy \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y} \equiv x \to y$;
4) $x \to (y \to z) \equiv x \,\&\, y \to z$;

5) $x \equiv (x \& y \& z) \vee (x \& y \& \bar{z}) \vee (x \& \bar{y} \& z) \vee (x \& \bar{y} \& \bar{z})$;

Упражнение 2. Упростить формулу:

1) $\overline{\bar{x} \cdot \bar{y}} \vee (x \to y) \cdot x$;

2) $(x \leftrightarrow y) \& (x \vee y)$;

3) $(x \to y) \& (y \to z) \to (z \to x)$;

4) $(x \wedge z) \vee (x \wedge \bar{z}) \vee (y \vee z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z)$.

5) $(x \& (y \vee z \to y \vee z)) \vee (y \& x \& \bar{y}) \vee x \vee (y \& \overline{x \& \bar{x}})$;

6) $(x \to y) \& (y \to z) \to (x \to z)$;

Упражнение 3. Доказать тождественную истинность или тождественную ложность формул:

$(x \to y) \to (\bar{y} \to \bar{x})$;

$(\bar{y} \to \bar{x}) \to (\bar{y} \to \bar{x})$;

$(x \to y) \& (x \to \bar{y}) \to \bar{x}$;

$x \& (x \to y) \& (x \to \bar{y})$;

$(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$;

$(z \to x) \to ((z \to y) \to (z \to x \wedge y))$;

$(x \to z) \to ((y \to z) \to (z \to x \wedge y))$;

Упражнение 4. Найдите *x*, если $\overline{x \vee a} \vee (\overline{x \vee \bar{a}}) \equiv b$.

Домашнее задание:

1. Доказать тождественную истинность или тождественную ложность формул:

$(x \to (y \to z)) \to (x \wedge y \to z)$;

$(x \wedge y \to z) \to (x \to (y \to z))$;

2. Упростить:

а) $(x \to \bar{y} \to (z \to y \vee \overline{y \vee x})) \& (x \vee \overline{x \to (x \to x)}) \to y$;

б) $(x \& \overline{x \& \bar{x} \to y \& \bar{y}} \to z) \vee x \vee (y \& z) \vee (y \& z)$;

3 ЗАНЯТИЕ №3

3.1 Функции алгебры логики. Совершенные нормальные формы

Определение 2. *Элементарной конъюнкцией n* переменных называется конъюнкция переменных или их отрицаний.

Определение 3. Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) формулы *A* называется равносильная ей формула, представляющая собой дизъюнкцию элементарных конъюнкции.

Определение 4. *Совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (СДНФ) формулы *A* называется ДНФ *A*, обладающая свойствами (*C*).

СДНФ *A* можно получить двумя способами: а) с помощью таблицы истинности; б) с помощью равносильных преобразований.

Определение 5. *Элементарной дизъюнкцией n* переменных называется дизъюнкция переменных или их отрицаний.

Определение 6. *Конъюнкция нормальной формой* (КНФ) формулы *A* называется равносильная ей формула, представляющая собой конъюнкцию элементарных дизъюнкций.

Определение 7. *Совершенной конъюнктивной нормальной формой формулы A* (СКНФ *A*), называется КНФ *A*, удовлетворяющая четырем свойствам:

1) все элементарные дизъюнкции, входящие в КНФ *A*, содержат все переменные;

2) все элементарные дизъюнкции, входящие в КНФ *A*, различны;

3) каждая элементарная дизъюнкция, входящая в КНФ *A*, содержит переменную один раз;

4) ни одна элементарная дизъюнкция, входящая в КНФ *A*, не содержит переменную и её отрицание.

СКНФ *A* можно получить двумя способами: а) с помощью таблицы истинности (используя закон двойственности $\text{СКНФ A} \equiv \overline{\text{СДНФ } \overline{\text{A}}}$, получаем с помощью таблицы истинности $\text{СДНФ } \overline{\text{A}}$, и, взяв отрицание $\text{СДНФ } \overline{\text{A}}$, получаем СКНФ *A*); б) с помощью равносильных преобразований.

Пример 1. Найти формулу, определяющую функцию Ф(x,y,z), по заданной таблице истинности:

x	y	z	Ф(x,y,z)
1	1	1	1

1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

Решение. Используя правило получения формулы алгебры логики из таблицы истинности для функции Φ(x,y,z), получим:

$$\Phi(x,y,z) \equiv xyz \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}.$$

Упростив эту формулу, получим:

$$yz(x \vee \bar{x}) \vee \bar{x}\bar{z}(y \vee \bar{y}) \vee \bar{x}\bar{y}z \equiv yz \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{y}z \equiv$$

$$\equiv yz \vee \bar{x}(\bar{z} \vee \bar{y}z) \equiv yz \vee \bar{x}(\bar{z} \vee \bar{y})(\underline{\bar{z} \vee} \bar{z}) \equiv yz \vee \bar{x}(\bar{z} \vee \bar{y}) \equiv$$

$$\equiv (yz \vee \bar{x}) \& (yz \vee \bar{z} \vee \bar{y}) \equiv (y \vee \bar{x})(z \vee \bar{x})(y \vee \bar{z} \vee \bar{y})(z \vee \bar{z} \vee \bar{y}) \equiv$$

$$\equiv (y \vee \bar{x})(z \vee \bar{x}) \equiv \bar{x} \vee yz \equiv x \to yz.$$

Таким образом, искомой формулой, определяющей функцию Φ(x,y,z), можно считать $x \to yz$, или $\bar{x} \vee yz$, или какую-нибудь другого из равносильных формул.

Пример 2. Следующую формулу привести к СДНФ, предварительно приведя её равносильными преобразованиями к ДНФ: $A \equiv a(bc \to ab)$.

Решение.

$$A \equiv a(bc \to ab) \equiv a(\overline{bc} \vee ab) \equiv a(\bar{b} \vee \bar{c} \vee ab) \equiv$$

$$\equiv a\bar{b} \vee a\bar{c} \vee ab \equiv ДНФ\ A.$$

$$A \equiv ДНФ\ A \equiv a\bar{b}(c \vee \bar{c}) \vee a\bar{c}(b \vee \bar{b}) \vee ab(c \vee \bar{c}) \equiv$$

$$\equiv a\bar{b}c \vee a\bar{b}\bar{c} \vee ab\bar{c} \vee a\bar{b}\bar{c} \vee abc \vee ab\bar{c} \equiv$$

$$\equiv a\bar{b}c \vee a\bar{b}\bar{c} \vee ab\bar{c} \vee abc \equiv СДНФ\ A.$$

Ответ: $СДНФ\ A \equiv a\bar{b}c \vee a\bar{b}\bar{c} \vee ab\bar{c} \vee abc$.

Пример 3. Для формулы из примера 2 найти СДНФ путём составления таблицы истинности.

Решение. Составим таблицу истинности для формулы $A \equiv a(bc \to ab)$.

a	b	C	c	b	$bc \to ab$	A
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
0	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
0	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**

Тогда $\text{СДНФ A} \equiv \text{abc} \vee \text{ab}\bar{\text{c}} \vee a\bar{b}c \vee a\bar{b}\bar{c}$.

Пример 4. Для формулы из примера 2 найти СКНФ путём равносильных преобразований, предварительно приведя ее к КНФ.

Решение. Из примера 2: $A \equiv a\bar{b} \vee a\bar{c} \vee ab$. Далее

$$A \equiv a(\bar{b} \vee \bar{c} \vee b) \equiv a \,\&\, 1 \equiv a \equiv КНФ\ A\,.$$

$$A \equiv КНФ\ A \equiv a \vee (b \,\&\, \bar{b}) \equiv (a \vee b) \,\&\, (a \vee \bar{b}) \equiv$$

$$\equiv ((a \vee b) \vee c \,\&\, \bar{c}) \,\&\, ((a \vee \bar{b}) \,\&\, c \,\&\, \bar{c}) \equiv$$

$$\equiv (a \vee b \vee c) \,\&\, (a \vee b \vee \bar{c}) \,\&\, (a \vee \bar{b} \vee c) \,\&\, (a \vee \bar{b} \vee \bar{c}) \equiv СКНФ\ A.$$

Ответ:

$$СКНФ\ A \equiv (a \vee b \vee c) \,\&\, (a \vee b \vee \bar{c}) \,\&\, (a \vee \bar{b} \vee c) \,\&\, (a \vee \bar{b} \vee \bar{c}).$$

Все формулы алгебры логики делятся на три класса: 1) тождественно истинные; 2) тождественно ложные; 3) выполнимые.

Формулу *A* называют ***выполнимой***, если она принимает значение 1 хотя бы на одном наборе значений входящих в неё переменных и не является тождественно истиной.

Теорема. *Для того, чтобы формула алгебры логики была тождественно истинна (ложна), необходимо и достаточно любая элементарная дизъюнкция (конъюнкция), входящая в* КНФ *A* (ДНФ *A*)*, содержала переменную и её отрицание.*

Пример 6. Будет ли формула $(x \to y) \to \bar{x}y \vee \bar{y}$ тождественно истинной, тождественно ложной или выполнимой?

Решение. Приведём пример к какой-либо нормальной форме:

$$(x \to y) \to \overline{x}y \vee \overline{y} \equiv \overline{x} \vee y \to \overline{x}y \vee \overline{y} \equiv \overline{\overline{x} \vee y} \vee \overline{x}y \vee \overline{y} \equiv$$

$$\equiv x\overline{y} \vee \overline{x}y \vee \overline{y}.$$

Получение ДНФ не является тождественно ложной, так как каждая элементарная конъюнкция не содержит переменную и её отрицание. Следовательно, исходная формула тождественно истинна или выполнима. Преобразуем данную формулу к КНФ.

$$(x \to y) \to \overline{x}y \vee \overline{y} \equiv x\overline{y} \vee \overline{x}y \vee \overline{y} \equiv \left(x\overline{y} \vee \overline{y}\right) \vee \overline{x}y \equiv \overline{y} \vee \overline{x}y \equiv$$

$$\equiv \left(\overline{y} \vee \overline{x}\right) \& \left(\overline{y} \vee y\right) \equiv \overline{y} \vee \overline{x}.$$

Это произведение не является тождественно истинным, так как элементарная сумма $\overline{y} \vee \overline{x}$ не тождественно истинна, следовательно, она выполнима.

Упражнение №1. По таблице истинности найдите формулы, определяющие функции $F_1(x, y, z)$, $F_2(x, y, z)$, и придайте им простой вид:

x	y	z	$F_1(x, y, z)$	$F_2(x, y, z)$
1	**1**	**1**	**0**	**1**
1	**1**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**1**	**1**	**0**
1	**0**	**0**	**1**	**0**
0	**1**	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**0**	**1**
0	**0**	**1**	**1**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**0**

Упражнение №2. Для следующих формул найти СДНФ и СКНФ, каждую двумя способами (путём равносильности преобразований и используя таблицы истинности):

$$x \& (x \to y);$$

$$\left(\overline{xy} \to \overline{x}\right) \& \left(\overline{xy \to \overline{y}}\right);$$

$$(x \to y) \to (y \to x);$$

$$\left(x \vee \overline{z}\right) \to y \& z;$$

$$\left(x \vee \overline{y} \to x \wedge z\right) \to \left(\overline{x \to \overline{x}}\right) \vee y \wedge \overline{z};$$

$$(ab \to bc) \leftarrow ((a \to b) \to (c \leftarrow b));$$

Упражнение №3. Используя критерий тождественной истинности и тождественной ложности формулы, установить будет ли данная формула тождественно истинной, тождественно ложной или выполнимой:

1) $\overline{x\overline{y}} \leftrightarrow \overline{x} \vee xy$;
2) $(x \leftrightarrow y)\&(x\overline{y} \vee \overline{x}y)$;
3) $xy \to (x \to \overline{y})$;
4) $x \vee y \to (x \leftrightarrow y)$;
5) $x \vee y \to z$;
6) $(x \to z)(y \to z) \to (x \to y)$.

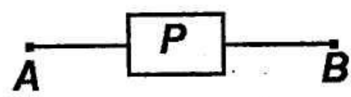
3.2 Приложения алгебры логики

I. Приложение алгебры высказываний к релейно-контактным схемам (РКС)

Релейно-контактные схемы (их часто называют переключательными схемами) широко используются в технике автоматического управления.

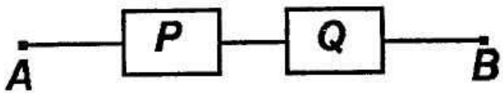
Под переключательной схемой понимают схематическое изображение некоторого устройства, состоящее из следующих элементов:

1) *переключателей*, которыми могут быть механические устройства, электромагнитные реле, полупроводники и т.д.;
2) соединяющие их *проводники*;
3) *входы* в схему и *выходы* из нее (клеммы, на которые подается электрическое напряжение). Они называются полюсами.

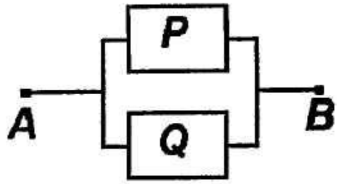


Формулам, включающим основные логические операции, также могут быть поставлены в соответствие переключательные схемы.

Так, конъюнкции двух высказываний *p&q* ставится в соответствие схема:



а дизъюнкции схема:

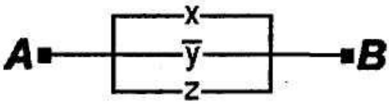


Пример 1. Составить РКС для формулы $(\bar{x} \wedge y) \to (z \vee x)$

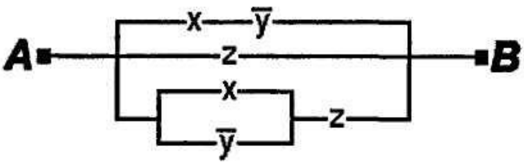
Решение. Упростим данную формулу с помощью равносильных преобразований:

$$\bar{x} \wedge y \to (z \vee x) = \overline{x \wedge y} \vee z \vee x = x \vee \bar{y} \vee z \vee x = x \vee \bar{y} \vee z$$

Тогда РКС для данной формулы имеет вид*:



Пример 2. Упростить РКС:

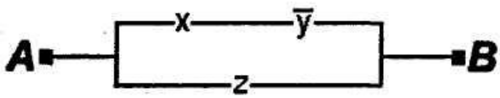


Решение. Составим по данной РКС формулу (функцию проводимости) и упростим ее:

$$(x \,\&\, \bar{y}) \vee z \vee (x \vee \bar{y}) \,\&\, z = x \,\&\, \bar{y} \vee z$$

(к последним двум слагаемым применили закон поглощения).

