



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Информационные технологии»

Учебно-методическое пособие
к проведению лабораторных и практических
работ по теме

«Статистический анализ временных рядов»

по дисциплинам
«Статистические методы обработки
информации»
«Разработка и стандартизация ПС и ИТ»

Авторы
Соболь Б.В., Пешхоев И.М.,
Остроух Е.Н., Богданова Н.Ю.

Ростов-на-Дону, 2023

Аннотация

Методические указания к проведению лабораторных и практических работ по теме “Статический анализ временных рядов” предназначены для студентов направлений 09.03.02-Информационные системы и технологии, WEB-ориентированные информационно-аналитические системы и 09.03.03- Прикладная информатика; очной, очно-заочной, заочной форм обучения.

Авторы

Соболь Борис Владимирович

Пешхоев Иса Мусаевич

Остроух Евгений Николаевич

Богданова Наталья Юрьевна

Оглавление

1. Анализ временных рядов	4
1.1 Показатели анализа рядов динамики	5
1.2 Средние показатели рядов динамики	6
1.3 Выявление основной тенденции ряда динамики	8
1.4 Выравнивание временного ряда методом скользящего среднего	13
1.5 Прогнозирование методом скользящего среднего	18
1.6 Прогнозирование методом экспоненциального сглаживания	19
1.7 Сезонно-декомпозиционная прогностическая модель Хольта-Уинтерса	24
1.8 Применение рядов Фурье	32
Задания для самостоятельной работы	39
Литература	45

1. АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Временной ряд (другие названия: *хронологический ряд*, *динамический ряд*, *ряд динамики*) — это последовательность упорядоченных во времени числовых показателей, характеризующих уровень развития изучаемого явления.

Временные ряды различаются по следующим признакам.

1. По времени — *моментные* и *интервальные ряды*.

Интервальный ряд динамики — последовательность, в которой уровень явления относится к результату, накопленному или вновь произведенному за определенный интервал времени. Таковы, например, ряды показателей объема продукции по месяцам года, количества отработанных человеко-дней по отдельным периодам и т. д.

Если же уровень ряда показывает фактическое наличие изучаемого явления в конкретный момент времени, то совокупность уровней образует *моментный ряд динамики*. Примерами моментных рядов могут быть последовательности показателей численности населения на начало года, величины запаса какого-либо материала на начало периода, курсы валют на определенную дату и т. д.

Важное аналитическое отличие моментных рядов от интервальных состоит в следующем:

сумма уровней интервального ряда дает вполне реальный показатель — общий выпуск продукции за год, общие затраты рабочего времени, общий объем продаж акций и т. д.,

сумма уровней моментного ряда, хотя иногда и подсчитывается, но реального содержания, как правило, не имеет.

2. По форме представления уровней — *ряды абсолютных, относительных и средних величин*.

3. По расстоянию между датами или интервалам времени выделяют *полные и неполные хронологические ряды*.

Полные ряды динамики имеют место, когда даты регистрации или окончания периодов следуют друг за другом с равными интервалами. Это *равноотстоящие ряды динамики*.

Неполные ряды динамики — когда принцип равных интервалов времени не соблюдается.

4. По числу показателей можно выделить *изолированные и комплексные (многомерные) ряды динамики*.

Изолированный ряд динамики мы имеем, если ведется анализ во времени одного показателя.

Статистический анализ временных рядов

Комплексный ряд динамики получаем в том случае, когда в хронологической последовательности дается система показателей, связанных между собой единством процесса или явления.

5. *Стационарные и нестационарные ряды динамики* — в зависимости от наличия основной тенденции изучаемого процесса.

Если математическое ожидание значения признака и дисперсия (основные характеристики случайного процесса) не зависят от времени, то процесс считается стационарным и ряды динамики считают *стационарными*.

Экономические процессы во времени обычно не являются стационарными, так как содержат основную тенденцию развития.

1.1 Показатели анализа рядов динамики

Обозначим через y_t значения уровней ряда динамики

Для анализа характера изменения ряда динамики во времени применяют следующие показатели: абсолютные приросты (абсолютные изменения); темпы роста (темпы изменения); темпы прироста (снижения).

Абсолютный прирост (или *абсолютное изменение*) — разность между текущим и предыдущим уровнями ряда.

Темп роста — отношение текущего уровня ряда к предыдущему уровню, может выражаться в процентах.

Темп прироста — процентное отношение абсолютного прироста к базовому уровню, или разность между темпом роста в процентах и 100%.

Пример 1.1. В табл.1.1 приведены показатели выручки предприятия за 2006-2009гг. Рассчитать ежегодные абсолютные приросты, темпы роста и темпы прироста, и эти же показатели по отношению к базисному, 2006-му году.

Таблица 1.1

Показатели	2006г.	2007г.	2008г.	2009г.
Выручка, тыс. руб.	123 453,00	132 322,00	143 232,00	134 349,00

Решение. Нам нужно рассчитать цепные и базисные абсолютные приросты, темпы роста и темпы прироста.

Введите данные из табл.1.1 в программе *Excel*, как показано на рис.1.1, в диапазоне A1:E2.

Статистический анализ временных рядов

	А	В	С	Д	Е
1	Показатели	2006г.	2007г.	2008г.	2009г.
2	Выручка, тыс. руб.	123 453,00	132 322,00	143 232,00	134 349,00
3	Абсолютные приросты, тыс. руб.:				
4	базисные (к 2006 году)	-	8 869,00	19 779,00	10 896,00
5	цепные (по годам)	-	8 869,00	10 910,00	-8 883,00
6	Темпы роста базисные				
7	коэффициенты	1,0000	1,0718	1,1602	1,0883
8	проценты	100,00%	107,18%	116,02%	108,83%
9	Темпы роста цепные (по отношению к предыдущему году):				
10	коэффициенты	-	1,0718	1,0825	0,9380
11	проценты	-	107,18%	108,25%	93,80%
12	Темпы прироста, %:				
13	к 2006 году	-	7,18%	16,02%	8,83%
14	ежегодные (цепные)	-	7,18%	8,25%	-6,20%
15	Абсолютное значение 1% прироста, тыс. руб.	-	1 234,53	1 323,22	1 432,32

Рис. 1.1

1.2 Средние показатели рядов динамики

Средние показатели рядов динамики являются обобщающей характеристикой его абсолютных уровней, абсолютной скорости и интенсивности изменения уровней ряда динамики. Различают следующие средние показатели: *средний уровень ряда динамики, средний абсолютный прирост, средний темп роста и прироста.*

Средний уровень ряда динамики рассчитывается по средней хронологической.

Методы расчета среднего уровня моментного и интервального рядов различны.

В интервальном ряду динамики $(y_1, y_2, \dots, y_t, \dots, y_n)$ с *равными периодами времени* расчет среднего уровня производится по формуле *простой средней арифметической*:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_t \quad (1.1)$$

Статистический анализ временных рядов

Примерами интервальных рядов с равными периодами являются: объемы ежемесячных продаж за один год или за несколько лет; ежегодные объемы производства продукции за несколько лет подряд; ежемесячные показатели потребления энергии; ежегодные показатели рождаемости и т.п.

Если интервальный ряд динамики имеет *неравные промежутки времени*, то средний уровень ряда вычисляется по формуле *взвешенной средней арифметической*:

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^n y_i t_i / \sum_{i=1}^n t_i, \quad (1.2)$$

где t_i — длительности промежутков времени, в течение которых уровень не изменяется.

Для моментного ряда с *равноотстоящими уровнями* средняя хронологическая рассчитывается по формуле

$$\bar{y} = \left(\frac{1}{2} y_1 + y_2 + \dots + \frac{1}{2} y_n \right) / (n - 1), \quad (1.3)$$

где n — число уровней ряда.

Примерами моментных рядов с равноотстоящими уровнями являются: показатели температуры, замеренные несколько дней подряд в одно и то же время суток; ежемесячные показатели курсов валют или ценных бумаг на конец последнего дня; показатели цены продукции на начало каждого месяца и т.п.

Средняя хронологическая для моментного ряда динамики с *не равноотстоящими уровнями* вычисляется по формуле:

$$\bar{y} = \frac{(y_1 + y_2)t_1 + (y_2 + y_3)t_2 + \dots + (y_{n-1} + y_n)t_{n-1}}{2 \sum_{i=1}^{n-1} t_i}, \quad (1.4)$$

где t_i — величина промежутка времени между датами, соответствующими уровням y_i и y_{i+1} .

Пример 1.2. Найти среднее значение для временного ряда, представленного в табл. 1.2.

Статистический анализ временных рядов

Таблица 1.2

Объемы производства продукции предприятия за 2009г., млн. руб.

Месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Объем	1,1	1,2	1,1	1,3	1,4	1,3	1,4	1,2	1,3	1,2	1,4	1,1

Решение. Введем данные на лист программы *Excel*, как показано на рис. 1.2. Мы имеем дело с интервальным рядом с равными периодами, поэтому применяем формулу (1.1), т.е. введите в ячейку B3 формулу:

$$=СУММ(B2:M2)/12.$$

Полученное значение представляет собой среднемесячный объем производства продукции.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	Объем	1,1	1	1	1	1	1	1,4	1	1	1	1	1,1
3	Среднее	1,25											

Рис. 1.2

1.3 Выявление основной тенденции ряда динамики

Важной задачей статистики при анализе рядов динамики является определение основной тенденции развития.

Одним из приемов выявления основной тенденции является *метод укрупнения интервалов*. Этот способ основан на укрупнении периодов времени, к которым относятся уровни ряда. Например, ряд ежесуточного выпуска продукции заменяется рядом месячного выпуска продукции и т.д.

Наиболее эффективным способом выявления основной тенденции развития является *аналитическое выравнивание*.

Под *аналитическим выравниванием* понимают определение основной проявляющейся во времени тенденции развития изучаемого явления. Развитие предстает перед исследователем как бы в зависимости только от течения времени.

В итоге выравнивания временного ряда получают наиболее общий, суммарный, проявляющийся во времени результат действия всех причинных факторов. Отклонение конкретных уровней ряда от уровней, соответствующих общей тенденции, объясняют

Статистический анализ временных рядов

действием факторов, проявляющихся случайно или циклически. В результате приходят к трендовой модели

$$Y_t = f(t) + \varepsilon_t,$$

где $f(t)$ — уровень, определяемый тенденцией развития; ε_t — случайное или циклическое отклонение от тенденции.

Целью аналитического выравнивания динамического ряда является определение аналитической или графической зависимости $f(t)$.

На практике по имеющемуся временному ряду задают вид и находят параметры функции $f(t)$, а затем анализируют поведение отклонений от тенденции. Функцию $f(t)$ выбирают таким образом, чтобы она давала содержательное объяснение изучаемого процесса.

Аналитическое выравнивание может быть осуществлено по любому рациональному многочлену. Выбор функции производится на основе анализа характера закономерностей динамики данного явления.

