ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Информационные системы в строительстве»

Сборник задач

по дисциплине

«Системы поддержки принятия решений» часть 1

Авторы
Батурина Н.Ю.,
Ляпин А.А.

Ростов-на-Дону, 2017

Аннотация

Методические указания к лабораторным занятиям по дисциплине «Системы поддержки принятия решений» предназначены для студентов очной формы обучения, они разработаны в соответствии с требованиями Государственных образовательных стандартов высшего образования по направлениям подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии», 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника».

Авторы

к.т.н., доцент кафедры «ИСС»
Батурина Н.Ю.,

д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой «ИСС»
Ляпин А.А.

Оглавление

ТЕМА 1. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В ОДНОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Лабораторная работа №1. Управление запасами в однопродуктовой системе

Цель работы: Получить навыки решения задачи управления запасами, используя пакет Excel, аналитические методы исследования на экстремум функции одной переменных.

Постановка задачи

Пусть интенсивность спроса на некоторый товар – L, стоимость оформления одного заказа – K, стоимость хранения единицы запаса – H.

Известно, что стоимость оформления заказа, содержащего Q единиц, вычисляется по формуле $K \cdot L/Q$. Стоимость хранения определяется по формуле $H \cdot Q/2$. Общая стоимость определяется суммой этих двух составляющих:

$$f(Q) = K \cdot L/Q + H \cdot Q/2.$$

Требуется определить оптимальное значение размера заказа продукции Q по условию минимума затрат на ее заказ и хранение.

Исходные данные

Таблица 1 – Исходные данные

Вариант	L	K	H
1	96	109,00р.	2,00р.
2	82	108,00р.	3,00р.
3	86	95,00р.	3,00р.
4	88	106,00р.	4,00р.
5	76	99,00р.	3,00р.
6	81	94,00р.	3,00р.
7	80	109,00р.	3,00р.
8	91	106,00р.	2,00р.
9	71	97,00р.	4,00р.
10	76	108,00р.	3,00р.

Вариант	L	K	H
11	83	109,00р.	4,00р.
12	95	90,00р.	4,00р.
13	85	94,00р.	2,00р.
14	72	99,00р.	4,00р.
15	78	103,00р.	4,00р.

Максимальное количество заказов вычисляется по формуле
Qm = ОКРУГЛ (КОРЕНЬ (6·К·L/H) /20;0)·20.

Шаг изменения dQ искомой переменной Q – величины заказа, необходимый для построения основной расчетной таблицы dQ = Qm/20.

Базовая расчетная таблица должна содержать 4 колонки и 20 строк. Форма заголовка таблицы приведена ниже.

Размер заказа Q	Стоимость оформления заказа	Стоимость хранения	Общая сумма

Первая ячейка первой колонки содержит начальное значение Q_0=dQ. В следующих 19 ячейках значения увеличиваются на величину шага dQ.

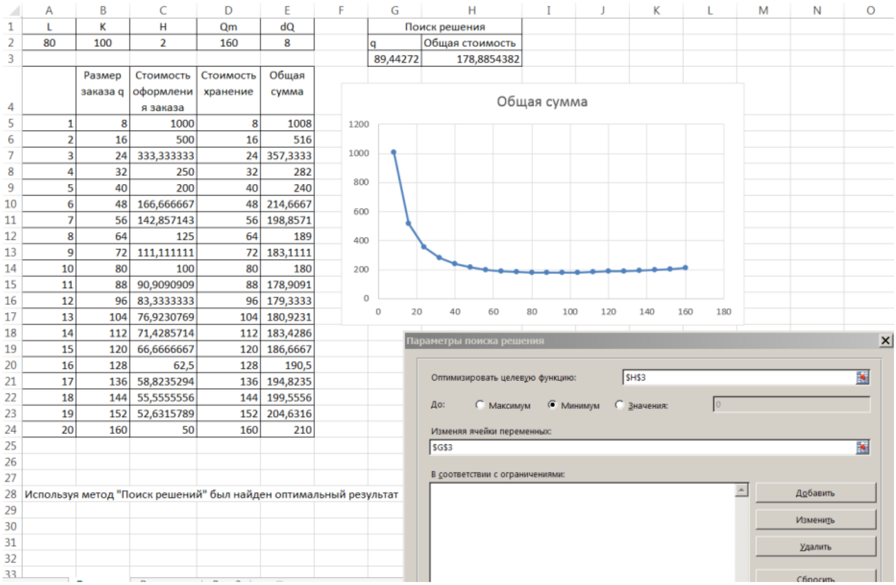
При заполнении столбца Q предусмотрите возможность изменения исходных данных (вводите формулы, а не числовые значения). Необходимо помнить, что адресация ячеек с исходными данными должна быть абсолютной.

Порядок работы

1. Создать и оформить таблицу исходных данных и расчетную таблицу.
2. Построить диаграмму зависимости суммарных затрат от количества заказов. Убедиться в наличии оптимального (минимального) значения функции суммарных затрат, определить приближенно значение оптимального заказа $Q_{опт}$.
3. Решить задачу с измененными исходными данными L,K,H. Сохранить результаты на другом листе.
4. Решить задачу поиска минимума функции суммарных затрат
   f(Q)= K·L/Q+ H·Q/2, используя средство «Поиск решения».
5. Решить задачу поиска минимума функции суммарных за-

трат
$f(Q) = K \cdot L/Q + H \cdot Q/2$ аналитически.

6. Сравнить результаты, полученные различными методами. Сделать выводы. Оформить отчет. Записать результаты и отчет в личную папку.



L	K	H	Qm	dQ
80	100	2	160	8

Поиск решения	
q	Общая стоимость
89,44272	178,8854382

	Размер заказа q	Стоимость оформления заказа	Стоимость хранение	Общая сумма
1	8	1000	8	1008
2	16	500	16	516
3	24	333,333333	24	357,3333
4	32	250	32	282
5	40	200	40	240
6	48	166,666667	48	214,6667
7	56	142,857143	56	198,8571
8	64	125	64	189
9	72	111,111111	72	183,1111
10	80	100	80	180
11	88	90,9090909	88	178,9091
12	96	83,3333333	96	179,3333
13	104	76,9230769	104	180,9231
14	112	71,4285714	112	183,4286
15	120	66,6666667	120	186,6667
16	128	62,5	128	190,5
17	136	58,8235294	136	194,8235
18	144	55,5555556	144	199,5556
19	152	52,6315789	152	204,6316
20	160	50	160	210

Используя метод "Поиск решений" был найден оптимальный результат

Рисунок 1 – Пример решения задачи управления запасами в Excel

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте постановку задачи управления запасами в однопродуктовой системе.
2. Перечислите основные этапы решения задачи в Excel.
3. Как найти решение поставленной задачи с помощью инструмента «Поиск решения»?
4. Как найти решение аналитически?

Лабораторная работа №2. Управление информационным процессом

Цель работы: Получить навыки решения задачи управления информационным процессом, используя пакет Mathcad, аналитические методы исследования на экстремум функции нескольких переменных.

Постановка задачи

Рассматривается информационный процесс, включающий три этапа: считывание информации с запоминающего устройства, передачу информации на устройство обработки и непосредственно обработку. Информация неоднородна и содержит текст и графику. Процесс обработки осуществляется пакетами раздельно для текстовой и графической части.

Определить оптимальные длины пакетов текстовой и графической информации V_1,V_2, соответствующие минимуму общего времени обработки.

Исходные данные

Таблица 2 – Исходные данные

Вид данных	Текст	Графика
Общий объем информации	Q_1=500 Мб	Q_2=1000 Мб
Время считывания одного пакета информации	К1=0,1 с	К1=0,1 с
Время передачи 1 Мб информации	К2=0,5 с	К2=0,5 с
Время обработки одного пакета зависит от длин пакетов по формулам	$K3 \cdot (V1)^2$ К3=0,8	$K4 \cdot (V2)^2 \ln(V2)$ К4=1

Порядок работы

1. Составить целевую функцию, выражающую зависимость общего времени на считывание, передачу и обработку информации от величин длин пакетов V_1, V_2.
2. Используя блок Given и функцию Minimize в Mathcad найти искомое решение $V_{1опт}$, $V_{2опт}$.
3. Исследовать влияние управляющего параметра К1 на $V_{1опт}$, $V_{2опт}$. Выбрать диапазон его варьирования и провести расчеты в Mathcad, построить графики зависимостей. Про-

вести аналогичные исследования для параметров К2, К3,К4.

4. Найти аналитическое решение задачи.
5. Сравнить результаты численного и аналитического решений. Сделать выводы. Оформить отчет. Записать результаты и отчет в личную папку.

$Q1 := 500 \quad Q2 := 1000 \quad k1 := 0.1 \quad k2 := 0.5 \quad k3 := 0.8 \quad k4 := 1$

$$\text{Тобщ}(V1, V2) := \left(\frac{Q2}{V2} + \frac{Q1}{V1}\right)\cdot k1 + (Q1 + Q2)\cdot k2 + k3\cdot Q1\cdot V1 + k4\cdot Q2\cdot V2\cdot \ln(V2)$$

$$\frac{d}{dV1}\text{Тобщ}(V1, V2) \rightarrow 400.0 - \frac{50.0}{V1^2} \qquad \frac{d}{dV2}\text{Тобщ}(V1, V2) \rightarrow 1000\cdot \ln(V2) - \frac{100.0}{V2^2} + 1000$$

1 способ

Начальное приближение

$V1 := 1 \quad V2 := 1$

Given

$V1 > 0 \quad V2 > 0 \quad V1 \le Q1 \quad V2 \le Q2$

Процесс минимизации

$$\text{Minimize}(\text{Тобщ}, V1, V2) = \begin{pmatrix} 0.354 \\ 0.527 \end{pmatrix}$$

2 способ

Начальное приближение

$V1 := 1 \quad V2 := 1$

Given

$V1 > 0 \quad V2 > 0 \quad V1 \le Q1 \quad V2 \le Q2$

$$400.0 - \frac{50.0}{V1^2} = 0 \qquad 1000\cdot \ln(V2) - \frac{100.0}{V2^2} + 1000 = 0$$

Решение систеиы уравнений

$$\text{Find}(V1, V2) = \begin{pmatrix} 0.354 \\ 0.527 \end{pmatrix}$$

Исследование параметра k1:

$$\text{Тобщ2}(V1, V2, k1) := \left(\frac{Q2}{V2} + \frac{Q1}{V1}\right)\cdot k1 + (Q1 + Q2)\cdot k2 + k3\cdot Q1\cdot V1 + k4\cdot Q2\cdot V2\cdot \ln(V2)$$

Given

$V1 > 0 \quad V2 > 0 \quad V1 \le Q1 \quad V2 \le Q2$

Процесс минимизации $\quad f(k1) := \mathrm{Minimize}(Тобщ2, V1, V2)$

$k1 := 0.05, 0.1 .. 0.9$

$f(k1)_0 =$

0.25
0.354
0.433
0.5
0.559
0.612
0.661
0.707
0.75
0.791
0.829
0.866
0.901
0.935
0.968
...

$f(k1)_1 =$

0.464
0.527
0.577
0.619
0.657
0.69
0.721
0.75
0.776
0.801
0.825
0.848
0.869
0.89
0.91
...

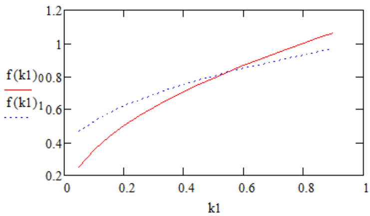


Рисунок 2 – Пример решения задачи управления информационным процессом в Mathcad

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте постановку задачи управления информационным процессом.
2. Объясните значение всех операторов в расчетном файле Mathcad.
3. Как найти аналитическое решение?

Лабораторная работа №3. Управление производством при наличии ограничений

Цель работы: Получить навыки решения задачи управления производствам, используя пакеты Excel, Mathcad и аналитические методы исследования на экстремум нелинейной функции нескольких переменных при дополнительных ограничениях.

