ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Экономика и менеджмент»

Практикум

к выполнению контрольной работы по дисциплине

«Математические моделирование экономических процессов»

Авторы
Малхасян А. Е.,
Федосеева Л. В.

Ростов-на-Дону, 2018

Аннотация

Методические указания включают требования к содержанию работы, алгоритм выбора варианта контрольной работы, перечень теоретических вопросов, список практических заданий, образец выполнения практического задания, необходимые для выполнения контрольной работы по курсу «Математические моделирование экономических процессов». Методические указания предназначены для бакалавров заочной формы обучения по направлению 38.03.01 Экономика.

Авторы

к.э.н., доцент кафедры «Экономика и менеджмент» Малхасян А.Е.,
ст. преподаватель кафедры «Экономика и менеджмент» Федосеева Л.В.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Математические моделирование экономических процессов» имеет целью дать студентам основы теоретических знаний и прикладных навыков применения математического моделирования экономических процессов к решению задач экономического развития субъектов рыночных отношений микро- и макроуровней, в разработке и принятии управленческих решений, а также как инструмента научных исследований и стратегического управления.

Профессиональные цели освоения дисциплины:

Дать будущим бакалаврам знания и практические навыки прогнозирования экономических процессов, основываясь на математических расчетах, обработке экономической информации и построении оптимизационных моделей.

Задачи дисциплины:

- приобретение навыков использования инструментов математического меделирования в мониторинге социально-экономического развития;
- выявление динамики, тенденций и ключевых факторов развития. Диагностика ситуаций неопределенности и риска;
- приобретение навыков моделирования экономических систем;
- применение методов экономико-математического моделирования к задачам инновационного развития, стратегического управления и хозяйственной деятельности.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ И СОДЕРЖАНИЮ РАБОТЫ

Работа должна быть выполнена студентами строго по графику в соответствии со своим вариантом. Работа выполняетя в тонкой тетради и должна быть написана студентом «от руки».

Контрольная работа должна включать:

1. Теоретический вопрос по теме №1, раскрытый в полном соотвтетствии с требованиями. Объем 1-3 страницы.

2. Три практических задания по темам №2-4.

АЛГОРИТМ ВЫБОРА ВАРИАНТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант контрольной работы определяется по таблице в зависимости от двух последних цифр зачетной книжки.

Например, последние две цифры зачетной книжки 23, следовательно, вариант 23. Номера задач согласно Таблице 1 - 7,9,1,1

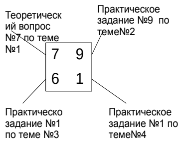


Таблица 1 — Варианты заданий на контрольную работу

Предпоследняя цифра зачетной книжки	Последняя цифра зачетной книжки																			
	0		1		2		3		4		5		6		7		8		9	
	Номера задач																			
0	1	10	2	9	3	8	4	7	5	6	6	5	7	4	8	3	9	2	10	1
	6	1	5	2	4	3	3	4	2	5	1	6	6	7	5	8	4	9	3	10
1	3	1	4	2	5	3	6	4	7	5	8	6	9	7	1	8	2	9	3	10
	3	5	2	6	1	7	2	8	3	9	4	1	5	2	6	3	1	4	2	5
2	4	3	5	5	6	7	7	9	8	1	9	3	1	5	2	7	3	9	4	2
	4	7	5	8	6	9	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	5	8
3	5	4	6	6	7	9	8	2	9	3	10	5	1	7	2	9	3	2	4	4
	1	9	6	10	5	1	4	2	3	3	2	4	1	6	2	7	3	8	4	9
4	5	6	6	8	7	10	8	2	9	4	10	6	1	8	2	10	3	8	4	6
	5	9	6	1	3	2	1	3	3	4	5	5	6	7	4	8	3	9	2	10
5	5	4	6	1	7	3	8	5	9	7	10	9	1	1	2	3	3	5	4	7
	7	1	4	2	6	3	3	4	5	5	2	6	4	8	1	9	3	10	6	1
6	5	9	6	3	7	2	8	1	9	8	10	7	1	6	2	5	3	4	4	3
	8	2	1	3	5	4	4	5	6	6	6	7	5	9	5	9	4	1	6	2
7	5	2	6	10	7	1	8	9	9	2	10	8	1	3	2	7	3	4	4	5
	1	3	3	4	5	5	2	6	4	7	1	8	3	9	2	1	3	2	4	3
8	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	1	2	2	10	3	1	4	1
	3	4	4	5	5	6	1	7	1	8	2	9	3	9	4	1	5	2	6	3
9	5	10	6	7	7	9	8	1	9	8	10	9	2	1	3	3	4	2	5	9
	6	4	2	5	1	6	4	7	3	8	2	9	1	9	6	1	5	2	4	3

ПЕРЕЧЕНЬ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ВОПРОСОВ

1. Понятие математического моделирования. Классификация математических моделей.
2. Взаимосвязь математических моделей и методики принятия управленческих решений.
3. Основные принципы математического моделирования.
4. Особенности классических моделей задач линейного и нелинейного программирования.
5. Этапы решения задачи линейного программирования

графическим методом.

6. Этапы решения задач нелинейного программирования графическим методом.

7. Алгоритм решения задачи о назначении.

8. Модели управления запасами: отличитеные черты, преимущества и недостатки.

9. Модель межотраслевого баланса.

10. Задачи принятия решений в условиях неопределённости

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ

Тема 1. ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Задача 1.

Швейная фабрика выпускает юбки и брюки, используя при этом имеющееся оборудование, электроэнергию и ткань. Нормы расхода ресурсов на одно изделие, запасы этих ресурсов, а также цены готовой продукции приведены ниже:

Ресурсы	Расход на одно изделие		Суточный запас ресурсов
	юбка	брюки	
Оборудование, чел/час.	2	3	600
Электроэнергия, кВт/час.	4	2,5	1000
Ткань, м.	1,5	2	900
Цена одного готового изделия, тыс. руб.	1	1,2	

Суточный спрос на брюки никогда не превышает 150 шт

1. Составить математичекую модель задачи

2. Определить план производства швейной фабрики, обеспечивающей максимальный доход.