Часто при аналитическом выравнивании динамических рядов могут быть использованы следующие зависимости:

линейная $f(t) = a_0 + a_1 t$;

степенная $f(t) = b_0 \cdot t^{b_1}$;

логарифмическая $f(t) = b_0 + b_1 \cdot \ln t$;

экспоненциальная $f(t) = b_0 \cdot e^{b_1 t}$;

полиномиальная $f(t) = b_0 + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2 \dots + b_k \cdot t^k$;

гиперболическая $\bar{y}_x = b_0 + b_1 \cdot \frac{1}{x}$;

экспоненциальная $f(t) = e^{a_0 + a_1 t}$;

тригонометрический многочлен

$$Y_t = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m \left(a_k \cdot \cos \left(k \frac{2\pi t}{n} \right) + b_k \cdot \sin k \left(\frac{2\pi t}{n} \right) \right),$$

(см. ниже п. 1.8) и т.п.

Статистический анализ временных рядов

Оценка параметров a_0, a_1, a_2, \dots осуществляется *методом наименьших квадратов*, который обеспечивает наименьшую сумму квадратов отклонений фактических уровней от выравненных:

$$\sum_i (Y_i - f(t))^2 \rightarrow \min.$$

В программе *Excel* при построении диаграмм доступна процедура «Добавить линию тренда», которая методом наименьших квадратов подбирает параметры для пяти первых из перечисленных выше функций.

Пример 1.3. Найти для временного ряда (табл.1.3) наиболее подходящую зависимость.

Таблица 1.3

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_i	4,3	4,1	4,6	5	6	6,6	5,8	7	6,7	10	11	14

Решение. Введите данные в диапазоне A1:M2, как показано на рис.1.3.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	y_i	4,3	4,1	4,6	5	6	6,6	5,8	7	6,7	10	11	14

Рис. 1.3

Выделите диапазон A2:M2 и постройте тип диаграммы «График», нажмите кнопку «Готово».

Щелкните левой кнопкой мыши в области диаграммы (т.е. выделите диаграмму) и выполните команду меню «Диаграмма — Добавить линию тренда», в появившемся окне «Линия тренда» выберите тип «Линейная», перейдите на вкладку «Параметры» (рис.1.4) и поставьте флажок в строках «показывать уравнение на диаграмме» и «поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации (R^2)», и нажмите кнопку «Ок».

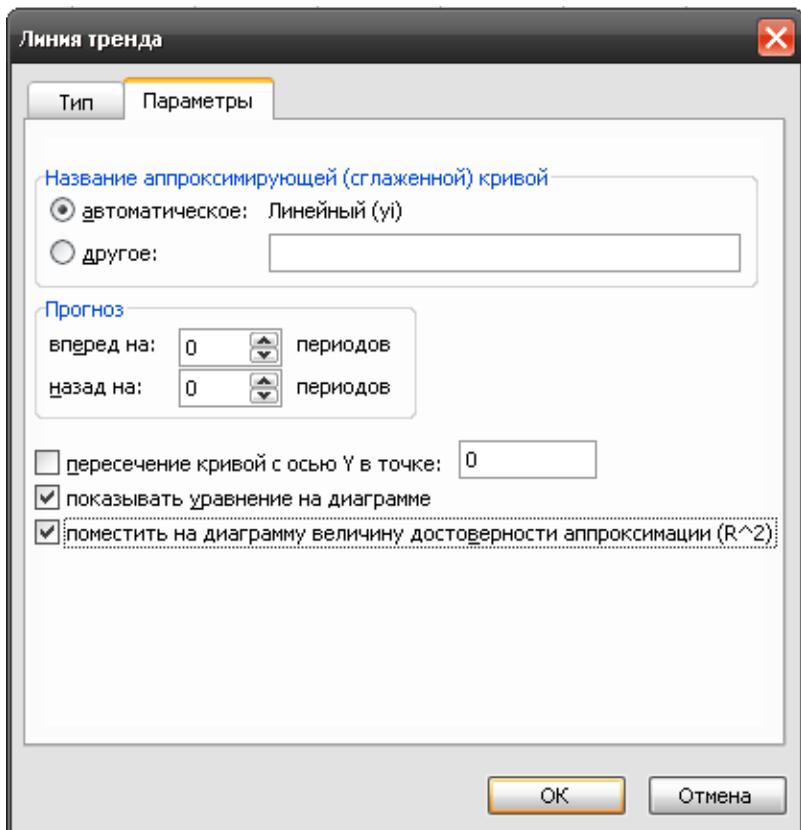


Рис.1.4

Получим диаграмму, представленную на рис.1.5. Уравнение линейной зависимости имеет вид $y = 0,7598t + 2,153$ (на диаграмме указана переменная x), величина достоверности $R^2 = 0,8089$.

Статистический анализ временных рядов

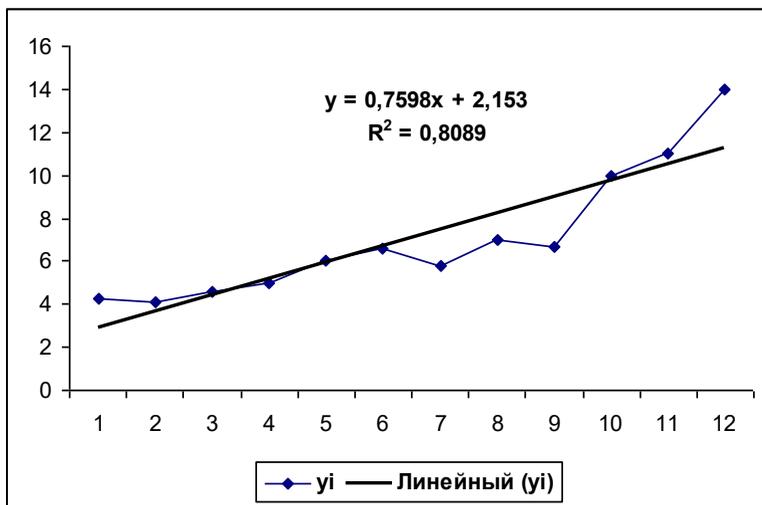


Рис.1.5

Щелкните по области диаграммы правой кнопкой мыши, выберите в контекстном меню команду «Копировать», затем щелкните на свободном участке листа *Excel* правой кнопкой мыши, выберите в контекстном меню команду «Вставить», мы получим вторую диаграмму.

Щелкните на второй диаграмме правой кнопкой мыши на линии тренда, выберите в контекстном меню команду «Очистить». Прямая линия тренда и уравнение исчезнут с диаграммы.

Щелкните по области второй диаграммы левой кнопкой мыши (выделите диаграмму), выполните команду меню «Диаграмма — Добавить линию тренда», в появившемся окне «Линия тренда» выберите тип «Логарифмическая», перейдите на вкладку «Параметры» (рис.1.4) и поставьте флажок в строках «показывать уравнение на диаграмме» и «поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации (R^2)», и нажмите кнопку «Ок».

На диаграмме будет уравнение зависимости $y = 3,0747\ln(t) + 1,9705$ и величина достоверности аппроксимации $R^2 = 0,5821$.

Аналогично можно получить следующие уравнения зависимости и показатели достоверности:

Степенная: $y = 3,2095t^{0,4321}$, $R^2 = 0,7126$;

Экспоненциальная: $y = 3,4022e^{0,1017t}$, $R^2 = 0,8993$;

Полиномиальная степени 2: $y = 0,0971t^2 - 0,5022t + 5,0977$,

Статистический анализ временных рядов

$$R^2 = 0,9322.$$

Полиномиальная степени 3: $y = 0,0168t^3 - 0,2315t^2 + 1,2752t + 2,798$, $R^2 = 0,9644$ (рис.1.6).

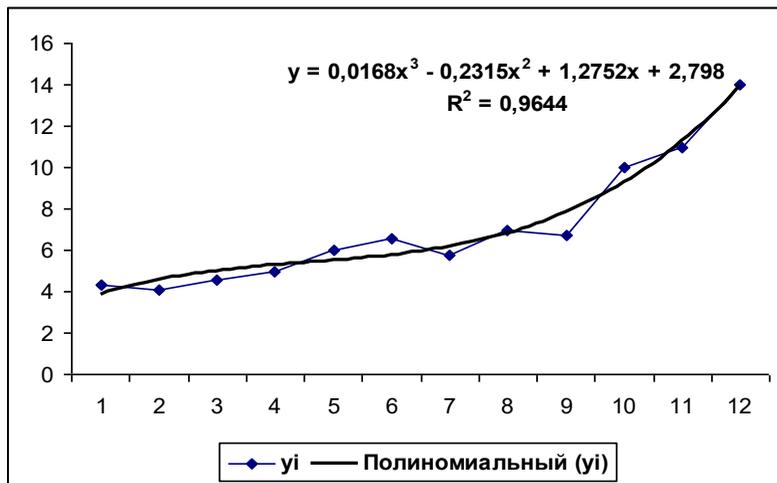


Рис. 1.6

Вывод. Наибольшую величину достоверности аппроксимации имеет полиномиальная функция, причем, чем выше степень, тем более точно приливается график функции к экспериментальным точкам.

Замечание. Полиномиальной функцией можно аппроксимировать зависимость с любой степенью точности, подбирая достаточно высокую степень. Однако практической пользы от этого мало, так как, например, для прогнозирования такой многочлен не годится.

1.4 Выравнивание временного ряда методом скользящего среднего

Рассмотрим временной ряд:

$$(y_1, y_2, \dots, y_t, \dots, y_n).$$

Метод простого скользящего среднего заключается в следующем:

Выберем число уровней, на основании которых будет вычислено скользящее среднее, обозначим это число m .

В зависимости от того, является ли m четным или нечетным, выравненные значения \bar{y}_t вычисляются по формулам, которые мы приведем для конкретных значений m :

Статистический анализ временных рядов

1) $m = 2$ (три точки);

$$\bar{y}_t = \frac{1}{2} \left(\frac{y_{t-1}}{2} + y_t + \frac{y_{t+1}}{2} \right), \quad t = 2, 3, \dots, n-1; \quad (1.5)$$

$$\bar{y}_1 = (7y_1 + 4y_2 - 2y_3)/9, \quad \bar{y}_n = (7y_n + 4y_{n-1} - 2y_2)/9.$$

2) $m = 3$ (три точки);

$$\bar{y}_t = \frac{1}{3} (y_{t-1} + y_t + y_{t+1}), \quad t = 2, 3, \dots, n-1;$$

$$\bar{y}_1 = (7y_1 + 4y_2 - 2y_3)/9, \quad \bar{y}_n = (7y_n + 4y_{n-1} - 2y_2)/9. \quad (1.6)$$

3) $m = 4$ (пять точек);

$$\bar{y}_t = \frac{1}{4} \left(\frac{y_{t-2}}{2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + \frac{y_{t+2}}{2} \right), \quad t = 3, 4, \dots, n-2;$$

$$\bar{y}_1 = (8y_1 + 2y_2 - y_3)/9, \quad \bar{y}_n = (8y_n + 2y_{n-1} - y_{n-2})/9,$$

$$\bar{y}_2 = (7y_1 + 4y_2 + y_3 + 3y_4)/15,$$

$$\bar{y}_{n-1} = (7y_n + 4y_{n-1} + y_{n-2} + 3y_{n-3})/15. \quad (1.7)$$

4) $m = 5$ (пять точек);

$$\bar{y}_t = \frac{1}{5} (y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + y_{t+2}), \quad t = 3, 4, \dots, n-2;$$

$$\bar{y}_1 = (8y_1 + 2y_2 - y_3)/9, \quad \bar{y}_n = (8y_n + 2y_{n-1} - y_2)/9,$$

$$\bar{y}_2 = (7y_1 + 4y_2 + y_3 + 3y_4)/15,$$

$$\bar{y}_{n-1} = (7y_n + 4y_{n-1} + y_{n-2} + 3y_{n-3})/15. \quad (1.8)$$

Статистический анализ временных рядов

Пример 1.4. В табл.1.4 приведены ежемесячные объемы продаж прохладительных напитков торговой сетью за два года. Провести выравнивание временного ряда несколькими способами, используя формулы (1.5)-(1.8).