Тогда упрощенная схема выглядит так:



Упражнение №4. Составить РКС для формулы:

1) $x(\bar{y}z \vee x \vee y)$;

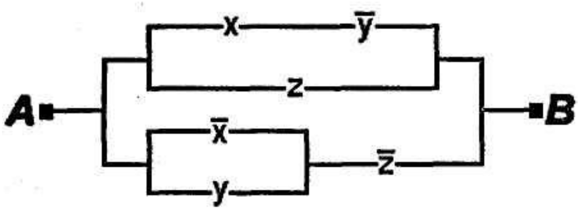
2) $x(yz \vee \overline{yz}) \vee \bar{x}(\bar{y}z \vee y\bar{z})$;

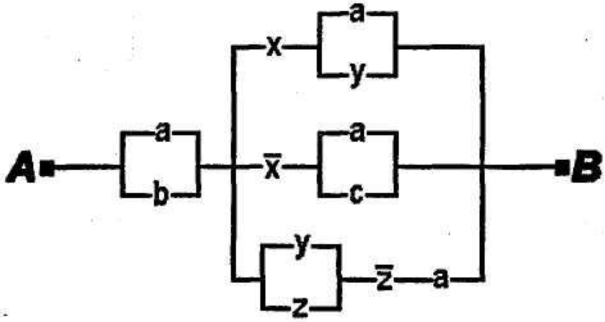
3) $(x \to y) \to (\bar{x} \,\&\, (y \vee z))$;

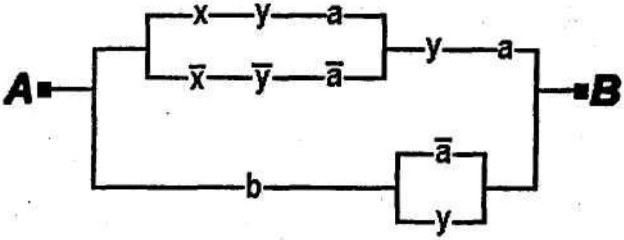
7) $((x \to y) \wedge (y \to z)) \to (x \to z)$;

8) $(x \to (y \to z)) \to (y \to x)$;

Упражнение №5. Упростить РКС:

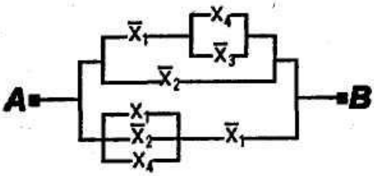


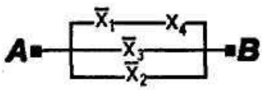




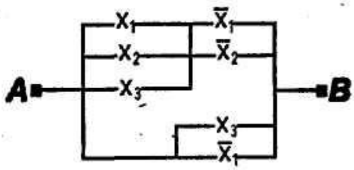
1.50. Проверить равносильность схем:

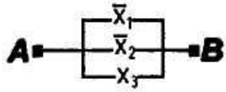
1)



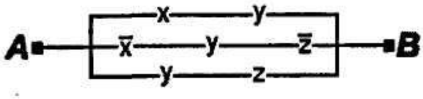


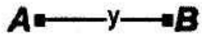
2)





3)





3.3 Домашняя работа

1. По таблице истинности найдите формулы, определяющие функции $F_3(x,y,z)$, $F_4(x,y,z)$, и придайте им более простой вид:

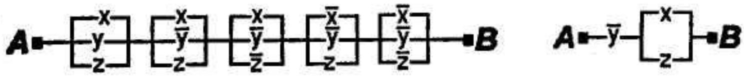
x	y	z	$F_3(x,y,z)$	$F_4(x,y,z)$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	1
0	0	0	0	0

1. Для следующих формул найти СДНФ и СКНФ путем равносильных преобразований.

$(\bar{a} \to c) \to (\overline{\bar{b} \to \bar{a}})$;

$(\bar{a} \to \bar{b}) \to (bc \to ac)$;

2. Проверить равносильность схем:



4 ЗАНЯТИЕ №4

4.1 Контрольная работа по темам: Равносильные преобразования. СКНФ, СДНФ, РКС

Контроль\КР1_АИС.doc

5 ЗАНЯТИЕ №5

5.1Решение логических задач с помощью алгебры логики

Задача №1.

Трое друзей спорили о результатах гонок «Формула – 1»

– Вот увидишь, Шумахер не придет первым, – сказал Джон. – Первым будет Хилл.

– Да нет же, победителем будет, Шумахер! – воскликнул Ник. – А об Алези и говорить нечего, ему не быть первым.

Питер сказал:

– Хиллу не видать первого места, а вот Алези пилотирует самую мощную машину.

По завершении гонок оказалось, что каждое из двух предположений двоих друзей подтвердилось, а оба предположения третьего из друзей оказались неверными. Кто выиграл гонки?

Решение:

Пусть Шумахер обозначается Ш; Алези – А, Хилл – Х. Запишем фразы:

$$\overline{Ш}X$$

$$Ш\overline{A}$$

$$\overline{X}$$

Теперь исходя из предположения, что два друга правы а третий нет запишем сочетания:

$$\overline{\overline{Ш}X}\,Ш\,\overline{A}\,\overline{X} \vee \overline{Ш}X\,\overline{Ш\overline{A}}\,\overline{X} \vee \overline{Ш}XШ\,\overline{A}\,\overline{\overline{X}} \equiv$$

$$\equiv (Ш \vee \overline{X})Ш\,\overline{A}\,\overline{X} \vee \overline{Ш}X\,\overline{X}(Ш\,\overline{A}) \vee 0 \equiv$$

$$\equiv Ш\,\overline{A}\,\overline{X} \vee Ш\,\overline{A}\,\overline{X} \vee 0 \vee 0 \equiv$$

$$\equiv Ш\,\overline{A}\,\overline{X}$$

Ответ: Шумахер.

Задача №2.

В симфонический оркестр наняли на работу трех музыкантов – Брауна, Смита и Вессона, умеющих играть на скрипке, флейте, альте, кларнете, гобое и трубе. Известно, что:

Смит самый высокий;

играющий на скрипке меньше ростом играющего на флейте;

играющие на скрипке и флейте и Браун не любят пиццу;

когда между альтистом и трубачом возникает ссора их мирит Смит;

Браун не умеет играть ни на трубе, ни на гобое.

На каких инструментах играет каждый музыкант, если известно, что каждый владеет двумя инструментами.

Решение:

Задача решается методом построения таблицы.

	Скрипка	Флейта	Альт	Кларнет	Гобой	Труба
Браун	0	0	1	1	0	0
Смит	0	1	0	0	1	0
Вессон	1	0	0	0	0	1

Заполнение таблицы:

Из утверждений №1 и 2 видно, что Смит не играет на скрипке ставим 0.

Из №3 видно, что Браун не играет на скрипке и флейте ставим 0.

Из №4 видно, что Смит не играет на Альте и Трубе.

Из №5 видно, что Браун не играет на Трубе и Гобое.

Так как каждый играет на 2 инструментах, то Браун играет на Альте и Кларнете.

Следовательно Смит и Вессон на них не играют, ставим 0.

Тогда Смит играет на Флейте и Гобое

А Вессон на Скрипке и Трубе.

Задача №3.

Виновник ночного ДТП скрылся с места аварии. Первый из опрошенных свидетелей сказал работникам ГИБДД, что это были «Жигули», первая цифра номера 1. Второй свидетель сказал, что машина была марки «Москвич», а номер начинался с 7. Третий свидетель заявил, что машина была иностранная, номер начинался не с 1. При дальнейшем расследовании выяснилось, что каждый из свидетелей указал правильно либо только марку машины, либо только цифру номера.

Какой марки была машина и на какую цифру начинался номер?

Решение:

Запишем высказывания свидетелей:

Ж (жигули)1;

М (москвич)7;

И (иностранная)$\bar{1}$.

Исходя из условия, что каждый свидетель ошибся в одном предположении, имеем формулу:

$$(Ж\bar{1}\vee \overline{Ж}1)(\overline{М}7\vee М\bar{7})(\overline{И}\bar{1}\vee И1)\equiv (Ж\bar{1}\overline{М}7\vee \overline{Ж}1\overline{М}7\vee Ж\bar{1}М\bar{7}\vee \overline{Ж}1М\bar{7})\wedge$$

$$\wedge(\overline{И}\bar{1}\vee И1)\equiv (Ж\bar{1}\overline{М}7\vee 0\vee 0\vee \overline{Ж}1М\bar{7})(\overline{И}\bar{1}\vee И1)\equiv$$

$$\equiv Ж\bar{1}\overline{М}7\overline{И}\bar{1}\vee \overline{Ж}1М\bar{7}\overline{И}\bar{1}\vee Ж\bar{1}\overline{М}7И1\vee \overline{Ж}1М\bar{7}И1\equiv$$

$$\equiv Ж\bar{1}\overline{М}7\overline{И}\bar{1}\vee 0\vee 0\vee 0\equiv Ж\bar{1}\overline{М}7\overline{И}\bar{1}$$

Ответ: Жигули номер начинается на 7.

Задача №4.

Пятеро одноклассников – Ирена, Тимур, Камилла, Эльдар и Залим стали победителями олимпиад по физике, математике, информатике, литературе и географии. Известно, что: победитель олимпиады по информатике учит Ирену и Тимура работе на компьютере; Камилла и Эльдар тоже заинтересовались информатикой; Тимур всегда побаивался физики; Камилла, Тимур и победитель олимпиады по литературе занимаются плаванием; Тамур и Камилла поздравляли победителя олимпиады по математике; Ирена сожалеет, что у нее остается мало времени на литературу.

Победителем какой олимпиады стал каждый из этих ребят?

Решение:

Построим таблицу:

	Физика	Математика	Информатика	Литература	География
Ирена	0	1	0	0	0
Тимур	0	0	0	0	1
Камилла	1	0	0	0	0
Эльдар	0	0	0	1	0
Залим	0	0	1	0	0

Из №1 получается, что Ирена и Тимур не знают Информатику.

Из №2 получается, что Камилла и Эльдар тоже не знают Информатику.

Тогда получается, что Залим победитель олимпиады по Информатике и на остальных предметах ставятся 0.

Из №3 получается, что Тимур не знает Физику.

Из №4 получается, что Камилла и Тимур не знают Литературы.

Из №5 получается, что Тимур и Камилла не знают Математику.

Тогда получается, что Тимур победитель олимпиады по Географии, соответственно Ирена, Камилла и Эльдар не знают Географию.

Из №6 получается, что Ирена не знает Литературу.

Тогда получается, что Литературу знает Эльдар и не знает остальные предметы.

Отсюда получается, что Ирена знает Математику, а Камилла Физику.

Задача №5.

Семья, состоящая из отца A, матери B и трех дочерей C, D, E купила телевизор. Условились, что в первый вечер будут смотреть передачи в таком порядке:

1. Когда отец A смотрит передачу, то мать B делает то же.
2. Дочери D и E, обе или одна из них, смотрят передачу.
3. Из двух членов семьи - мать B и дочь C - смотрят передачу одна и только одна.
4. Дочери C и D или обе смотрят, или обе не смотрят.
5. Если дочь E смотрит передачу, то отец A и дочь D делают то же.

Кто из членов семьи в этот вечер смотрит передачу?

Решение:

1. $A \to B \equiv \overline{A} \vee B$

2.

$$DE \vee \overline{D}E \vee D\overline{E} \equiv D(\overline{E} \vee E) \vee \overline{D}E \equiv D \vee \overline{D}E \equiv (D \vee \overline{D})(D \vee E) \equiv D \vee E$$

3. $B\overline{C} \vee \overline{B}C$

4. $CD \vee \overline{C}\,\overline{D}$

5. $E \to AD \equiv \overline{E} \vee AD$

Теперь сделаем конъюнкцию 2 и 4, и 1 и 3 выражений:

2 и 4

$$(D \vee E)(CD \vee \overline{C}\,\overline{D}) \equiv CD \vee D\overline{C}\,\overline{D} \vee ECD \vee E\overline{C}\,\overline{D} \equiv CD \vee ECD \vee E\overline{C}\,\overline{D} \equiv$$
$$\equiv CD \vee E\overline{C}\,\overline{D}$$

1 и 3: $$(\overline{A} \vee B)(B\overline{C} \vee \overline{B}C) \equiv \overline{A}B\overline{C} \vee \overline{A}\,\overline{B}C \vee B\overline{C} \vee B\overline{B}C \equiv$$
$$\equiv B\overline{C} \vee \overline{A}\,\overline{B}C$$

Далее соберем все вместе:

$$(CD \vee E\overline{C}\,\overline{D})(B\overline{C} \vee \overline{A}\,\overline{B}C)(\overline{E} \vee AD) \equiv (CDB\overline{C} \vee CD\overline{A}\,\overline{B}C \vee E\overline{C}\,\overline{D}B\overline{C} \vee$$

$$\vee E\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{A}\,\overline{B}C)(\overline{E} \vee AD) \equiv (\overline{A}\,\overline{B}CD \vee B\overline{C}\,\overline{D}E)(\overline{E} \vee AD) \equiv$$

$$\equiv \overline{A}\,\overline{B}CD\overline{E} \vee \overline{A}\,\overline{B}CDAD \vee B\overline{C}\,\overline{D}E\overline{E} \vee B\overline{C}\,\overline{D}EAD \equiv \overline{A}\,\overline{B}CD\overline{E}$$

ОТВЕТ дочери C и D смотрят телевизор.

5.2 Области истинности

3.9. Изобразите на координатной плоскости области истинности предикатов:

$\overline{(x \succ 2)}\,\&\,(x \prec y)$;

$(x \le y) \vee (|x| \le 1)$;

$(x \ge 3) \to (y \prec 5)$;

$((x \succ 2) \vee (y \succ 1))\,\&\,((x \prec -1) \vee (y \prec -2))$.