Постановка задачи

Два предприятия могут производить продукцию одного вида (комплектующие для компьютера). Затраты C_1 и C_2 первого и второго предприятий в зависимости от объемов выпускаемой продукции X_1 и X_2 даются формулами:

$$C1(X1) := X1^2 - 20 \cdot X1 + 200$$

$$C2(X2) := X2^2 - 12 \cdot X2 + 180$$

Найти оптимальные объемы выпуска продукции каждым предприятием из условия минимума суммарных затрат на двух предприятиях, если объем выпускаемой продукции на каждом предприятии не должен превышать 100 единиц, а суммарный выпускаемый объем не должен быть меньше a ед. продукции.

Порядок работы

1. Составить целевую функцию, выражающую суммарные затраты. Используя Mathcad, найти ее минимум, а также $X_{1опт}$, $X_{2опт}$ при заданных ограничениях, принимая $a = 20$.
2. Средствами Mathcad исследовать влияние управляющего параметра a на $X_{1опт}$, $X_{2опт}$.
3. Получить решение с помощью функции Лагранжа. В Mathcad в блоке Given записать систему уравнений, приравняв к нулю частные производные функции Лагранжа по всем переменным. Для отыскания решения использовать функцию Find.
4. Найти решение в Excel, используя инструмент «Поиск решения».
5. Сравнить решения, полученные различными методами. Сделать выводы. Оформить отчет. Записать результаты и отчет в личную папку.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте постановку задачи управления производством.
2. Объясните значение всех операторов в расчетном файле Mathcad.
3. Как найти решение с помощью инструмента «Поиск решения»?

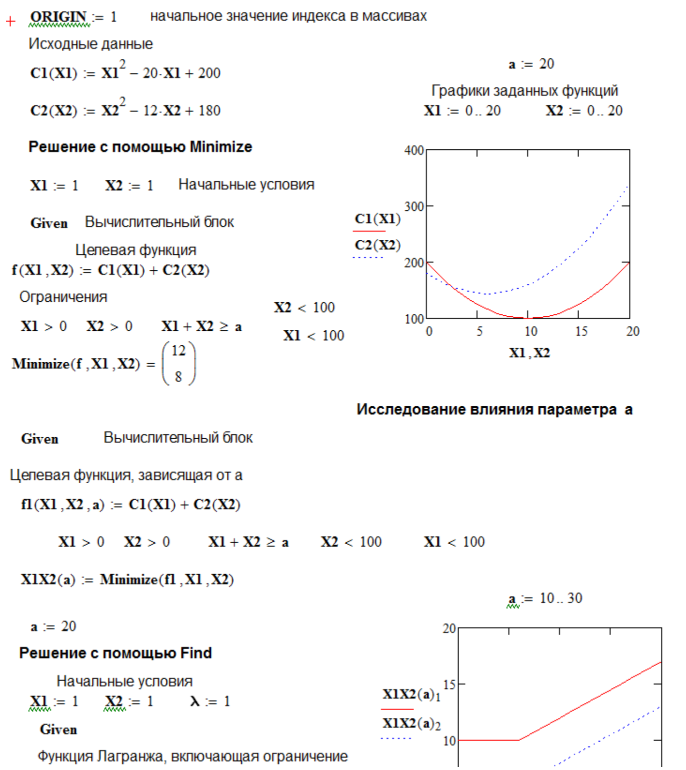


Рисунок 3 – Пример решения задачи управления производством в Mathcad

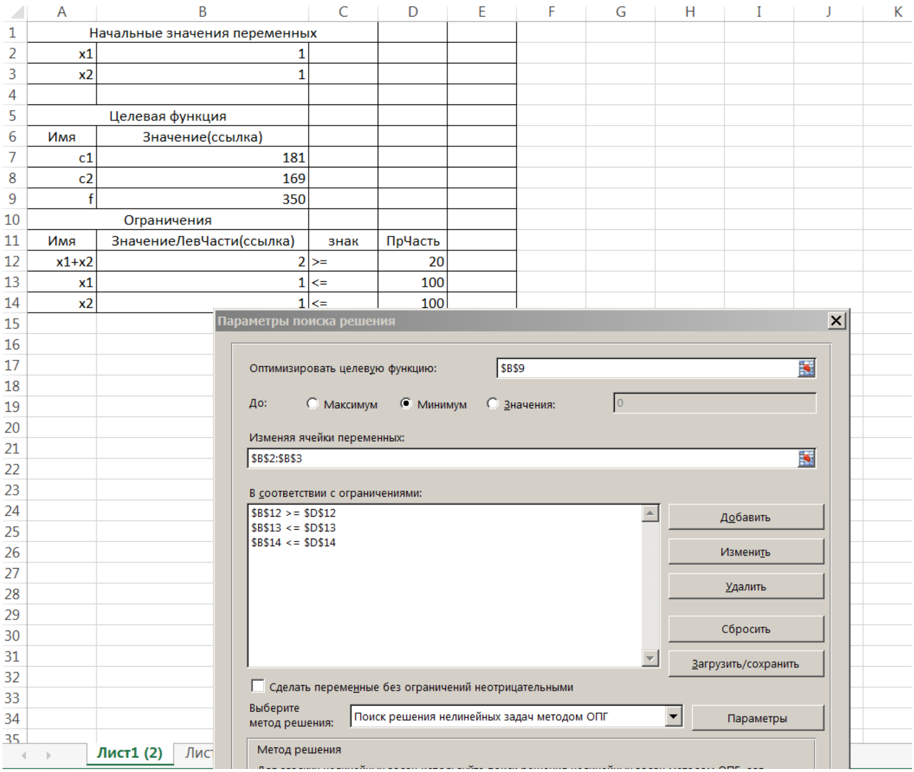


Рисунок 4 – Пример решения задачи управления производством в Excel

Лабораторная работа №4. Планирование производства на предприятиях

Цель работы: Получить навыки решения задачи планирования производства как задачи линейного программирования графическим, симплекс-методом и с помощью пакетов Excel, Mathcad.

Постановка задачи

Предприниматель может производить продукцию одного вида на двух предприятиях. Прибыль от реализации единицы продукции для первого и второго предприятий равна соответственно α и β. Общая прибыль складывается из прибыли на первом и втором предприятиях, а также некоторой постоянной составляющей γ, не зависящей от объемов производства. Объемы производства x и y на первом и втором предприятиях связаны ограничениями

$$x + y \leq 5, x \leq 4,\ y \leq x + 1.$$

Найти объемы производства на первом и втором предприятиях, которые обеспечат предпринимателю максимальную прибыль.

Краткая теория

Алгоритм табличного симплекс-метода для $F \to \max$

Таблица 3 – Симплекс-таблица

Свободный / Базовый	x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n	b
x_{n+1}	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	...	$a_{1,n-1}$	$a_{1,n}$	b_1
x_{n+2}	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	...	$a_{2,n-1}$	$a_{2,n}$	b_2
...	...	...	...	...	...	...
x_{n+m}	$a_{m,1}$	$a_{m,2}$	...	$a_{m,n-1}$	$a_{m,n}$	b_m
F	$-a_{0,1}$	$-a_{0,2}$	...	$-a_{0,n-1}$	$-a_{0,n}$	b_0

По исходным данным формируем начальную симплекс-таблицу (таблица 1). Далее получаем преобразованные симплекс-таблицы в соответствии с описанным ниже алгоритмом.

Шаг 1. Проверка на допустимость

Проверяем на положительность элементы столбца b (свободные члены), если среди них нет отрицательных, то найдено допустимое решение (решение соответствующее одной из вершин многогранника условий), и мы переходим к шагу 2. Если в столбце свободных членов имеются отрицательные элементы, то выбираем среди них максимальный по модулю – он задает ведущую строку k. В этой строке так же находим максимальный по модулю отрицательный элемент $a_{k,l}$ – он задает ведущий столбец – l и является ведущим элементом. Переменная, соответствующая ведущей строке исключается из базиса, переменная соответствующая ведущему столбцу включается в базис. Пересчитываем симплекс-таблицу согласно правилам.

Если же среди свободных членов есть отрицательные элементы – а в соответствующей строке – нет, то условия задачи несовместны и решений у нее нет.

Если после перерасчета в столбце свободных членов остались отрицательные элементы, то переходим к первому шагу, если таких нет, то ко второму.

Шаг 2. Проверка на оптимальность

На предыдущем этапе найдено допустимое решение. Проверим его на оптимальность. Если среди элементов симплексной таблицы, находящихся в строке F (не беря в расчет элемент b_0 – текущее значение целевой функции) нет отрицательных, то найдено оптимальное решение.

Если в строке F есть отрицательные элементы, то решение требует улучшения. Выбираем среди отрицательных элементов строки F максимальный по модулю (исключая значение функции b_0): $a_{0,l} = \min\{a_{0,i}\}$.

l – столбец в котором он находится будет ведущим. Для того, что бы найти ведущую строку, находим отношение соответсвующего свободного члена и элемента из ведущего столбца, при условии, что они неотрицательны: $b_k / a_{k,l} = \min\{b_i/a_{i,l}\}$ при $a_{i,l} > 0$, $b_i > 0$.

k – строка, для которой это отношение минимально – ведущая. Элемент $a_{k,l}$ – ведущий (разрешающий). Переменная, соответствующая ведущей строке (x_k) исключается из базиса, переменная соответствующая ведущему столбцу (x_l) включается в базис.

Пересчитываем симплекс – таблицу по формулам. Если в новой таблице после перерасчета в строке F остались отрицательные элементы переходим к шагу 2.

Если невозможно найти ведущую строку, так как нет положительных элементов в ведущем столбце, то функция в области допустимых решений задачи не ограничена – алгоритм завершает работу.

Если в строке F и в столбце свободных членов все элементы положительные, то найдено оптимальное решение.

Правила преобразований симплексной таблицы

При составлении новой симплекс-таблицы в ней происходят следующие изменения:

1. вместо базисной переменной x_k записываем x_l; вместо

небазисной переменной x_l записываем x_k;
2. ведущий элемент заменяется на обратную величину $a_{k,l}' = 1/a_{k,l}$;
3. все элементы ведущего столбца (кроме $a_{k,l}$) умножаются на $-1/a_{k,l}$;
4. все элементы ведущей строки (кроме $a_{k,l}$) умножаются на $1/a_{k,l}$;
5. оставшиеся элементы преобразуются по формуле: $a_{i,j}' = a_{i,j} - a_{i,l} x\, a_{k,j} / a_{k,l}$.

Порядок работы

1. Составить целевую функцию, выражающую общую прибыль. Получить решение $X_{опт}$, $Y_{опт}$ при заданных ограничениях, принимая $\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = \gamma = 20$, используя графоаналитический и симплексный методы.
2. Используя Mathcad, найти минимум целевой функции при заданных ограничениях. Исследовать влияние управляющих параметров α и β на $X_{опт}$. $Y_{опт}$.
3. Найти решение в Excel, используя инструмент «Поиск решения».
4. Сравнить решения, полученные различными методами. Сделать выводы. Оформить отчет. Записать результаты и отчет в личную папку.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте постановку задачи планирования производства как задачи линейного программирования. Какой вид имеет целевая функция?
2. Объясните последовательность решения задачи графоаналитическим методом.
3. Алгоритм решения задачи симплекс – методом (допустимое решение, условие несовместности системы ограничений, правила выбора ведущего элемента, преобразования симплекс – таблицы, критерий достижения максимума функции, неограниченности функции).
4. Объясните значение всех операторов в расчетном файле Mathcad.
5. Как найти решение с помощью инструмента «Поиск решения»?

