ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Экономика и менеджмент»

Практикум

по решению задач теории игр в чистых и смешанных стратегиях
по дисциплине

«Исследование операций в экономике»

Авторы
Малхасян А.Е.,
Федосеева Л.В.

Ростов-на-Дону, 2022

Аннотация

Методические указания предназначены для студентов очной формы обучения направления 38.03.01. "Экономика".

Авторы

к.э.н. доцент Малхасян А.Е.,
старший преподаватель Федосеева Л.В.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания состоят из примеров решения задач по теме теории игр в чистых и смешанных стратегиях.

Предназначены для бакалавров дневной формы обучения по направлениям 38.03.01 "Экономика".

Целью методических указаний является формирование у студентов практических навыков для решения прикладных экономических задач и принятия управленческих решений средствами количественного анализа и экономико-математического моделирования.

Задачи методических указаний:

- ознакомление с особенностями решения задач теории игр по дисциплине «Исследование операций в экономике»;
- ознакомление с экономической интерпретацией задач чистой и смешанной стратегии теории игр.

1. РЕШЕНИЕ МАТРИЧНОЙ ИГРЫ В ЧИСТЫХ СТРАТЕГИЯХ

1.1. Основные определения

Рассмотрим простейшую математическую модель конечной конфликтной ситуации, в которой имеется два участника и выигрыш одного равен проигрышу другого. Такая модель называется ***антагонистической игрой*** двух лиц с нулевой суммой.

Игра состоит из двух ходов: игрок ***A*** выбирает одну из возможных стратегий $A_i,\ i=\overline{1,m}$ (либо A_1, либо A_2 и т.д., вплоть до A_m), а игрок ***B*** выбирает одну из возможных стратегий $B_j,\ j=\overline{1,n}$ (либо B_1, либо B_2 и т.д., вплоть до B_n). Каждый выбор производится при полном незнании выбора соперника. В результате выигрыш игроков составит соответственно матрицу: a_{ij} и $-a_{ij}$. Цель игрока ***A*** - максимизировать величину a_{ij}, а игрока ***B*** - минимизировать эту величину.

Определение 1. Матрица, составленная из величин $a_{ij}\ i=\overline{1,m}\quad j=\overline{1,n}$ *называется платежной матрицей, или матрицей игры.*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Каждый элемент платежной матрицы $a_{ij}\ i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ равен выигрышу ***A*** (проигрышу ***B***), если он выбрал какую-то конкретную стратегию A_i, $i=\overline{1,m}$, а игрок ***B*** выбирал какую-то конкретную стратегию B_j, $j=\overline{1,n}$.

1.2. Пример решения задач

В игре участвуют первый и второй игроки, каждый из них может записать независимо от другого цифры ***1***, ***2*** и ***3***. Если разность между цифрами, записанная игроками, положительна, то первый игрок выигрывает количество очков, равное разности между цифрами, и, наоборот, если разность отрицательна, то выигрывает второй игрок. Если разность равна нулю, то игра заканчивается вничью.

У первого игрока три стратегии (варианта действия): A_1 (записать ***1***), A_2 (записать ***2***), A_3 (записать ***3***); у второго игрока также три стратегии: B_1 , B_2 , B_3 (см. табл.1).

Таблица 1

	B_1 = ***1***	B_2 = ***2***	B_3 = ***3***
A_1 = ***1***	0	-1	-2
A_2 = ***2***	1	0	-1
A_3 = ***3***	2	1	0

Задача первого игрока - максимизировать свой выигрыш. Задача второго игрока - минимизировать свой проигрыш или минимизировать выигрыш первого игрока. Платежная матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь матрица *A*, а её элементы - a_{ij} ($a_{11} = 0$, $a_{12} = -1$, $a_{13} = -2$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 0$, $a_{23} = -1$, $a_{31} = 2$, $a_{32} = 1$, $a_{33} = 0$).

Задача каждого из игроков - найти наилучшую стратегию игры, при этом предполагается, что противники одинаково разумны и каждый из них делает все, чтобы получить наибольший доход.

Найдем наилучшую стратегию первого игрока. Если игрок ***A*** выбрал какую-то стратегию A_i , $i = \overline{1,m}$ (либо A_1, либо A_2 либо A_3), то в худшем случае (например, если его ход известен ***B***) он получит выигрыш $\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$ (т.е. минимальное значение a_{ij} при каком-то конкретном значении *i*, когда *j* пробегает все свои значения; а именно:

$$\alpha_1 = \min_j a_{1j} = min(0,-1,-2) = -2,$$

$$\alpha_2 = \min_j a_{2j} = min(1,0,-1) = -1,$$

$$\alpha_3 = \min_j a_{3j} = min(2,1,0) = 0).$$

Предвидя такую возможность, игрок ***A*** должен выбрать такую стратегию, чтобы максимизировать свой минимальный выигрыш, т.е. из возможных вариантов 0, -1, -2 получить 0.

$$a = \max_i \alpha_i = \max_i \left(\min_j a_{ij} \right) = \max_i \min_j a_{ij} \quad (1)$$

*Определение 2. Величина а - гарантированный выигрыш игрока **А** называется нижней ценой игры. Стратегия $A_{i\ опт}$, обеспечивающая получение выигрыша а, называется максиминной.*

Если первый игрок будет придерживаться своей максиминной стратегии, то у него есть гарантия, что он в любом случае выиграет не меньше *а*.