Таблица 1.4

Месяцы	Продажи	Месяцы	Продажи
Январь 2007	1540	Январь 2008	3005
Февраль 2007	1738	Февраль 2008	3271
Март 2007	1692	Март 2008	3050
Апрель 2007	1997	Апрель 2008	2899
Май 2007	1683	Май 2008	3092
Июнь 2007	2004	Июнь 2008	3153
Июль 2007	2422	Июль 2008	3140
Август 2007	2005	Август 2008	3375
Сентябрь 2007	1898	Сентябрь 2008	2867
Октябрь 2007	2016	Октябрь 2008	2894
Ноябрь 2007	2121	Ноябрь 2008	3131
Декабрь 2007	2160	Декабрь 2008	3019

Решение. Введите данные из таблицы 1.4 в программу *Excel*.

Сначала введите метки-тексты «Месяцы», «Продажи» в ячейки A1 и B1 (рис.1.7).

В ячейку A2 введите дату в сокращенном виде «янв.07» (без кавычек!), затем ячейку A2 протяните маркером заполнения вниз до A25.

В ячейках B2:B25 введите показатели продаж.

Теперь будем вычислять выравненные значения.

Введите в ячейку C1 текст-метку «Формула 1.5».

В ячейку C2 введите формулу $=(7*B2+4*B3-2*B4)/9$.

В ячейку C3 введите формулу $=(B2/2+B3+B4/2)/2$. Протяните ячейку C3 маркером заполнения вниз до C24.

В ячейку C25 введите формулу $=(7*B25+4*B24-2*B23)/9$.

Статистический анализ временных рядов

	А	В	С	Д	Е	Ф
1	Месяцы	Продажи	Формула 10.5	Формула 10.6	Формула 10.7	Формула 10.8
2	январь.07	1540	1595	1595	1585	1585
3	февраль.07	1738	1677	1657	1665	1665
4	март.07	1692	1779	1809	1750	1749
5	апрель.07	1997	1842	1791	1835	1837
6	май.07	1683	1842	1895	1925	1935
7	июнь.07	2004	2028	2037	2006	1995
8	июль.07	2422	2213	2144	2056	2031
9	август.07	2005	2083	2109	2062	2055
10	сентябрь.07	1898	1954	1973	2054	2067
11	октябрь.07	2016	2013	2012	2088	2124
12	ноябрь.07	2121	2105	2099	2233	2265
13	декабрь.07	2160	2362	2429	2475	2492
14	январь.08	3005	2860	2812	2734	2704
15	февраль.08	3271	3149	3109	2929	2887
16	март.08	3050	3068	3073	3031	3011
17	апрель.08	2899	2985	3014	3063	3074
18	май.08	3092	3059	3048	3085	3097
19	июнь.08	3153	3135	3128	3117	3108
20	июль.08	3140	3202	3223	3131	3114
21	август.08	3375	3189	3127	3110	3098
22	сентябрь.08	2867	3001	3045	3064	3075
23	октябрь.08	2894	2947	2964	3034	3050
24	ноябрь.08	3131	3044	3015	3056	3056
25	декабрь.08	3019	3097	3097	3093	3093

Рис.1.7

Выделите диапазон A1:C25 и с помощью «Мастера диаграмм» постройте диаграмму «График». Получим рис.1.8.

Статистический анализ временных рядов

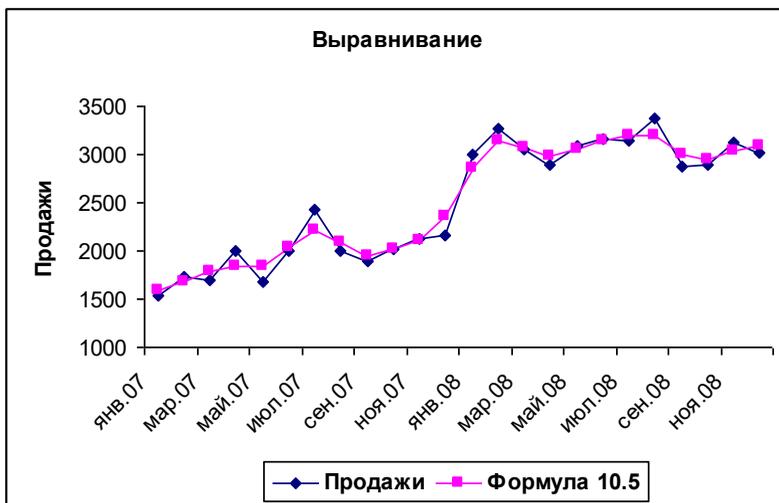


Рис.1.8

Введите аналогично соответствующие формулы в столбцах D, E и F и постройте диаграммы. Для контроля сравните свои результаты с таблицей на рис.1.7.

На рис.1.9 приведен результат выравнивания с помощью формул 1.8. Как видим, чем больше точек используется, тем более гладкой оказывается выравнивающая линия.

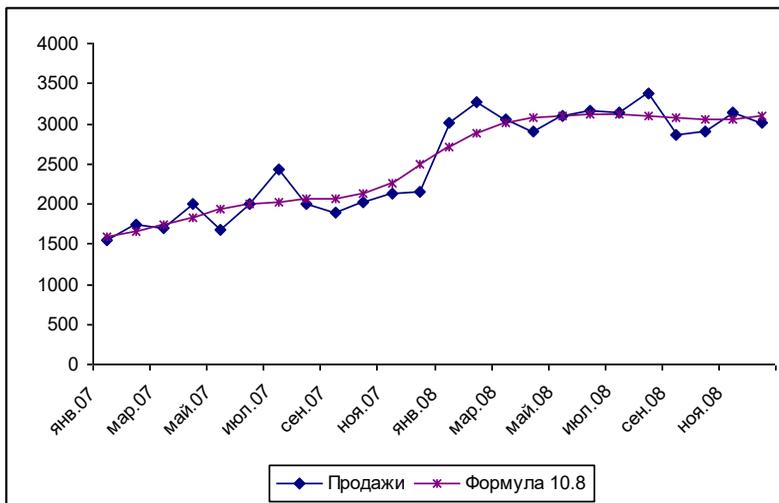


Рис.1.9

1.5 Прогнозирование методом скользящего среднего

Формула скользящего среднего для прогноза следующего значения имеет вид:

$$F_{i+1} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m A_{i-j+1}, \quad i = m, m+1, \dots, N. \quad (1.9)$$

A_j — фактическое значение в момент времени j , F_j — прогнозируемое значение в момент времени j , m — число предшествующих периодов, входящих в скользящее среднее.

Чем меньше число результатов наблюдений, на основании которых вычислено скользящее среднее, тем точнее оно отражает изменения в уровне базовой линии. Скользящее среднее, в отличие от простого среднего для всей выборки, содержит сведения о тенденциях изменения данных. Как правило, прогноз с применением скользящего среднего рассматривается как прогноз на период, непосредственно следующий за периодом наблюдения.

Пример 1.5. Введите в диапазоне A2:A18 исходные данные, как показано на рис.1.10.

Введите в ячейке B5 формулу $= (A2+A3+A4)/3$. Затем ячейку B5 протяните маркером заполнения вниз до B19.

	A	B
1	y	f
2	235	
3	234	
4	227	
5	222	232,0
6	218	227,7
7	199	222,3
8	197	213,0
9	203	204,7
10	208	199,7
11	212	202,7
12	217	207,7
13	232	212,3
14	230	220,3
15	220	226,3
16	213	227,3
17	213	221,0
18	219	215,3
19		215,0

Рис. 1.10

Статистический анализ временных рядов

Выделите диапазон A1:B19 и постройте «Мастером диаграмм» тип диаграммы «График». А рис.1.11 показан результат прогнозирования методом скользящего среднего.

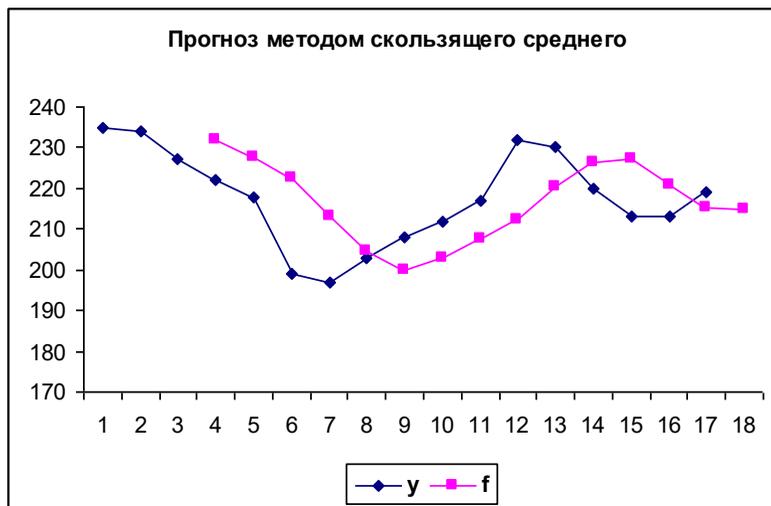


Рис.1.11

1.6 Прогнозирование методом экспоненциального сглаживания

Формула экспоненциального сглаживания в простейшем случае имеет вид

$$f_t = (1 - \alpha)f_{t-1} + \alpha y_t = f_{t-1} + \alpha(y_t - f_{t-1}), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (1.10)$$

В качестве начального значения f_t обычно выбирают среднее значение ряда.

Рекомендуемые автором этой модели (английский математик Р. Браун) значения параметра α заключены между 0,1 и 0,3.

Для подбора оптимального параметра прогнозирования α необходимо провести сглаживание временного ряда с помощью нескольких «приемлемых» значений параметра α , затем определить среднюю ошибку прогнозов и выбрать параметр, соответствующий минимальной ошибке.

В некоторых случаях оптимизация параметра α при условиях $0 \leq \alpha \leq 1$ может давать крайнее значение $\alpha = 0$.

Пример 1.6. Рассмотрим пример применения формулы (1.10) в программе *Excel* для прогноза на один шаг.