3.8. Изобразите на диаграммах Эйлера-Венна области истинности для следующих предикатов:

1) $\overline{P}(x)\,\&\,\overline{Q}(x)$;

2) $\overline{P}(x) \leftrightarrow \overline{Q}(x)$;

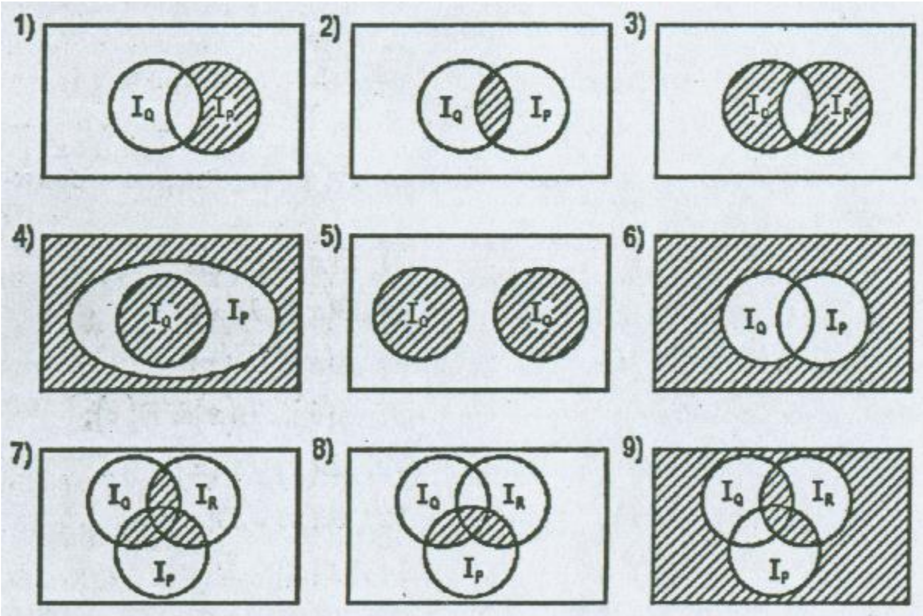
3) $(P(x) \to Q(x)) \vee R(x)\,\&\,\overline{Q}(x)$;

4) $P(x) \to (Q(x) \vee \overline{Q}(x))$;

5) $P(x)\,\&\,Q(x) \to \overline{R}(x)$.

3.10. Записать предикаты, полученные в результате логических операций над предикатами *P(x)*, *Q(x)* и *R(X)* , области истинности которых *(I)* заштрихованы на следующих рисунках:

5.3 Домашнее задание



Задание №1. Эйнштейн_задача.doc

2) Изобразите на координатной плоскости области истинности предикатов:

$$((x \succ 2)\,\&\,(y \geq 1))\,\&\,((x \prec -1) \vee (y \prec -2));$$

3). Постройте диаграммы Эйлера – Венна для след предикатов:

$$\overline{P(x) \leftrightarrow Q(x)}$$

$$P(x) \rightarrow (Q(x) \leftrightarrow R(x))$$

6 ЗАНЯТИЕ №6

6.1 Множества. Область истинности. Диаграммы Эйлера – Венна

Одно из основных понятий современной математики – понятие ***множества***. Оно является первичным, т. е. не поддается определению через другие, более простые понятия. С понятием множества мы встречаемся довольно часто: буквы русского алфавита образуют множество.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1: Число объектов множества мы будем называть ***элементами множества***. При этом каждый из объектов данного вида либо принадлежит, либо не принадлежит рассматриваемому множеству.

Так, например, буква ***ф*** вне всякого-сомнения принадлежит множеству букв, образующих русский алфавит, в то время как буква ***f*** этому множеству не принадлежит.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2: Множества, включающие только такие объекты, принадлежность или непринадлежность которых к тому или иному множеству не вызывает сомнения, называются ***четкими множествами***.

Четким множествам противопоставлены ***нечеткие*** или «лингвистические» ***множества***, включающие такие объекты, которые могут быть отнесены к тому или иному множеству лишь с определенной степенью достоверности.

Понятие нечеткого множества можно проиллюстрировать на примере семантических полей прилагательных *младенческий, детский, отроческий, юношеский, молодой, среднего возраста, старый*. Чтобы определить границы семантических полей указанных слов и словосочетаний, произведем следующий эксперимент. Предложим большой группе испытуемых – носителей русского языка относить к той или иной возрастной группе мужчин различного возраста. При этом выясняется, что интервал от 10 до 14 лет одними испытуемыми будет квалифицироваться как детский, а другими – как отроческий возраст. Аналогичным образом период от 17 до 23 лет может считаться либо как юношеский, либо как относящийся к молодому возрасту. Таким образом, каждое из рассмотренных семантических полей представляет собой нечеткое подмножество с размытыми краями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3: Множества, которые состоят из конечного числа элементов, называются ***конечными множествами***. К числу конечных множеств относится также и *пустое множество,* т.е. множество, не содержащее ни одного элемента.

Способы задания множества

Произвольные множества будем обозначать прописными, а элементы множества – строчными буквами латинского алфавита, пустое множество – символом **Ø**.

Существуют два различных способа задания множества.

Можно дать полный перечень элементов этого множества. Этот способ называется ***перечислением множества.*** Элементы перечисляемого множества заключают обычно в фигурные скобки. Например, множество ***А,*** состоящее из букв русского алфавита, вместе с пробелом (его обозначают знаком Δ) запишется так: ***А={а,б,в,...,ю,я,Δ}***.

Другой способ состоит в том, что задается свойство, которым обладает каждый элемент, принадлежащий рассматриваемому множеству, и не обладает ни один элемент, ему не принадлежащий. Этот способ называют ***описанием множества***, а свойство, определяющее множество, – ***характеристическим***.

Пусть даны два произвольных множества ***А*** и ***В***, тогда возможны пять случаев отношений между ними:

Множества ***А*** и ***В*** не имеют общих элементов (см. рис. 1а).

Множества ***А*** и ***В*** имеют общие элементы, но не все элементы множества ***А*** принадлежат множеству ***В***, и не все элементы множества ***В*** принадлежат множеству ***А***. В этом случае говорят о ***пересечении*** множеств ***А*** и ***В*** (см. рис. 1б).

Все элементы множества ***В*** принадлежат множеству ***А***, но не все элементы множества ***А*** принадлежат множеству ***В***. В этом случае говорят о ***включении*** множества ***В*** во множество ***А*** (см. рис. 1в).

Определение: Если имеются два множества ***А*** и ***В***, причем каждый элемент множества ***В*** принадлежит множеству ***А,*** то множество ***В*** называется ***подмножеством*** множества ***А***. Записывается это так: $B \subset A$.

Само множество ***А*** и пустое множество **Ø** называют ***несобственными*** подмножествами множества ***А***. Все остальные подмножества называются ***собственными***.

Все элементы множества ***А*** принадлежат множеству ***В***, но не все элементы множества ***В*** принадлежат множеству ***А***. В этом случае говорят о ***включении*** множества ***А*** во множество ***В*** ($A \subset B$) (см. рис. 1г).

Все элементы множества ***A*** принадлежат множеству ***B*** и все элементы множества ***B*** принадлежат множеству ***A***. В этом случае говорят, что множества ***A*** и ***B*** равны (см. рис. 1д).

Определение: а) Два множества ***A*** и ***B*** называются ***равными*** (или совпадающими), если $A \subset B$ и $B \subset A$.

б) Два множества ***A*** и ***B*** называются ***равными***, если они состоят из одних и тех же элементов. Записывается это так: $A = B$.

Определение: Множество, относительно которого все множества, рассматриваемые в данной задаче, являются подмножествами, называется ***универсальным***. Универсальное множество будем обозначать буквой ***U***.

Пример 1. Задать различными способами множество N всех натуральных чисел: 1,2, 3, ...

► Списком множество *N* задать нельзя ввиду его бесконечности.

Порождающая процедура содержит два правила:

а) 2 ε N;

б) если n ε N, то n+1 ε N.

Описание характеристического свойства элементов множества *N*:

$N = \{x : x$ - целое положительное число$\}$.

Пример 2. Задать различными способами множество M всех четных чисел 2,4, 6,..., не превышающих 100.

$M_{2n} = \{2,4,6,...,100\}$.

а)2 ε M_{2n};

б) если n ε N, то $(n+2)$ ε M; в) n ≤ 98.

$M_{2n} = \{n : n$ - целое положительное число, не превышающее $100\}$ или $M_{2n} = \{ n : n$ ε N и n/2 ε N, n ≤ 100$\}$.

Пример 3. Пусть $U = \{a, b, c\}$. Определить в явном виде (перечислением своих элементов) *булеан* β(*U*) - множество всех подмножеств, состоящих из элементов множества *U*. Какова мощность множества β(*U*) ?

► $\beta(U) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b), \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. Мощность $|\beta(U)| = 8$.

6.2 Основные операции над множествами

Основными операциями, осуществляемыми над множествами, являются *сложение (объединение), умножение (пересечение)* и *вычитание.* Эти операции, как мы увидим дальше, не тождественны одноименным операциям, производимым над числами.

Определение: ***Объединением*** (или *суммой)* двух множеств ***A*** и ***B*** называется множество, содержащее все такие и только такие элементы, которые являются элементами хотя бы одного из этих множеств. Объединение множеств ***A*** и ***B*** обозначают как $A \cup B$.

Это определение означает, что сложение множеств ***A*** и ***B*** есть объединение всех их элементов в одно множество $A \cup B$. Если одни и те же элементы содержатся в обоих множествах, то в объединение эти элементы входят только по одному разу.

Аналогично определяется объединение трёх и более множеств.

Определение: ***Пересечением*** (или *умножением)* двух множеств ***A*** и ***B*** называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству ***A*** и множеству ***B*** одновременно. Пересечение множеств ***A*** и ***B*** обозначают как $A \cap B$.

Аналогично определяется пересечение трёх и более множеств.

Определение: ***Разностью*** множеств ***A*** и ***B*** называется множество, состоящее из тех и только тех элементов множества ***A*** и которые не принадлежат множеству ***B***. Разность множеств ***A*** и ***B*** обозначают как $A \setminus B = A \cap \overline{B}$. Операция, при помощи которой находится разность множеств, называется *вычитанием.*

Если $B \subset A$, то разность $A \setminus B$ называется ***дополнением*** множества ***B*** до множества ***A***. Если множество ***B*** является подмножеством универсального множества ***U***, то дополнение ***B*** до ***U*** обозначается $\overline{B}$, то есть $\overline{B} = U \mid B$.

Свойства объединения и пересечения множеств

Из определений объединения и пересечения множеств вытекают свойства этих операций, представленные в виде равенств, справедливых для любых множеств ***A***, ***B*** и ***C*** .

$A \cup B = B \cup A$ – коммутативность объединения;

$A \cap B = B \cap A$ – коммутативность пересечения;

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ – ассоциативность объединения;

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ – ассоциативность пересечения;

$\boldsymbol{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$ – дистрибутивность пересечения относительно объединения;

$\boldsymbol{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$ – дистрибутивность объединения относительно пересечения;

законы поглощения:

$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{\emptyset} = \boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{\emptyset} = \boldsymbol{\emptyset}$

$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}$

$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{U} = \boldsymbol{A}$

Следует заметить, что разность не обладает свойствами коммутативности и ассоциативности, то есть $\boldsymbol{A \setminus B \neq B \setminus A}$ и $\boldsymbol{A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C}$. ***В этом легко убедиться, построив диаграммы Эйлера - Венна.***

Симметрическая разность $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Пример 1. Пусть универсальное множество *U*- множество всех сотрудников некоторой фирмы; *A* - множество всех сотрудников данной организации старше 35 лет; *B* - множество сотрудников, имеющих стаж работы более 10 лет; *C* -множество менеджеров фирмы. Каков содержательный смысл (характеристическое свойство) каждого из следующих множеств:

а) B; б) $A \cap B \cap C$; в) $A \cup (B \cap C)$; т) $B \setminus C$; д) $C \setminus B$?

► а) B - множество сотрудников организации, стаж работы которых не превышает 10 лет.

б) $A \cap B \cap C$- множество менеджеров фирмы не старше 35 лет, имеющих стаж работы более 10 лет.

в) $A \cup (B \cap C)$ - множество всех сотрудников фирмы старше 35 лет, а также сотрудников, не являющихся менеджерами, стаж работы которых более 10 лет.

г) $B \setminus C$ - множество сотрудников организации со стажем работы более 10 лет, не работающих менеджерами.

д) $C \setminus B$ - множество менеджеров со стажем работы не более 10 лет.

Декартово (прямое) произведение множеств A и B: AxB=C.

3. Декартовым произведением AxB является множество C всех упорядоченных пар $\langle a_i, b_i| \rangle$, где $a_i \in A$, $b_j \in B$, т.е.

$C = A \times B = \{\langle a_j, b_j \rangle : a_i \in A \text{ и } b_i \in B\}$.

Иллюстрацией Декартова произведения множеств $A=\{a_1|, a_2\}$и $B=\{b_1 b_2, b_3\}$ является рис. 1.1.3.

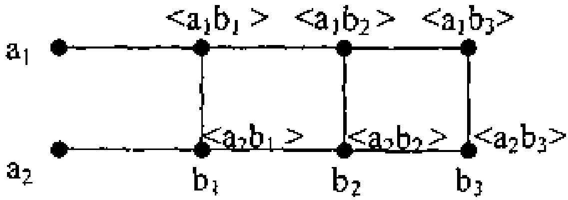


Рис. 1.1.3

В общем случае декартовым произведением множеств A_1 A_2,... A_n называется множество

$A_1 x A_2 x \ldots x A_n = \{\langle a_1, a_2, \ldots a_n\rangle : a_1 \in A_1\ a_2 \in A_2 \ldots a_n \in A_n)$

Пример 3. Осуществить операции над множествами $A=\{a, b, c, d\}$ и $B = \{c, d, e, f, g, h)$.

► $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$; $A \cap B = \{c, d)$.

Универсальное множество U не определено, поэтому, строго говоря, операции дополнения над множествами *A* и *B* не могут быть выполнены. Дополним условие. Пусть U = {*a*, *b*, *c*, *d*, *f*, *g*, *h*}, тогда *A* = *U*\A = {*e*, *f*, *g*, *h*}, *B* = *a*, *b*}. *A**B*={*a*, *b*}; *B**A* = {*e*, *f*, *g*, *h*}.

Упражнение 1.

Пусть заданы три числовых множества A={2,3,4,10}, B={ 1,2,10,12}, C={1,9,10}. Требуется указать элементы множеств

а) $A \cap B \cup B \cap C = D$, б) $(A \cup C) \setminus (B \cap A) = E$.

Множество «D» есть объединение двух множеств $A \cap B$ и $B \cap C$, что следует из порядка выполнения действий.

$A \cap B = \{2,10\}$, $B \cap C = \{1,10\}$ и $D = \{1,2,10\}$.

Множество «E» есть разность между объединением $A \cup C$ и пересечением $B \cap A$.

$A \cup C = (1,2,3,4,10,12\}$, $B \cap A = \{2,10)$ и $E = \{1,3,4,12\}$.