3. Какой из используемых ресурсов является наиболее дефицитным и на сколько целесообразно увеличить его запас?

Задача 2.

Необходимо закрепить торговых агентов за торговыми точками так, чтобы общая ежедневная выручка была максимальной. Данные о производительности торговых агентов представлены в таблице:

	Сумма выручки, полученная торговым агентом, с торговой точки в день (тыс.руб.)			
	Торговая точка 1	Торговая точка 2	Торговая точка 3	Торговая точка 4
Торговый агент1	18	20	19	11
Торговый агент2	14	17	19	26
Торговый агент3	16	15	13	11
Торговый агент4	10	13	12	14

Задача 3.

Фабрика по производству игрушек выпускает кукол и мишек. Для их производства используются поролон и ткань. Нормы расхода этих материалов, суточный запас, а также цены готовой продукции приведены в таблице:

Исходные материалы	Нормы расхода на готовое изделие		Суточный запас материалов
	кукла	мишка	
Ткань, м	1	1,5	900
Поролон, кг	2	1	800
Ткань одного изделия, рубли	200	300	

Установлено, что суточный спрос на кукол не превышает 300шт.

1. Составить математическую модель задачи.
2. Определить план производства фабрики игрушек, обес-

печивающий максимальный доход от реализации.

3. Какой из используемых ресурсов является наиболее дефицитным и на сколько целесообразно увеличить его запас?

Задача 4.

Администрация деревоперерабатывающего предприятия приняла на работу 4 человека. Каждый из них имеет различные способности и навыки и затрачивает различное время на выполнение определенной работы. В настоящее время необходимо выполнить 4 вида работ. Время выполнения работы каждым работником приведено в таблице:

Работник	Время выполнения,ч.			
	Работа 1	Работа 2	Работа 3	Работа 4
М1	3	7	5	8
М2	2	4	4	5
М3	4	7	2	8
М4	9	7	3	8

Требуется назначить на каждый вид работы одного из работников, так, чтобы общее время, необходимое для завершения всех видов работ, было минимальным.

Задача 5.

Три пекарни осуществляют ежедневные поставки хлеба для четырех магазинов. Ниже представлена информация о спросе на продукцию, ее наличии и транспортных издержках.

Пекарня	Транспортные издержки				Общее Предложение
	Магазин №1	Магазин №2	Магазин №3	Магазин №4	
Пекарня №1	1,5	2,5	1	2	700
Пекарня №2	2	3	2	1,5	650
Пекарня №3	1	1,5	1,5	3	800
Потребность, т	400	500	350	900	

Выполните начальное распределение ресурсов:

- методом наименьшей стоимости;
- методом Фогеля.
- сравните издержки полученных распределений и выберите наименьшую стоимость.

Задача 6.

Пиццерия реализует продукцию двумя способами: через службу доставки и через сеть пиццерий. При реализации x_1 пиццы через службу доставки расходы на реализацию составляют $x_1 + 2x_1^{\,2}$, а при продаже x_2 пиццы через сеть пиццерий расходы составляют x_2^2. Найти оптимальный способ реализации пиццы, минимизирующий суммарные расходы, используя метод Лагранжа, если общее число предназначенных для продажи пицц составляет 4 000 штук.

Задача 7.

Решить задачу нелинейного программирования графическим методом, если целевая функция $f = 4x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$,

а ограничения ресурсов выражены системой неравенств:

$$x_1^2 + x_2^2 \le 9$$
$$x_1 \cdot x_2 \ge 4$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

Задача 8.

Решить задачу нелинейного программирования графическим методом, если целевая функция $f = 4x_1 + 5x_2 \rightarrow \min$,

а ограничения ресурсов выражены системой неравенств:

$$x_1^2 + x_2^2 \le 9$$
$$x_1 \cdot x_2 \ge 4$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

Задача 9.

Завод реализует комбайны двумя способами: через дистрибьютеров и через сеть агентов. При реализации x_1 комбайнов через дистрибьютеров расходы на реализацию составляют $5x_1 + x_1^{\,2}$, а при продаже x_2 комбайнов через агентов расходы составляют x_2^2. Найти оптимальный способ реализации пиццы, минимизирующий суммарные расходы, используя метод Лагранжа, если общее число предназначенных для продажи пицц составляет 500 штук.

Задача 10.

Завод реализует трактора двумя способами: через дистрибьютеров и через сеть агентов. При реализации x_1 комбайнов через дистрибьютеров расходы на реализацию составляют $2x_1 + 3x_1^2$, а при продаже x_2 комбайнов через агентов расходы составляют x_2^2. Найти оптимальный способ реализации пиццы, минимизирующий суммарные расходы, используя метод Лагранжа, если общее число предназначенных для продажи пицц составляет 1000 штук.

Тема 2. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ. МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ.

Задача 1.

Известно, что годовой спрос составляет 10 000 ед. Затраты, связанные с доставкой продукции, равны 20,0 дол/ед; Цена единицы продукции составляет 1,4 дол/ед.; Затраты на содержание запасов равны 40% от цены ед. продукции. Поставщик предлагает скидку при размере партии от 1 000шт до 2 999 шт — 5%, от 3 000 шт до 4 999 шт. - 10%, свыше 5 000 шт — 15%. Определить оптимальный размер партии поставки.

Задача 2.

Известно, что годовой спрос составляет 2 000 ед., затраты, связанные с доставкой продукции, равны 10,0 дол/ед; цена единицы продукции составляет 1,2 дол/ед.; затраты на содержание запасов равны 25% от цены ед. продукции. Поставщик предлагает скидку при размере партии от 500шт до 999 шт — 2%, от 1 000 шт до 1 499 шт. - 4%, свыше 1 500шт — 5%. Определить оптимальный размер партии поставки.

Задача 3.