Статистический анализ временных рядов

Введите в диапазоне A1:A25 временной ряд, как на рис.1.12. В ячейке D1 введите значение параметра сглаживания $\alpha = 0,3$. Присвойте ячейке D1 имя α . Для этого выделите ячейку D1, введите в поле имени букву α и нажмите Enter.

Введите в ячейку B2 формулу =СРЗНАЧ(A2:A25).

Введите в ячейку B3 формулу =B2+ α *(A2-B2). Протяните ячейку B3 маркером заполнения вниз до B26.

Вычислите среднеквадратическую ошибку прогноза. Для этого введите в ячейку D2 формулу =КОРЕНЬ(СУММКВРАЗН(A3:A25;B3:B25)/23).

Среднеквадратическая ошибка равна 27,8.

	А	В	С	D
1	Продажи y	Прогноз f	Альфа= ср кв ош =	0,3 27,8
2	1530	1550		
3	1573	1543,97		
4	1568	1552,71		
5	1574	1557,27		
6	1548	1562,37		
7	1552	1558,15		
8	1504	1556,25		
9	1538	1540,45		
10	1532	1539,68		
11	1541	1537,52		
12	1585	1538,62		
13	1577	1552,39		
14	1567	1559,91		
15	1581	1562,12		
16	1532	1567,87		
17	1500	1557,22		
18	1542	1540,12		
19	1568	1540,68		
20	1588	1548,99		
21	1506	1560,76		
22	1542	1544,27		
23	1562	1543,7		
24	1543	1549,09		
25	1548	1547,2		
26		1547,46		

Рис.1.12

Статистический анализ временных рядов

Постройте график. Выделите диапазон A1:B26 и «Мастером диаграмм» постройте тип диаграммы «График». Введите заголовок диаграммы «Прогноз при Альфа = 0,3». Получим график на рис.1.13.

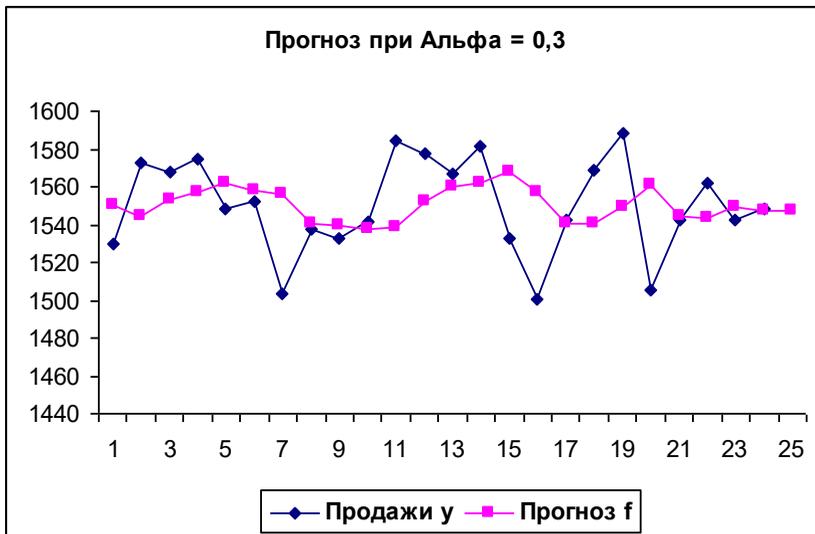


Рис.1.13

Теперь исследуем график при различных значениях параметра прогнозирования. Введите в ячейку D1 значение 0,1. График преобразуется к виду на рис.1.14. Среднеквадратическая ошибка составит 26.

Статистический анализ временных рядов

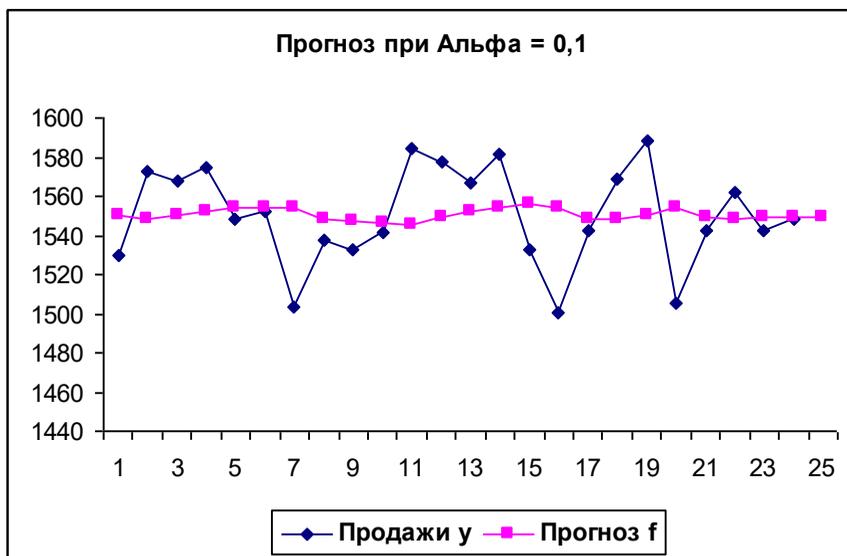
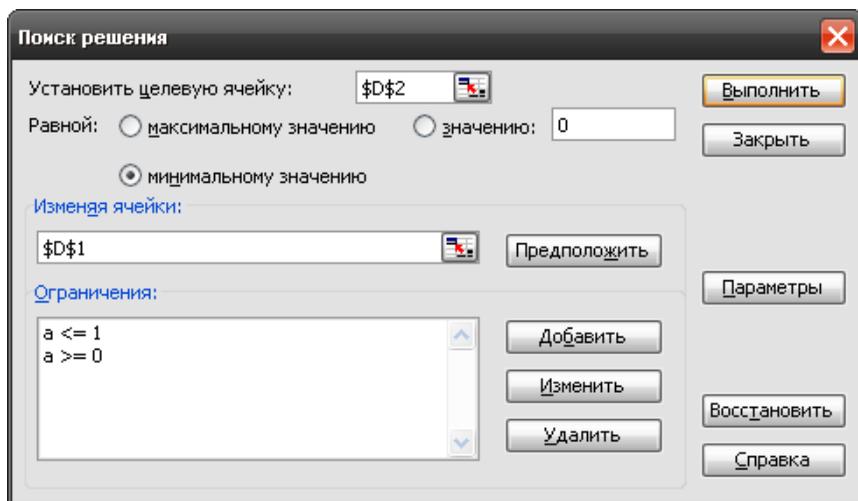


Рис.1.14

Проведем оптимизацию. Выполните команду меню «Сервис — Поиск решения». В открывшемся окне введите:

- в строке «Установить целевую ячейку:» введите D2;
- в строке «Равной» выберите «минимальному значению»;
- в строке «Изменяя ячейки» введите D1.



Статистический анализ временных рядов

Рис.1.15

Для ввода «Ограничений» нажмите кнопку «Добавить», и в появившемся окне (рис.1.16) в строке «Ссылка на ячейку» введите D1, выберите знак неравенства «<=», с строке «Ограничение» введите число 1, и нажмите «Ок».

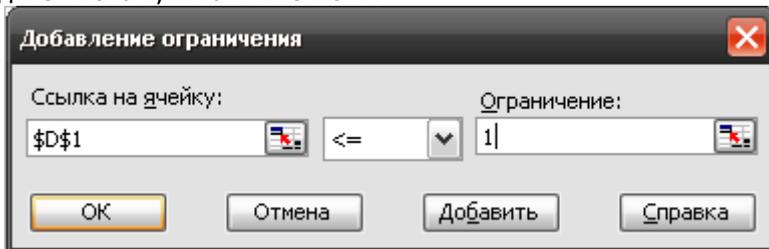
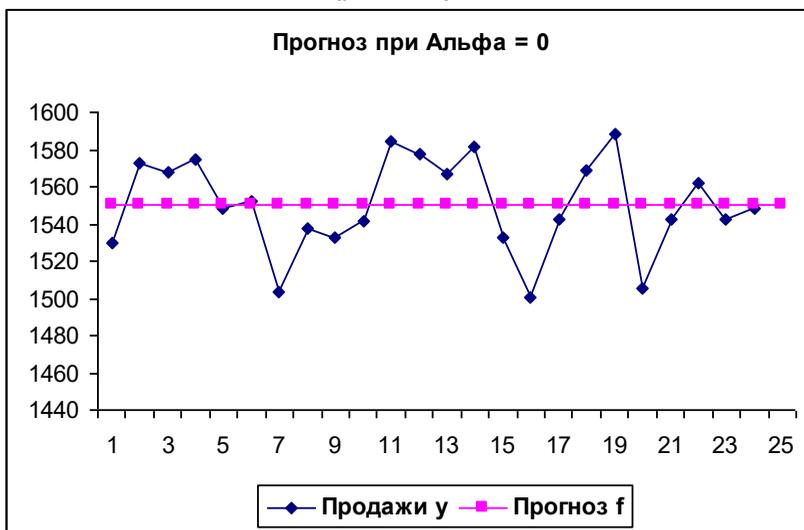


Рис.1.16

В окне «Поиск решения» еще раз нажмите кнопку «Добавить», и в появившемся окне в строке «Ссылка на ячейку» введите D1, выберите знак неравенства «>=», с строке «Ограничение» введите число 0, и нажмите «Ок».

В окне «Поиск решения» (рис.1.15) нажмите кнопку «Выполнить».

Получим, что оптимальное значение равно нулю. Прогнозные значения все равны среднему значению и среднеквадратическая ошибка составит 24,9 (рис.1.17).



Статистический анализ временных рядов

Рис.1.17

Введите в ячейку D1 значение параметра прогнозирования 0,7. Получим картинку на рис.1.18. Среднеквадратическая ошибка равна 30.

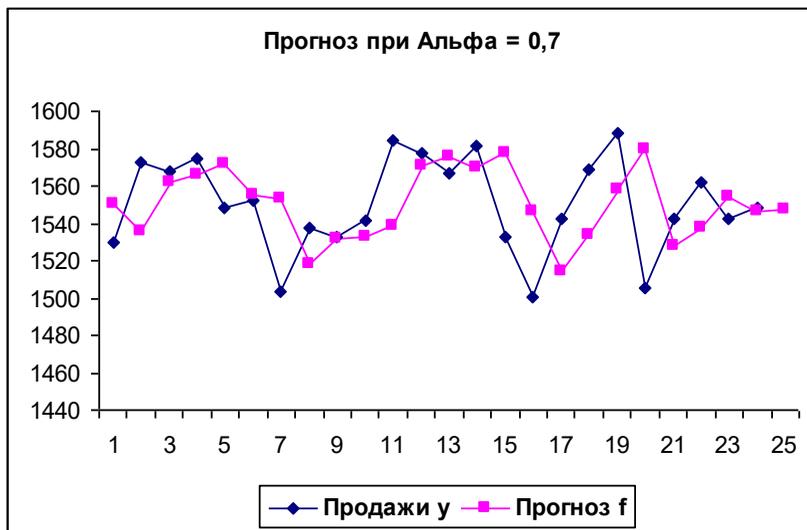


Рис.1.18

Выводы. Чем больше α , тем сильнее реагирует прогноз на колебания временного ряда, и наоборот, чем меньше α , тем более инерционным является процесс прогнозирования.