$\alpha := 2 \quad \beta := 1 \quad \gamma := 20$

$f(x,y) := \alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma$

$x := 0 \quad y := 0$

Given

$x + y \le 5 \qquad x \le 4 \qquad y \le x + 1$

$\mathrm{Maximize}(f, x, y) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$f(x,y,\alpha,\beta) := \alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma$

$x := 0 \quad y := 0$

Given

$x + y \le 5 \qquad x \le 4 \qquad y \le x + 1$

$\alpha := 2 \qquad \beta := 1.5, 1.6 .. 2.9$

$P(\alpha, \beta) := \mathrm{Maximize}(f, x, y)$

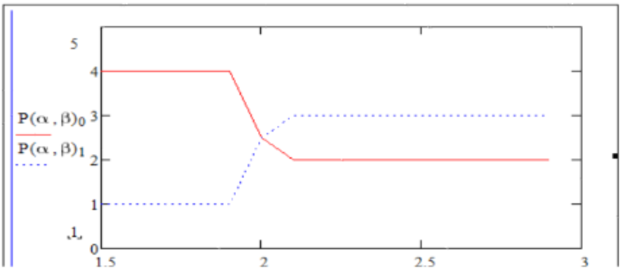


Рисунок 5 – Пример решения задачи планирования производства на предприятиях в Mathcad

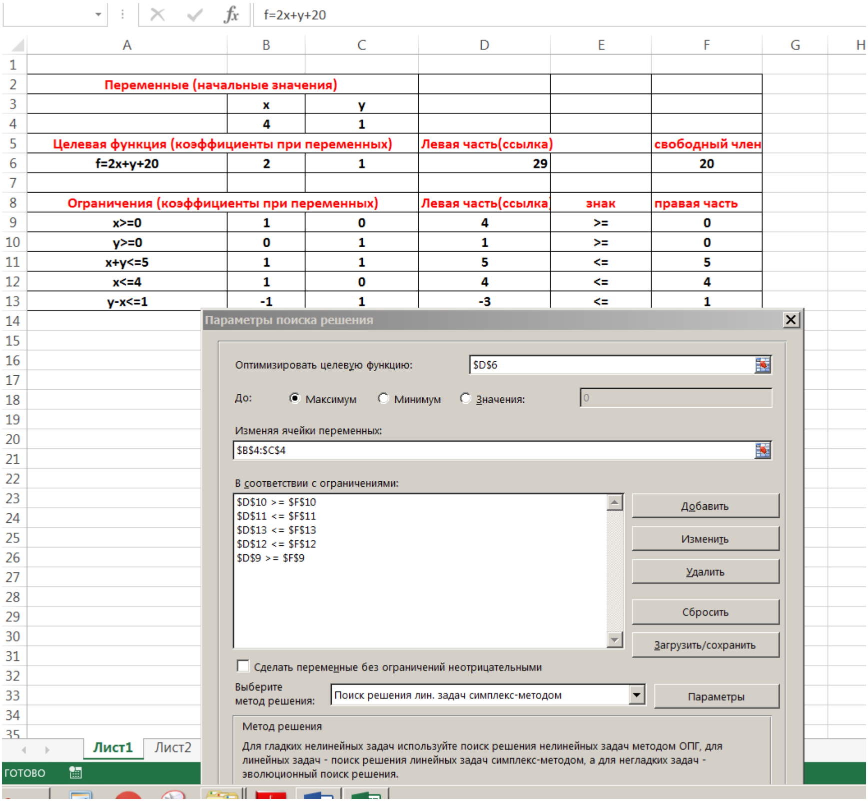


Рисунок 6 – Пример решения задачи планирования производства на предприятиях в Excel.

Лабораторная работа №5. Планирование производства продукции

Цель работы: Получить навыки решения задачи планирования производства как задачи линейного программирования графическим, симплекс-методом и с помощью пакетов Excel, Mathcad.

Постановка задачи

Для изготовления различных изделий A и B используются три вида сырья. На производство единицы изделия A требуется затратить сырья первого вида a_1 кг, сырья второго вида a_2 кг, сырья третьего вида a_3 кг. На производство единицы изделия B требуется затратить сырья первого вида b_1 кг, сырья второго вида b_2 кг, сырья третьего вида b_3 кг.

Производство обеспечено сырьём первого вида в количестве p_1 кг, сырьём второго вида – в количестве p_2 кг, сырьём третьего вида – в количестве p_3 кг.

Прибыль от реализации готового изделия A составляет α руб., а изделия B – β руб.

Требуется составить план x и y объемов производства изделий A и B, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации.

Исходные данные

Таблица 4 – Исходные данные

Вариант	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	p_1	p_2	p_3	α	β
1	12	4	3	3	5	14	264	136	266	6	4
2	15	12	3	2	6	12	300	306	360	9	6
3	14	14	6	6	8	12	350	392	408	10	5
4	16	9	5	4	9	12	400	333	360	9	12
5	8	4	3	6	9	9	192	144	135	8	9
6	14	4	2	4	4	12	252	120	240	30	40
7	15	5	4	4	3	8	225	100	192	6	8
8	16	3	6	2	2	15	304	83	375	10	12

Вариант	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	p_1	p_2	p_3	α	β
9	11	4	5	3	6	14	220	132	280	5	4
10	15	10	3	3	5	10	300	320	340	9	7
11	15	14	7	6	9	12	330	378	420	8	5
12	14	10	5	4	8	11	280	320	330	9	11
13	12	5	4	6	10	9	270	150	180	7	9
14	15	3	5	3	2	14	270	84	420	10	14
15	13	3	3	5	4	12	265	140	260	7	5

Порядок работы

1. Составить целевую функцию, выражающую прибыль от реализации продукции двух видов, и систему неравенств, исходя из ограниченности ресурсов.
2. Найти оптимальный план производства продукции $X_{опт}$. $Y_{опт}$ при заданных ограничениях, используя графо – аналитический и симплекс – методы.
3. Используя пакеты Mathcad и Excel, найти оптимальное решение. Сравнить решения, полученные различными методами. Сделать выводы. Оформить отчет. Записать результаты и отчет в личную папку.

$$a1 := 10 \quad a2 := 4 \quad a3 := 5 \qquad b1 := 3 \quad b2 := 4 \quad b3 := 15$$

$$\alpha := 4 \quad \beta := 6 \qquad p1 := 370 \quad p2 := 184 \quad p3 := 400$$

$$Y(x1, x2) := \alpha \cdot x1 + \beta \cdot x2$$

$$x1 := 0 \quad x2 := 0$$

Given

$$a1 \cdot x1 + b1 \cdot x2 \le p1$$

$$a2 \cdot x1 + b2 \cdot x2 \le p2$$

$$a3 \cdot x1 + b3 \cdot x2 \le p3$$

$$x1 \ge 0 \quad x2 \ge 0$$

$$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} := \mathrm{Maximize}(Y, x1, x2) \qquad \boxed{\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 17 \end{pmatrix}}$$

Рисунок 7 – Пример решения задачи планирования производства нескольких видов продукции в Mathcad.

ТЕМА 2. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Лабораторная работа №6. Планирование объема работ

Цель работы: Получить навыки решения многокритериальной задачи планирования объема работ, используя методы главного критерия, свертки, пакет Mathcad.

Постановка задачи

Бригаде, исходя из нескольких критериев, нужно спланировать оптимальный объем работ x. Рассматриваемые критерии выражаются через объем работ по формулам:

$f1(x) = -(x-5)^2 + 50$ – критерий качества;

$f2(x) = \frac{(x-1)^2}{3} + 3$ – критерий прибыли;

$f3(x) = -2x + 40$ – критерий свободных ресурсов.

На критерии накладываются следующие ограничения:

$$f1(x) \geq a1,\ \ f2(x) \geq a2,\ \ f3(x) \geq a3,$$

где $a1, a2, a3$ – известные величины.

Объем работ удовлетворяет требованию: $x \leq 12$.

Оптимальным значением для каждого критерия является его максимум. Критерии находятся в противоречии, т.е. увеличение значения одного критерия приводит к уменьшению значения другого критерия. Требуется найти оптимальное решение в условиях противоречивости критериев.

Порядок работы

1. В Mathcad в одной системе координат построить графики функций $f1(x), f2(x), f3(x)$. Учитывая ограничения (положить $a1 = 30, a2 = 20, a3 = 30$), найти графически несколько вариантов допустимых решений.

2. Используя метод главного критерия (выбрать в качестве главного критерий $\boldsymbol{f2}$, ограничение по этому критерию отключить), найти $\boldsymbol{x}_{\text{опт}}$. Исследовать влияние управляющего параметра $\boldsymbol{a3}$ на $\boldsymbol{x}_{\text{опт}}$.

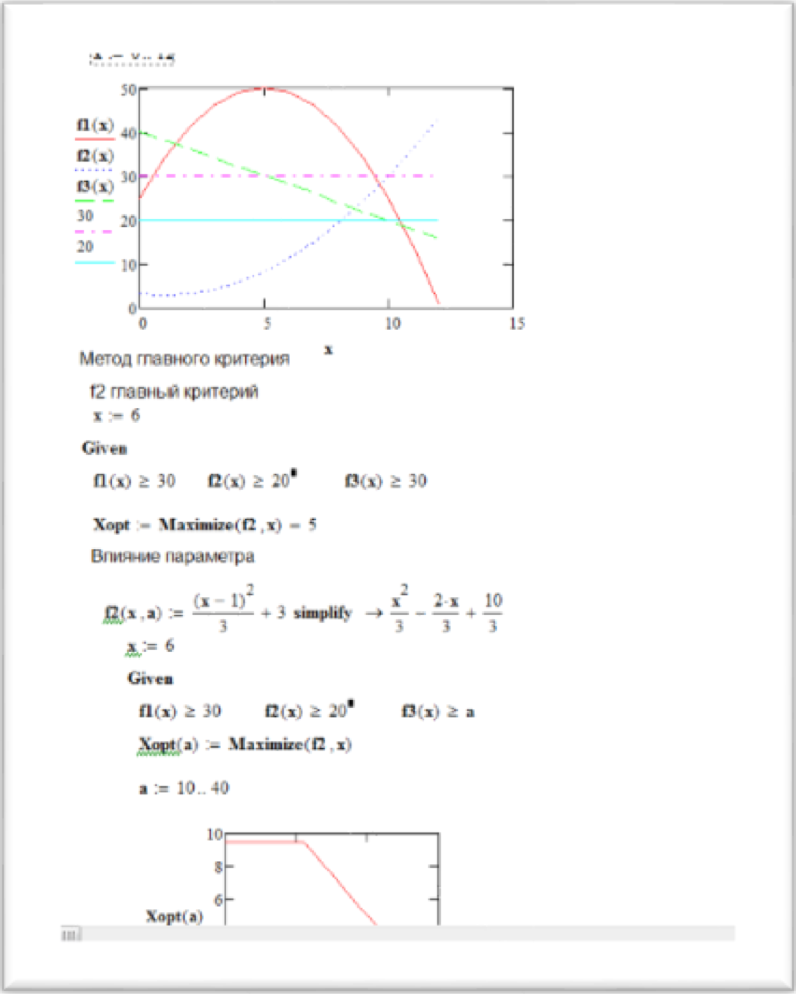
3. Найти $\boldsymbol{x}_{\text{опт}}$, используя метод линейной свертки (без ограничений на критерии): $\boldsymbol{f(x) = \alpha f1(x) + \beta f2(x) + \gamma f3(x) \rightarrow max}$, где $\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma = 1}$.

4. Исследовать влияние управляющего параметра α на $x_{\text{опт}}$.