Известно, что годовой спрос составляет 5 000 ед., затраты, связанные с доставкой продукции, равны 10,0 дол/ед; цена единицы продукции составляет 2,0 дол/ед.; затраты на содержание запасов равны 20% от цены ед. продукции. Поставщик предлагает скидку при размере партии от 1 000 шт. до 1 999 шт. — 5%, от 2 000 шт. до 2 999 шт. - 10%, свыше 3 000 шт. — 15%. Определить оптимальный размер партии поставки.

Задача 4.

Известно, что годовой спрос составляет 1 000 ед., затраты, связанные с доставкой продукции, равны 100,0 дол/ед; цена единицы продукции составляет 20 дол/ед.; затраты на содержание запасов равны 10% от цены ед. продукции. Поставщик предлагает скидку при размере партии от 100 шт до 299 шт — 2%, от 300 шт до 499 шт. - 5%, свыше 500шт — 7%. Определите оптимальный размер партии поставки.

Задача 5.

Известно, что годовой спрос составляет 4 000 ед., затраты, связанные с доставкой продукции, равны 50,0 дол/ед; цена единицы продукции составляет 5,0 дол/ед.; затраты на содержание запасов равны 25% от цены ед. продукции. Поставщик предлагает скидку при размере партии от 1 000 шт до 2 999 шт — 5%, свыше 3000 шт — 10%. Определить оптимальный размер партии поставки.

Задача 6.

Известно, что годовой спрос составляет 500 ед., затраты, связанные с доставкой продукции, равны 100,0 дол/ед; цена единицы продукции составляет 500,0 дол/ед.; затраты на содержание запасов равны 5% от цены ед. продукции. Поставщик предлагает скидку при размере партии от 100шт до 299 шт — 5%, свыше 300 шт — 7%. Определить оптимальный размер партии поставки.

Задача 7.

На швейном производстве установлена система заказов с фиксированным интервалом времени 30 дней. За этот период расходуется 12,5 км ткани. Ткань тратиться ежедневно одинаковыми партиями. Время поставки составляет 7 дней. Страховой запас принято держать 20% от среднемесячного расхода ткани. На производстве на момент текущего заказа осталось 6,5 км. Ткани, уже заказано и поступит на склад в течение 2х дней — 3,5 км.ткани. Нужно ли заказать ткань и какое количество?

Задача 8.

В кондитерском цеху установлена система заказов с фиксированным интервалом времени 7 дней. За этот период расходуется 52 кг муки. Мука тратиться ежедневно одинаковыми партиями. Время поставки составляет 1 день. Страховой запас принято держать 10% от среднего расхода муки. На производстве на момент текущего заказа осталось 15 кг. Мука, которая уже заказана на склад и поступит в течение дня — 15 кг. Нужно ли заказать муку и какое количество?

Задача 9.

На строительном участке установлена система заказов кирпича с фиксированным интервалом времени 10 дней. За этот период расходуется 1 000 штук кирпича. Кирпич укладывают ежедневно одинаковыми партиями. Время поставки составляет 3 дня. Страховой запас принято держать 20% от среднего расхода. На строительном участке на момент текущего заказа осталось 230 шт. кирпича. Количество кирпича, который уже заказан и поступит на склад в течение 3х дней — 250 штук. Нужно ли заказать кирпич и какое количество?

Задача 10.

На швейном производстве установлена система заказов с фиксированным интервалом времени 30 дней. За этот период расходуется 125 км ткани. Ткань тратиться ежедневно одинаковыми партиями. Время поставки составляет 7 дней. Страховой запас принято держать 10% от среднемесячного расхода ткани. На производстве на момент текущего заказа осталось 45 км. Ткани, уже заказано и поступит на склад в течение 2х дней — 35 км.ткани. Нужно ли заказать ткань и какое количество?

Тема 3. СТАХОСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Задача 1

Интернет-провайдер в небольшом городе имеет 5 выделенных каналов обслуживания. В среднем на обслуживание одного клиента уходит 25 минут. В систему в среднем поступает 6 заказов в час. Если свободных каналов нет, следует отказ. Определить характеристики обслуживания: вероятность отказа, среднее число занятых обслуживанием линий связи, абсолютную и относительную пропускные способности, вероятность обслуживания.

Задача 2.

На станцию технического обслуживания автомобилей с пятью боксами ежедневно обращается 10 клиентов, а среднее время обслуживания составляет 0,2 дня. Если все боксы заняты, то клиенту будет отказано в обслуживании. Рассчитайте показатели эффективности работы станции технического обслуживания.

Задача 3.

На станцию технического обслуживания автомобилей с тремя боксами ежедневно обращается 6 клиента, а среднее время обслуживания составляет 0,5 дня. Если все боксы заняты, то клиенту будет отказано в обслуживании. Рассчитайте показатели эффективности работы станции технического обслуживания.

Задача 4.

В call-центре работает 5 операторов связи, которые принимают звонки. Интенсивность звонков 30 заявок в час. Оператор обслуживает 1 заявку за 1 минуту. Если все операторы заняты, звонок будет ожидать обслуживания неограниченное количество времени. Рассчитать среднее количество звонков в очереди, среднее число занятых операторов и среднее время пребывания в очереди.

Задача 5.

В call-центре работает 3 оператора связи, которые принимают звонки. Интенсивность звонков 40 заявок в час. Оператор обслуживает 1 заявку за 1,2 минуты. Если все операторы заняты, звонок будет ожидать обслуживания неограниченное количество времени. Рассчитайте среднее количество звонков в очереди, среднее число занятых операторов и среднее время пребывания в очереди.

Задача 6.

Имеется станция связи с тремя каналами, интенсивность потока заявок 1,5 заявки в минуту, среднее время обслуживания одной заявки 2 минуты, все потоки событий — простейшие. Если все каналы связи заняты, то заявка будет ожидать в очереди до тех пор, пока канал не освободится. Найдите характеристики эффективности системы.

Задача 7.