Упражнение 2.Пусть U= {a, b, c, d},X= {a, c}, Y= {a, b, d},Z= {b, c}. Найти множества: _

а)$X \cap Y$; б)$(X \cap Z) \cup Y$;
b)$X \cup (Y \cap Z)$;
г)$(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$; д)$X \cup Y$; е)$X \cap Y$;
ж)$X \cap Y$ з)$(X \cup Y) \cup Z$;
и)$X \cup (Y \cup Z)$;
к)$X \setminus Z$; л)$(X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$.

Упражнение 3. Пусть U={1, 2, 3, 4, 5, 6};A = {1, 2, 3}; B ={1, 3, 5, 6}; C ={4, 5, 6}. Найти множества:

а)$A \setminus C$ б)$B \setminus C$; в)$C \setminus B$; г)$A \setminus B$;
д)$A \cap B$; е)$B \cap A$; ж)$A \cap C$;
з)$(C \cup A) \setminus (C \cap A)$.

6.3 Векторы, прямые произведения, проекции векторов

Основные понятия векторных представлений:

Вектор v - упорядоченный набор элементов

$v = (a_1, a_2, ..., a_n)$,

где $a_1, a_2, ..., a_n$ - компоненты (координаты) вектора. Число n компонент называется длиной (размерностью) вектора.

Два вектора $v_1 = (a_1, a_2, ..., a_n)$ и $v_2 = (b_1, b_2, ..., b_n)$ равны, если они имеют одинаковую длину и соответствующие координаты их равны, т.е.

$(a_1, a_2, ..., a_n) = (b_1, b_2, ..., b_n)$, если: 1) n = m; 2) $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, ..., a_n = b_n$.

Проекцией вектора v на i-ю ось называется его *i*-я компонента:

$пр_i V = a_i$.

Проекцией вектора v на i-ю ось номерами $i_1, i_2, ..., i_k$ называется вектор длины *k*:

Пример 2. Пусть *V*- {(a, b, d), (c, b, d), (d, b, b)}. Чему равны проекции *V* на первую ось, на вторую, а также на вторую и третью? Чему равны проекции Fra эти оси, если *V* - упорядоченное (указанным выше образом) множество векторов *V*?

► Проекции множества векторов *V*:

$пр_1V$= {a, c, d); $пр_2V$ = {b}; $пр_{23}V$ = {(b, d), (b, b)}.

Проекции упорядоченного множества векторов

V - ((a, b, d), (c,b,d),(d,b,b)):

$пр_1V$ = (a, c, d); $пр_2V$ = (b, b, b); $пр_3V$ = ((b, d), (b, d), (b, b)).

Пример 3. Пусть V = {(a, b), (b, c, d), (c, a, d)}. Чему равна проекция $пр_1V$

► Проекция $пр_1V$ не может быть определена, так как задано множество V векторов разной длины.

Пример 4. Пусть X = {0,1}, Y= {a, b}. Найти X▪Y, Y▪X, X^2**,** X▪Y▪X.

► X▪Y = {(0, a),(0, b),(l, a),(1, b)}.

Y▪X={(a, 0),(a, l),(b, 0),(b, l)}.

Таким образом, X▪Y=Y▪X.

X^2 = {(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)}.

X▪Y▪X= {(0, a, 0), (0, a, 1), (0, b, 0), (0, b, 1), (1, a, 0), (1, a, 1), (1, b, 0), (1, b, 1)}.

Упражнения

2. Определить проекции множества векторов V: пр1V, пр2 V, пр3V, если:

а) {(2, X 1,1), (2, 2, 3,1), (1,2, 3,1)};

б) {(1,3, 5), (2, 4, 6), (3,5, 7)}.

3. Пусть X= {a, c}, Y= {a, d, f}. Найти X•Y, X^2, Y•X•Y.

6.4 Домашнее задание.

Пусть A = {1,2}, B = {2,3}, C = {1,3}. Найти: $(A\cup B) \setminus (A\cap B)$.

Пусть U= {1,2, 3,4}, A = {1, 3,4}, B = {2, 3}, C ={1,4}. Найти: $(B\setminus A)\cup C$.

Пусть $A_1 = A_2 = \{a, 6, c\}$, $A_3 = A_4 = \{d, e)$ и $V=A_1\bullet A_2\bullet A_3\bullet A_4$. Найти: $пр_1V$, $пр_{1,3}V$.

7 ЗАНЯТИЕ №7

7.1 Контрольная работа по темам: Диаграммы, решение задач, операции над множествами

Билет №1.

1) Определите, кто из четырех студентов сдал экзамен, если известно:

1. Если первый сдал, то и второй сдал.
2. Если второй сдал, то третий сдал или первый не сдал.
3. Если четвертый не сдал, то первый сдал, а третий не сдал.
4. Если четвертый сдал, то и первый сдал.

2) Постройте диаграммы Эйлера – Венна:

$$\overline{P(x)} \leftrightarrow R(x) \vee Q(x)$$

3) Изобразите на координатной плоскости области истинности предикатов.

$$(x \le 4) \wedge (y \ge -3) \vee (\overline{y \ge 3}) \wedge (x \ge -2)$$

$$(y^2 \le x) \wedge (x \ge 1) \vee (y \le -2)$$

4) Даны множества A{1,2,3,4,5,6}, B{4,5,6,7,8,9}, C{2,4,6}.
Найдите: (AUB)∩C, A\B\C BΔC

5) Дано множество векторов A{(a,s,d), (s,f,h), (d,c,g)} найдите пр1А, пр2А, пр2,3А

Билет №2.

1) Известно следующее: если Петя не видел Колю на улице, то либо Коля ходил в кино, либо Петя сказал правду; если Коля не ходил в кино, то Петя не видел Колю на улице, и Коля сказал правду; если Коля сказал правду, то либо он ходил в кино, либо Петя солгал. Выясните, ходил ли Коля в кино.

2) Постройте диаграммы Эйлера – Венна:

$$\overline{P(x)} \rightarrow R(x) \vee Q(x) \wedge P(x)$$

3) Изобразите на координатной плоскости области истинности предикатов.

$$(x^2 + y^2 < 9) \wedge ((x-2)^2 + (y-3)^2 > 4)$$

$$(x \le 1) \wedge (\overline{y \le 2}) \vee (x > -2)$$

4) Даны множества A{а,б,в,г,д}, B{г,д,у,ё,ж,з}, C{ф,б,у,з}.
Найдите: (A∩B)UC, (A∩B)\C AΔC

5) Дано множество векторов A{(a,s,d,y), (s,f,h,a), (d,c,g,p)} найдите пр4А, пр2А, пр2,4А

Билет №3.

1) Чтыре студентки, имена которых начинаются буквами А, Е, С, Р посещают институт по очереди и ведут общий конспект

лекций. Необходимо составить график посещения на ближайшую неделю, учитывая, что:

1. Понедельник - день самостоятельной работы на курсе, и в институт не ходит никто, а в субботу необходимо быть всем.
2. С и Р не смогут пойти на занятия во вторник в связи с большой загруженностью в понедельник.
3. Если С выйдет в среду или Р - в четверг, то Е согласится побывать на занятиях в пятницу.
4. Если А не пойдет в ВУЗ в четверг, то Е позволит себе сходить туда в среду.
5. Если А или Р будут в институте в среду, то С сможет пойти в пятницу.
6. Если Р в пятницу вместо института пойдет на свадьбу подруги, то А придется сходить в институт во вторник, а С - в четверг.

2) Постройте диаграммы Эйлера – Венна:

$$(\overline{Q(x)} \leftrightarrow R(x)) \vee P(x)$$

3) Изобразите на координатной плоскости области истинности предикатов.

$$(x \geq 4) \wedge (y < -3) \vee (y \leq 4) \wedge (x < -2)$$

$$(y^2 \leq x) \wedge (x^2 - 2 \geq y)$$

4) Даны множества A{a,,d,f,g,h}, B{g,h,j,k,l,q}, C{f,j,l,t,y}.

Найдите: (A\B)∩C, (A\B)∩C BΔA

5) Дано множество векторов A{(a,s,d,k), (s,f,h), (d,c,g)} найдите пр1A, пр2A, пр2,3A

Билет №4.

1) Четыре друга - Антонов (А), Вехов (В), Сомов (С), Деев (Д) решили провести каникулы в четырех различных городах - Москве, Одессе, Киеве и Ташкенте. Определите, в какой город должен поехать каждый из них, если имеются следующие ограничения:

1. Если А не едет в Москву, то С не едет в Одессу.
2. Если В не едет ни в Москву, ни в Ташкент, то А едет в Москву.
3. Если С не едет в Ташкент, то В едет в Киев.
4. Если Д не едет в Москву, то В не едет в Москву.
5. Если Д не едет в Одессу, то В не едет в Москву.

2) Постройте диаграммы Эйлера – Венна:

$$(\overline{P(x)} \leftrightarrow R(x))(P(x) \vee \overline{Q(x)})$$

3) Изобразите на координатной плоскости области истинности предикатов.

$$(x \geq 4) \wedge (\overline{y \geq -3}) \wedge (x < 7) \wedge (y \geq -6)$$

$$(y \leq x^2) \wedge (x \geq -2) \wedge (y \leq -2)$$

4) Даны множества A{4,5,6,7,8,9}, B{1,3,6,9,12,15}, C{2,5,9,14,15}.

Найдите: (AΔB)∩C, A∩(B\C) AΔC

5) Дано множество векторов A{(a,s,d), (s,f,h), (d,c,g)} найдите пр2A, пр3A, пр1,3A

Билет №5.

1) В школе, перешедшей на самообслуживание, четырем старшеклассникам: Андрееву, Костину, Савельеву и Давыдову поручили убрать 7-ой, 8-ой, 9-ый и 10-ый классы. При проверке оказалось, что 10-ый класс убран плохо. Не ушедшие домой ученики сообщили о следующем:

1. Андреев: «Я убирал 9-ый класс, а Савельев - 7-ой».
2. Костин: «Я убирал 9-ый класс, а Андреев - 8-ой».
3. Савельев: «Я убирал 8-ой класс, а Костин - 10-ый».

Давыдов уже ушел домой. В дальнейшем выяснилось, что каждый ученик в одном из двух высказываний говорил правду, а во втором ложь. Какой класс убирал каждый ученик?

2) Постройте диаграммы Эйлера – Венна:

$$\overline{P(x)} \rightarrow \overline{R(x) \vee Q(x)}$$

3) Изобразите на координатной плоскости области истинности предикатов.

$$(x > 4) \wedge (y < -3) \vee (\overline{y < 3}) \wedge (x < -2)$$

$$(y \leq x^2) \wedge (x \geq 1) \vee (y^2 \leq x - 2)$$

4) Даны множества A{q,w,e,r,t,y}, B{r,t,y,u,i,o}, C{w,t,i,v,d}.

Найдите: (CUB)∩A, CΔB\A C∩A∩B

5) Дано множество векторов A{(a,s,d,t), (s,f,h,b), (d,c,g,a)} найдите пр1A, пр3A, пр2,4A

Билет №6.

1) Пять школьников из пяти различных городов Брянской области прибыли для участия в областной олимпиаде по математике. На вопрос: «Откуда Вы?» каждый дал ответ:

Иванов: «Я приехал из Клинцов, а Дмитриев — из Новозыбкова».

Сидоров: «Я приехал из Клинцов, а Петров - из Труб-чевска».

Петров: «Я приехал из Клинцов, а Дмитриев - из Дятькова».

Дмитриев: «Я приехал из Новозыбкова, а Ефимов -из Жуковки».

Ефимов: «Я приехал из Жуковки, а Иванов живет в Дятькове».

Откуда приехал каждый из школьников, если одно утверждение верно, а другое ложно?

2) Постройте диаграммы Эйлера – Венна:

$$\overline{P(x)} \wedge (R(x) \vee Q(x)) \wedge R(x)$$

3) Изобразите на координатной плоскости области истинности предикатов.

$$(y < 1) \wedge ((x-2)^2 + (y-3)^2 > 4)$$

$$(x \le 1) \vee (\overline{y \le 2}) \wedge (x > -2)$$

4) Даны множества A{3,4,5,6,7,8,9}, B{1,4,8,12}, C{2,4,5,7,9}. Найдите: (AUB)∩C, A\C\B BΔA

5) Дано множество векторов A{(a,s,d,t,u), (s,f,h,e), (d,c,g,t,i)} найдите пр1A, пр4A, пр3,4A

8 ЗАНЯТИЕ №8

8.1 Предикаты

Предикат - повествовательное предложение, содержащее *предметные переменные,* определенные на соответствующих множествах; при замене переменных конкретными значениями (элементами) этих множеств предложение обращается в высказывание, Т.е. принимает значение "истинно" или "ложно", Обозначение предиката, содержащего n переменных (n-местного предиката): P $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при этом предполагается, что $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$, $x_n \in M_n$.

В качестве примера рассмотрим три высказывания:

A - "Рубль - валюта России" ;

B - "Доллар - валюта России" ;

C - "Доллар - валюта США".

Высказывания *A* и C - истинны, а *B* - ложно. Если вместо конкретных наименований валюты в выражениях *A, B* (и, может быть, аналогичных им) подставить предметную переменную *X* и определить ее на множестве наименований денежных единиц *X* Е {рубль, доллар, фунт стерлингов, ... , марка}, то получим одноместный предикат *P(x)* - "*x* - валюта России".

Если в выражениях *A, B,* C (или аналогичных им) вместо конкретных наименований валюты и государства подставить соответственно переменные *X* и *y,* где *y* Е {Россия, США, Англия, ... , Германия}, получим двухместный предикат *P(x, y)* - "*x* - валюта *y*". Общим для этих предикатов является то, что, приписав значения входящим в них переменным из соответствующих областей определения, получим высказывания, обладающие свойством "истинно" или "ложно".

Если при отображении P образом набора $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ является единица, то записывают.

$$P(a_1, ..., a_n) = 1$$

и говорят, что значение предиката P для набора $(a_1, ..., a_n)$ является истинным. Если же образом $(a_1, ..., a_n)$ является нуль, то записывают

$$P(a_1, ..., a_n) = 0$$

и говорят, что значение предиката P для набора $(a_1, ..., a_n)$ является ложным.

Пусть P(x) - одноместный предикат, заданный на некотором множестве M, Если переменная x обозначает любой элемент из множества M, то P(x) является неопределенным высказыванием.

Операция $\forall$ ставит в соответствие неопределенному высказыванию P(x) высказывание $\forall x P(x)$, которое читается так: "для любого x имеет место P(x)" и по определению является истинным тогда и только тогда, когда P(x) истинно для любого элемента $x \in M$. Переход от неопределенного высказывания P(x) к высказыванию $\forall x P(x)$ называется операцией навешивания квантора общности по предметному переменному x.