5. Найти $x_{\text{опт}}$, используя методы максиминной свертки и мультипрликативной свертки (без ограничений на критерии):

$$f(x) = \min(f1(x), f2(x), f3(x)) \to \max$$

$$f(x) = f1(x)f2(x)f3(x) \to \max$$



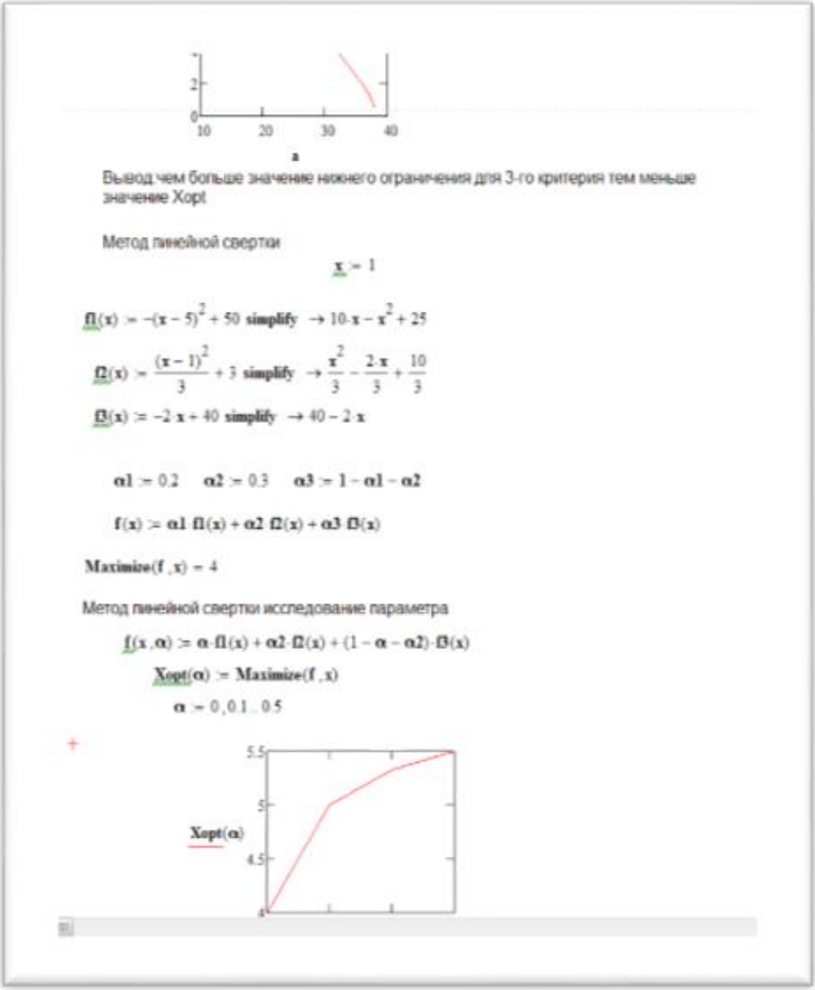


Рисунок 8 – Пример решения задачи планирования объема работ в Mathcad

6. Сравнить решения, полученные различными методами. Сделать выводы. Оформить отчет. Записать результаты и отчет в личную папку.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте постановку задачи планирования в усло-

виях многокритериальности.

2. В чем суть методов главного критерия, линейной свертки, максиминной свертки, мультипликативной свертки?

3. Объясните значение всех операторов в расчетном файле Mathcad.

Лабораторная работа №7. Нахождение парето-оптимальных решений

Цель работы: Получить навыки решения многокритериальных задач, используя алгоритм отыскания паретовского множества, пакет Excel.

Постановка задачи

Качество работы некоторой информационной системы определяется m критериями. Наилучшими значениями критериев являются их максимальные значения. В результате исследований найдены значения критериев для n случаев (альтернатив). Найти среди них парето-оптимальные решения. Задавшись дополнительными ограничениями на критерии, выделить из паретовского множества наилучший вариант.

Исходные данные

Количество критериев $m = 3$. Количество альтернатив $n = 12$. В таблице 5 приведены значения критериев для альтернатив (варианты выбирать в соответствии со списком группы).

Таблица 5 – Исходные данные

	Вариант 1			Вариант 2			Вариант 3			Вариант 4			Вариант 5		
n\m	f1	f2	f3	f1	f2	f3	f1	f2	f3	f1	f2	f3	f1	f2	f3
1	11	10	13	14	12	11	13	14	11	15	13	12	14	13	13
2	15	11	14	13	10	12	12	14	11	11	10	12	13	13	12
3	13	13	11	15	12	12	14	13	12	11	14	12	12	13	10
4	12	12	13	15	12	13	14	13	14	15	14	11	13	14	10
5	14	14	11	13	14	10	11	13	12	12	13	12	12	14	13
6	13	15	15	12	11	14	14	12	13	13	10	14	14	12	12
7	12	11	15	14	13	12	12	15	14	14	10	12	12	10	10

8	13	11	12	12	13	13	13	12	10	12	13	11	15	11	12
9	11	14	11	12	10	12	11	13	11	13	11	13	12	15	11
10	13	14	14	13	10	13	13	13	13	11	14	11	11	10	13
11	14	11	11	11	13	12	14	14	14	11	12	12	11	13	13
12	12	11	15	10	14	15	14	12	10	14	14	10	14	14	12
	Вариант 6			Вариант 7			Вариант 8			Вариант 9			Вариант 10		
n\m	f1	f2	f3	f1	f2	f3	f1	f2	f3	f1	f2	f3	f1	f2	f3
1	12	11	13	13	11	11	11	11	11	14	12	13	10	15	14
2	13	14	10	13	12	12	10	15	11	15	11	12	14	11	10
3	12	14	14	12	12	10	11	13	10	10	13	12	14	12	11
4	11	12	14	12	11	11	13	15	11	14	13	15	14	12	13
5	14	11	13	12	15	13	12	11	13	15	14	11	10	14	15
6	14	11	13	13	12	13	10	12	12	12	12	13	13	11	14
7	13	14	11	13	12	13	13	13	13	15	14	11	12	10	13
8	15	12	10	13	15	11	12	12	14	12	11	14	15	12	15
9	14	14	10	12	13	10	14	14	13	13	13	11	15	14	15
10	12	14	13	10	15	11	14	13	13	12	11	14	13	13	11
11	13	15	11	14	13	14	11	11	12	13	12	11	10	12	10
12	13	13	11	10	13	13	10	11	14	12	12	11	15	15	12
	Вариант 11			Вариант 12			Вариант 13			Вариант 14			Вариант 15		
n\m	f1	f2	f3	f1	f2	f3	f1	f2	f3	f1	f2	f3	f1	f2	f3
1	11	12	12	11	13	11	12	10	10	12	11	15	15	12	15
2	11	12	14	12	12	12	10	13	13	13	11	11	14	13	13
3	13	14	12	11	15	12	11	13	15	11	13	12	11	15	14
4	11	14	14	12	10	12	11	14	13	13	14	13	11	13	11
5	13	11	14	12	12	12	10	10	15	13	14	12	13	14	15
6	12	14	13	14	11	12	13	14	12	11	12	12	12	11	12
7	13	12	12	13	13	14	13	15	13	12	12	12	10	11	10
8	14	12	14	14	12	13	11	12	12	12	14	13	12	14	14
9	15	12	12	13	13	11	12	10	11	13	14	15	12	13	11
10	12	13	11	11	14	13	14	12	11	14	11	11	15	11	13
11	11	14	14	14	11	13	14	12	12	14	10	12	14	12	14
12	12	10	11	13	13	12	11	14	15	10	11	11	13	11	14

Краткая теория

Обозначим X – множество альтернатив. Количество рассматриваемых альтернатив равно n, $|X| = n$, а количество критериев (факторов), определяющих альтернативу, равно m. Альтернативы являются точками m – мерного пространства, т.е. $X \subset R^m$. Значения критериев для каждой альтернативы являются координатами точек множества X.

Пусть $A, B \subset X$. Альтернатива A *доминирует* по Парето альтернативу B, если по всем критериям альтернатива A не хуже, и хотя бы по одному критерию лучше, чем альтернатива B. В этом случае альтернатива A является доминирующей, а альтернатива B – доминируемой.

Альтернатива A^* называется *оптимальной по Парето* (паретовской) в множестве *X*, если в этом множестве не существует других альтернатив, которые доминируют по Парето альтернативу A^*.

Алгоритм нахождения паретовского множества

1. В столбце каждого критерия сортировать точки по убыванию значений критерия.
2. Выбрать первую точку из столбца первого критерия (точку с наибольшим значением критерия). Если имеется несколько точек с одинаковым значением критерия, и среди них есть доминирующая, то ее надо поставить выше остальных.
3. В остальных столбцах найти эту точку. Отметить ее, найти доминируемые ею точки (точки, в которых значения каждого критерия не больше, чем в этой точке и, по крайней мере, по одному критерию значения строго меньше).
4. Исключить найденные доминируемые точки из всех столбцов. Отмеченную точку зафиксировать как паретовскую и не рассматривать в дальнейшем.
5. Выбрать в первом столбце следующую точку, если возможно (если имеется несколько точек с одинаковым значением критерия, и среди них есть доминирующая, то ее надо поставить выше остальных). Далее перейти на пункт 3, в противном случае найдено паретовское множество.

Порядок работы

1. Ввести данные на лист EXCEL в соответствии с заданием. Добавить для каждого критерия столбец номеров точек. Упорядочить точки в порядке убывания значений критериев, столбцы номеров точек включать в сортировку.
2. Последовательно исключить доминируемые точки (значения всех критериев в этих точках не лучше, чем в доминирующих точках).
3. Указать множество паретовских точек.
4. Ввести дополнительные ограничения снизу на значения критериев, и сузить паретовское множество.
5. Изобразить множество паретовских точек на диаграммах в Excel (f1,f2,f3-ряды, номера точек-ось категорий). Выделить на этих диаграммах паретовские точки.
6. Сделать выводы. Оформить отчет. Записать результаты и отчет в личную папку.

Контрольные вопросы

1. В чем состоит постановка задачи многокритериальной оптимизации?
2. Какие существуют алгоритмы решения многокритериальных задач?
3. Какая альтернатива называется доминируемой, доминирующей?
4. Какая альтернатива называется паретовской?
5. В чем состоит алгоритм нахождения паретовского множества?
6. Привести пример паретовского множества на плоскости в случаях, если оптимальные значения критериев максимальны (минимальны).
7. Как сузить паретовское множество?

X37

fi опт max — Исходные данные

табл 1, порядк номер	номера точек	f1	номера точек	f2	номера точек	f3	номера доминирующих точек (Паретовских)	номера доминируемых точек
1	1	13	1	12	1	12		
2	2	11	2	13	2	14		
3	3	15	3	11	3	10		
4	4	12	4	15	4	12		
5	5	14	5	12	5	13		
6	6	10	6	14	6	11		
7	7	12	7	10	7	10		
8	8	13	8	12	8	14		
9	9	11	9	13	9	12		
10	10	10	10	11	10	10		
11	11	14	11	10	11	11		
12	12	12	12	14	12	14		

Упорядочение точек по возрастанию значений критериев

табл 2	номера точек	f1	номера точек	f2	номера точек	f3	номера доминирующих точек (Паретовских)	номера доминируемых точек
1	3	15	4	15	2	14		
2	5	14	6	14	8	14		
3	11	14	12	14	12	14		
4	1	13	2	13	5	13		
5	8	13	9	13	1	12		
6	4	12	1	12	4	12		
7	7	12	5	12	9	12		
8	12	12	8	12	6	11		
9	2	11	3	11	11	11		
10	9	11	10	11	3	10		
11	6	10	7	10	7	10		
12	10	10	11	10	10	10	3	7, 10

Паретовские точки

ограничения f1,f2,f3>11

табл 9		f1	f2	f3
1	4	12	15	12
2	5	14	12	13
3	8	13	12	14
4	12	12	14	14

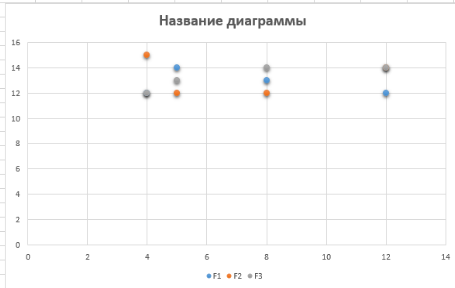


табл 3	f1		f2		f3			
1	3	15	4	15	2	14		
2	5	14	6	14	8	14		
3	11	14	12	14	12	14		
4	1	13	2	13	5	13		
5	8	13	9	13	1	12		
6	4	12	1	12	4	12		
7	12	12	5	12	9	12		
8	2	11	8	12	6	11		
9	9	11	3	11	11	11		
10	6	10	11	10	3	10	3, 5	11,1

табл 4	f1		f2		f3			
1	3	15	4	15	2	14		
2	5	14	6	14	8	14		
3	8	13	12	14	12	14		
4	4	12	2	13	5	13		
5	12	12	9	13	4	12		
6	2	11	5	12	9	12		
7	9	11	8	12	6	11		
8	6	10	3	11	3	10		
							3,5,8	нет

табл 5	f1		f2		f3	
1	3	15	4	15	2	14
2	5	14	6	14	8	14
3	8	13	12	14	12	14
4	4	12	2	13	5	13
5	12	12	9	13	4	12

табл 6	f1		f2		f3	
1	3	15	4	15	2	14
2	5	14	12	14	8	14
3	8	13	2	13	12	14
4	4	12	5	12	5	13
5	12	12	8	12	4	12

Рисунок 9 – Пример решения задачи принятия решения на основе паретовского множества в Excel

Лабораторная работа №8. Метод анализа иерархий

Цель работы: Получить навыки решения многокритериальных задач, используя метод анализа иерархий, пакет Excel.