В расчетном узле магазина самообслуживания работают 3 кассы. Интенсивность входного потока составляет 50 покупателей в час. Интенсивность обслуживания каждого кассира составляет 100 покупателей час. Длина очереди не ограничена. Рассчитайте показатели эффективности системы.

Задача 8.

На вход двухканальной СМО с неограниченной очередью поступает поток заявок с интенсивностью 10 заявок в час. Время обслуживания заявки одним каналом составляет 6 минут. Рассчитаете параметры эффективность работы системы.

Задача 9.

На вход пятиканальной СМО с отказами поступает поток заявок с интенсивностью 60 заявок в час. Время обслуживания заявки одним каналом 1 минута. Найти среднее число занятых каналов системы.

Задача 10.

На вход трехканальной СМО с отказами поступает поток заявок с интенсивностью 4 заявки в минуту. Время обслуживания заявки одним каналом 0,1 минуты. Найти показатели работы системы.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ

Пример №1 практического задания№1

Швейная фабрика выпускает юбки и брюки, используя при этом имеющееся оборудование, электроэнергию и ткань. Нормы расхода ресурсов на одно изделие, запасы этих ресурсов, а также цены готовой продукции приведены ниже. Суточный спрос на брюки не превышает 18шт.

Производственные факторы	Расходы на 1 готовое изделие		Максимально возможной суточный запас
	брюк	юбки	
Ткань, м	1,5	2	42
Трудоемкость, чел/час	3	2	60
Накладные расходы, руб.	5	5	200
Цена 1 изделия, руб.	60	50	

1.Требуется установить количество брюк и юбок, которые нужно сшить за сутки, если известны затраты на пошив этих изделий и их цена реализации на рынке. Доход должен быть максимальным

2. На сколько можно увеличить запас каждого ресурса для улучшения полученного оптимального значения целевой функции f?

3. Увеличение объема какого ресурса наиболее выгодно?

4. В каких пределах допустимо изменение цен на 1 изделия, чтобы производственная программа осталась прежней?

Решение:

Производственная функция имеет линейный вид:

$$f(x_1,x_2) = 60x_1 + 50x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 1{,}5x_1 + 2x_2 \le 42 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 60 \\ 5x_1 + 5x_2 \le 200 \\ x_1 \le 18 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Следовательно имеем задачу линейного программирования.

Решим задачу графическим способом

Построим многоугольник решений:

Выразим x_2 через x_1:

$$\begin{cases} x_2 \le 21 - \frac{3}{4} x_1 \ (1) \\ x_2 \le 30 - \frac{3}{2} x_1 \quad (2) \\ x_2 \le 40 - x_1 \ (3) \\ x_1 \le 18 \ (4) \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2. Построим графики функций:

$$\begin{cases} x_2 = 21 - \frac{1}{2} x_1 \ (1) \\ x_2 = 30 - \frac{3}{2} x_1 \ (2) \\ x_2 = 40 - x_1 \ (3) \\ x_1 = 18 \ (4) \end{cases}$$

Многоугольник решений заданной системы является фигура с вершинами ABCD, где

A – имеет координату (0;0)

B — точка пересечения прямой (1) с осью ординат и имеет координаты (0; 21)

C — точка пересеченич прямых (1) и (2)

D — точка пересечения прямой (2) и прямой (4)

E — точка пересечения прямой (4) и оси абсцисс и имеет координаты (18;0)

Найдем координаты точек C и D:

1. Пересечением прямой (1) и прямой (2) является точка C. Приравняем уравнения прямых (1) и (2):

$$21 - \frac{3}{4}x_1 = 30 - \frac{3}{2}x_1$$

$x_1 = 12$, Подставим полученное значение в уравнение (1) или (2) — получим значение $x_2 = 12$

Так координата точки C (12;12)

2. Пересечением прямой (2) и прямой (4) является точка D.

$X_1 = 18$. Подставим это значение в уравнение прямой (2) — получим: $x_2 = 3$

Координата точки D (18;3)

Так как $f(x) = 60x_1 + 50x_2$, то значение функции в точке

A f(0;0) = 0

B f (0;21) = 1 050

C *f(12,12) = 1 320*

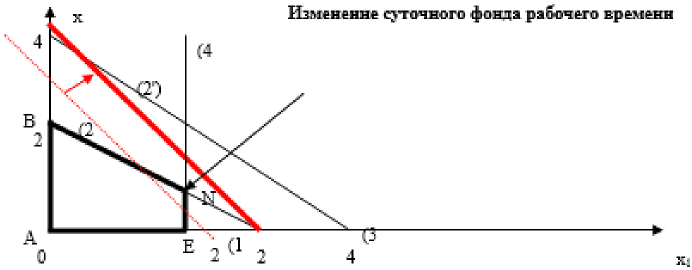
D f(18;3) = 1 230

E f (18;0) = 1 080

Так, максимальное значение функция F(x) принимает в точке С с координатами (12;12) . Следовательно оптимальный план производства : выпуск 12 брюк и 12 юбок в сутки

Определим, на сколько можно увеличить запас каждого ресурса для улучшения полученного оптимального значения целевой функции f?


Изменение суточного запаса ткани
x
40
M
30
B
21
(4
C(12.12)
D
(1')
A
0
E
(2
20
(1
28
(3
40
x1
Max f (0,30)
Максимально допустимый суточный запас ткани: 1,5*0 + 2*30 = 60м
Так, запас ткани можно увеличить на 60м — 42м = 18м
Доход составит = 0*60 + 30*50 = 1500 р.