Аналогично определяется наилучшая стратегия второго игрока. Игрок ***В*** при выборе стратегии B_j, $j = \overline{1,n}$, в худшем случае получит проигрыш $b_j = \max_i a_{ij}$. Он выбирает стратегию $B_{j\ опт}$, при которой его проигрыш будет минимальным и составит

$$b = \min_j b_j = \min_j \max_i a_{ij} \quad (2)$$

*Определение 3. Величина b - гарантированный проигрыш ирока **В** называется верхней ценой игры. Стратегия $B_{j\ опт}$, обеспечивающая получение проигрыша b, называется минимаксной.*

Если второй игрок будет придерживаться своей минимаксной стратегии, то у него есть гарантия, что он в любом случае проиграет не больше *b*.

Фактический выигрыш игрока ***А*** (проигрыш игрока ***В***) при разумных действиях партнеров ограничен верхней и нижней ценой игры. Для матричной игры справедливо неравенство ($a \le b$).

Определение 4. Если а = b = v, т.е.

$$\max_i a_i = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j b_j = \min_j \max_i a_{ij}$$

то выигрыш игрока А (проигрыш игрока В) определяется числом v. Оно называется ценой игры.

Определение 5. Если а = b = v, то такая игра называется игрой с седловой точкой, элемент матрицы $a_{i опт\ j опт} = v$, соответствующий паре оптимальных стратегий ($A_{i\ опт}$, $B_{j\ опт}$), называется седловой точкой матрицы. Этот элемент является ценой игры.

Седловой точке соответствуют оптимальные стратегии игроков. Их совокупность - решение игры, которое обладает свойством: если один из игроков придерживается оптимальной стратегии, то второму отклонение от своей оптимальной стратегии не может быть выгодным.

Определение 6. Если игра имеет седловую точку, то говорят, что она решается в чистых стратегиях.

Найдем решение игры рассмотренного выше примера.

$$a = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}$$

Как показано выше:

$$\min_j a_{ij} = -2, -1, 0$$

Следовательно,

$$a = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij} = max\big((-2,-1,0)\big) = 0$$

a =0 – нижняя цена игры.

$$b = \min_j b_j = \min_j \max_i a_{ij} = min(2,1,0) = 0$$

b = 0 – верхняя цена игры.

Так как *a* = *b* = 0, матрица игры имеет седловую точку.

Оптимальная стратегия первого игрока - A_3, второго - B_3. Из таблицы видно, что отклонение первого игрока от оптимальной стратегии уменьшает его выигрыш, а отклонение второго игрока от B_3 увеличивает его проигрыш.

Наличие седловой точки в игре - это далеко не правило, скорее, исключение. Существует разновидность игр, которые всегда имеют седловую точку и, значит, решаются в чистых стратегиях. Это так называемые игры с полной информацией.

Определение 7. Игрой с полной информацией называется такая игра, в которой каждый игрок при каждом личном ходе знает всю предысторию ее развития, т.е. результаты всех предыдущих ходов.

Примерами игр с полной информацией могут служить шашки, шахматы, "крестики-нолики" и т.д.

Теорема 1. Каждая игра с полной информацией имеет седловую точку и, значит, имеет решение в чистых стратегиях. В каждой игре с полной информацией существует пара оптимальных стратегий, дающая устойчивый выигрыш, равный цене игры *v*. Если решение игры известно, сама игра теряет смысл. Например, шахматная игра либо кончается выигрышем белых, либо выигрышем черных, либо ничьей, только чем именно - мы пока не знаем (к счастью для любителей шахмат). Прибавим еще: вряд ли будем знать это в обозримом будущем, так как число стратегий так велико, что крайне трудно привести шахматную игру к матричной форме и найти в ней седловую точку.

2. РЕШЕНИЕ МАТРИЧНОЙ ИГРЫ В СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЯХ

2.1. Основные теоремы и определения

Если платежная матрица не имеет седловой точки, т.е. $a < b$ и $a \le v \le b$, то поиск решения игры приводит к применению сложной стратегии, состоящей в случайном применении двух и более стратегий с определенными частотами.