1.7 Сезонно-декомпозиционная прогностическая модель Хольта-Уинтерса

Сезонно-декомпозиционная прогностическая модель Хольта-Уинтерса (в некоторых источниках название — Холта-Винтера) основана на применении метода экспоненциально взвешенного среднего.

Предположим, что значения ряда $\{y_t, t = 0, 1, \dots, n - 1\}$ соответствуют месяцам, а весь ряд соответствует нескольким годам (не менее четырех лет).

1. Оценка стационарного фактора (т. е. оценка среднемесячного значения независимо от времени года). Предполагается, что ряд текущих значений d_t очищен от сезонности делением

Статистический анализ временных рядов

его на величину F_{t-L} — коэффициент сезонной декомпозиции (или просто коэффициент сезонности), соответствующий моменту времени $t - L$, т. е. сдвинутому на L единиц времени назад; значение этой оценки получается на предыдущих этапах декомпозиции:

$$u_t = A \frac{y_t}{F_{t-L}} + (1 - A)(u_{t-1} + b_{t-1}), \quad (1.11)$$

$$t = 1, 2, \dots, n; \quad L = 12; \quad 0 < A < 1.$$

Начальное значение u_0 определяют как среднее значение за первый год, или предшествующий год (или среднее всего ряда).

2. *Оценка линейного роста* вычисляется на основе модели роста Хольта:

$$b_t = B(u_t - u_{t-1}) + (1 - B)b_{t-1}, \quad (1.12)$$

$$t = 1, 2, \dots, n; \quad L = 12; \quad 0 < B < 1..,$$

В качестве начального значения примем $b_0 = 0$.

3. *Оценка сезонного фактора* (адаптация коэффициента сезонности). Коэффициент сезонности представляет собой отношение значения текущего наблюдения к среднестационарному значению, т. е. этот коэффициент в момент времени t равен d_t / u_t :

$$F_t = C \frac{d_t}{u_t} + (1 - C)F_{t-1}, \quad (1.13)$$

$$t = 1, 2, \dots, n; \quad L = 12; \quad 0 < C < 1.$$

В качестве начальных значений сезонного фактора принимаем

$$F_{-11} = F_{-10} = \dots F_{-1} = F_0 = 1.$$

4. *Прогноз*. Прогноз на t моментов времени вперед строится как сумма оценки линейного роста и оценки стационарного фактора u_t и результат с учетом сезонности умножается на соответ-

Статистический анализ временных рядов

ствующее значение коэффициента сезонности $F_{t-L+\tau}$:

$$f_{t+\tau} = (u_t + b_t \tau) F_{t-L+\tau}. \quad (1.14)$$

Оптимальные значения параметров A , B , C определяются методом подбора, пользуясь для оценки погрешности средне-квадратической ошибкой

$$S = \sqrt{\sum (f_{t+\tau} - d_{t+\tau})^2}. \quad (1.15)$$

Пример 1.7. В таблице 1.5 приведены объемы продаж по месяцам за четыре года. Составить прогноз на 2010 год.

Таблица 1.5

Месяц	Объем	Месяц	Объем	Месяц	Объем	Месяц	Объем
31.1.06	2 064	31.1.07	2 928	31.1.08	2 733	31.1.09	3 734
28.2.06	2 271	28.2.07	3 280	29.2.08	3 423	28.2.09	4 502
31.3.06	2 803	31.3.07	3 246	31.3.08	4 467	31.3.09	5 050
30.4.06	3 980	30.4.07	4 346	30.4.08	4 653	30.4.09	5 413
31.5.06	3 235	31.5.07	4 060	31.5.08	3 691	31.5.09	4 710
30.6.06	2 582	30.6.07	3 937	30.6.08	3 873	30.6.09	4 946
31.7.06	2 038	31.7.07	2 887	31.7.08	3 866	31.7.09	3 626
31.8.06	1 475	31.8.07	1 998	31.8.08	2 812	31.8.09	3 445
30.9.06	1 832	30.9.07	2 358	30.9.08	2 376	30.9.09	3 194
31.10.06	981	31.10.07	2 468	31.10.08	2 969	31.10.09	3 058
30.11.06	1 690	30.11.07	2 335	30.11.08	2 605	30.11.09	3 368
31.12.06	1 741	31.12.07	2 251	31.12.08	2 841	31.12.09	4 431

Решение. Оформление расчетного листа в *Excel* показано на рис.1.19.

Введите данные о продажах в диапазоне A15:B62.

Статистический анализ временных рядов

	A	B	C	D	E	F
1	Реализация продукции				Сезонный фактор	Среднее квадратическое отклонение = 861,94
2					Ft	
3					1	
4					1	
5					1	
6					1	
7		AA =	0,2		1	
8		BB =	0,2		1	
9		CC =	0,3		1	
10		Реализация	Стационарный фактор	Линейный рост	1	
11					1	
12	Месяцы				1	Прогноз
13		dt	ut	bt	1	ft
14			2224	0	1	
15	31.1.06	2 064	2 192	-6	0,98	
16	28.2.06	2 271	2 203	-3	1,01	2 186
17	31.3.06	2 803	2 320	21	1,06	2 200
18	30.4.06	3 980	2 669	87	1,15	2 342
19	31.5.06	3 235	2 852	106	1,04	2 756
20	30.6.06	2 582	2 882	91	0,97	2 958
21	31.7.06	2 038	2 786	53	0,92	2 973
22	31.8.06	1 475	2 567	-1	0,87	2 840
23	30.9.06	1 832	2 419	-31	0,93	2 566
24	31.10.06	981	2 107	-87	0,84	2 388
25	30.11.06	1 690	1 954	-100	0,96	2 020
26	31.12.06	1 741	1 831	-105	0,99	1 854

Рис. 1.19

Введите в A15 дату 31.01.06. Затем протяните ячейку A15 вниз до A74.

Введите в ячейках B15:B62 объемы продаж из табл.1.5.

Теперь поясним, как оформляется расчетная часть листа.

В диапазоне A1:F13, кроме ячейки F5, введите тексты и числовые значения, как на рис.1.19. Некоторые ячейки объедините как на рис.1.19.

Присвойте ячейкам C7:C9 указанные в соседних ячейках имена:

выделите C7, в поле имени введите «AA» (английские бук-

Статистический анализ временных рядов

вы!) и нажмите Enter;

выделите С8, в поле имени введите «ВВ», нажмите Enter;

выделите С9, в поле имени введите «СС», нажмите Enter.

Для предварительного анализа временного ряда постройте график.

Выделите диапазон А15:В62 и с помощью «Мастера диаграмм» постройте тип диаграммы «График». Щелкните по диаграмме и выполните команду меню «Диаграмма — Добавить линию тренда», выберите тип «Линейная» и нажмите «Ок» (рис.1.20).

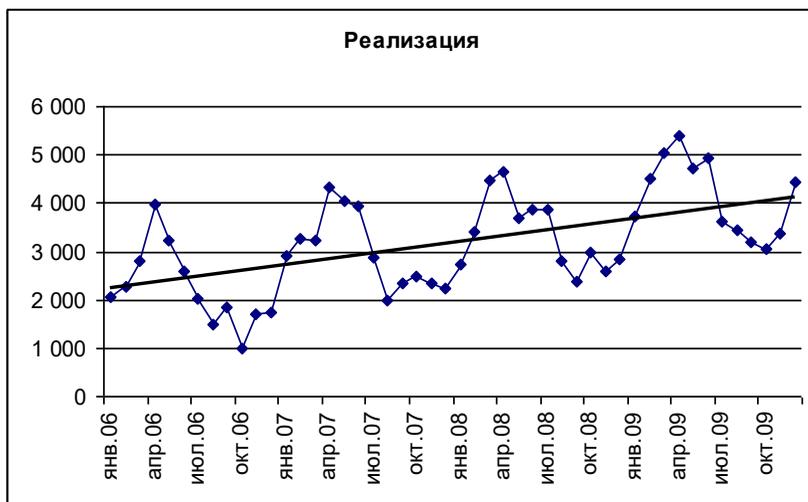


Рис.1.20

График на рис.1.20 явно указывает на наличие сезонных колебаний, а также линейного роста.

Расчет стационарного фактора (среднеежемесячного значения) (формула (1.11)).

В качестве начального значения u_0 выберем среднее за первый год. Для его вычисления в ячейку С14 введите формулу =СРЗНАЧ(В15:В26).

В качестве начальных значений сезонного фактора мы принимаем единичные значения, они записаны в ячейках Е3:Е14.

Введите в ячейку С15 формулу

$$=AA*B15/E3+(1-AA)*(C14+D14).$$

Статистический анализ временных рядов

Протяните C15 вниз до C62.

Расчет линейного роста.

Введите в ячейку D14 начальное значение линейного роста, т.е. число 0, а в ячейку D15 формулу:

$$=BB*(C15-C14)+(1-BB)*D14.$$

Ячейку D15 протяните вниз до D62.

Расчет сезонного фактора.

Введите в ячейки E3:E14 число 1, а в ячейку E15 формулу:

$$=CC*B15/C15+(1-CC)*E3.$$

Протяните E15 вниз до E62.

Прогноз на следующие 12 месяцев.

Введите в ячейку F16 формулу $=(C15+D15)*E4$. Ячейку F16 протяните вниз до F62.

Введите в ячейках E63:E74 числа от 1 до 12.

В ячейку F63 введите формулу $=(C\$62+D\$62)*E63$.

Затем протяните ячейку F63 вниз до F74.

Вычисление ошибки прогноза.

Введите в ячейку F5 формулу

$$=КОРЕНЬ(СУММКВРАЗН(F16:F62;B16:B62)/47).$$

Получим значение ошибки 777,10.

Постройте график прогнозированных значений.

Выделите диапазон A15:B74. С помощью «Мастера диаграмм» постройте тип диаграммы «График». Получим график, похожий на рис.1.20, содержит на оси X больше точек.

Щелкните правой кнопкой мыши по диаграмме и выберите команду меню «Исходные данные». В появившемся окне перейдите на вкладку «Ряд», нажмите кнопку «Добавить», в строке «Имя» укажите F12, в строке «Значения» введите F15:F74 и нажмите «Ок».

Снова щелкните правой кнопкой мыши по диаграмме и выберите команду меню «Параметры диаграммы...». В появившемся окне перейдите на вкладку «Заголовки» и введите заголовок «Прогноз на 2010 год», перейдите на вкладку «Легенда» и выберите «Размещение» «Внизу». Получим график на рис.1.21.