Постановка задачи

Пусть имеется n альтернатив и m факторов, характеризующих каждую альтернативу. Требуется определить оптимальную альтернативу, используя экспертные оценки о мере значимости каждого фактора для принятия решения.

Исходные данные

Составьте исходную таблицу для выбора альтернатив в соответствии со своим вариантом (таблица 6). Использовать не менее четырех альтернатив и не менее пяти факторов.

Таблица 6 – Исходные данные

Вариант 1	*Вариант 2*	*Вариант 3*	*Вариант 4*	*Вариант 5*
Квартира	*Монитор*	*Компьютер*	*Отдых*	*Пансионат*
Вариант 6	*Вариант 7*	*Вариант 8*	*Вариант 9*	*Вариант 10*
Телевизор	*Работа*	*Коттедж*	*Вуз*	*Телефон*
Вариант 11	*Вариант 12*	*Вариант 13*	*Вариант 14*	*Вариант 15*
Аудио-сист.	*Автомобиль*	*Планшет*	*Холодильник*	*Микроволновка*

Краткая теория

О Методе анализа иерархий

Метод Анализа Иерархий (МАИ), разработанный американским математиком Томасом Саати в 80-е годы 20-го века, – математический инструмент системного подхода к сложным проблемам принятия решений. Метод применяется в ситуациях, когда альтернативы сравниваются по большому количеству факторов, когда задача плохо формализуется и более адекватно подходят человеческие опыт и интуиция, нежели сложные математические расчеты. Метод дает удобные средства учета экспертной информации.

МАИ используется во всем мире для принятия решений в разных областях: от управления на межгосударственном уровне до решения отраслевых и частных проблем в бизнесе, промышленности, здравоохранении и образовании. Для компьютерной поддержки МАИ существуют программные продукты, разработанные различными компаниями.

Анализ проблемы принятия решений в МАИ начинается с построения иерархической структуры, которая включает цель, критерии, альтернативы и другие рассматриваемые факторы, влияющие на выбор. Следующим этапом анализа является определение приоритетов (оценок), представляющих относительную важность или предпочтительность элементов построенной иерархической структуры, с помощью процедуры парных сравнений. Безразмерные оценки позволяют обоснованно сравнивать разнородные факторы, что является отличительной особенностью МАИ. На заключительном этапе анализа выполняется линейная свертка оценок и весов факторов, в результате которой вычисляются рейтинги альтернативных решений относительно главной цели. Лучшей считается альтернатива с максимальным значением рейтинга.

Порядок работы

1. Составить в Excel исходную таблицу в соответствии со своим вариантом, как показано на рисунке 10.

Автомобили	Расход топлива л/100км	Мощность л.с	Цена т.р.	Дизайн	Наличие станций ТО	Качество сборки
Kia Rio	5,9	123	630	4	4	[illegible]
Opel Astra	7,2	180	989	5	2	[illegible]
Lada Vesta	6,7	106	550	3	4	[illegible]
Ford Focus	5,9	85	745	4	3	[illegible]

Рисунок 10 – Пример исходной таблицы

2. Составить матрицу парных сравнений (рангов) размерности m на m (m – количество факторов), располагая

факторы в порядке уменьшения их значимости. Заполнить главную диагональ матрицы единицами. Выше главной диагонали поставить ранги парных сравнений (целые числа от 1 до 9). Чем более значим фактор по сравнению с другим, тем меньше его ранг. Проставленные ранги в матрице должны не убывать слева направо, и не возрастать сверху вниз для обеспечения согласованности сравнений факторов. Заполнить матрицу элементами ниже главной диагонали, вычислив их как обратные величины к симметрично стоящим элементам выше главной диагонали (см. рисунок 11). Вычислить вес каждого фактора как среднее геометрическое чисел, стоящих в строках матрицы рангов.

	Качество	Цена т.р.	Расход топлива л/100км	Мощность л.с	Дизайн	Наличие станций ТО	Произведение	Степень 1/6	Вес фактора
ачество	1,00	2,00	3,00	4,00	7,00	9,00	1512	3,387859	0,38454
ена т.р.	0,50	1,00	2,00	3,00	6,00	8,00	144	2,289428	0,25986
асход топлива /100км	0,33	0,50	1,00	2,00	5,00	7,00	11,66667	1,505998	0,1709
Лощность л.с	0,25	0,33	0,50	1,00	4,00	6,00	1	1	0,11350
изайн	0,14	0,17	0,20	0,25	1,00	5,00	0,005952	0,425711	0,04832
аличие танций ТО	0,11	0,13	0,14	0,17	0,20	1,00	6,61E-05	0,201098	0,02282
умма рангов	2,33730159	4,125	6,8428571	10,4166667	23,2	36	-	8,810095	
Кол-во факторов	6	Случайный индекс	1,24	ПС=	6,265582	ИС=	0,053116	ОС=	0,04283

ак как ОС < 0.1, то оценки не имеют значительных противоречий и могут быть приняты для дальнейших расчетов

Рисунок 11 – Пример составления матрицы рангов, расчета весов факторов, определения отношения согласованности

3. Для контроля правильности сравнения факторов рассчитать показатель согласованности (ПС) как сумму произведений оценок факторов на сумму рангов в столбцах таблицы рангов. Затем рассчитать индекс согласованности (ИС) как частное от деления разности ПС и количества факторов на разность количества факторов и единицы. Далее рассчитать отношение согласованности (ОС) как частное от деления ИС на случайный индекс (СИ). Случайный индекс зависит от количества факторов и выбирается из таблицы на рисунке 12. Рассчитанное отношение согласованности долж- но быть меньше 0,1, в против-

ном случае необходимо проверить правильность оценки факторов. Пример расчетов представлен на рисунке 11.

Количество факторов	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Случайный индекс (СИ)	0	0	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

Рисунок 12 – Таблица значений случайного индекса

4. Вычислить оценки альтернатив по каждому фактору, заполнив таблицы, как показано на рисунке 13 (для оценок используется формула среднего геометрического).

4) Сравнение автомобилей по фактору Качество

	Kia Rio	Opel Astra	Lada Vesta	Ford Focus	Произведение	Степень 1/4	Оценка
a Rio	1,00	0,25	2,00	0,50	0,25	0,793701	0,176986
pel Astra	4,00	1,00	6,00	2,00	48	1,906369	0,425097
ada Vesta	0,50	0,17	1,00	0,25	0,020833	0,524558	0,11697
ord Focus	2,00	0,50	4,00	1,00	4	1,259921	0,280947
мма	7,50	1,92	13,00	3,75	-	4,48	1,00

5) Сравнение автомобилей по фактору Цена

	Kia Rio	Opel Astra	Lada Vesta	Ford Focus	Произведение	Степень 1/4	Оценка
a Rio	1,00	7,00	0,50	2,00	7	1,383088	0,292361
pel Astra	0,14	1,00	0,11	0,20	0,003175	0,383367	0,081037
ada Vesta	2,00	9,00	1,00	4,00	72	2,039649	0,431146
ord Focus	0,50	5,00	0,25	1,00	0,625	0,924656	0,195456
	3,64	22,00	1,86	7,20	-	4,73	1,00

6) Сравнение автомобилей по фактору Расход топлива

	Kia Rio	Opel Astra	Lada Vesta	Ford Focus	Произведение	Степень 1/4	Оценка
a Rio	1,00	9,00	5,00	1,00	45	1,885973	0,3869
pel Astra	0,11	1,00	0,33	0,11	0,004115	0,400312	0,082123
ada Vesta	0,20	3,00	1,00	0,20	0,12	0,702312	0,144077
ord Focus	1,00	9,00	5,00	1,00	45	1,885973	0,3869
	2,31	22,00	11,33	2,31	-	4,87	1,00

7) Сравнение автомобилей по фактору Мощность

Рисунок 13 – Примеры нахождения оценок альтернатив по каждому фактору

5. Вычислить рейтинги альтернатив, используя веса и оценки из предыдущих таблиц, и выбрать оптимальную альтернативу (см. рисунок 14).

6. Сделать выводы. Оформить отчет. Записать результаты и отчет в личную папку.
7.

Факторы	Вес фактора	Kia Rio	Opel Astra	Lada Vesta	Ford Focus	Kia Rio	Opel Astra	Lada Vesta	Ford Focus
ачество	0,385	0,177	0,425	0,117	0,281	0,068059	0,163468	0,04498	0,10803622
ена	0,260	0,292	0,081	0,431	0,195	0,075974	0,021059	0,112039	0,0507920
асход топлива	0,171	0,387	0,082	0,144	0,387	0,066137	0,014038	0,024628	0,0661367
ощность	0,114	0,212	0,543	0,146	0,099	0,02405	0,02405	0,02405	0,02405015
изайн	0,048	0,237	0,376	0,149	0,237	0,011458	0,018188	0,007218	0,01145760
оличеств анций ТО	0,023	0,382	0,079	0,382	0,158	0,008711	0,001801	0,008711	0,0036022
ейтинг втомобиля	-	-	-	-	-	0,254388	0,242604	0,221627	0,26407505
									Лучший

Рисунок 14 – Примеры нахождения рейтингов альтернатив

Контрольные вопросы

1. В каких задачах принятия решений применяется МАИ, в чем его суть?
2. Веса факторов, оценки альтернатив в МАИ определяются по формуле среднего геометрического. Запишите эту формулу.
3. Как определяются итоговые рейтинги альтернатив?
4. Опишите алгоритм МАИ.

ТЕМА 3. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И РИСКА

Лабораторная работа №9. Критерии Лапласа, Вальда, Гурвица и Сэвиджа

Цель работы: Приобретение навыков применения критериев, используемых для задач принятия решений в условиях неопределенности.

Постановка задачи

Выбор проекта электростанции. Энергетическая компания должна выбрать проект электростанции. Всего имеется *n* типов электростанций: A_1 – тепловые, A_2 – приплотинные, A_3 – бесшлюзовые, A_4 – шлюзовые и др. Последствия, связанные со строительством и дальнейшей эксплуатацией электростанции каждого из этих типов, зависят от ряда неопределенных факторов (состояния погоды, возможности наводнения, цены топлива, расходы по транспортировке топлива и т.п.). Предположим, что можно выделить *m* вариантов сочетаний данных факторов – они выступают в качестве состояний среды и обозначаются здесь через B_1, B_2, B_3, …,B_m. Экономическая эффективность электростанции определяется в данном случае как процент прироста дохода в течение одного года эксплуатации электростанции в сопоставлении с капитальными затратами; она зависит как от типа электростанции, так и от состояния среды и определяется таблицей (матрицей выигрышей):

	B_1	B_2	B_3	…	B_m
A_1	a_1^1	a_1^2	a_1^3		a_1^m
A_2	a_2^1	a_2^2	a_2^3		a_2^m
A_3	a_3^1	a_3^2	a_3^3		a_3^m
…					
A_n	a_n^1	a_n^2	a_n^3		a_n^m

где a_i^j – экономическая эффективность (выигрыш) при выборе i-го типа электростанции (i-ой альтернативы) при j-ом варианте сочетания факторов (j-ом состоянии среды), влияющих на экономическую эффективность.