Операция $\exists$ ставит в соответствие неопределенному высказыванию P(x) высказывание $\exists x P(x)$, которое читается так: "существует такое x, что имеет место P(x)" и по определению является испитым тогда и только тогда, когда P(x) истинно хотя бы для одного элемента

$x \in M$. Переход от неопределенного высказывания P(x) к высказыванию $\exists x P(x)$ называется операцией навешивания квантора существования по предметному переменному x.

В первом случае мы говорим, что предметная переменная x связана в предикате P(x) квантором всеобщности, во втором случае - квантором существования.

Выражения $\forall$x P(x) и $\exists$x P(x) не зависят от x и при фиксированных P и M имеют вполне определенные значения, представляя вполне конкретные высказывания относительно всех x предметной области M.

Навешивать кванторы можно и на многоместные предикаты и вообще на любые логические выражения. Выражение, на которое навешивается квантор $\forall$x или $\exists$x, называется областью действия квантора; все вхождения переменной x в это выражение являются связанными.

Пример 1. Пусть x определен на множестве людей M, а P(x) — предикат "x - смертен". Дать словесную формулировку предикатной формулы $\forall$x P(x).

Выражение $\forall$x P(x) означает "все люди смертны". Оно не зависит от переменной x, а характеризует всех людей в целом, т.е. выражает суждение относительно всех x множества M.

Пример 2. Пусть P(x) - предикат "x - четное число", определенный на множестве M. Дать словесную формулировку высказыванию $\exists$xP(x), определить его истинность.

Исходный предикат P(x) - "x - четное число" является переменным высказыванием: при подстановке конкретного числа вместо переменной x он превращается в простое высказывание, являющееся истинным или ложным, например при подстановке числа 5 превращается в высказывание "5 -четное число", являющееся ложным. Высказывание $\exists$xP(x) означает "в M существует четное число". Поскольку множество M, на котором задан предикат P(x), не определено в условии (в таком случае говорят, что задача сформулирована не вполне корректно), доопределим M.

Пусть предикат P(x) определен на множестве натуральных чисел N, т.е. x $\in$ N, тогда высказывание $\exists$xP(x) - истинно. В общем случае высказывание $\exists$xP(x) истинно на любом множестве M, содержащем хотя бы одно четное число, и ложно на любом множестве нечетных чисел.

Пример 3. Пусть N(x) - предикат "x - натуральное число". Рассмотреть варианты навешивания кванторов. Проинтерпретировать полученные высказывания и определить их истинность.

> $\forall$x N(x) - высказывание "все числа - натуральные" истинно на любом множестве натуральных чисел и ложно, если M содержит хотя бы одно ненатуральное число, например целое отрицательное;

$\exists$x N(x) - высказывание "существует натуральное x" истинно на любом множестве M, содержащем хотя бы одно натуральное число, и ложно - в противном случае.

Пример 4. Записать предикатной формулой предложение "Любой человек имеет отца".

Для построения предикатной формулы используем два предиката "x — человек" и "y - отец x" и для удобства восприятия обозначим их соответственно: ЧЕЛОВЕК (x) и ОТЕЦ (y, x). Тогда предложение "Любой человек имеет отца" в предикатной форме имеет вид:

$\forall$x (ЧЕЛОВЕК (x) $\rightarrow$ $\exists$y ОТЕЦ (y, ;x;)).

Заметим, что если предикат ОТЕЦ (y, x) определен на множестве людей, то выражение "любой человек имеет отца" можно записать проще:

$\forall$x $\exists$y ОТЕЦ (y, x).

Пример 5. Пусть предикат P(x, y) описывает отношение "x любит y" на множестве людей. Рассмотреть все варианты навешивания кванторов на обе переменные. Дать словесную интерпретацию полученных высказываний.

Обозначим предикат "x любит y" через ЛЮБИТ (x, y). Предложения, соответствующие различным вариантам навешивания кванторов, проиллюстрированы на рис. 5.2, где x и y показаны на разных множествах, что является условностью и предпринято только для объяснения смысла предложений (реальные множества переменных x и y, очевидно, должны совпадать):

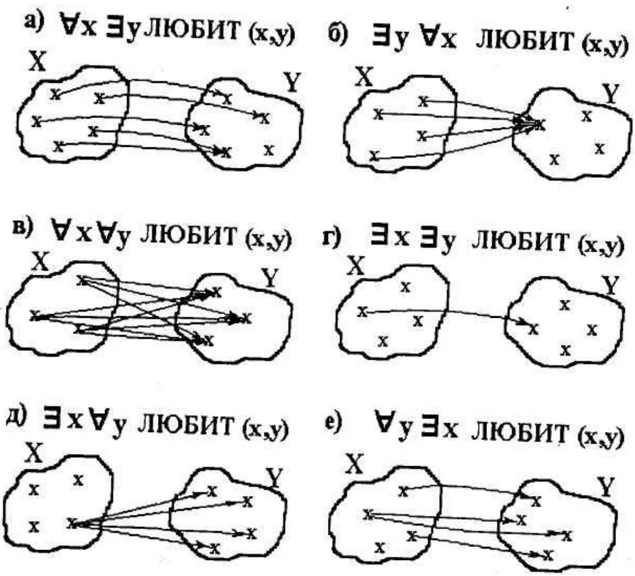


Рис. 5.2

∀x ∃y ЛЮБИТ (x, y)- “для любого человека x существует человек y, которого он любит” (см. рис. 5.2,а) или “всякий человек какого – нибудь любит”;

∃y ∀x ЛЮБИТ (x, y) – “существует такой человек y, что его любят все x” (см. рис. 5.2, б);

∀x ∀y ЛЮБИТ (x, y) - все люди любят всех людей (рис.5.2 в);

∃x ∃y ЛЮБИТ (x, y) – существует человек, который кого-то любит (рис. 5.2,г);

∃x ∀y ЛЮБИТ (x, y) - существует человек, который любит всех людей (рис. 5.2, д);

∀y ∃x ЛЮБИТ (x, y) - "для всякого человека существует человек, который его любит" или "каждого человека кто-то любит" (рис. 5.2, е).

Из приведенного выше можно сделать вывод о том, что перестановка кванторов общности и существования меняет смысл высказывания, т.е. кванторы общности и существования не обладают в общем случае свойством коммутативности.

Пример 6. Пусть $Q(x,y)$ - предикат порядка "$x \le y$'. Рассмотреть различные варианты квантификации его переменных. Определить истинность получаемых выражений для разных случаев интерпретации области определения M предиката, $x, y \in M$.

> $\forall x(x \le y)$ - одноместный предикат (переменное высказывание) от y: "для любого x имеет место $x \le y$" или "любое число не больше y". Если M - бесконечное множество неотрицательных целых чисел, то этот предикат ложен; на любом конечном множестве натуральных чисел предикат истинен в единственной точке, представляющей наибольшее число в M, например для M= {1,2,3,..., 99} предикат истинен в единственной точке y = 99. При подстановке любого другого .y из M этот предикат обращается в ложное высказывание;

$\forall y\ (x \le y)$ - одноместный предикат от x: "для любого y имеет место $x \le y$" или "любое число из M не меньше x". Если M- множество неотрицательных целых чисел, то этот предикат истинен в единственной точке x = 0и ложен при подстановке вместо x любого другого числа из M;

$\forall x\ (x \le y)$ - одноместный предикат от .y: "существует число в M, которое не больше y. Если M-любое непустое множество чисел, то данный предикат превращается в истинное высказывание при подстановке какого-либо y из M. Например, если $5 \in M$, то при y = 5 получаем $\exists x\ (x < 5)$ - истинное высказывание;

$\exists y\ (x \le y)$ - одноместный предикат от x: "существует число в M, которое не меньше x". На любом непустом множестве M чисел данный предикат превращается в истинное высказывание при подстановке какого-либо x из M.

Пример 7. Рассмотреть все возможные варианты навешивания кванторов на предикат $D(x, y)$ - "x делится на y", определенный на множестве натуральных чисел (без нуля) N. Дать словесные формулировки полученных высказываний и определить их истинность.

> Операции навешивания кванторов приводят к следующим формулам:

$\forall x\ D(x, y)$ — одноместный предикат (переменное высказывание) "всякое натуральное число из N делится на натуральное число y из

N"; истинный только для одного значения свободной переменной $y = 1$;

$\exists x\ D(x, y)$ - переменное высказывание "существует натуральное число, которое делится на y', истинное для любого значения свободной переменной y, взятой из множества N;

$\forall y\ D(x,y)$ — переменное высказывание "натуральное число x делится на всякое натуральное число y", ложное для любого значения свободной переменной x, взятой из множества N;

$\exists y\ D(x, y)$ - переменное высказывание "существует натуральное число, которое делит натуральное число x", истинное для любого значения свободной переменной x;

$\forall x\ \forall y\ D(x, y)$; $\forall y\ \forall x\ D(x, y)$ - высказывания "для любых двух натуральных чисел имеет место делимость одного на другое" ложные;

$\exists x\ \exists y\ D(x, y)$; $\exists y\ \exists x\ D(x, y)$ - высказывания "существуют такие два натуральных числа, что первое делится на второе", истинны;

$\exists x\ \forall y\ D(x, y)$ - высказывание "существует натуральное число, которое делится на любое натуральное", ложное;

$\forall y\ \exists x\ D(x, y)$ - высказывание "для всякого натурального числа найдется такое натуральное, которое делится на первое", истинное;

$\forall x\ \exists y\ D(x, y)$ - высказывание "для всякого натурального существует такое натуральное число, на которое оно делится", истинное;

$\exists y\ \forall x\ D(x, y)$ - высказывание "существует натуральное число, которое является делителем всякого натурального числа", истинное (таким делителем являемся единица).

Пример 8. Какой смысл имеют предикатные формулы:

$$а)\forall y \forall z \exists x П(x,y,z);$$

б) $\forall x\ \forall y\ \forall z\ \forall u\ (П(x, y, z)\ \&\ П(x, y, и) \rightarrow E(z, u))$, где П,E - предикаты произведения и равенства, определенные на N ? Истинны ли эти формулы? Привести примеры наборов переменных, иллюстрирующие заключение относительно истинности или ложности формул.

Пример 6. Даны предикаты *P(x)*: $x^2 + x + 1 > 0$ и *Q(x)*: $x^2 - 4x + 3 = 0$, определенные на множестве R. Требуется установить, какие из следующих высказываний истинны и какие ложны:

1) $\forall xP(x)$; 2) $\exists xP(x)$; 3) $\forall xQ(x)$; 4) $\exists xQ(x)$.

Решение. Так как $x^2 + x + 1 = \left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ при всех *x*, то будут истинны высказывания $\forall x\, P(x)$ и $\exists x\, P(x)$.

Так как уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$ имеет только два действительных корня $x_r=3$ и $x_2=1$. то предикат <?(x) принимает значение 1 только

при x=3 и x=1 и О в остальных случаях. Но тогда высказывание $\forall\, x\, Q(x)$ ложно, а высказывание $\exists\, x\, Q(x)$ истинно.

Пример 7. Пусть предикат $Q\{x,y)$: «$x \vdots y$» определен на множестве N×N. Показать, что высказывания $\forall\, y \exists\, x Q(x,y)$ и $\exists\, x \forall\, y Q(x,y)$ имеют различные логические значения.

Решение. Так как высказывание $\forall\, x \exists\, x\, Q(x,y)$ означает, что для всякого натурального числа y существует натуральное число x такое, что y является делителем x, то это высказывание истинно.

Высказывание $\exists\, x Уy\, Q(x,y)$ означает, что есть натуральное число x, которое делится на любое натуральное число y. Это высказывание, очевидно, ложно.

3.7. На множестве $M = \{1,2,3,...,20\}$ заданы предикаты:

$A(x)$: «x не делится на 5»;

$B(x)$: «x - четное число»;

$C(x)$: «x - число простое»;

$D(x)$: «x кратно 3».

Найдите множества истинности следующих предикатов:

1) $A(x)\&B(x)$; 2) $C(x)\&B(x)$;
3) $C(x)\&D(x)$; 4) $B(x)\&D(x)$;
5) $\overline{B}(x)\,\&\,D(x)$; 6) $A(x)\,\&\,\overline{D}(x)$;

7) $\overline{B}(x)\,\&\,\overline{D}(x)$; 8) $A(x)\&B(x)\&D(x)$;

9) $A(x)\vee B(x)$; 10) $B(x)\vee C(x)$;

15) $A(x)\vee B(x)\vee D(x)$; 16) $C(x)\to A(x)$;

17) $D(x)\to \overline{C}(x)$; 18) $A(x)\to B(x)$;

19) $\left(A(x)\,\&\,C(x)\right)\to \overline{D}(x)$; 20) $\left(A(x)\,\&\,D(x)\right)\to \overline{C}(x)$;

8.2 Понятие формулы логики предикатов. Равносильные формулы логики предикатов

В логике предикатов используется следующая символика:

Символы *p, q,* r, ... - переменные высказывания, принимающие два значения: 1 - истина, 0 - ложь.

Предметные переменные - *, *y, r*, ..., которые пробегают значения из некоторого множества M: x^0, y^0, z^0 , ... - предметные константы, то есть значения предметных переменных;

$P(\cdot)$, $F(\cdot)$ - одноместные предикатные переменные; $Q(\cdot,\cdot,\ldots,\cdot)$, $R(\cdot,\cdot,\ldots,\cdot)$ - n-местные предикатные переменные. $P^0(\cdot)$, $Q^0(\cdot,\cdot,\ldots,\cdot)$ - символы постоянных предикатов.

Символы логических операций: &, v , $\rightarrow$,-.

Символы кванторных операций: $\forall x$, $\exists x$.

6. Вспомогательные символы: скобки, запятые.

Определение 1. (формулы логики предикатов).

Каждое высказывание как переменное, так и постоянное, является формулой.

Если $F(\cdot,\cdot,\ldots,\cdot)$ - n-местная предикатная переменная или постоянный предикат, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - предметные переменные или предметные постоянные, не обязательно все различные, то $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ есть формула. В этой формуле предметные переменные являются свободными. Формулы вида 1 и 2 называются элементарными.

Если *A* и *B* - формулы, причем такие, что одна и таже предметная переменная не является в одной из них связанной, а в другой свободной, то $A \vee B$, $A\&B$, $A\rightarrow B$ есть формулы. В этих формулах те переменные, которые в исходных формулах были свободными, являются свободными, а те, которые были связанными, являются связанными.

Если *A* - формула, то $\overline{A}$ - формула, и характер предметных переменных при переходе от формулы *A* к формуле $\overline{A}$ не меняется.