Статистический анализ временных рядов

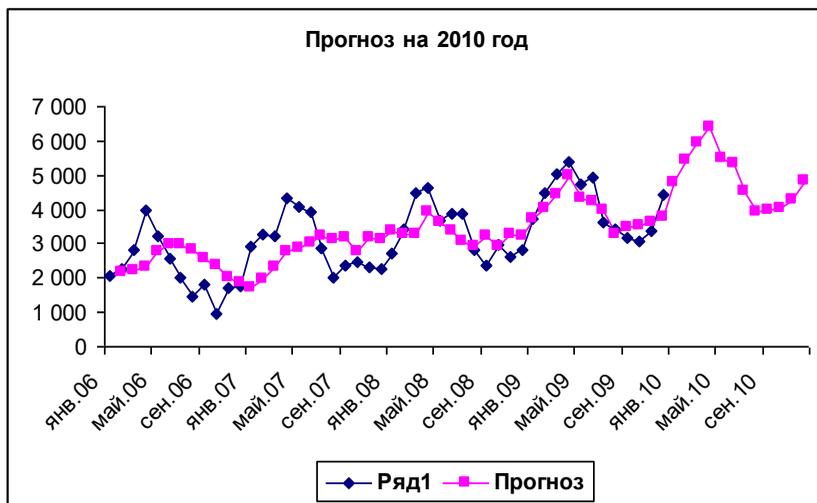


Рис.1.21

Как видим, при $A = B = 0,2$ и $C = 0,3$ получен прогноз на 2010 год.

Оптимизация параметров.

Выполните команду меню «Сервис — Поиск решения» и в появившемся окне введите:

- в строке «Установить целевую ячейку:» введите F5;
- в строке «Равной» выберите «минимальному значению»;
- в строке «Изменяя ячейки» введите C7:C9.

Статистический анализ временных рядов

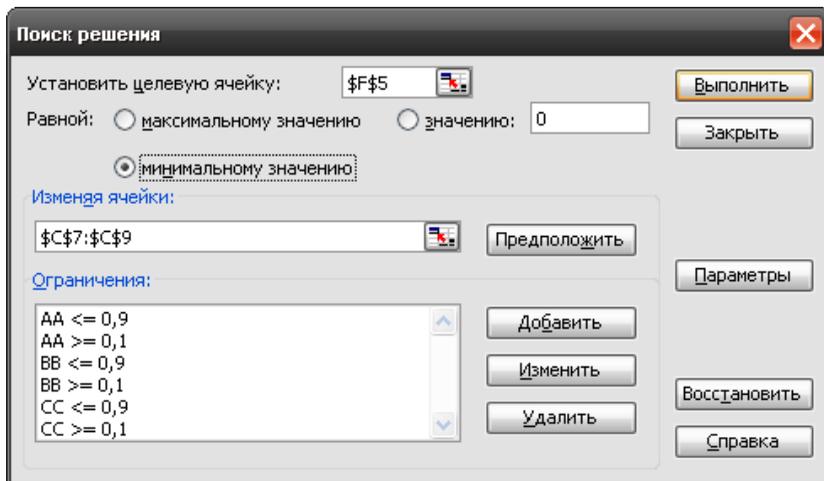


Рис.1.15

Для ввода «Ограничений» нажмите кнопку «Добавить», и в появившемся окне в строке «Ссылка на ячейку» введите C7, выберите знак неравенства «<=», в строке «Ограничение» введите число 0,9, и нажмите «Ок».

Снова нажмите кнопку «Добавить», и в появившемся окне в строке «Ссылка на ячейку» введите C7, выберите знак неравенства «>=», в строке «Ограничение» введите число 0,1, и нажмите «Ок».

Такие же ограничения введите для ячеек C8 и C9.

Нажмите кнопку «Выполнить».

Найденные значения $A = B = 0,1$ и $C = 0,4881$. При этом ошибка составила 662,9.

График прогноза имеет вид на рис.1.22.

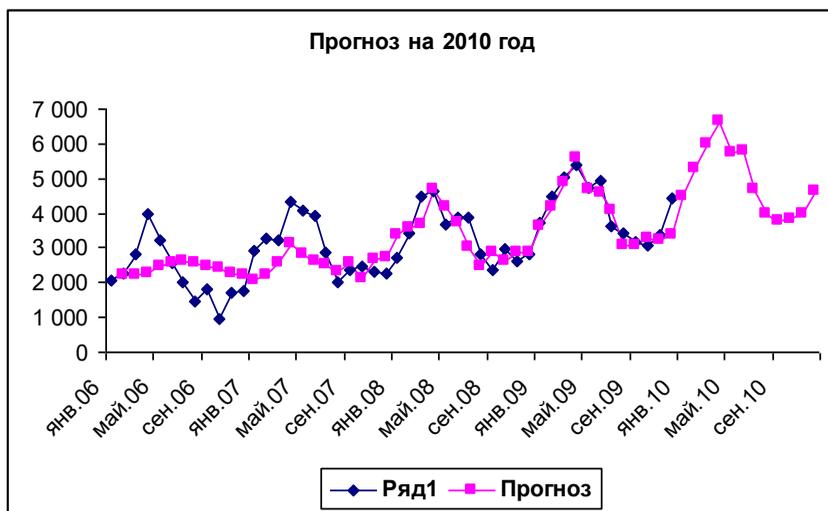


Рис.1.22

Сравнивая рис.1.22 с рис.1.21, мы видим, что при данных значениях параметров прогнозная кривая за 2008 и 2009 годы ближе к эмпирической кривой.

Замечание. Если мы в ограничениях на параметры A , B и C нижнюю границу возьмем нулевой, а верхнюю единичной, то оптимальные значения будут такими $A = 0,0092$, $B = 1$, $C = 0,5159$, а ошибка равна 638,39.

На графике изменения будут малозаметны.

Выводы. Сезонный фактор имеет преобладающее значение в динамике рассматриваемого ряда. Поэтому прогнозируемый на 2010 год ряд повторяет приблизительно форму изменения ряда в предыдущих годах.

1.8 Применение рядов Фурье

С помощью рядов Фурье аппроксимируют ряды $\{y_i, i = 0, 1, \dots, n - 1\}$, содержащие сезонные колебания. Ряд Фурье имеет вид:

$$Y_t = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m (a_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx)), \text{ где } x = \frac{2\pi t}{n}. \quad (1.16)$$

Параметры уравнения (1.16) рассчитываются методом

Статистический анализ временных рядов

наименьших квадратов, и могут быть вычислены по формулам:

$$a_0 = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i, a_k = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \cos(kx_i), b_k = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \sin(kx_i), \quad (1.17)$$

где значения переменной x_i вычисляются по формуле $x_i = 2\pi i/n$.

В формулах (1.16), (1.17) для объема выборки n и числа гармоник m должно выполняться соотношение $m < n/2$.

Если n четное и $m = n/2$, то график функции (1.16) проходит через точки (i, y_i) .

Если $m < n/2$, то график функции (1.16) проходит близко к точкам (i, y_i) , причем, чем больше число гармоник m , тем точнее график приближается к точкам (i, y_i) .

Пример 1.8. В табл. 1.6 приведены данные о ежемесячных продажах продукции предприятия за два года. Составить ряды Фурье для $m = 2, 4, 6$ и вычислить варианты прогноза на следующий год.

Таблица 1.6

Даты	Продажи	Даты	Продажи
31 янв 08	100,1	31 янв 09	100,2
29 фев 08	102,0	28 фев 09	102,5
31 мар 08	102,7	31 мар 09	101,7
30 апр 08	102,2	30 апр 09	102,6
31 май 08	102,4	31 май 09	104,2
30 июн 08	101,9	30 июн 09	101,9
31 июл 08	101,5	31 июл 09	101,9
31 авг 08	101,8	31 авг 09	102,0
30 сен 08	100,4	30 сен 09	100,4
31 окт 08	101,3	31 окт 09	101,2
30 ноя 08	101,6	30 ноя 09	99,5
31 дек 08	99,5	31 дек 09	99,2

Решение. Подготовим расчетный лист.

Введите в ячейках A1, B1, C1 и D1 текст-метку «Даты», обозначения переменных t , x и Y , как показано на рис.1.23 (приведена только часть расчетной таблицы).

Статистический анализ временных рядов

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Даты	t	x	Y	Y*COS(x)	Y*SIN(x)	Y*COS(2*x)	Y*SIN(2*x)
2	31.январ.08	0	0,00	100,1	100,1	0,0	100,1	0,0
3	29.февр.08	1	0,26	102,0	98,6	26,4	88,4	51,0
4	31.мар.08	2	0,52	102,7	88,9	51,3	51,3	88,9
5	30.апр.08	3	0,79	102,2	72,3	72,3	0,0	102,2
6	31.май.08	4	1,05	102,4	51,2	88,7	-51,2	88,7
7	30.июн.08	5	1,31	101,9	26,4	98,4	-88,3	51,0
8	31.июл.08	6	1,57	101,5	0,0	101,5	-101,5	0,0
9	31.авг.08	7	1,83	101,8	-26,3	98,3	-88,2	-50,9
10	30.сен.08	8	2,09	100,4	-50,2	87,0	-50,2	-87,0
11	31.окт.08	9	2,36	101,3	-71,6	71,6	0,0	-101,3
12	30.ноя.08	10	2,62	101,6	-88,0	50,8	50,8	-88,0
13	31.дек.08	11	2,88	99,5	-96,1	25,8	86,2	-49,8
14	31.январ.09	12	3,14	100,2	-100,2	0,0	100,2	0,0
15	28.февр.09	13	3,40	102,5	-99,0	-26,5	88,8	51,2
16	31.мар.09	14	3,67	101,7	-88,0	-50,8	50,8	88,0
17	30.апр.09	15	3,93	102,6	-72,5	-72,5	0,0	102,6
18	31.май.09	16	4,19	104,2	-52,1	-90,3	-52,1	90,3
19	30.июн.09	17	4,45	101,9	-26,4	-98,5	-88,3	51,0
20	31.июл.09	18	4,71	101,9	0,0	-101,9	-101,9	0,0
21	31.авг.09	19	4,97	102,0	26,4	-98,6	-88,4	-51,0
22	30.сен.09	20	5,24	100,4	50,2	-87,0	-50,2	-87,0
23	31.окт.09	21	5,50	101,2	71,6	-71,6	0,0	-101,2
24	30.ноя.09	22	5,76	99,5	86,2	-49,8	49,8	-86,2
25	31.дек.09	23	6,02	99,2	95,8	-25,7	85,9	-49,6
26	31.январ.10	24	6,28	202,9	-0,239	-0,080	-0,655	1,079
27	28.февр.10	25	6,54	a_0	a_1	b_1	a_2	b_2

Рис.1.23

В ячейки A2, A3 введите даты в виде «31 январ 2008» и «29 фев 2008», выделите ячейки A2:A3 и протяните маркером заполнения вниз до ячейки A37, т.е. до появления даты «31.дек.10». Мы ввели лишний год для прогноза.

В диапазоне B2:A37 введите значения переменной t : 0, 1, ..., 35.

Присвойте диапазону B2:A37 имя t . Для этого выделите диапазон B2:A37, введите в поле имени букву t и нажмите Enter.

В ячейку C2 введите формулу $=2*PI()*t/24$. Ячейку C2 про-

Статистический анализ временных рядов

тяните маркером заполнения вниз до ячейки C37.