Изменение суточного фонда рабочего времени
x
4
(4
(2')
B
2
(2
N
A
0
E
2
(1
2
4
(3
x1


Изменение суточного запаса средств на накладные расходы
x
40
(4
)
B
21
(2
C
A
0
E
20
(1
)
28
40
(3
)
x1
Max f(12,12)
Требуемая величина суточных накладных расходов:
5*12+5*12 = 120руб
Так, снижение суточных расходов
120 — 200 = -80р
Доход составит = 12*60 + 12*50 = 1320 р
Прирост дохода = 0 р


Изменение спроса на брюки
x
40
(4
)
B
21
C(12,12)
D
A
0
12
18
(2
)
(1
28
(3
40
x1

Результаты проведенного исследования можно свести в таблицу:

Ресурсы	Тип ресурсов	Максимальное изменение запаса ресурсов	Максимально изменение дохода от реализации, р.
1	Дефицитный	60 — 42 = 18 м.	1500 — 1320 = 180 р.
2	Дефицитный	69 — 60 = 9 чел/ час	1455 — 1320 = 15 р.
3	Избыточный	120 — 200 = -80 руб.	1320 — 1320 = 0 р.
4	Недефицитный	12 -18 = - 6 шт	1320 -1320 = 0р

Таким образом, запас ресурса 1 (ткань) можно увеличить на 18 м., что привдет к ростоу дохода на 180р. Запас ресурса 2 (трудоемкость) можно увеличить на 9 чел/час, что приведет к росту дохода 15р. Запас Ресурса 3 (накладные расходы) можно умешьшить на 80 руб без ущерба для производства. Если спрос на брюки снизится на 6шт в сутки — это также не принесет никакого ущерба производству.

Пусть ценность дополнительной единицы ресурса i — y_i . Тогда величина y_i определяется из соотношения:

y_i = максимальное приращение оптимальногно значения дохода F / Максимально допустимый прирост ресурса I

Так, *ценность первого ресурса* = $y_1 = \dfrac{180\ руб}{18\ м}$ *= 10 руб/м*

Ценность второго ресурса $\boldsymbol{y_2 = \dfrac{135\ руб}{9\ ч/ч}}$ ***= 15*** *руб/чел-час*

Таким образом, целессобразно увелизичать запас второго ресурса, так.как его увеличение на 1 единицу приводит к росту дохода на 15 руб.

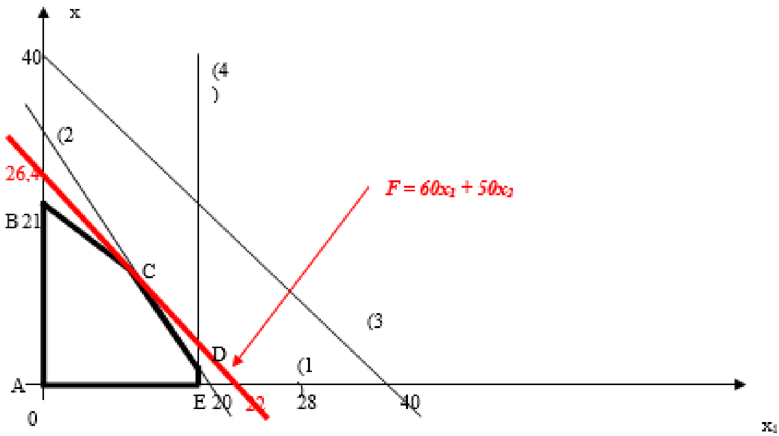
Определим, В каких пределах допустимо изменение цен на 1 изделия, чтобы производственная программа осталась прежней?

Построим график нашей целевой функции:

$F = 60x_1 + 50x_2$

Так, графиком целевой функции является прямая, проходящая через оптимальную точку C(12,12).

Прямая пересекает ось ординат в точке (0;26,4),
ось абсцисс в точке (22;0)



При изменении C_1 и C_2 график целевой функции вращается вокруг точки C:

Если C_1 увеличивается или C_2 уменьшается, прямая вращается по часовой стрелке

Если C_1 уменьшается или C_2 увеличивается, прямая вращается против часовой стрелки

Вычислим границы интервалов возможных колебаний C_1 и C_2, при которых C останется оптимальной.

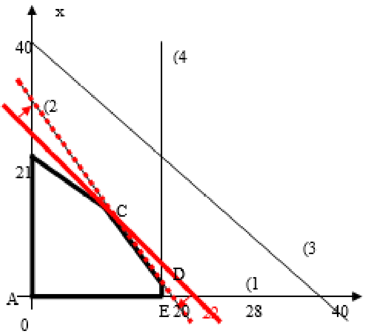
Зафиксируем C_2 = 50, тогда целевая функция:

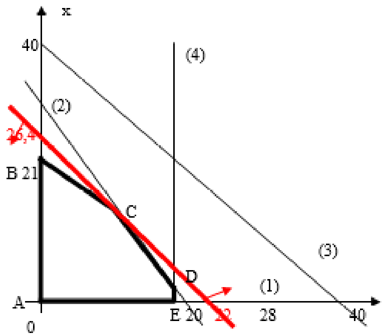
$C_1x_1 + 50x_2 = F$, $x2 = \frac{F}{50} - \frac{C1}{50} * x_1$, где $\frac{C1}{50}$ тангенс угла наклона прямой (1)

Точка C будет оставаться оптимальной до тех пор, пока наклон прямой не выйдет за пределы, определяемые наклонами прямых ограничений (1) и (2)

Тангенс угла наклона для прямой (1) равен $\frac{3}{4}$,

для прямой (2) равен $\frac{3}{2}$





Определим диапазон колебаний c_1:

$$\frac{C1}{50} = \frac{3}{4}$$, тогда $c_1 = 37{,}5$

$$\frac{C1}{50} = \frac{3}{2}$$, тогда $c_1 = 75$

Таким образом интервал изменения c_1,в котором точка с — единственная оптимальная, определяется неравенством $37{,}5 \le c_1 \le 75$

Зафиксируем $c_1 = 60$, тогда целевая функция:

$F = 60x_1 + c_2x_2$

$$x_2 = \frac{F}{C2} - \frac{60}{c2} \cdot x_1$$

$$\frac{60}{c2} = \frac{3}{2}$$, $c_1 = 40$

$$\frac{60}{c2} = \frac{3}{4}$$, $c_2 = 80$

Таким образом интервал изменения c_2,в котором точка с — единственная оптимальная, определяется неравенством $40 \le c_2 \le 80$