вариант 1

	1	2	3	4	5	6	7
1	68	51	66	60	59	67	66
2	58	57	69	66	53	64	70
3	66	66	68	65	51	69	60
4	58	61	58	66	64	56	52
5	63	57	62	66	67	57	59
6	68	65	63	53	67	68	59
7	65	64	66	61	69	51	64
8	62	51	65	65	58	54	62

вариант 2

	1	2	3	4	5	6	7
1	66	69	50	64	68	65	56
2	53	58	55	66	56	55	55
3	54	50	61	50	59	59	54
4	56	60	56	59	57	59	69
5	59	54	65	68	67	63	53
6	68	63	61	58	61	62	66
7	69	64	55	53	61	65	68
8	70	53	57	66	56	53	52

вариант 3

	1	2	3	4	5	6	7
1	62	65	54	51	50	55	61
2	59	62	68	66	54	59	51
3	67	62	51	64	52	55	56
4	62	64	65	51	57	52	61
5	66	61	66	65	65	57	52
6	53	57	69	61	60	57	68
7	64	52	69	57	51	66	63
8	61	61	50	66	59	53	64

вариант 4

	1	2	3	4	5	6	7
1	66	57	52	63	61	57	68
2	61	51	63	66	58	63	51
3	62	62	51	57	68	67	65
4	68	68	60	68	53	56	66
5	54	55	52	51	62	60	63
6	59	68	57	66	63	64	54
7	60	56	52	56	55	52	60
8	52	56	58	61	63	62	58

вариант 5

	1	2	3	4	5	6	7
1	52	56	54	50	66	52	68
2	52	61	51	50	53	65	56
3	63	59	66	64	61	50	52
4	55	59	64	51	67	53	56
5	53	51	61	66	68	62	55
6	54	68	63	56	60	53	63
7	67	62	65	51	68	53	53
8	63	59	59	69	50	66	61

вариант 6

	1	2	3	4	5	6	7
1	62	61	52	66	55	62	61
2	59	68	53	50	60	54	61
3	63	53	69	58	59	66	68
4	56	69	66	66	59	58	67
5	51	52	55	56	52	65	55
6	61	70	66	61	68	55	57
7	64	63	67	53	64	51	58
8	54	60	70	56	61	60	60

вариант 7

	1	2	3	4	5	6	7
1	55	56	59	54	60	70	63
2	69	68	63	60	54	58	54
3	56	54	57	63	58	54	58
4	54	61	66	56	62	63	65
5	60	63	66	53	50	61	66
6	52	59	61	59	64	56	65
7	67	56	61	59	61	58	65
8	60	58	67	70	69	55	61

вариант 8

	1	2	3	4	5	6	7
1	69	64	54	66	50	62	60
2	68	70	57	61	52	69	65
3	58	63	52	51	57	61	52
4	58	61	69	64	53	64	53
5	59	66	60	66	69	52	61
6	53	64	53	62	50	58	66
7	59	63	69	70	70	65	65
8	60	66	58	53	64	61	68

вариант 9							
	1	2	3	4	5	6	7
1	60	51	66	60	59	64	66
2	58	57	60	66	53	64	70
3	66	60	68	65	51	62	60
4	58	61	58	61	64	56	52
5	63	57	62	61	62	57	59
6	60	60	63	53	67	65	59
7	65	64	60	61	63	51	64
8	62	51	65	65	58	54	62

вариант 10							
	1	2	3	4	5	6	7
1	66	60	50	64	60	65	56
2	53	58	55	60	56	55	55
3	54	50	61	50	59	59	54
4	56	60	56	59	57	59	6=
5	59	54	60	60	60	63	53
6	60	63	61	58	61	62	66
7	60	64	55	53	61	65	60
8	70	53	57	60	56	53	52

вариант 11							
	1	2	3	4	5	6	7
1	62	68	54	51	50	55	61
2	59	62	68	60	54	59	51
3	67	67	51	64	52	55	56
4	62	64	65	51	57	52	61
5	60	61	66	65	65	57	52
6	53	57	60	61	60	57	63
7	64	52	69	57	51	61	63
8	61	61	50	66	59	53	64

вариант 12							
	1	2	3	4	5	6	7
1	60	57	52	63	61	57	60
2	61	51	63	60	58	63	51
3	62	62	51	57	60	60	65
4	68	68	60	68	53	56	66
5	54	55	52	51	62	60	63
6	59	60	57	60	63	64	54
7	60	56	52	56	55	52	60
8	52	56	58	61	63	62	58

вариант 13							
	1	2	3	4	5	6	7
1	52	56	54	50	66	52	60
2	52	61	51	50	53	65	56
3	63	59	60	64	61	50	52
4	55	59	64	51	67	53	56
5	53	51	61	66	62	62	55
6	54	60	63	56	60	53	63
7	60	62	65	51	64	53	53
8	63	59	59	60	50	64	61

вариант 14							
	1	2	3	4	5	6	7
1	62	61	52	60	55	62	61
2	59	60	53	50	60	54	61
3	63	53	60	58	59	66	60
4	56	60	66	66	59	58	67
5	51	52	55	56	52	65	55
6	61	70	66	61	60	55	57
7	60	63	67	53	64	51	58
8	54	60	65	56	61	60	60

вариант 15							
	1	2	3	4	5	6	7
1	55	56	59	54	60	60	63
2	60	60	63	60	54	58	54
3	56	54	57	63	58	54	58
4	54	61	60	56	62	63	65
5	60	63	66	53	50	61	60
6	52	59	61	59	64	56	65
7	60	56	61	59	61	58	65
8	60	58	67	60	60	55	61

вариант 16							
	1	2	3	4	5	6	7
1	60	64	54	66	50	62	60
2	68	60	57	61	52	69	65
3	58	63	52	51	57	61	52
4	58	61	60	64	53	64	53
5	59	66	60	66	60	52	61
6	53	64	53	62	50	58	66
7	59	63	69	60	70	60	65
8	60	66	58	53	64	61	60

Определить, какой проект электростанции будет здесь оптимальным?

Исходные данные

Количество альтернатив $n = 8$. Количество состояний среды $m = 7$. В таблице 7 приведены матрицы выигрышей (варианты выбирать в соответствии со списком группы).

Таблица 7 – Исходные данные

Краткая теория

Реализационная структура задачи принятия решения включает в себя множество допустимых альтернатив X, множество состояний среды Y. множество исходов А и функцию реализации F: X × Y → A. Принятие решения в условиях неопределенности характеризуется тем, что при выборе альтернативы принимающему решение неизвестно наличное состояние среды, и он не имеет никакой информации о вероятностях их появления. Отметим, что эта неопределенность не является абсолютной, так как принимающему решение известно множество возможных состояний среды (множество Y) и известна функция реализации F.

При конечных множествах X, Y функцию реализации можно задать матрицей *выигрышей* или *платежной* матрицей $A = \left(a_i^j\right)$, где a_i^j – выигрыш в случае принятия i-ой альтернативы при j-ом состоянии среды.

Критерий Лапласа основан на гипотезе равновозможности (равновероятности) и содержательно может быть сформулирован в виде: «Поскольку мы ничего не знаем о состояниях среды, надо считать их равновероятными». При принятии данной гипотезы в качестве оценки *i*-ой альтернативы выступает среднеарифметическое выигрышей, стоящих в i-ой строке матрицы выигрышей. Таким образом, оценка по критерию Лапласа имеет вид:

$$L(i) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} a_i^j.$$

Оптимальной по критерию Лапласа является та альтернатива i^*, которая максимизирует оценку $L(i)$, т.е.

$$L(i^*) = \max_{\mathrm{i}} L(i) \quad .$$

Критерий Вальда осно- ван на гипотезе антагонизма, которая может быть сформулирована в виде: «*При выборе решения надо рассчитывать на самый худший возможный вариант*». При принятии данной гипотезы оценкой альтернативы i служит число $W(i) = \min_j a_i^j$ и сравнение любых двух альтернатив производится по величине критерия W. Оптимальной в этом случае будет альтернатива, максимизирующая функцию W, то есть та альтернатива i^*, для которой выполняется

$$W(i^*) = \max_i W(i) = \max_i \min_j a_i^j .$$

Альтернатива i^* называется *максиминной*, а число $\max_i \min_j a_i^j$ называется *максимином*. Принцип оптимальности, по которому оптимальной альтернативой считается *максиминная* альтернатива, называется *принципом максимина*.

Критерий Гурвица связан с введением показателя *0 ≤ α ≤ 1*, называемого *показателем пессимизма*. Гипотеза о поведении среды состоит в этом случае в том, что при любом выборе альтернативы наихудший для принимающего решения вариант реализуется с вероятностью *α*, а наилучший – с вероятностью *1–α*. Тогда оценкой альтернативы i является взвешенная сумма

$$H_\alpha(i) = \alpha \min_j a_i^j + (1-\alpha) \max_j a_i^j .$$

Оптимальной в этом случае будет альтернатива, максимизирующая функцию H_α, то есть та альтернатива i^*, для которой выполняется

$$H_\alpha(i^*) = \max_i H_\alpha(i).$$

При α=1 данный критерий превращается в «критерий крайнего пессимизма» (то есть в критерий Вальда), а при α = 0 – в «критерий крайнего оптимизма».

Критерий Сэвиджа основан на преобразовании первоначальной матрицы выигрышей (a_i^j) в матрицу (r_i^j) – *матрицу рисков* (по другому – *матрицу сожалений*).

Риском при выборе альтернативы i в состоянии j называется число

$$r_i^j = \beta^j - a_i^j, \quad \text{где } \beta^j = \max_i a_i^j .$$

Содержательно r_i^j интерпретируется как «мера сожаления», возникающая от незнания истинного состояния среды. Если бы принимающий решение знал истинное состояние среды j, он выбрал бы альтернативу, дающую максимальный возможный выигрыш в состоянии j и получил бы в результате выигрыш $\beta^j = \max_i a_i^j$ место полученного им выигрыша a_i^j.

Для критерия Сэвиджа оптимальной считается альтернатива, минимизирующая максимальный риск (то есть здесь используется минимаксный критерий для матрицы сожалений):

$$C(i^*) = \min_i \max_j r_i^j.$$

ядков ые мера	№ альтернативы	F1	№ альтернативы	F2	№ альтернативы	F3	№ альтернативы	F4	№ альтернативы	F5	№ альтернативы	F6	№ альтернативы	F7	Сумма	Среднее	
1	1	95	1	95	1	31	1	53	1	37	1	97	1	72	480	68,57142857	
2	2	80	2	89	2	42	2	31	2	109	2	25	2	35	411	58,71428571	
3	3	71	3	77	3	27	3	18	3	96	3	17	3	28	334	47,71428571	
4	4	95	4	40	4	85	4	97	4	4	4	34	4	64	419	59,85714286	
5	5	14	5	5	5	93	5	83	5	27	5	31	5	3	256	36,57142857	
6	6	66	6	70	6	26	6	11	6	95	6	17	6	28	313	44,71428571	Альтернатива 1 оптимал
7	7	80	7	82	7	33	7	27	7	101	7	22	7	33	378	54	Критерий Лапласа
8	8	23	8	13	8	103	8	85	8	30	8	38	8	4	296	42,28571429	68,57142857

Таблица 2 Критерий Вальда

ядков ые мера	№ альтернативы	F1	№ альтернативы	F2	№ альтернативы	F3	№ альтернативы	F4	№ альтернативы	F5	№ альтернативы	F6	№ альтернативы	F7	Минимум		
1	1	95	1	95	1	31	1	53	1	37	1	97	1	72	31		
2	2	80	2	89	2	42	2	31	2	109	2	25	2	35	25		
3	3	71	3	77	3	27	3	18	3	96	3	17	3	28	17		
4	4	95	4	40	4	85	4	97	4	4	4	34	4	64	4		
5	5	14	5	5	5	93	5	83	5	27	5	31	5	3	3		
6	6	66	6	70	6	26	6	11	6	95	6	17	6	28	11		
7	7	80	7	82	7	33	7	27	7	101	7	22	7	33	22	Критерий Вальда	
8	8	23	8	13	8	103	8	85	8	30	8	38	8	4	4	31	Альтернатива 1 оптимал

Таблица 3 Критерий Гурвица

ядков ые мера	№ альтернативы	F1	№ альтернативы	F2	№ альтернативы	F3	№ альтернативы	F4	№ альтернативы	F5	№ альтернативы	F6	№ альтернативы	F7	Минимум	Максимум	Критерий Гурвица
1	1	95	1	95	1	31	1	53	1	37	1	97	1	72	31	97	64
2	2	80	2	89	2	42	2	31	2	109	2	25	2	35	25	109	67
3	3	71	3	77	3	27	3	18	3	96	3	17	3	28	17	96	56,5
4	4	95	4	40	4	85	4	97	4	4	4	34	4	64	4	97	50,5
5	5	14	5	5	5	93	5	83	5	27	5	31	5	3	3	93	48
6	6	66	6	70	6	26	6	11	6	95	6	17	6	28	11	95	53
7	7	80	7	82	7	33	7	27	7	101	7	22	7	33	22	101	61,5

Рисунок 15 – Пример нахождения оптимальных альтернатив по критериям Лапласа, Вальда, Гурвица

Порядок работы

1. Вычислить оценки альтернатив по критерию Лапласа и выявить оптимальную альтернативу по критерию Лапласа.
2. Вычислить оценки альтернатив и оптимальную альтернативу по критерию Вальда.
3. Вычислить оценки альтернатив и оптимальную альтернативу по критерию Гурвица, приняв значение «показателя пессимизма» *α = ½.* Определить, как будет меняться-

ся оптимальное решение при изменении «показателя пессимизма» α?