Присвойте диапазону C2:C37 имя x . Для этого выделите диапазон C2:C37, введите в поле имени букву x и нажмите Enter.

В диапазоне D2:D25 введите значения переменной Y , т.е. объемы ежемесячных продаж.

Присвойте диапазону D2:D25 имя Y . Для этого выделите диапазон D2:D25, введите в поле имени букву Y и нажмите Enter.

Для начала построим график продаж, чтобы изучить характер изменения ряда.

Выделите диапазон D2:D25 и помощью мастера диаграмм постройте диаграмму «График» (рис. 1.24).



Рис.1.24

По виду графика можно предположить, что данный показатель имеет сезонную компоненту.

Построим ряды Фурье с числами гармоник $m = 2, 4, 6$.

Для вычисления коэффициентов ряда по формулам (1.17) вычислим слагаемые сумм в правой части этих формул.

Введите в ячейках E1:P1 введите обозначения столбцов $Y \cdot \cos(x)$, $Y \cdot \sin(x)$, $Y \cdot \cos(2 \cdot x)$, $Y \cdot \sin(2 \cdot x)$, $Y \cdot \cos(3 \cdot x)$, $Y \cdot \sin(3 \cdot x)$, $Y \cdot \cos(4 \cdot x)$, $Y \cdot \sin(4 \cdot x)$, $Y \cdot \cos(5 \cdot x)$, $Y \cdot \sin(5 \cdot x)$, $Y \cdot \cos(6 \cdot x)$, $Y \cdot \sin(6 \cdot x)$. Эти обозначения будут подсказывать вид формул.

В ячейки E2:P2 введите соответственно «подсказкам» сле-

Статистический анализ временных рядов

дующие формулы $=Y*\text{COS}(x)$, $=Y*\text{SIN}(x)$, $=Y*\text{COS}(2*x)$, $=Y*\text{SIN}(2*x)$, $=Y*\text{COS}(3*x)$, $=Y*\text{SIN}(3*x)$, $=Y*\text{COS}(4*x)$, $=Y*\text{SIN}(4*x)$, $=Y*\text{COS}(5*x)$, $=Y*\text{SIN}(5*x)$, $=Y*\text{COS}(6*x)$, $=Y*\text{SIN}(6*x)$.

Выделите диапазон E2:P2 и маркером заполнения протяните вниз до строки E25:P25.

Вычислим в ячейках D26:P26 коэффициенты ряда Фурье по формулам (1.17).

Введите в ячейку D26 формулу $=\text{СУММ}(D2:D25)/12$. Ячейку D26 маркером заполнения протяните вправо до P26.

Теперь вычислим с помощью формулы (1.16) сглаженные и прогнозные значения для числа гармоник $m = 6$.

Присвоим имена ячейкам D26:P26.

Введите имена a_0 , a_1 , b_1 , a_2 , b_2 , a_3 , b_3 , a_4 , b_4 , a_5 , b_5 , a_6 , b_6 в ячейки D27:P27.

Присвойте ячейке D26 имя a_0 . Для этого щелкните левой кнопкой мыши по ячейке D26, в поле имени введите a_0 и нажать Enter.

Аналогично присвойте имена остальным ячейкам, пользуясь подсказками.

Введите в ячейки Q1, R1, S1 обозначения «Yt 6», «Yt 4», «Yt 2».

В ячейку Q2 введите формулу

$$\begin{aligned}
 &=a_0/2+a_1*\text{COS}(x)+b_1*\text{SIN}(x)+a_2*\text{COS}(2*x)+b_2*\text{SIN}(2*x) \\
 + & \\
 &a_3*\text{COS}(3*x)+b_3*\text{SIN}(3*x)+a_4*\text{COS}(4*x)+b_4*\text{SIN}(4*x)+ \\
 &a_5*\text{COS}(5*x)+b_5*\text{SIN}(5*x)+a_6*\text{COS}(6*x)+b_6*\text{SIN}(6*x).
 \end{aligned}$$

Протяните ячейку Q2 маркером заполнения вниз до Q37.

Построим график.

Выделите диапазон Q2:Q37 и с помощью «Мастера диаграмм» выберите тип «График», перейдите на вкладку «Ряд» и в поле «Имя ряда» введите Q1.

Щелкните кнопку «Добавить», в поле «Имя ряда» введите D1, в поле «Значения» введите диапазон D2:D25.

В поле «Подписи оси X:» укажите диапазон A2:A37, перейдите на вкладку «Заголовки» и введите заголовок диаграммы «Ряд Фурье $m = 6$ » и нажмите «Готово».

На рис.1.25 приведен полученный график.

Статистический анализ временных рядов

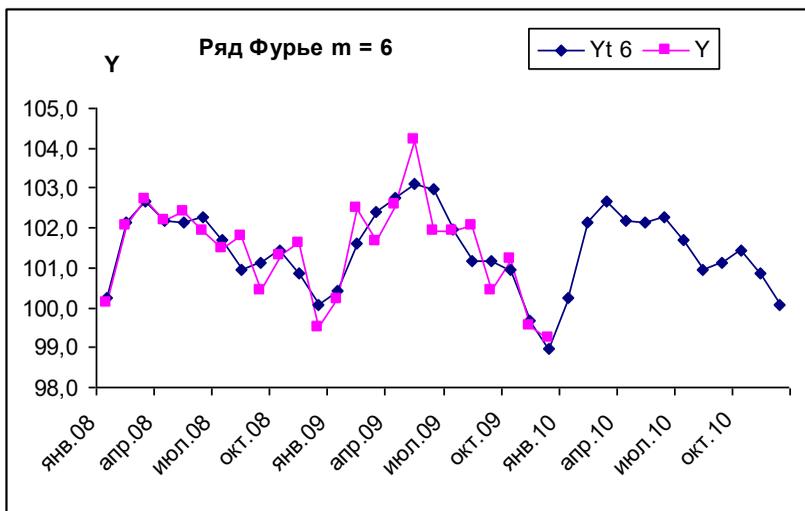


Рис.1.25

Чтобы получить ряд Фурье для $m = 4$ и $m = 2$, скопируйте маркером заполнения ячейку Q2 в ячейки R2 и S2.

В ячейке R2 отредактируйте формулу, убрав лишние слагаемые. В этой ячейке должна быть формула

$$=a_0/2+a_1*\text{COS}(x)+b_1*\text{SIN}(x)+a_2*\text{COS}(2*x)+b_2*\text{SIN}(2*x) + a_3*\text{COS}(3*x)+b_3*\text{SIN}(3*x)+a_4*\text{COS}(4*x)+b_4*\text{SIN}(4*x).$$

Протяните маркером заполнения ячейку R2 вниз до R37.

В ячейке S2 отредактируйте формулу, в этой ячейке формула имеет вид

$$=a_0/2+a_1*\text{COS}(x)+b_1*\text{SIN}(x)+a_2*\text{COS}(2*x)+b_2*\text{SIN}(2*x).$$

Аналогично предыдущему постройте графики для рядов Фурье при $m = 4$ и $m = 2$.

На рис.1.26 и 1.27 приведены полученные графики.

Статистический анализ временных рядов

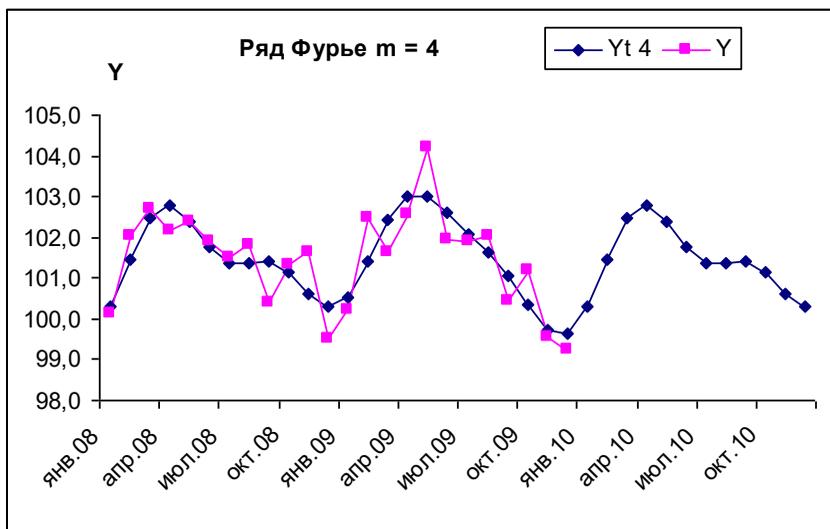


Рис.1.26

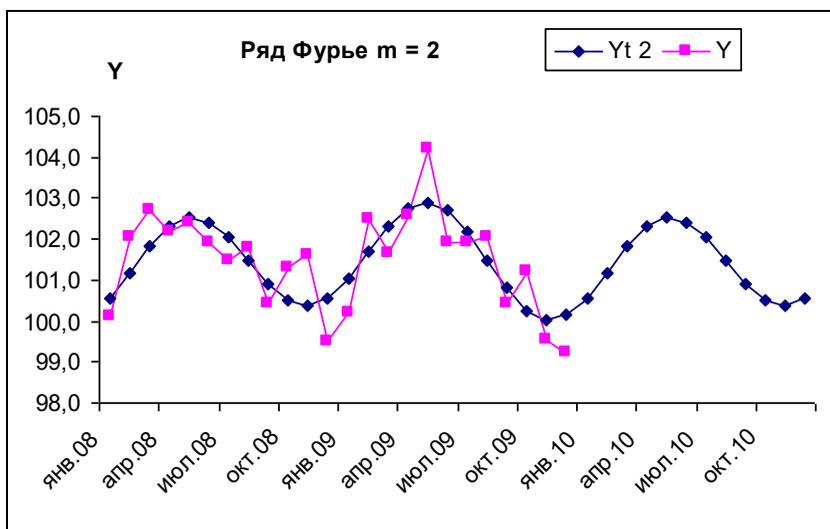


Рис.1.27

Выводы. Чем большее число гармоник включается в формулу (1.16), тем точнее приближается теоретическая кривая к графику исходного ряда. При этом прогноз показывает усредненную форму кривой.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Рассчитать ежегодные абсолютные приросты, темпы роста и темпы прироста, и эти же показатели по отношению к базисному, 2006-му году.