Как только $c_1 = 37{,}5$долл., ресурс (2) становится недефицитным. т. е., если доход от продажи одних брюк станет меньше 37,5 долл., надо пересматривать суточную производственную программу. Теперь $x_1 = 21$, $x_2 = 0$

Когда значение C_1 превысит 75 долл., суточная производственная программа будет предусматривать 18 брюк и 3 юбок (оптимальный план — точка D)

Пример №2 практического задания№1

Три поставщика поставляют продукцию в три магазина. Издержки транспортировки продукции с торговых складов в магазины, наличие продукции на складах и потребности магазинов приведены в следующей таблице:

Поставщик	Транспорт. издержки для магазинов, у.е. за единицу			Общий объем предложения
	A	B	C	
P	10	20	5	9
Q	2	10	8	4
R	1	20	7	8
Общий объем спроса	**3**	**5**	**6**	

1. Требуется найти распределение перевозок, позволяющее свести к минимуму общие транспортные издержки методом Фогеля.

2. Расситайте транспортные издержки для каждого распределения. Какое распределение наиболее эффективно?

Решение:

Составим сбалансированную транспортную таблицу:

Поставщик	Транспорт. издержки для магазинов, у.е. за единицу				Общий объем предложения
	A	B	C	Фиктивный	
P	10	20	5	0	9
Q	2	10	8	0	4
R	1	20	7	0	8
Общий объем спроса	**3**	**5**	**6**	7	**21**

Начальное распределение перевозок, полученное методом

Фогеля

Проверка на оптимальность

Проверка начального распределения перевозок на оптимальность — **Метод МОДИ или Метод потенциалов**

Теневые цены для каждой пустой (небазисной) клетки можно найти из соотношения:

$S_{ij} = c_{ij}$ — $(u_i + v_j)$

Где ui — компонента, соответствующая строке,

v_j — компонента, соответствующая столбцу

i, j — номер строки и столбца

Если все теневые цены положительны или равны нулю ($S_{ij} \geq 0$), то решение оптимально

$C_{13} = 5 = u_1 + v_3$ для заполненной клетки (P, C)

$C_{14} = 0 = u_1 + v_4$ для заполненной клетки (P, фиктивный)

$C_{33} = 7 = u_3 + v_3$ для заполненной клетки (R,C)

$C_{31} = 1 = u_3 + v_1$ для заполненной клетки (R,A)

$C_{32} = 20 = u_3 + v_2$ для заполненной клетки (R,B)

$C_{22} = 10 = u_2 + v_2$ для заполненной клетки (Q,B)

Пусть $u_1 = 0$. Следовательно $v_3 = 5$, $v_4 = 0$, $u_3 = 2$, $v_1 = -1$, $v_2 = 18$, $u_2 = -8$

Подставим полученные значения в S ij = c ij — (ui + v j) и получим теневые цены:

$S_{11} = 10 — (0 + (-1)) = +11$ для пустой клетки (P, A)

$S_{12} = 20 — (0 + 18) = +2$ для пустой клетки (P, B)

$S_{21} = 2 - (-8 — 1) = +11$ для пустой клетки (Q A)

$S_{23} = 8 - (-8 + 5) = +11$ для пустой клетки (Q, C)

$S_{24} = 0 - (-8 + 0) = +8$ для пустой клетки (Q, фиктивный)

$S_{34} = 0 — (2 + 0) = -2$ для пустой клетки (R, фиктивный)

Полученные значения заносятся в транспортную таблицу:

Применение метода МОДИ для проверки на оптимальность начального распределения перевозок

Торговый склад	Розничный магазин				Общее предложение
	A	B	C	Фиктивный	
P	+11 (10)	+2 (20)	2 (5)	7 (0)	9
Q	+11 (2)	4 (10)	+11 (8)	+8 (0)	4
R	3 (1)	1 (20)	4 (7)	-2 (0)	8
Общая потребность	3	5	6	7	21

Этап 3.Поиск оптимального решения

Ступенчатый цикл для (R, фиктивный)

	C	Фиктивный
P	+ 2 (5)	- 7 (0)
R	- 4 (7)	+ -2 (0)

Перераспределение перевозок

Торговый склад	Розничный магазин				Общее предложение
	A	B	C	Фиктивный	
P	- (10)	- (20)	2+4 (5)	7-4 (0)	9
Q	- (2)	4 (10)	- (8)	- (0)	4
R	3 (1)	1 (20)	4-4 (7)	0+4 (0)	8
Общая потребность	3	5	6	7	21

Проверим данное решение на оптимальность методом МОДИ:

$C_{13} = 5 = u_1 + v_3$ *положим* $u_1 = 0$, *тогда* $v_3 = 5$

$C_{14} = 0 = u_1 + v_4$ $v_4 = 0$

$C_{34} = 0 = u_3 + v_4$ $u_3 = 0$

$C_{31} = 1 = u_3 + v_1$ $v_1 = 1$

$C_{32} = 20 = u_3 + v_2$ $v_2 = 20$

$C_{22} = 10 = u_2 + v_2$ $u_2 = -10$

Так, теневые цены соответствующие пустым клеткам будут равны:

$S_{11} = 10 — (0 + 1) = +9$

$S_{12} = 20 — (0 + 20) = 0$

$S_{21} = 2 - (- 10 + 1) = + 11$

$S_{23} = 8 - (- 10 + 5) = + 13$

$S_{24} = 0 - (- 10 + 0) = + 10$

$S_{34} = 7 — (0 + 5) = + 2$

т. к. ни одно из значений теневых цен не отрицательно, полученное решение является оптимальным

Минимальная стоимость равна:

$101 + (4·(-2)) = 93$

Пример №1 Практического задания №2

Решить задачу нелинейного программирования графическим методом, если целевая функция $f = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max (\min)$

а ограничения ресурсов выражены системой неравенств:

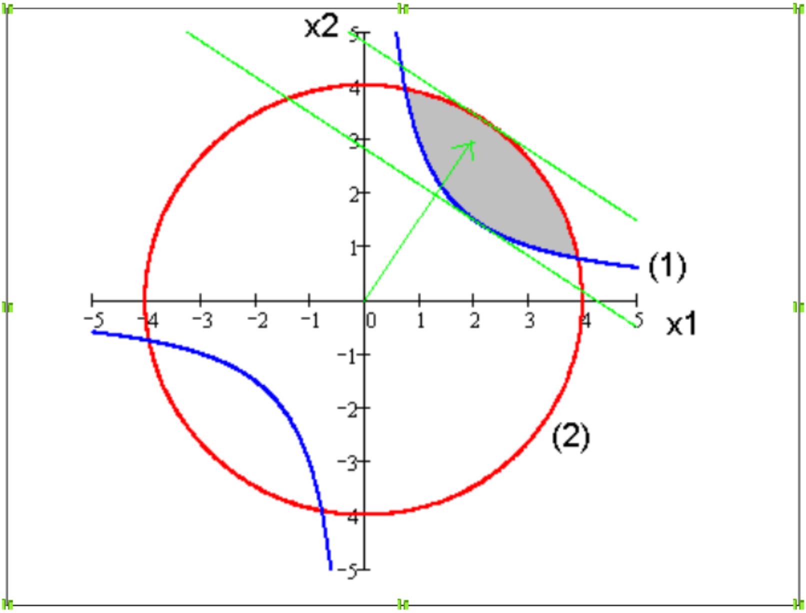
$x_1^2 + x_2^2 \le 16$

$x_1 \cdot x_2 \ge 3$

$x_1, x_2 \ge 0$

Решение:

Постороим на плоскисти x_1Ox_2 область допустимых решений



Ограничения $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ выделяют на плоскости x_1Ox_2 первую четверть. Границей полуплоскости, соответствующей первому ограничению является гипербола $x_2 = 3/x_1$. Неравенство выполняется для точек, лежащих выше гиперболы. Границей полуплоскости, определяемой вторым ограничением, является окружность с центром в точке (0;0) и радиусом, равным 4.

Функция возрастает в направлении вектора-нормали n с координатами (2;3), и ее линии уровня расположены перпендикулярно вектору нормали n. Таким образом, максимум достигается в точке A, а минимум в точке B.

Заметим, что в точке A совпадают тангенсы углов наклона касательной к окружности

$x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} = 16$ и прямой $2x_1 + 3x_2 = C_1$ к оси Ox_1. Тангенсы углов наклона касательной и прямой к оси Ox_1 определяются значениями производных по x_1 соответствующих функций.

Для прямой $x_2 = - 2/3\ x_1 + C_1/3$ тангенс угла наклона равен (-2/3). Продифференцируем выражение $x_1^2 + x_2^2 = 16$ как неявную функцию от x_1. В итоге вычислим

$$2x_1 + 2x_2 \cdot x'_2 = 0, \qquad x'_2 = - x_1/x_2$$

Приравниваем значения тангенсов, откуда получаем

$-x_1 / x_2 = -2/3, \quad 3x_1 - 2x_2 = 0.$

К этому уравнению добавим уравнение окружности, которой принадлежит точка А. Получаем систему уравнений:

$3x_1 — 2x_2 = 0;$
$x_1^2 + x_2^2 = 16.$

Решив сиситему уравнений, найдем оптимальное решение:

$x_1 = 12 / \sqrt{3}, \quad x_2 = 12 / \sqrt{13}, \; f_{max} = 52/ \sqrt{3}$

Аналогично определим координату точки В, в которой тангенс угла наклона к оси Ox_1 прямой $2x_1 + 3x_2 = C_2$ совпадает с тангенсом угла наклона касательной к функции $x1 \cdot x2 = 3$.

Получаем уравнение

$-3/x_1^2 = -2/3$

Вторым соотношением для нахождения координат точки является уравнение гиперболы, которой принадлежит точка В:

$-3/x_1^2 = -2/3$
$x1 \cdot x2 = 3.$

Из последней системы уравнений найдем оптимальное решение, соответствующее минимальному значению f,

$x1 = 3 / \sqrt{2}, \quad x_2 = \sqrt{2}, \; f_{min} = 12/ \sqrt{2}$

Пример №2 Практического задания №2

Фирма реализует автомобили двумя способами: через магазин и через торговых агентов. При реализации x_1 автомобилей через магазин расходы на реализацию составляют $4x_1 + x_1^2$, а при продаже x_2 автомобилей через торговых агентов расходы составляют x_2^2 у.е. Найти оптимальный способ реализации автомобилей, минимизирующий суммарные расходы, используя метод Лагранжа, если общее число предназначенных для продажи автомобилей составляет 200 штук.

Решение:

Составим математическую модель задачи.

Целью является минимизация суммарных расходов $R = 4x_1 + x_1^2 + x_2^2$.

Управляющие переменные — это число автомобилей, реализуемых первым и вторым способом: x_1 и x_2, соответственно (всего 200 штук).

Окончательно математическая модель имеет следующий вид:

$$R = 4x_1 + x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min.$$
$$x_1 + x_2 = 200,$$
$$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0.$$

Для решения заадчи воспользуемся методом множителей Лагранжа.

Функция Лагранжа имеет вид:

$$F\,(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1 + x_1^2 + x_2^2 + \lambda\cdot (200 - x_1 - x_2).$$

Найдем частные производные функции F по переменным x_1, x_2 и λ и приравняем их к нудю. Получим следующую систему уравнений:

$$\delta F / \delta x_1 = 2x_1 + 4 - \lambda = 0;$$
$$\delta F / \delta x_2 = 2x_2 - \lambda = 0;$$
$$\delta F / \delta \lambda = 200 - x_1 - x_2 = 0;$$

Решая систему уравнений, найдем

$x_1 = 99$, $x_2 = 101$, $\lambda = 202$, $f\,(x_1, x_2\,) = 20\ 398$.