Если *A(X)* - формула, в которую предметная переменная *x* входит свободно, то слова $\forall x\, A(X)$ и $\exists x\, A(X)$ являются формулами, причем предметная переменная в них входит связанно.

Никакая другая строка символов формулой не является.

Переменная, на которую навешен квантор, называется связанной, несвязанная квантором переменная называется свободной.

Отрицание кварторных предикатов.

Два предиката будем считать равносильными, если их значения истинности совпадают при всех значениях входящих в них свободных переменных. При этом имеется в виду, что свободные переменные в одном предикате не являются связанными в другом.

Справедливы следующие равносильности, относящиеся к отрицаниям кванторных предикатов:

$$\overline{\forall xP(x)} = \exists x\overline{P(x)}, \qquad \overline{\exists xP(x)} = \forall x\overline{P(x)}.$$

Действительно, в первой из них левая часть читается: неверно, что для каждого x предикат P(x) истинен; правая - существует x, для которого P(x) пожен. Ясно, что эти два утверждения имеют один и тот же смысл. Аналогичным рассуждением убеждаемся в спроведливости второй равносильности.

Таким образом, знак отрицания можно ввести пол знак квантора, заменив квантор на двойственный.

Очевидно, что все равносильности, имеющие место в алгебре высказываний, пере-„носится и на алгебру предикатов.

<u>Пример.</u>

$$\exists x\overline{(A(x)\to\forall yB(y))} = \overline{\exists x(\overline{A(x)}\vee\forall yB(y))} = \forall x\overline{(\overline{A(x)}\vee\forall yB(y))} =$$

$$\forall x(A(x)\wedge\overline{\forall yB(y)})$$

$$= \forall x(A(x)\wedge\exists y\overline{B(y)})$$

Формулы, в которых из операций алгебры высказываний имеются только операции $-,\wedge,\vee$, а знаки отрицания относятся только к элементарным предикатам, называются приведенными формулами.

Пример 1. Какие из следующих выражений являются формулами логики предикатов? В каждой формуле выделите свободные и связанные переменные.

1) $\overline{\exists x\forall z(P(x,y)\to P(y,z))}$;
2) $(p\to q)\,\&\,(\overline{r}\vee\overline{p})$;
3) *P(x)& ∀ x Q(x);*
4) *∀ x (P(x)→Q(x))↔(∃ x P(x)→ ∀ x R(x,y));*
5) *(P(x)↔Q(x))* ∨ *∃ y (∀ y R(y));*
6) *∃ x ∀ z (P(x,y)→P(y,z)).*

Решение. Выражения 1), 2), 4), 6) являются формулами, так как записаны в соответствии с определением формулы логики предикатов. Выражения 3) и 5) не являются формулами. В выражении 3) операция конъюнкция применена к формулам $P(x)$ и $\forall x\, Q(x)$; в первой из них переменная x свободна, а во второй связана квантором общности, что противоречит определению формулы. В выражении 5) квантор существования по переменной y навешен на формулу $\forall y\, R(y)$, в которой переменная y связана квантором общности, что также противоречит определению формулы.

В формуле 1) переменная y свободна, а переменные x и z связаны. В формуле 2) нет предметных переменных. В формуле 4) переменная x связана, а переменная y свободна.

О логическом значении формулы логики предикатов можно говорить лишь тогда, когда задано множество M, на котором определены входящие в эту формулу предикаты. Логическое значение формулы логики предикатов зависит от значения трех видов переменных, входящих в формулу:

а) переменных высказываний;

б) свободных предметных переменных из множества M;

в) предикатных переменных.

При конкретных значениях этих переменных формула принимает конкретное логическое значение.

Пример 2. Дана формула $\forall x(P(x)\&Q(x)\rightarrow R(x))$, где предикаты $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ определены на множестве N. Найти ее значение, если

$P(x)$: «число x делится на 3», $Q(x)$: «число x делится на 4», $R\{x)$: «число x делится на 2»;

$P(x)$: «число x делится на 3», $Q(x)$: «число x делится на 4», R(x): «число x делится на 5».

Решение. В обоих случаях конъюнкция $P(x)\&Q(x)$ есть утверждение, что число x делится на 12. Но тогда при всех x, если число x делится на 12, то оно делится и на 2, и, значит, в случае 1) формула истинна.

Так как из делимости числа x на 12 не при всех x следует делимость числа x на 5, то в случае 2) формула ложна.

Пример 3. Вычислить значение формулы $\forall x\exists y\, P(x,y)\rightarrow \exists x \forall y\, P(x,y)$, если предикат $P(x,y)$ имеет значение $P^0(x,y)$ - «число x меньше числа y» и определен на множестве M = N x N.

Решение. Так как при указанном значении предиката $P(x, y)$ высказывание $\forall x\exists y\, P(x,y)$ означает утверждение, что для любого натурального числа *x* найдется натуральное число *y*, большее числа *x*, то это высказывание истинно. В то же время высказывание $\exists x \forall y$ *P(x,y)* означает утверждение, что существует натуральное число *x*, которое меньше любого натурального числа *y*, которое ложно. При этом исходная формула, очевидно, ложна.

Предваренная нормальная форма.

Пример 2. Привести к ПНФ следующую предикатную формулу.

$\rceil(\exists x \forall y P_1(x,y)$ & $\exists x \forall y$ v $P_2(x,,y))$.

Поскольку в данной предикатной формуле имеются два высказывания $\exists x \forall y P_1(x,y)$ и , $\exists x \forall y P_2(x,y)$ объединенные связкой & и общим отрицанием ~|, то, применив правило де Моргана (5.17) к исходной формуле, получим:

$\rceil \exists x \forall y P_1(x,y)$ & $\exists x \forall y P_2(x,y))$ ~ $\rceil \exists x \forall y P_1(x,y)$ v $\exists x \forall y P_2(x,y))$

Воспользуемся далее эквивалентным соотношение (5.3):

$\rceil \exists x \forall y P_1(x,y)$ & $\exists x \forall y P_2(x,y))$ ~ $\rceil \exists x \forall y P_1(x,y)$ v $\exists x \forall y P_2(x,y))$

Продолжая перемещение символов отрицания непосредственно к символам предикатов, используем соотношение (5.4):

$\forall x \rceil \forall y$ P (x,y) v $\forall x \rceil \exists y$ P_2 (x, y) ~ ~ $\forall x \rceil \forall y$ P (x,y) v $\forall x \rceil \forall y$ P_2 (x, y)

Так как квантор общности Ух не дистрибутивен относительно дизъюнкции v, поменяем в каком-либо предикате,например во втором, переменную x на новую переменную *г:*

$\forall x \exists y \rceil$ P (x,y) v $\forall x \exists y \rceil P_2$ (x, y) ~
$\forall x \exists y \rceil$ P (x,y) v $\forall z \exists y \rceil P_2$ (z, y) ~

Воспользовавшись дважды эквивалентным соотношением (5.10) или соотношением (5.21), получим:

$\forall x \exists y \rceil$ P (x,y) v $\forall z \exists y \rceil P_2$ (z, y) ~ ~ $\forall x \forall z (\exists y \rceil P_1$ (x, y) v $\exists y$ P_2 (z, y)).

Поскольку квантор существования $\exists$y дистрибутивен относительно дизъюнкции v (см. (5.6)), окончательно получим префиксную нормальную форму для исходной предикатной формулы:

$\forall x\forall z(\exists y \rceil P_1(x,y) \vee \exists y\rceil P_2(x,y))\sim$
$\sim\forall x\forall z\exists y\ (\rceil P_1(x,y) \vee \rceil P_2(x,y))$

Пример 3. Получить ПНФ предикатной формулы:

$$\forall x\forall y(\exists z(P_1(x,z)\ \&\ P_2(y,z)) \to\exists u\ P_3(x,y,\ u)).$$

Для получения ПНФ удалим из исходной формулы связку$\to$, используя формулу булевой алгебры (5.14):

$\forall x\forall y(\exists z(P_1(x,z)\ \&\ P_2(y,z)) \to\exists u\ P_3(x,y,\ u))\ \sim$
$\sim\forall x\forall y(\rceil\exists z(P_1(x,z)\ \&\ P_2(y,z)) \vee \exists u\ P_3(x,y,\ u))$

Избавимся от отрицания перед квантором *Зг,* используя (5.3):

$\forall x\forall y(\rceil\ \exists z(P_1(x,z)\ \&\ P_2(y,z)) \vee \exists u\ P_3(x,y,\ u))\ \sim$
$\sim\ \forall x\forall y(\forall z\rceil(P_1(x,z)\ \&\ P_2(y,z)) \vee \exists u\ P_3(x,y,\ u))$

Воспользуемся далее правилом де Моргана (5.17):

$$\forall x\forall y(\forall z\rceil(P_1(x,z)\ \&\ P_2(y,z)) \vee \exists u\ P_3(x,y,\ u))\sim$$
$$\sim\ \forall x\forall y\forall z(\rceil P_1(x,z) \vee \rceil P_2(y,z)) \vee \exists u\ P_3(x,y,\ u))$$

Так как последний предикат не зависит от переменной *2,* используем соотношение (5.10):

$$\forall x\forall y\forall z(\rceil P_1(x,z) \vee \rceil P_2(y,z)) \vee \exists u\ P_3(x,y,\ u))\ \sim$$
$$\sim\ \forall x\forall y\forall z(\rceil P_1(x,z) \vee \rceil P_2(y,z) \vee P_3(x,y,\ u))$$

Аналогично для вынесения квантора зу (благодаря независимости первых предикатов от переменной *и)* воспользуемся (5.12):

$$\forall x\forall y\forall z(\rceil P_1(x,z) \vee \rceil P_2(y,z)) \vee \exists u\ P_3(x,y,\ u))\ \sim$$
$$\sim\ \forall x\forall y\forall z\exists u(\rceil P_1(x,z) \vee \rceil P_2(y,z) \vee P_3(x,y,\ u))$$

Полученная в результате выполненных эквивалентных преобразований формула является ПНФ исходной формулы.

Пример 4. Получить ПНФ предикатной формулы

$$(\rceil\exists u\ P_1(u) \to \rceil\forall y\ \forall u\ P_2(y,u)) \to \forall x\ P_3(x).$$

Для получения ПНФ осуществим эквивалентные преобразования, указывая каждый раз справа номер используемого эквивалентного соотношения:

$(\rceil\exists u\, P_1(u) \to \rceil\forall y\, \forall u\, P_2(y,u)) \to \forall x\, P_3(x) \sim$ по (5.14)

$\sim (\rceil\rceil\exists u\, P_1(u) \vee \rceil\forall y\, \forall u\, P_2(y,u)) \to \forall x\, P_3(x) \sim$ по (5.15)

$\sim (\exists u\, P_1(u) \vee \rceil\forall y\, \forall u\, P_2(y,u)) \to \forall x\, P_3(x) \sim$ по (5.14)

$\sim \rceil(\exists u\, P_1(u) \vee \rceil\forall y\, \forall u\, P_2(y,u)) \vee \forall x\, P_3(x) \sim$ по (5.16)

$\sim (\rceil\exists u\, P_1(u)\, \&\, \rceil\rceil\forall y\, \forall u\, P_2(y,u)) \vee \forall x\, P_3(x) \sim$ по(5.15)

$\sim (\rceil\exists u\, P_1(u)\, \&\, \forall y\, \forall u\, P_2(y,u)) \vee \forall x\, P_3(x) \sim$ по (5.3)

$\sim (\forall u\, \rceil P_1(u)\, \&\, \forall y\, \forall u\, P_2(y,u)) \vee \forall x\, P_3(x) \sim$ по (5.5)

$\sim \forall u\, (\rceil P_1(u)\, \&\, \forall y\, P_2(y,u)) \vee \forall x\, P_3(x) \sim$ по (5.9)

$\sim \forall u\, \forall y (\rceil P_1(u)\, \&\, P_2(y,u)) \vee \forall x\, P_3(x) \sim$ по (5.10)

$\sim \forall u\, \forall y\, \forall x (\rceil P_1(u)\, \&\, P_2(y,u) \vee P_3(x)) \sim$ по (5.7)

$\sim \forall x\, \forall y\, \forall u (\rceil P_1(u)\, \&\, P_2(y,u) \vee P_3(x)) \sim$

2. Получить ПНФ следующих предикатных формул:

а) $\exists x\forall y P_1(x,y)\to\forall x\exists y P_2(x,y)$;

б) $(\exists x\forall y P_1(x,y) \vee \exists x P_2(x))\to\exists y\forall z P_3(y,z)$;

в) $\rceil(\exists x\forall z P_1(x,z)\to\exists y\exists z P_2(y,z))\ \&\ \rceil\exists y\ \exists z\ P_3(y,z)$

г) $(\exists x\forall z P_1(x,z) \vee \rceil\forall x\forall y P_2(x,y))\to\rceil\forall z P_3(z)$;

д) $(\forall x\exists y\forall z P_1(x,y,z) \vee \rceil\forall y P_2(x,y))\to\forall x\forall z P_3(x,z)$;

е) $\rceil(\forall x\forall y\forall z\rceil P_1(x,y,z) \vee \exists y\exists z P_2(y,z))\&\forall x\forall z P_3(x,z)$;

ж) $(\forall x\forall y\ P_1(x,y) \to \exists x\exists y\forall z P_2(x,y,z))\to\exists z P_3(z)$;

з) $\rceil\forall x\exists y\ P_1(x,y) \to (\forall y\forall z P_2(y,z))\to\rceil\ \forall z P_3(z))$;

и) $(\rceil\exists y\ P_1(y) \to\rceil\forall x\forall y P_2(x,y))\to\forall z P_3(z)$;

к) $\rceil(\forall x\forall y\ P_1(x,y) \vee \forall x\exists y P_2(x,y,))$.

8.3 Домашнее задание

1. На множестве $M = \{1,2,3,...,20\}$ заданы предикаты:

$A(x)$: «x не делится на 5»;

$B(x)$: «x - четное число»;

$C(x)$: «x - число простое»;

$D(x)$: «x кратно 3».

Найдите множества истинности следующих предикатов:

11) $C(x) \vee D(x)$; 12) $B(x) \vee D(x)$;

13) $\overline{B}(x) \vee D(x)$; 14) $B(x)\ \&\ \overline{D}(x)$;

9 ЗАНЯТИЕ №9

9.1 Графы

Определение графа

Графом G называется пара $(V(G), E(G))$, где $V(G)$ — непустое конечное множество элементов, называемых вершинами, а $E(G)$ — конечное семейство неупорядоченных пар элементов из $V(G)$ (необязательно различных), называемых ребрами. Употребление слова "семейство" говорит о том, что допускаются кратные ребра. Будем называть $V(G)$ "множеством вершин" , а $E(G)$ — семейством ребер графа G . О каждом ребре вида $\{v, w\}$ говорят, что оно соединяет вершины v и w . Каждая петля $\{v, v\}$ соединяет вершину v саму с собой.