4. Добавьте к первоначальной матрице выигрышей строку столбцовых максимумов β^j, составьте матрицу рисков для получения оценок и оптимальной альтернатив по критерию Сэвиджа.
5. Сделайте выводы об оптимальной альтернативе, анализируя решения , полученные с помощью различных критериев.
6. Сравните результаты, полученные различными методами. Сделать выводы. Оформить отчет. Записать результаты и отчет в личную папку.

Контрольные вопросы

1. Дайте общую постановку задачи принятия решения в условиях неопределенности.
2. Как определяется функция реализации и платежная матрица
3. Как формулируются критерии Лапласа, Вальда, Гурвица и Сэвиджа?
4. Какой из критериев можно назвать критерием равновозможностей? Максиминным критерием выигрышей? Критерием крайнего пессимизма? Минимаксный критерий рисков? Критерием на основе принятого показателя пессимизма?
5. Опишите ход выполнения работы.

Лабораторная работа №10. Критерии максимального ожидаемого выигрыша и минимального риска

Цель работы: Приобретение навыков построения адекватного критерия сравнения альтернатив в условиях риска.

Постановка задачи

Задача 1. Имеется 100 урн, в каждой по 10 шаров. При этом урны бывают двух типов: в урне типа I находится 5 черных и 5 белых шаров, а в урне типа II – 8 черных и 2 белых шара. Известно, что урн типа I – 70 штук, а урн типа II – 30 штук. Играющий подходит к случайно выбранной урне и должен сказать, какого она типа или отказаться от игры. Если он называет тип I и она действительно этого типа, то он выигрывает \$500, если она типа II, то он проигрывает $200. Если играющий называет тип II и урна действительно этого типа, то он выигрывает $1000, если же она типа I, то он проигрывает $150. Какое решение должен принять игрок?

Указания к решению задачи

Составить таблицу выигрышей

Вероятности	p1	p2
	s_1	s_2
d_1	x_{11}	x_{12}
d_2	x_{21}	x_{22}
d_3	x_{31}	x_{32}

в предположении, что:

d_1 – названа урна типа I;
d_2 – названа урна типа II;
d_3 – отказ от игры;

для множества состояний среды:

s_1 – урна типа I;
s_2 – урна типа II.

Задача 2. Используя матрицу выигрышей в соответствии со своим вариантом (см. таблицу 7), найти оптимальные альтернативы, используя критерии максимальной ожидаемой полезности, минимального риска и обобщенный критерий. Вероятности состояний среды задать произвольно.

Краткая теория

Изучение математической модели ЗПР в условиях риска предполагает, кроме задания функции реализации, задание некоторой дополнительной информации о вероятностях состояний среды.

Если множество состояний среды Y конечно, $Y = \{1, . . . ,m\}$, то вероятностная мера на нем может быть задана вероятностным вектором, то есть вектором

$$p = (p_1, . . . , p_m), \text{ где } p_j \geq 0 \quad \text{и} \qquad \sum_j p_j = 1.$$

Выбирая альтернативу i, игрок знает, что он получит один из выигрышей $a^1{}_i, \ldots, a^m{}_i$ с вероятностями $p_1, \ldots, p_m$, соответственно. Таким образом, исходом для принимающего решение при выборе им альтернативы i будет являться случайная величина

$$\xi_i = \begin{bmatrix} a_i^1 & \ldots & a_i^m \\ p_1 & \ldots & p_m \end{bmatrix}.$$

Следовательно, сравнение двух альтернатив i_1 и i_2 сводится здесь к сравнению соответствующих им случайных величин ξi_1 и ξi_2.

Математическое ожидание $M[\xi_i]$ в теории вероятности – это среднее значение случайной величины ξ_i, определяемое по формуле:.

$$M_i = M[\xi_i] = x_{i1} \cdot p_1 + x_{i2} \cdot p_2.$$

Принятие решения в условиях риска сводится к сравнению между собой случайных величин. Если для задачи принятия решения (ЗПР) в условиях риска в качестве критерия для сравнения альтернатив взять математическое ожидание соответствующей случайной величины (ожидаемый выигрыш), то оптимальной следует считать альтернативу, максимизирующую ожидаемый выигрыш $\max\limits_i M_i$.

Как известно из теории вероятностей, математическое ожидание M_ξ случайной величины ξ представляет собой число, к которому приближается среднее значение этой случайной величины при большом числе испытаний. Таким образом, в игре с природой ориентация на математическое ожидание выигрыша есть фактически ориентация на средний выигрыш, который получится при многократном повторении этой игры (в предположении, что условия игры не изменятся). Разумеется, если в действительности игра повторяется многократно, то критерий среднего выигрыша (скажем, в экономических задачах – средней прибыли) можно считать оправданным.

Дисперсия случайной величины – мера разброса данной случайной величины, то есть её отклонения от математического ожидания:

$$D[\xi_i] = M\left[(\xi_i - M[\xi_i])^2\right] \equiv M\left[\xi_i^{\,2}\right] - M[\xi_i]^2 .$$

Через дисперсию случайной величины выражается ее среднеквадратическое отклонение $\sigma_i = \sigma[\xi_i] = \sqrt{D[\xi_i]}$.

Для ЗПР в условиях риска среднеквадратическое отклонение σ_i – показатель риска. В качестве критерия в этом случае выступает критерий минимальности риска $\min\limits_i \sigma_i$.

Обобщенный критерий строится в виде «соединения» указанных двух критериев:

$$q(M, \sigma) = M - \lambda\sigma,$$

где λ – некоторая постоянная. Оценка случайной величины с помощью обобщенного критерия при $\lambda > 0$ будет меньше, чем ее среднее значение, что является характерным для осторожного человека, то есть человека, не склонного к риску. Напротив, при $\lambda < 0$ оценка будет больше, чем ее среднее значение, что характеризует человека, склонного к риску. Наконец, при $\lambda = 0$ оценка случайной величины совпадает с ее средним значением – это характеризует человека, безразличного к риску.

Рассмотрим случай несклонности принимающего решение к риску ($\lambda > 0$). Пусть найдено паретовское множество альтернатив по критериям $\max\limits_i M_i$ и $\min\limits_i \sigma_i$. Необходимо по критерию q выбрать среди них оптимальную альтернативу. При этом возникает вопрос, как выбрать значение λ.

Параметр λ является мерой несклонности к риску. Для обоснованного его выбора при сравнении альтернатив используются пороговые значения λ_0 и λ^*, вычисляемые по формулам

$$\lambda_0 = \min_i \{(M_{i1} - M_{i2})/(\sigma_{i1} - \sigma_{i2})\},\ \lambda^* = \max_i\{(M_{i1} - M_{i2})/(\sigma_{i1} - \sigma_{i2})\},$$

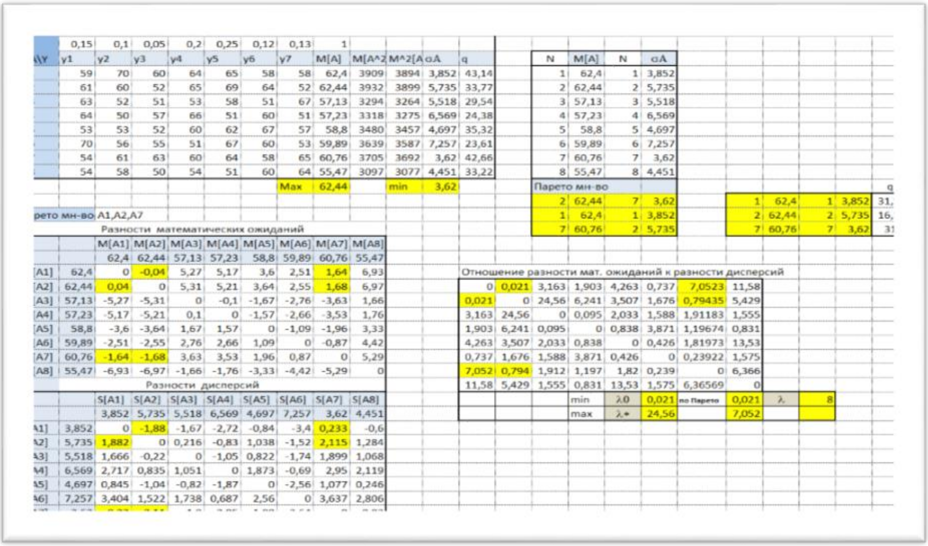
причем при нахожлении $\min_i$, $\max_i$ выбираются только альтернативы a_{i1}. a_{i2}, оптимальные по Парето, такие, для которых

$$M_{i1} > M_{i2} \qquad \text{и} \qquad \sigma_{i1} > \sigma_{i2} .$$

Назовем λ_0 нижней границей несклонности к риску, λ^* – верхней границей несклонности к риску. При слабой несклонности к риску следует выбирать $\lambda < \lambda_0$, а при сильной несклонности к риску (чрезмерной осторожности), следует выбирать $\lambda > \lambda^*$.

Порядок работы

1. Вычислить ожидаемые полезности каждой альтернативы, найти максимальную ожидаемую полезность $\max\limits_i M_i$.
2. Найти оптимальную альтернативу, используя критерий минимальности показателя риска $\min\limits_i \sigma_i$.
3. Найти паретовское множество альтернатив для двух критериев $\max\limits_i M_i$ и $\min\limits_i \sigma_i$.