Определение 1. Сложная стратегия, состоящая в случайном применении всех стратегий с определенными частотами, называется *смешанной.*

В игре, матрица которой имеет размерность $m \times n$, стратегии первого игрока задаются наборами вероятностей $\bar{X} = (x_1, x_2, \ldots x_m)$, с которыми игрок применяет свои чистые стратегии. Эти наборы можно рассмотреть как m-мерные векторы, для координат которых выполняются условия

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \quad i = \overline{1,m}$$

Аналогично для второго игрока наборы вероятностей определяют n-мерные векторы $\bar{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n,)$, для координат которых выполняются условия

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \quad j = \overline{1,n}$$

Выигрыш первого игрока при использовании смешанных стратегий определяют, как математическое ожидание выигрыша, т.е. он равен:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

Теорема 1. (*Неймана. Основная теорема теории игр*) Каждая конечная игра имеет, по крайней мере, одно решение, возможно, в области смешанных стратегий. Применение оптимальной стратегии позволяет получить выигрыш, равный цене игры: $a < v < b$. Применение первым игроком оптимальной стратегии $\bar{X}_{\text{опт}}$ должно обеспечить ему при любых действиях второго игрока выигрыш не меньше цены игры. Поэтому выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{i\text{опт}} \geq v, \quad j = \overline{1,n} \qquad (3)$$

Аналогично для второго игрока оптимальная стратегия $\bar{Y}_{\text{опт}}$ должна обеспечить при любых стратегиях первого игрока проигрыш, не превышающий цену игры, т.е. справедливо соотношение

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_{j\text{опт}} \leq v, \quad i = \overline{1,m} \qquad (4)$$

Если платежная матрица не содержит седловой точки, то задача определения смешанной стратегии тем сложнее, чем больше размерность матрицы. Поэтому матрицы большой размерности целесообразно упростить, уменьшив их размерность путем вычеркивания дублирующих (одинаковых) и не доминирующих стратегий.

Определение 2. Дублирующими называются стратегии, у которых соответствующие элементы платежной матрицы одинаковы.

Определение 3. Если все элементы i-й строки платежной матрицы больше соответствующих элементов k-й строки, то i-я стратегия игрока ***A*** называется *доминирующей над k-й стратегией.* Если все элементы j-го столбца платежной матрицы меньше соответствующих элементов k-го столбца, то j-я стратегия игрока ***B*** называется *доминирующей над k-й стратегией.*

2.2. Пример решения задачи

Рассмотрим игру, представленную платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Для игрока ***A*** имеем. Гарантированный выигрыш этого игрока или нижняя цена игры.

$$a = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij} = max(2,2,3,2) = 3$$

Для игрока ***B*** имеем. Гарантированный проигрыш этого игрока, или верхняя цена игры.

$$b = \min_j b_j = \min_j \max_i a_{ij} = min(7,6,6,4,5) = 4$$

Однако исходную матрицу можно упростить. Мы видим, что все элементы страте- гии A_2 меньше элементов стратегии A_3 , т.е. A_2 заведомо невыгодна для первого игрока и ее можно исключить. Далее, все элементы A_4 меньше A_3, поэтому исключаем и A_4. В итоге получим.

$$A = \begin{pmatrix} 7\,6\,5\,4\,2 \\ 5\,6\,6\,3\,5 \end{pmatrix}$$

Для второго игрока: сравнивая B_1 и B_4 , исключаем B_1 ; сравнивая B_2 и B_4 , исключаем B_2 ; сравнивая B_3 и B_4 , исключаем B_3 . В результате преобразований получим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Для этой матрицы.

$$a = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij} = max(2{,}3) = 3$$

$$b = \min_j b_j = \min_j \max_i a_{ij} = min(4{,}5) = 4$$

Действительно, получили тот же самый результат.

Отсюда: $a < b$, и $3 \le v \le 4$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колесник Г.В. Теория игр: Учебное пособие / Г.В. Колесник. - М.: ЛИБРОКОМ, 2012. - 152 с.

2. Колокольцов В.Н. Математическое моделирование многоагентных систем конкуренции и кооперации (Теория игр для всех): Учебное пособие / В.Н. Колокольцов, О.А. Малафеев. - СПб.: Лань, 2012. - 624 с.

3. Краснов М.Л. Вся высшая математика. Т. 5. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теория игр: Учебник / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко и др. - М.: ЛКИ, 2013. - 296 с.

4. Невежин В.П. Теория игр. Примеры и задачи: Учебное пособие / В.П. Невежин. - М.: Форум, 2012. - 128 с.

5. Петросян Л.А. Теория игр: Учебник / Л.А. Петросян, Н.А. Зенкевич, Е.В. Шевкопляс. - СПб.: БХВ-Петербург, 2012. - 432 с.

6. Ященко Н.А. Теория игр в экономике (практикум с решениями задач): Учебное пособие / Л.Г. Лабскер Н.А. Ященко; Под ред. Л.Г. Лабскер. - М.: КноРус, 2013. - 264 с.

7. Нейлбафф Диксит: Теория игр. Искусство стратегического мышления в бизнесе и жизни. Издательство: Манн, Иванов и Фербер, 2015 г. ISBN: 978- 5-00057-311-2. 464 стр.