При изображении графов на рисунках или схемах отрезки могут быть прямолинейными или криволинейными; длины отрезков и расположение точек произвольны.

Определение орграфа

Орграфом D называется пара $(V(D), A(D))$, где $V(D)$ — непустое конечное множество элементов, называемых вершинами , а $A(D)$ — конечное семейство упорядоченных пар элементов из $V(D)$, называемых дугами (или ориентированными ребрами). Дуга, у которой вершина v является первым элементом, а вершина w — вторым, называется дугой из v в w (v, w) .

Заметим, что дуги (v,w) и (w,v) различны. Хотя графы и орграфы — существенно различные объекты, в определенных случаях графы можно рассматривать как орграфы, в которых каждому ребру соответствуют две противоположно ориентированные дуги.

Полный граф

Граф называется полным, если каждые две различные вершины его соединены одним и только одним ребром. В полном графе каждая его вершина принадлежит одному и тому же числу ребер. Для задания полного графа достаточно знать число его вершин. Полный граф с n вершинами обычно обозначается через K_n.

Граф, не являющийся полным, можно преобразовать в полный с теми же вершинами, добавив недостающие ребра. Вершины графа G и ребра, которые добавлены, тоже образуют граф. Такой граф называют дополнением графа G и обозначают его $\overline{G}$.

Дополнением графа G называется граф $\overline{G}$ с теми же вершинами, что и граф G, и с теми и только теми ребрами, которые необходимо добавить к графу G, чтобы получился полный граф.

Является граф полным или нет, это его характеристика в целом.

Полный ориентированный граф

Полным ориентированным графом называется граф, каждая пара вершин которого соединена в точности одним ориентированным ребром. Если с каждого ребра полного ориентированного графа снять направление, то образуется полный граф с неориентированными ребрами.

Рассмотрим соревнование, в котором каждая из команд играет с каждой из остальных команд по одному разу. Такое соревнование называют круговым турниром или турниром в один круг.

Если каждая встреча непременно должна оканчиваться выигрышем одной из команд, то круговой турнир называют бескомпромиссным. Круговой бескомпромиссный турнир проводится, например, в волейболе и баскетболе.

$\{v,w\}$

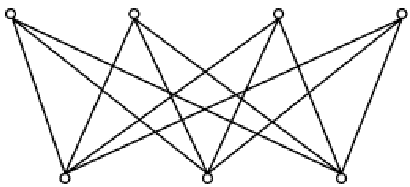
Каждому турниру соответствует полный ориентированный граф, в котором вершины представляют команды, а каждое ориентированное ребро $\{v, w\}$ выражает отношение " v победила w ".

Двудольный граф

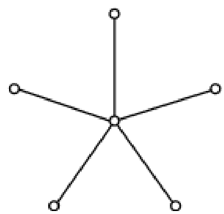
Допустим, что множество вершин графа можно разбить на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2, так, что каждое ребро в G соединяет какую-нибудь вершину из V_1 с какой-либо вершиной из V_2, тогда G называем двудольным графом. Такие графы иногда обозначают $G(V_1, V_2)$, если хотят выделить два указанных подмножества. Двудольный граф можно определить и по-другому: в терминах раскраски его вершин двумя цветами, скажем, красным и синим. При этом граф называется двудольным, если каждую его вершину можно окрасить красным или синим цветом так, чтобы любое ребро имело один конец красный, а другой — синий. Следует подчеркнуть, что в двудольном графе совсем не обязательно каждая вершина из V_1 соединена с каждой вершиной из V_2; если же это так и если при этом граф G простой, то он называется полным двудольным графом и обычно обозначается $K_{m,n}$, где m, n — число вершин соответственно в V_1 и V_2.

Пример.

$K_{4,3}$



$K_{1,5}$ — *звездный граф*



Заметим, что граф $K_{m,n}$ имеет ровно $m+n$ вершин и nm ребер.

Степень вершины

Вершины в графе могут отличаться друг от друга тем, скольким ребрам они принадлежат.

Степенью вершины называется число ребер графа, которым принадлежит эта вершина. Вершина называется четной, если ее степень — число четное. Вершина называется нечетной, если ее степень — число нечетное. Две вершины графа называются смежными, если существует соединяющее их ребро, то есть ребро вида $\{v, w\}$; при этом вершины v и w называются инцидентными этому ребру, а ребро — инцидентным этим вершинам. Аналогично, два различных ребра графа называются смежными, если они имеют, по крайней мере, одну общую вершину. Иначе можно определить степень вершины. Степенью или валентностью вершины v графа G называется число ребер, инцидентных v; степень вершины будем обозначать через $\rho(v)$. При вычислении степени вершины v будем учитывать петлю в v два раза, а не один. Вершина степени 0 называется изолированной вершиной, вершина степени 1 называется висячей, или концевой, вершиной. Граф, у которого все вершины имеют одну и ту же степень, называется регулярным графом.

Два графа, G_1 и G_2, называются изоморфными, если существует взаимно однозначное соответствие между множествами их вершин, обладающее тем свойством, что число ребер, соединяющих любые две вершины в G_1 равно числу ребер, соединяющих соответствующие вершины в G_2.

Имея даже общие представления о графе, иногда можно судить о степенях его вершин. Так, степень каждой вершины полного графа на единицу меньше числа его вершин. При этом некоторые закономерности, связанные со степенями вершин, присущи не только полным графам.

1. В графе G сумма степеней всех его вершин — число четное, равное удвоенному числу ребер графа, так как каждое ребро участвует в этой сумме ровно два раза. Этот результат, известный еще двести лет назад Эйлеру, часто называют леммой о рукопожатиях. Из нее следует, что если несколько человек обменялись рукопожатиями, то общее число пожатых рук обязательно четно, ибо в каждом рукопожатии участвуют две руки (при этом каждая рука считается столько раз, сколько она участвовала в рукопожатиях).

2. Число нечетных вершин любого графа четно.

3. Во всяком графе с n вершинами, где $n \geqslant 2$, всегда найдутся по меньшей мере две вершины с одинаковыми степенями.

4. Если в графе с вершинами $n > 2$ в точности две вершины имеют одинаковую степень, то в этом графе всегда найдется либо

в точности одна вершина степени 0, либо в точности одна вершина степени $n-1$.

Начало формы

Вы можете поддержать наш проект и автора курса?

Конец формы

Связность графа

Назовем граф связным,если его нельзя представить в виде объединения двух графов, и несвязным — в противном случае.

Маршрутом в данном графе G называется конечная последовательность ребер вида

$\{v_0,v_1\},\{v_1,v_2\},\ldots,\{v_{m-1},v_m\}$

(обозначаемая также через $v_0 \to v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_m$). Очевидно следующее свойство маршрута: любые два последовательных ребра либо смежны, либо одинаковы. Но не всякая последовательность ребер, обладающая этим свойством, является маршрутом (в качестве примера рассмотрим звездный граф и возьмем его ребра в произвольном порядке). Каждому маршруту соответствует последовательность вершин $v_0, v_1 \ldots v_m$. v_0 называется начальной вершиной, а v_m конечной вершиной маршрута. Таким образом, мы будем говорить о маршруте из v_0 в v_m. Заметим, что для любой вершины v_0 тривиальным маршрутом, вообще не содержащим ребер, является маршрут из v_0 в v_0. Длиной маршрута называется число ребер в нем. Маршрут называется цепью, если все его ребра различны, и простой цепью, если все вершины $v_0,\ldots,v_m$ различны, кроме, может быть, $v_0=v_m$. Замкнутая простая цепь, содержащая по крайней мере одно ребро, называется циклом. В частности, любая петля или любая пара кратных ребер образует цикл. Путь (последовательность ребер, ведущая от e_1 к e_2, в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину и никакое ребро не встречается более одного раза) от вершины e_1 до вершины e_2 называется простым, если он не проходит ни через одну из вершин графа более одного раза.

Граф G называется связным, если для любых двух его вершин v и w существует простая цепь из v в w. Любой граф можно разбить на непересекающиеся связные графы, называемые компонентами (связности) графа G. Таким образом, несвязный граф имеет, по крайней мере, две компоненты. Две вершины эквивалентны (или связаны, если существует простая цепь из одной в другую.Связный граф состоит из одной компоненты. Граф называется несвязным, если число его компонент больше единицы.

Связный граф представляет собой простой цикл тогда и только тогда, когда каждая его вершина имеет степень 2.

Если $G(V,E)$ — связный граф и степень каждой его вершины 2, тогда $G(V,E)$ — простой цикл.

Из каждой вершины данного графа в любую другую ведет путь. Начнем путь из какой-нибудь вершины e и пройдем по одному из двух ребер, которым принадлежит эта вершина. Попав во вторую вершину, выйдем из нее по второму ребру и так далее. С необходимостью все ребра графа будут пройдены, и мы вернемся в исходную вершину.

Если граф $G(V,E)$ — простой цикл, тогда степень каждой вершины равна двум.

Так как граф $G(V,E)$ — замкнутый простой путь, то из каждой его вершины можно попасть в любую другую, не проходя ни через одну вершину более одного раза. Степень каждой вершины такого графа равна двум.

Покажем, что в простом цикле не может быть вершины, степень которой не равна двум.

Если какая-то вершина в графе имеет степень меньше двух, то она не принадлежит никакому простому циклу.

Если какая-то вершина имеет степень больше двух, то никакой простой цикл (по определению) не может содержать все ребра, которым принадлежит эта вершина.

Начало формы

Вы можете поддержать наш проект и автора курса?

Конец формы

Определения и примеры

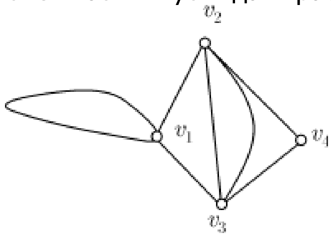
Матрицей смежности графа G с множеством вершин $\{v_1,\ldots,v_n\}$ (соответствующей данной нумерации вершин) называется матрица $A=(a_{ij})$ размера $n\times n$, в которой элемент a_{ij} равен числу ребер в G, соединяющих v_i и v_j. Можно получить несколько различных матриц смежности данного графа, меняя обозначения его вершин. Это приведет к изменению порядка строк и столбцов матрицы A. Но в результате всегда получится симметричная матрица из неотрицательных целых чисел, обладающая тем свойством, что сумма чисел в любой строке или столбце равна степени соответствующей вершины. Каждая петля учитывается в степени вершины один раз. Обратно, по любой заданной симметричной матрице из неотрицательных целых чисел легко построить граф, единственный с точностью до изоморфизма, для которого данная матрица является матрицей смежности. Отсюда следует, что теорию графов можно свести к изучению матриц особого типа.

Матрицей инциденций простого графа с множеством вершин v_1,... v_m называется матрица $A=(a_{ij})$ размера $m\times n$, у которой $a_{ij}=1$, если вершина v_j инцидентна ребру e_i, и $a_{ij}=0$, в противном случае.

Граф, у которого множество ребер пусто, называется вполне несвязным или пустым графом. Будем обозначать вполне несвязный граф с n вершинами через N_n. Простой граф, в котором любые две вершины смежны, называется полным графом. Полный граф с n вершинами обычно обозначается через K_n. Граф, у которого все вершины имеют одну и ту же степень, называется регулярным графом. Если степень каждой вершины равна r, то граф называется регулярным степени r. Регулярные графы степени 3 называются также кубическими, или трехвалентными графами. Каждый вполне несвязный граф является регулярным степени 0, а каждый полный граф K_n — регулярным степени $n-1$. Среди регулярных графов особенно интересны платоновы графы — графы, образованные вершинами и ребрами пяти правильных многогранников — платоновых тел: тетраэдра, куба, октаэдра, додекаэдра и икосаэдра.

Объединение и соединение двух графов. Существует несколько способов соединения двух графов для образования нового, большего графа. Рассмотрим два из них. Пусть даны два графа $G_1=(V(G_1),E(G_1))$, $G_2=(V(G_2),E(G_2))$, причем множества $V(G_1),V(G_2)$ не пересекаются. Тогда объединением $G_1\bigcup G_2$ графов G_1,G_2 называется граф с множеством вершин $V(G_1)\bigcup V(G_2)$ и семейством ребер $E(G_1)\bigcup E(G_2)$. Можно также образовать соединение графов G_1,G_2, обозначаемое G_1+G_2, взяв их объединение и соединив ребрами каждую вершину графа G_1 с каждой вершиной графа G_2.

Пример матрицы смежности. Пусть дан граф



Матрица смежности

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Обхватом графа называется длина его кратчайшего цикла. Множество E ребер графа называется независимым, если оно не содержит циклов, то есть никакая совокупность ребер из E не образует цикла. Диаметром δ связного графа G называется максимальное возможное расстояние между любыми двумя его вершинами. Центром графа G называется такая вершина v, что максимальное расстояние между v и любой другой вершиной является наименьшим из всех возможных. Это расстояние называется радиусом r. Таким образом,

$$r = \min_v(\max_w d(v, w)),$$

где $d(v, w)$ — расстояние между v и w.

Удаление ребер, мосты

При удалении ребра $\{a, b\}$ из графа G получается граф с теми же вершинами, что и граф G, и всеми ребрами, кроме ребра $\{a, b\}$. При удалении ребра из связного графа новый граф может оказаться как связным, так и несвязным. Ребро $\{a, b\}$ называется мостом графа G, если в графе, полученном после удаления из G ребра $\{a, b\}$, вершины a и b оказываются несвязными.

Существует несколько признаков мостов. Известно, что признак какого-то объекта может заменить его определение, то есть по признаку можно распознать объект. Рассмотрим признаки мостов.

Ребро $\{a,b\}$ является мостом в том и только в том случае, если $\{a,b\}$ — единственный путь, соединяющий вершины a и b .

Ребро $\{a,b\}$ является мостом в том и только в том случае, если найдутся две вершины c и d , такие, что каждый путь, соединяющий их, содержит a и b .

Ребро $\{a,b\}$ является мостом в том и только в том случае, если оно не принадлежит ни одному циклу.

Докажем справедливость третьего признака.

Прямая теорема. Если ребро $\{a,b\}$ не принадлежит ни одному циклу, то $\{a,b\}$ — мост.

Так как ребро $\{a,b\}$ не принадлежит ни одному циклу, при его удалении не останется пути, связывающего a и b , то есть $\{a,b\}$ является мостом.