Варианты данных приведены в табл.1.7

Таблица 1.7

Вариант 1

Показатели	2006г.	2007г.	2008г.	2009г.
Выручка, млн руб.	130,97	105,79	81,96	62,94

Вариант 2

Показатели	2006г.	2007г.	2008г.	2009г.
Выпуск продукции, млн руб.	182,90	205,21	185,30	142,80

Вариант 3

Показатели	2006г.	2007г.	2008г.	2009г.
Себест-сть продукции, млн руб.	148,69	179,23	224,52	264,84

Вариант 4

Показатели	2006г.	2007г.	2008г.	2009г.
Выручка, млн руб.	108,12	66,46	69,93	55,48

Вариант 5

Показатели	2006г.	2007г.	2008г.	2009г.
Выпуск продукции, млн руб.	121,99	77,43	57,20	89,07

Вариант 6

Показатели	2006г.	2007г.	2008г.	2009г.
Себест-сть продукции, млн руб.	187,60	204,83	228,83	252,63

Вариант 7

Показатели	2006г.	2007г.	2008г.	2009г.
Выручка, млн руб.	148,16	153,57	149,40	120,92

Вариант 8

Показатели	2006г.	2007г.	2008г.	2009г.
Выпуск продукции, млн руб.	183,04	149,03	165,63	133,53

Статистический анализ временных рядов

Вариант 9

Показатели	2006г.	2007г.	2008г.	2009г.
Себест-сть продукции, млн руб.	125,49	174,52	194,53	212,95
Вариант 10				
Показатели	2006г.	2007г.	2008г.	2009г.
Выручка, млн руб.	192,33	175,61	209,82	193,71
Вариант 11				
Показатели	2006г.	2007г.	2008г.	2009г.
Выпуск продукции, млн руб.	106,06	68,74	116,71	136,26
Вариант 12				
Показатели	2006г.	2007г.	2008г.	2009г.
Себест-сть продукции, млн руб.	126,80	145,36	126,27	94,52
Вариант 13				
Показатели	2006г.	2007г.	2008г.	2009г.
Выручка, млн руб.	148,63	107,26	118,91	132,39
Вариант 14				
Показатели	2006г.	2007г.	2008г.	2009г.
Выпуск продукции, млн руб.	128,75	170,07	176,49	197,66
Вариант 15				
Показатели	2006г.	2007г.	2008г.	2009г.
Себест-сть продукции, млн руб.	128,06	113,80	104,65	144,81
Вариант 16				
Показатели	2006г.	2007г.	2008г.	2009г.
Себестоимость продукции, млн руб.	118,25	132,66	158,20	132,35
Вариант 17				
Показатели	2006г.	2007г.	2008г.	2009г.

Статистический анализ временных рядов

Выручка, млн руб.	154,81	177,29	186,91	194,41
Вариант 18				
Показатели	2006г.	2007г.	2008г.	2009г.
Выпуск продукции, млн руб.	102,01	53,86	26,98	62,17
Вариант 19				
Показатели	2006г.	2007г.	2008г.	2009г.
Себестоимость продукции, млн руб.	142,67	158,08	118,30	75,78
Вариант 20				
Показатели	2006г.	2007г.	2008г.	2009г.
Выручка, млн руб.	131,09	118,64	159,22	153,63

2. Найти среднее хронологическое для ряда. Варианты данных брать из табл.1.7.

3. Для временного ряда найти наиболее подходящую функциональную зависимость. Варианты рядов приведены в табл.1.8.

Таблица 1.8

Вар-т	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	y_i	4	4,7	4,5	5,3	5,1	4,2	5,4	4,7	4,6	4,5	5,3	6,2
2	y_i	4,6	4,7	5	5,5	4,9	4,6	3,7	4,3	4,8	4,1	5	4,7
3	y_i	4,7	3,5	5,6	5,4	5,6	7	8,2	11,2	11,7	14,8	16,7	18,6
4	y_i	5	3,8	5,7	6,6	5,9	7,4	9,5	9,9	11,6	14,1	15,7	19,3
5	y_i	4,5	6,8	6,9	7,5	9,7	9,1	10,7	9,8	10,2	11,8	12,2	11,5
6	y_i	3,2	6,9	6,4	8,6	9,2	8,5	9	9,4	11,2	10,9	10,2	10,6
7	y_i	3,9	6,3	7,7	8,9	8,8	8,9	9,9	10,1	10,5	10,4	10,5	11,2
8	y_i	7,7	7	7,7	8,4	11	10,7	12	13,4	14,4	16,7	19,4	20,4
9	y_i	7,5	8,7	9,3	9,2	11,1	11	12,6	13,7	15	17,2	17,5	21,6
10	y_i	7,5	8,1	8,4	10,3	10,2	10,3	12,3	13,4	14	16,7	18,1	21,1
11	y_i	5,1	6,2	7	7,7	8,3	8,7	9	9,5	9,8	10,2	10,3	10,5

Статистический анализ временных рядов

12	y_i	3,4	4,8	5,1	5,7	4,5	4,1	4,5	4	5,1	4	4,5	5,3
13	y_i	3,6	5,3	5,1	4,6	4	3,9	5,4	4,3	3,9	4,3	3,7	3,6
14	y_i	3,5	3,6	5,4	4,9	5,8	7,7	8,4	10,3	11,3	14,1	15,5	18,7
15	y_i	3,4	5	4,2	4,6	7	7,5	9	10	11,4	14,1	16	18,3
16	y_i	4,1	7,1	6,6	7,5	8,3	9,7	9,2	10	9,8	11,2	10,7	10,9
17	y_i	3,5	5,2	6,4	8,5	9,7	9,8	9,3	10,9	9,8	10,5	12	10,8
18	y_i	3,4	6,5	7,9	8,9	8,3	9,1	8,9	9,3	10,2	11,4	11,4	11,5
19	y_i	7	8,8	7,9	9,1	10,7	11,4	12	12,6	14,8	17,4	18,4	19,7
20	y_i	8,2	7,8	9,2	8,9	9,4	11,2	11,3	14,4	15,7	17	18	21,5
21	y_i	7,4	7,6	9,5	8,3	10,8	10,6	11,8	12,5	14,1	15,6	17,7	20,9
22	y_i	5,1	6,2	7,1	7,6	8,3	8,6	9,1	9,4	9,8	10,1	10,3	10,6
23	y_i	4,7	4,5	4,4	5,3	4,3	3,9	5,7	5,5	5,7	5,3	5,1	5,9
24	y_i	4,5	4,8	4,9	5,3	3,5	5,2	4,4	4,9	3,7	5,3	4,8	4,5
25	y_i	3,4	5,2	5,4	5,7	5,8	7,9	8,6	9,8	11,4	14,4	15,4	17,6
26	y_i	3,6	5,1	5,5	4,9	7,1	7,4	8,6	10,2	12,7	14,7	15,5	17,8
27	y_i	4,6	6,6	7,1	8,1	8,2	8,4	10,3	11,2	11,4	10,3	10,5	12,3
28	y_i	4	6,1	7,9	9,1	9,8	8,5	9,8	9,7	11,3	11,2	11,6	12,2
29	y_i	4	6,5	6,7	9,1	8	9,2	9,8	9,9	10,4	10,5	11,6	10,8
30	y_i	7,3	7,6	8,7	8,6	10,3	11,5	13,1	13,9	15	15,6	19,4	20,6

4. Провести выравнивание временного ряда несколькими способами, используя формулы (1.5)-(1.8). Варианты рядов брать из табл.1.8.

5. Провести прогнозирование временного ряда методом экспоненциального сглаживания, используя формулы (1.10). Варианты рядов брать из табл.1.8.

6. В таблице 1.9 приведены объемы продаж по месяцам за четыре года. Составить прогноз на 2010 год, используя сезонно-декомпозиционную пргностическую модель Хольта-Уинтерса (1.11–1.14).

Таблица 1.9

Месяц	Объем	Месяц	Объем	Месяц	Объем	Месяц	Объем
31.1.06	7 610	31.1.07	7 398	31.1.08	6 419	31.1.09	6 132
28.2.06	8 201	28.2.07	7 450	29.2.08	6 986	28.2.09	6 642
31.3.06	8 554	31.3.07	7 773	31.3.08	7 365	31.3.09	6 962

Статистический анализ временных рядов

30.4.06	9 201	30.4.07	7 860	30.4.08	7 450	30.4.09	7 623
31.5.06	8 264	31.5.07	8 616	31.5.08	7 113	31.5.09	7 142
30.6.06	7 872	30.6.07	8 216	30.6.08	7 478	30.6.09	6 059
31.7.06	8 237	31.7.07	7 466	31.7.08	6 357	31.7.09	5 348
31.8.06	7 194	31.8.07	6 229	31.8.08	5 943	31.8.09	5 767
30.9.06	7 165	30.9.07	6 549	30.9.08	5 941	30.9.09	4 866
31.10.06	5 951	31.10.07	5 950	31.10.08	5 367	31.10.09	5 023
30.11.06	7 219	30.11.07	5 643	30.11.08	5 391	30.11.09	4 547
31.12.06	7 051	31.12.07	6 264	31.12.08	2 841	31.12.09	5 667

7. В таблице 1.9 приведены объемы продаж по месяцам за четыре года. Составить прогноз на 2010 год, используя ряд Фурье (1.16) с шестью гармониками.

8. В табл. 1.10 приведены данные о продажах продукции предприятия за 12 месяцев. Составить ряд Фурье для $m = 4$ и вычислить прогноз на следующие два месяца.

Таблица 1.10

Вар-т	январь	фев	мар	апр	май	июн	июль	авг	сен	окт	ноя	дек
1	19	20	19	24	30	39	41	42	34	33	30	20
2	19	20	25	21	35	33	40	36	36	34	25	22
3	20	21	18	22	33	39	35	44	43	31	27	27
4	25	19	18	22	31	33	38	38	40	37	33	25
5	33	22	21	21	25	25	33	34	35	35	40	38
6	31	25	26	16	24	22	29	35	38	36	43	31
7	25	22	21	22	25	23	28	33	38	44	41	37
8	35	21	17	20	23	28	33	31	34	40	40	38
9	41	44	31	27	25	25	21	18	29	26	31	38
10	38	36	33	35	20	19	17	20	22	29	35	34
11	44	38	31	29	28	20	19	24	26	35	31	38
12	39	36	34	29	22	18	17	24	27	27	30	36
13	38	40	35	29	24	21	23	26	22	26	38	34
14	38	37	33	30	22	17	16	21	28	25	37	42
15	16	23	19	20	28	34	37	43	40	37	30	22
16	18	19	18	26	31	38	38	41	42	30	27	23
17	22	18	25	26	34	36	40	39	37	32	34	27
18	18	20	21	28	35	30	37	38	40	35	31	26
19	31	30	22	20	26	24	30	34	43	35	38	36

Статистический анализ временных рядов

20	35	20	17	23	21	28	34	40	37	38	44	31
21	25	23	19	24	21	26	27	37	41	39	40	36
22	26	22	22	23	18	20	30	38	35	42	39	38
23	37	37	38	28	20	25	20	25	29	34	33	41
24	36	41	38	35	27	17	23	19	30	26	36	42
25	41	38	40	26	29	16	19	21	25	27	37	36
26	45	39	36	27	24	20	21	21	21	29	35	41
27	45	42	31	26	29	18	23	17	28	30	30	38
28	37	39	31	26	25	18	16	23	21	33	33	38
29	19	25	16	28	35	36	36	39	41	33	29	23
30	21	20	24	26	26	36	43	36	42	36	31	29

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Вадзинский Р. Статистические вычисления в среде Excel. Библиотека пользователя. — СПб.: Питер, 2008. — 608с.
- 2 Соболев Б.В., Борисова Л.В., Иваночкина Т.А. Пешхоев И.М. Практикум по статистике в Excel. Ростов н/Д: Феникс, 2010. — 381с.