Пример №1 Практического задания №3

Предприятие пользуется дисконтными скидками для оптовых покупателей. Дисконтное расписание представлено в таблице 1

Номер дисконта	Дисконтируемое количество	Дисконт, %	Дисконтная цена, P, $
1	От 0 до 999	0	5
2	1 000 — 1 999	4	4,8
3	2 000 и выше	5	4,75

Затраты заказа (S) составляют $ 49 на заказ;
годовой спрос (D) равен 5000 ед. товара,
текущие затраты запаса изменяются в проценте от стоимости I, который равен 20 % от цены

Решение:

Определим, какое заказываемое количество минимизирует общие затраты запаса.

1. Для каждого значения дисконта рассчитываем величину Q*, используя следующее уравнение Q* = sqr (2 · D · S / I · P).

Здесь затраты хранения (H = I·P) выражены в виде процента I от цены единицы продукта P вместо того, чтобы рассматривать их как постоянную величину, приходящуюся на единицу продукта в год H.

Q1* = sqr (2·5000·49/0.2·5.0) = 700 ед.
Q2* = sqr (2·5000·49/0.2·4.8) = 714 ед.
Q3* = sqr (2·5000·49/0.2·4.75) = 718 ед.

2. Произведем расчет для всех заказываемых количеств, используя уравнения общих затрат. Результат представлен в таблицу 2:

Номер дисконта	Цена единицы, $	Заказываемое количество, шт	Годовые затраты на товар, $	Годовые затраты на заказ, $	Годовые затраты хранения $	Общие затраты, $
1	5.00	700	25000	350	350	25 700
2	4.80	1000	24000	245	480	24 725
3	4.75	2000	23750	122.5	950	24 822.5

3. Отберем то Q *, которое соответствует самым низким общим затратам. Согласно данным таблицы 2, это заказ, равный 1000 ед.

Пример №2 Практического задания №3

На строительном участке установлена система заказа бетона с фиксированным интервалом времени 10 дней. За этот период расходуется 12 куб.м. бетона. Бетон расходуют ежедневно одинаковыми партиями. Время поставки составляет 2 дня. Страховой запас принято держать 20% от среднего расхода. На строительном участке на момент текущего заказа осталось 4 куб.м. бетона. Объем бетона, который уже заказан и поступит на склад в течение 2х дней — 3 куб.м. Нужно ли заказать бетон и какое количество?

Решение:

1. Определим требуемый запас материала, который равен:

Требуемый запас (ТЗ) = Количество, расходуемое за период контроля + Количество, расходуемое за период поставки + Страховой запас.

Количество, расходуемое за период поставки (ТЗ $_{пос}$) = Количество, расходуемое за период контроля : количество дней контроля · Количество дней поставки

Страховой запас (СЗ) = Количество, расходуемое за период контроля ·% страхового запаса : 100%

ТЗ $_{пос}$ = 12 куб.м. : 10 · 2дня = 2,4 куб.м. - количество, расходуемое за период поставки;

СЗ = 12 куб.м. · 20% : 100% = 2,4 куб.м. - страховой запас

ТЗ = 12 куб.м. + 2,4 куб.м. + 2,4 куб.м. = 16,8 куб.м. - требуемый запас

2. Сравним текущий остаток бетона с требуемым запасом:

4 куб.м. - остаток, 16,8 куб.м. - требуемый запас

3. Сделаем вывод о необходимости заказа запаса бетона и рассчитаем размер заказа:

РЗ = ТЗ — (НЗ + ОП), где

РЗ - размер заказа;
ТЗ - требуемый запас;
НЗ - наличный запас;
ОП - ожидаемое пополнение.

РЗ = 16,8 куб.м. - (4 куб.м. + 3 куб.м.) = 9,8 куб.м. - необходимо заказать бетона на строительный участок.

Пример №3 Практического задания №3

На вход трехканальной СМО с отказами поступает поток заявок с интенсивностью λ = 4 заявки в минуту. Время обслуживания заявки одним каналом $t_{обсл}$ = - 0,5 минут. Найти показатели работы системы.

Решение.

Находим вероятность простоя трехканальной СМО:

$$\frac{\lambda}{\mu} \qquad \frac{4}{2} = 2 \qquad R = \qquad =$$

- загрузка системы (среднее число заявок, приходящих за среднее всремя обслуживания одной заявки)

n =3

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}} = 0{,}158$$

Вероятность отказа определяем по формуле:

$$P_{отк} = r^n \cdot \frac{P_0}{n!} = 2^3 \cdot \frac{0{,}158}{3!} = 0{,}21$$

Относительная пропускная способность системы

$$P_{обсл} = 1 - P_{отк} = 1 - r^n \cdot \frac{P_0}{n!} \quad 1 - 0{,}21 = 0{,}79$$

Абсолютная пропускная способность системы (среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени):

A= λ · Pобсл = 4 · 0,79 = 3,16

Среднее число занятых каналов:

$$K = \frac{A}{\mu} = r \cdot P_{обсл}$$

Доля каналов, занятых обслуживанием:

$$q = \frac{k}{n} = \frac{1{,}58}{3} \; 0{,}53$$

Среднее время пребывания заявки в СМО:
$t_{СМО}$ = 0,79 · 0,5 = 0,395мин

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Интеллектуальное управление в условиях неопределенности. Учебное пособие / Никифоров В.О., Слита О.В,, Ушаков А.В. - С-птб, 2011.
2. Математические методы и модели в экономике. Учебное пособие / Надеждин Е.Н., Смирнова Е.Е., Варзаков В.С. - Тула, 2011.
3. Математические модели в экономике. Учебное пособие / Печерских И.А., Семенов А.Г. - Кемерово, 2011.
4. Математические модели. Учебное пособие / Розен В.В., Бессонов Л.В. - М., 2008.
5. Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. - М., 2005.