Обратная теорема. Если ребро $\{a,b\}$ — мост, то $\{a,b\}$ не принадлежит ни одному циклу.

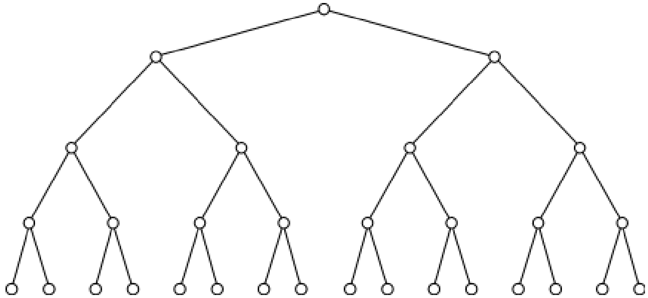
Если бы ребро $\{a,b\}$ принадлежало циклу, то при удалении ребра $\{a,b\}$ остался бы второй путь, связывающий a и b , то есть ребро $\{a,b\}$ не было бы мостом. Следовательно, $\{a,b\}$ не принадлежит циклу.

Деревья

Связные графы, в которых существует одна и только одна цепь, соединяющая каждую пару вершин, называются деревьями. Дерево можно определить и как связный граф, не содержащий циклов.

Пример. Кубок по настольному теннису разыгрывается по олимпийской системе. Встречи проводятся без "ничьих". К очередному туру допускается только победившая в предыдущем туре команда. Проигравшие команды выбывают из игры. Для завоевания кубка команда должна победить во всех турах. На участие в розыгрыше кубка поданы заявки от 16 команд.

Схема проведения игр изображается графом



Вершины нижнего "яруса" дерева интерпретируем как команды, участвующие в розыгрыше кубка, вершины второго снизу яруса — как команды-победительницы в $1/16$ финала, вершины третьего яруса — как команды-победительницы в $1/8$ финала и т.д.

Какую информацию можно получить с помощью этого дерева?

Непосредственно с него считываются:

Число всех участников розыгрыша кубка (число вершин нижнего "яруса").

Число этапов проведения розыгрыша (число "ярусов" из вершин в дереве, не считая нижнего).

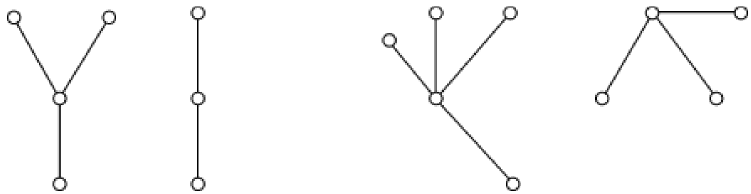
Число команд, участвующих в $1/8$ финала, в $1/4$ финала, в $1/2$ финала (число вершин, соответственно, в четвертом сверху ярусе, в третьем сверху ярусе, во втором сверху ярусе).

Число матчей, которые придется сыграть командам для выявления обладателя кубка (число вершин в графе без нижнего "яруса"). Хотя это число легко определяется и без дерева. (В каждом матче выбывает одна команда. Для того чтобы была выявлена команда-победительница, остальные должны выбыть из соревнования. Поэтому число матчей равно числу команд без одной, а именно 15).

Удобно считать, что граф, состоящий из одной изолированной вершины, тоже является деревом. Для каждой пары вершин дерева существует единственный соединяющий их путь. Лесом называется несвязный граф, представляющий объединение деревьев. Всякое ребро в дереве и в лесе является мостом (признак 3).

Пример.

Изображен лес, состоящий из четырех компонент, каждая из которых является деревом.



Заметим, что по определению деревья и леса являются простыми графами. По многим показателям дерево представляет собой простейший нетривиальный тип графа.

Известно, что в связном графе G удаление одного ребра, принадлежащего некоторому выбранному циклу, не нарушает связности оставшегося графа. Применим эту процедуру к одному из оставшихся циклов, и так до тех пор, пока не останется ни одного цикла. В результате получим дерево, связывающее все вершины графа G, оно называется остовным деревом или остовом , или каркасом графа G.

В общем случае обозначим через G произвольный граф с n вершинами, m ребрами и k компонентами. Применяя описанную выше процедуру к каждой компоненте G, получим в результате граф, называемый остовным лесом. Число удаленных в этой процедуре ребер называется циклическим рангом или циклическим числом графа G и обозначается через $\gamma(G)$. Мы видим, что $\gamma(G) = m - n + k$ и является неотрицательным целым числом. Таким образом, циклический ранг дает меру связности графа: циклический ранг дерева равен нулю, а циклический ранг циклического графа равен единице. Удобно также определить коциклический ранг или ранг разреза графа G как число ребер в его остовном лесе. Коциклический ранг обозначается через $\chi(G)$ и равен $n - k$.

10 ЗАНЯТИЕ №10

10.1 Комбинаторика. Задачи по комбинаторике

1. Расписание одного дня содержит 5 уроков. Определить количество таких расписаний при выборе из одиннадцати дисциплин.

Ответ: 55 440.

2. Комиссия состоит из председателя, его заместителя и еще пяти человек. Сколькими способами члены комиссии могут распределять между собой обязанности?

Ответ: 42.

3. Сколькими способами можно выбрать трех дежурных из группы в 20 человек?

Ответ: 1 140.

4. Сколько различных звукосочетаний можно взять на десяти выбранных клавишах рояля, если каждое звукосочетание может содержать от трех до десяти звуков?

Ответ: 968.

5. В вазе стоят 10 красных и 5 розовых гвоздик. Сколькими способами можно выбрать из вазы пять гвоздик одного цвета?

Ответ: 253.

6. Номера трамвайных маршрутов иногда обозначаются двумя цветными фонарями. Какое количество различных маршрутов можно обозначить, если использовать фонари восьми цветов?

Ответ: 64.

7. Чемпионат, в котором участвуют 16 команд, проводится в два круга (т.е. каждая команда дважды встречается с любой другой). Определить, какое количество встреч следует провести.

Ответ: 240.

8. Замок открывается только в том случае, если набран определенный трехзначный номер. Попытка состоит в том, что набирают наугад три цифры из заданных пяти цифр. Угадать номер удалось только на последней из всех возможных попыток. Сколько попыток предшествовало удачной?

Ответ: 124.

9. Из группы в 15 человек выбирают четырех участников эстафеты 800+400+200+100. Сколькими способами можно расставить спортсменов по этапам эстафеты?

Ответ: 32 760.

10. Команда из пяти человек выступает на соревнованиях по плаванию, в которых участвуют еще 20 спортсменов. Сколькими способами могут распределиться места, занятые членами этой команды?

Ответ: 25!/20!.

11. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске две ладьи так, чтобы одна не могла взять другую? (Одна ладья может взять другую, если она находиться с ней на одной горизонтали или на одной вертикали шахматной доски.)

Ответ: 3 126.

12. Две ладьи различного цвета расположены на шахматной доске так, что каждая может взять другую. Сколько существует таких расположений?

Ответ: 896.

13. Порядок выступления восьми участников конкурса определяется жребием. Сколько различных исходов жеребьевки при этом возможно?

Ответ: 8!.

14. Тридцать человек разбиты на три группы по десять человек в каждой. Сколько может быть различных составов групп?

Ответ: $30!/(10!)^3$.

15. Сколько четырехзначных чисел, делящихся на 5, можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 7, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр?

Ответ: 42.

16. Сколько различных светящихся колец можно сделать, расположив по окружности 10 разноцветных лампочек (кольца считаются одинаковыми при одинаковом порядке следования цветов)?

Ответ: 9!.

17. На книжной полке помещается 30 томов. Сколькими способами их можно расставить, чтобы при этом первый и второй тома не стояли рядом?

Ответ: $30! - 2 \cdot 29!$.

18. Четыре стрелка должны поразить восемь мишеней (каждый по две). Сколькими способами они могут распределить мишени между собой?

Ответ: 2 520.

19. Из группы в 12 человек ежедневно в течение 6 дней выбирают двух дежурных. Определить количество различных списков дежурных, если каждый человек дежурит один раз.

Ответ: $12!/(2!)^{6}$.

20. Сколько четырехзначных чисел, составленных из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, содержат цифру 3 (цифры в числах не повторяются)?

Ответ: 204.

21. Десять групп занимаются в десяти расположенных подряд аудиториях. Сколько существует вариантов расписания, при которых группы №1 и №2 находились бы в соседних аудиториях?

Ответ: $2 \cdot 9!$.

22. В турнире участвуют 16 шахматистов. Определить количество различных расписаний первого тура (расписания считаются различными, если отличаются участниками хотя бы одной партии; цвет фигур и номер доски не учитываются).

Ответ : 2 027 025.

23. Шесть ящиков различных материалов доставляются на пять этажей стройки. Сколькими способами можно распределить материалы по этажам? В скольких вариантах на пятый этаж доставлен какой-либо один материал?

Ответ: 5^6; $6 \cdot 4^5$.

24. Два почтальона должны разнести 10 писем по 10 адресам. Сколькими способами они могут распределить работу?

Ответ: 2^{10}.

25. Поезд метро делает 16 остановок, на которых выходят все пассажиры. Сколькими способами могут распределиться между этими остановками 100 пассажиров, вошедших в поезд на конечной остановке?

Ответ: 16^{100}.

26. Сколько трехзначных чисел, делящихся на 3, можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр?

Ответ: 40.

27. Собрание из 80 человек избирает председателя, секретаря и трех членов ревизионной комиссии. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: $80!(3! \cdot 75!)$.

28. Из 10 теннисисток и 6 теннисистов составляют 4 смешанные пары. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: $10!/48$.

29. Три автомашины №1,2,3 должны доставить товар в шесть магазинов. Сколькими способами можно использовать машины, если грузоподъемность каждой из них позволяет взять товар сразу для всех магазинов и если две машины в один и тот же магазин не направляются? Сколько вариантов маршрута возможно, если решено использовать только машину №1?

Ответ: $3^6 \cdot 6!$.

30. Четверо юношей и две девушки выбирают спортивную секцию. В секцию хоккея и бокса принимают только юношей, в секцию художественной гимнастики – только девушек, а в лыжную и конькобежную секции – и юношей, и девушек. Сколькими способами могут распределиться между секциями эти шесть человек?

Ответ: 2304.

31. Из лаборатории, в которой работает 20 человек, 5 сотрудников должны уехать в командировку. Сколько может быть различных составов этой группы, если начальник лаборатории, его заместитель и главный инженер одновременно уезжать не должны?

Ответ: 15 368.

32. В фортепьянном кружке занимаются 10 человек, в кружке художественного слова –15, в вокальном кружке – 12, в фотокружке – 20 человек. Сколькими способами можно составить бригаду из четырех чтецов, трех пианистов, пяти певцов и одного фотографа?

Ответ: 15!10/7!

33. Двадцать восемь костей домино распределены между четырьмя игроками. Сколько возможно различных распределений?

Ответ: $28!/(7!\}^4$.

34. Из группы в 15 человек должны быть выделены бригадир и 4 члена бригады. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 15 015.

35. Пять учеников следует распределить по трем параллельным классам. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 3^5.

36. Лифт останавливается на 10 этажах. Сколькими способами могут распределиться между этими остановками 8 пассажиров, находящихся в лифте?

Ответ: 10^8.

37. Восемь авторов должны написать книгу из шестнадцати глав. Сколькими способами возможно распределение материала

между авторами, если два человека напишут по три главы, четыре – по две, два – по одной главе книги?

Ответ: $16!/(2^6 \cdot 3^2)$.

38. В шахматном турнире участвуют 8 шахматистов третьего разряда, 6 – второго и 2 перворазрядника. Определить количество таких составов первого тура, чтобы шахматисты одной категории встречались между собой (цвет фигур не учитывается).

Ответ: 420.

39. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составляются всевозможные пятизначные числа: не содержащие одинаковых цифр. Определить количество чисел, в которых есть цифры 2, 4 и 5 одновременно.

Ответ: 1800.

40. Семь яблок и два апельсина надо положить в два пакета так, чтобы в каждом пакете был хотя бы один апельсин и чтобы количество фруктов в них было одинаковым. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 105.

41. Буквы азбуки Морзе состоят из символов (точек и тире). Сколько букв можно изобразить, если потребовать, чтобы каждая буква содержала не более пяти символов?

Ответ: 62.

42. Номер автомобильного прицепа состоит из двух букв и четырех цифр. Сколько различных номеров можно составить, используя 30 букв и 10 цифр?

Ответ: $9 \cdot 10^6$.

43. Садовник должен в течение трех дней посадить 10 деревьев. Сколькими способами он может распределить по дням работу, если будет сажать не менее одного дерева в день?

Ответ: 36.

44. Из вазы, где стоят 10 красных и 4 розовых гвоздики, выбирают один красный и два розовых цветка. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 60.

45. Двенадцати ученикам выданы два варианта контрольной работы. Сколькими способами можно посадить учеников в два ряда, чтобы у сидящих рядом не было одинаковых вариантов, а у сидящих друг за другом был один и тот же вариант?

Ответ: $2(6!)^2$.

46. Каждый из десяти радистов пункта А старается установить связь с каждым из двадцати радистов пункта Б. Сколько возможно различных вариантов такой связи?

Ответ: 2^{200}.

47. Шесть ящиков различных материалов доставляют на восемь этажей стройки. Сколькими способами можно распределить материалы по этажам? В скольких вариантах на восьмой этаж будет доставлено не более двух материалов?

Ответ: 8^6; $8^6 - 13 \cdot 7^5$.

48. Сколькими способами можно построить в одну шеренгу игроков двух футбольных команд так, чтобы при этом два футболиста одной команды не стояли рядом?

Ответ: $2(11!)^2$.

49. На книжной полке книги по математике и по логике – всего 20 книг. Показать, что наибольшее количество вариантов комплекта, содержащего 5 книг по математике и 5 книг по логике, возможно в том случае, когда число книг на полке по каждому предмету равно 10.

Ответ: $C^5_{10-x} \cdot C^5_{10+x} \le (C^5_{10})^2$.

50. Лифт, в котором находятся 9 пассажиров, может останавливаться на десяти этажах. Пассажиры группами выходят по два, три и четыре человека. Сколькими способами это может произойти?

Ответ: 10!/4.

51. «Ранним утром на рыбалку улыбающийся Игорь мчался босиком». Сколько различных осмысленных предложений можно составить, используя часть слов этого предложения, но не изменяя порядка их следования?

Ответ: 23.

52. В шахматной встрече двух команд по 8 человек участники партий и цвет фигур каждого участника определяются жеребьевкой. Каково число различных исходов жеребьевки?