A\Y	0,15	0,1	0,05	0,2	0,25	0,12	0,13	1				
	y1	y2	y3	y4	y5	y6	y7	M[A]	M[A^2	M^2[A	σA	q
	59	70	60	64	65	58	58	62,4	3909	3894	3,852	43,14
	61	60	52	65	69	64	52	62,44	3932	3899	5,735	33,77
	63	52	51	53	58	51	67	57,13	3294	3264	5,518	29,54
	64	50	57	66	51	60	51	57,23	3318	3275	6,569	24,38
	53	53	52	60	62	67	57	58,8	3480	3457	4,697	35,32
	70	56	55	51	67	60	53	59,89	3639	3587	7,257	23,61
	54	61	63	60	64	58	65	60,76	3705	3692	3,62	42,66
	54	58	50	54	51	60	64	55,47	3097	3077	4,451	33,22
							Max	62,44		min	3,62	

реto мн-во A1,A2,A7

N	M[A]	N	σA
1	62,4	1	3,852
2	62,44	2	5,735
3	57,13	3	5,518
4	57,23	4	6,569
5	58,8	5	4,697
6	59,89	6	7,257
7	60,76	7	3,62
8	55,47	8	4,451
Парето мн-во			
2	62,44	7	3,62
1	62,4	1	3,852
7	60,76	2	5,735

				q
1	62,4	1	3,852	31,
2	62,44	2	5,735	16,
7	60,76	7	3,62	31

Разности математических ожиданий

		M[A1]	M[A2]	M[A3]	M[A4]	M[A5]	M[A6]	M[A7]	M[A8]
		62,4	62,44	57,13	57,23	58,8	59,89	60,76	55,47
[A1]	62,4	0	-0,04	5,27	5,17	3,6	2,51	1,64	6,93
[A2]	62,44	0,04	0	5,31	5,21	3,64	2,55	1,68	6,97
[A3]	57,13	-5,27	-5,31	0	-0,1	-1,67	-2,76	-3,63	1,66
[A4]	57,23	-5,17	-5,21	0,1	0	-1,57	-2,66	-3,53	1,76
[A5]	58,8	-3,6	-3,64	1,67	1,57	0	-1,09	-1,96	3,33
[A6]	59,89	-2,51	-2,55	2,76	2,66	1,09	0	-0,87	4,42
[A7]	60,76	-1,64	-1,68	3,63	3,53	1,96	0,87	0	5,29
[A8]	55,47	-6,93	-6,97	-1,66	-1,76	-3,33	-4,42	-5,29	0

Разности дисперсий

		S[A1]	S[A2]	S[A3]	S[A4]	S[A5]	S[A6]	S[A7]	S[A8]
		3,852	5,735	5,518	6,569	4,697	7,257	3,62	4,451
A1]	3,852	0	-1,88	-1,67	-2,72	-0,84	-3,4	0,233	-0,6
A2]	5,735	1,882	0	0,216	-0,83	1,038	-1,52	2,115	1,284
A3]	5,518	1,666	-0,22	0	-1,05	0,822	-1,74	1,899	1,068
A4]	6,569	2,717	0,835	1,051	0	1,873	-0,69	2,95	2,119
A5]	4,697	0,845	-1,04	-0,82	-1,87	0	-2,56	1,077	0,246
A6]	7,257	3,404	1,522	1,738	0,687	2,56	0	3,637	2,806

Отношение разности мат. ожиданий к разности дисперсий

0	0,021	3,163	1,903	4,263	0,737	7,0523	11,58		
0,021	0	24,56	6,241	3,507	1,676	0,79435	5,429		
3,163	24,56	0	0,095	2,033	1,588	1,91183	1,555		
1,903	6,241	0,095	0	0,838	3,871	1,19674	0,831		
4,263	3,507	2,033	0,838	0	0,426	1,81973	13,53		
0,737	1,676	1,588	3,871	0,426	0	0,23922	1,575		
7,052	0,794	1,912	1,197	1,82	0,239	0	6,366		
11,58	5,429	1,555	0,831	13,53	1,575	6,36569	0		
			min	λ0	0,021	по Парето	0,021	λ	8
			max	λ*	24,56		7,052		

Рисунок 16 – Пример нахождения оптимальных альтернатив в условиях риска

4. Определить нижнюю и верхнюю границы несклонности к риску λ_0 и λ^* соответственно.
5. Вычислить оптимальное решение по обобщенному критерию $\max\limits_i q(M_i, \sigma_i)$, выбрав параметр λ, исходя из найденных границ несклонности к риску.

6. Сравнить решения, полученные разными методами. Сделать выводы. Оформить отчет. Записать результаты и отчет в личную папку.

Контрольные вопросы

1. В чем состоит постановка задачи принятия решения в условиях риска?
2. Сформулируйте критерий максимальной ожидаемой полезности. Как вычисляется математическое ожидание?
3. Сформулируйте критерий минимального показателя рисков. Как вычисляется среднеквадратическое отклонение*
4. Как записывается обобщенный критерий? Что определяет параметр λ?
5. Как связаны степень несклонности к риску и параметр λ?

Лабораторная работа №11. Критерий ожидаемой полезности

Цель работы: Приобрести навыки принятия решения на основе критерия ожидаемой полезности.

Постановка задачи

Время обработки информации двумя вычислительными системами является дискретной случайной величиной, определяемой на основании статистических данных:

$$z = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_i & \dots & t_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_i & \dots & p_m \end{bmatrix},$$

где t_i – фактическое время обработки, p_i – доля случаев, в которых наблюдалось время t_i.

При этом регламентом установлено, что время обработки не должно превышать t^{max} минут.

Провести оценку качества работы вычислительных систем (альтернатив) на основании сравнения соответствующих им случайных величин (альтернатив) по критерию ожидаемой полезности.

Исходные данные

Принять ограничение времени по регламенту t^{max} = ОКРУГЛ(10+N/7;1).

Для вычислительных системы 1 и 2:

$$z^1 = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 & 20+N \\ 0.2 & 0.2 & 0.5 & 0.1 \end{bmatrix}, \qquad z^2 = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 12 & 12+N \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix},$$

где N – номер варианта по журналу.

Краткая теория

Сравнения случайных величин по критериям ожидаемого выигрыша и риска M_ξ и σ_ξ , а также построение обобщенного критерия *q*, сводящего пару оценок $(M;\ \sigma)$ в единую числовую оценку, не лишено недостатков, поскольку в этих случаях требуется дополнительная информация о соотношении критериев M_ξ и σ_ξ между собой.

В теории принятия решений существуют и другие подходы. Наиболее важным из них является критерий ожидаемой полезности, основанный на построении так называемой кривой денежных эквивалентов..

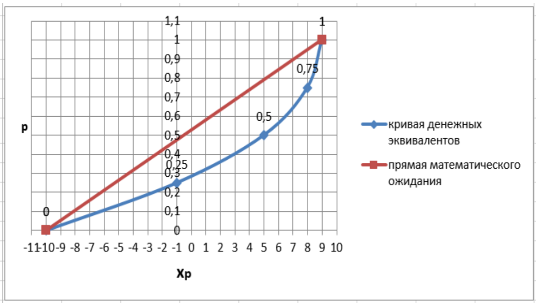
Функция полезности $u(x)$ ставит в соответствие каждому предполагаемому исходу x (значению случайной величины ξ) его полезность u, причем $0 \le u \le 1$. По критерию ожидаемой полезности лучшим считается альтернатива i^* (случайная величина ξ^{i^*}), которая соответствует максимальному значению математического ожидания функции полезности:

$$M\left[u[\xi^{i^*}]\right] = \max_i M\left[u[\xi^i]\right]$$

График функции полезности, который называют также *кривой денежных эквивалентов*, обычно получается эмпирически. Он отражает прогноз экспертов относительно ожидаемого выигрыша. Рассмотрим, как строится кривая денежных эквивалентов.

Если случайная величина меняется в диапазоне [*a;A*], где a, A – ее наихудшее и наилучшее значения, то полезность значения a равна 0, а полезность значения A равна 1, т.е. $u(a) = 0$, $u(A) = 1$. Если соединить точки $(a; 0), (A; 1)$, то получится прямая (на рисунке 17 $a = -10,\ A = 9$), уравнение которой в системе координат $(x_p; p)$ имеет вид $x_p = a(1-p) + Ap$, что соответствует математическому ожиданию $M[\xi_p]$ случайной величины

$$\xi\text{p} = \begin{bmatrix} a & A \\ 1-p & p \end{bmatrix}.$$



Для графика математического ожидания

0	-10
1	9

Для графика функции полезности

p	xp
0	-10
0,25	-1
0,5	5
0,75	8
1	9

Рисунок 17 – Пример построения графика функции полезности

В действительности предполагаемые значения выигрыша x_p отличаются от математического ожидания случайной величины ξ_p. Так, при склонности к риску $x_p > M[\xi_p]$, а при несклонности $x_p < M[\xi_p]$. Таким образом, график кривой денежных эквивалентов всегда проходит через точки $(a; 0), (A; 1)$, является возрастающим и выпуклым (вогнутым) в зависимости от несклонности (склонности) принимающего решение к риску. На рисунке 17 показан пример построенной кривой денежных эквивалентов по пяти точкам (p=0;0,25;0,5;0,75,1) для случая склонности к риску.

Для интерпретации функции полезности (кривой денежных эквивалентов) часто обращаются к лотерее. Всякая простая лотерея с выигрышами a и A (где $a < A$), записывается в виде $\xi\text{p} = \begin{bmatrix} a & A \\ 1-p & p \end{bmatrix}$. Здесь число p $(0 \le p \le 1)$ называют *параметром простой лотереи*. Кривая, которая устанавливает соответствие между параметрами простых лотерей и выигрышами этих лотерей, называется кривой денежных эквивалентов. Методика построения кривой денежных эквивалентов базируется на предположении, что принимающий решение может указать свой (субъективный) *детерминированный денежный эквивалент* x_p для некоторых простых лотерей. Число x_p – это сумма, которая для принимающего решение при заданной вероятности успеха p эквивалентна состоянию безразличия (участие и неучастие в лотерее для принимающего решение эквивалентны). По оси абсцисс откладываются деньги (в некоторых денежных единицах), а по оси ординат – параметр простой лотереи p . Кривая денежных эквивалентов состоит из точек с координатами (x_p, p).

Рассмотрим пример, поясняющий, как эмпирически находить точки кривой денежных эквивалентов. Пусть игроку говорят, что с вероятностью p=0,5 он может получить выигрыш X_p=1000 р. Согласен ли он участвовать в лотерее? Если согласен, то снижают вероятность до тех пор, пока он не станет не безразличен (участие и неучастие в игре для него безразличны). Допустим, состояние безразличия наступает при p=0,33, тогда точка (1000; 0,33) лежит на кривой денежных эквивалентов. И наоборот, при не согласии повышают вероятность до тех пор, пока не наступит состояние безразличия.

Порядок работы

1. Проанализировать поставленную задачу.
2. Вычислить математические ожидания соответствующих случайных величин $M[z_1]$ и $M[z_2]$. Определить лучшее решение по критерию минимального ожидаемого результата.
3. Вычислить случайную величину dz – отклонение времени обработки для каждой системы от регламента (оставшееся свободное время, используя формулу $dz = t - z$ (строка вероятностей не изменяется). Определить интервал изменения случайной величины: $[dz_{min}; dz_{max}]$.
4. Постройте кривую денежных эквивалентов по пяти точкам, приняв случай склонности к риску.
5. Вычислить ожидаемые полезности, используя кривую денежных эквивалентов. Сделайте вывод относительно качества работы вычислительных систем.
6. Оформить отчет. Записать результаты и отчет в личную папку.

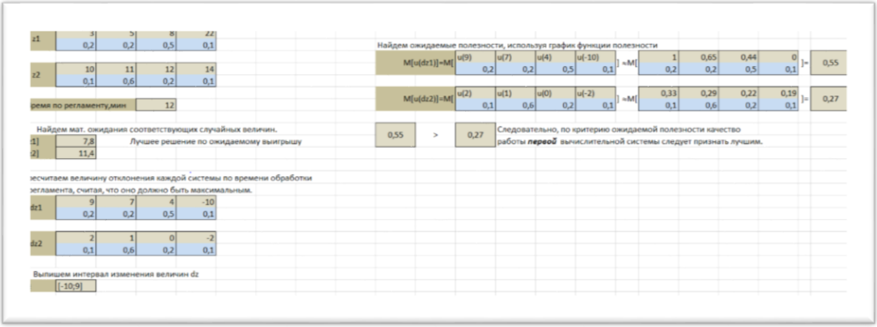


Рисунок 18 – Пример сравнения альтернатив по критерию ожидаемой полезности

Контрольные вопросы

1. Какая функция называется функцией полезности? Сформулируйте критерий ожидаемой полезности.
2. Как строится график кривой денежных эквивалентов.
3. Опишите ход лабораторной работы

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах, М.: Высшая школа, 1986.
2. Охорзин В.А. Прикладная математика в системе Mathcad: учебное пособие, СПб.: Лань, 2009.
3. Розен В.В., Бессонов Л.В. Математические модели принятия решений в экономике. Учебное пособие, Саратов: УЦ Новые технологии в образовании, 2008.
4. Соколов Н.Н. Разработка управленческих решений, М.:Спутник+, 2012.
5. Черноруцкий И.Г. Методы оптимизации. Компьютерные технологии, СПб.: БХВ-Петербург, 2011.